

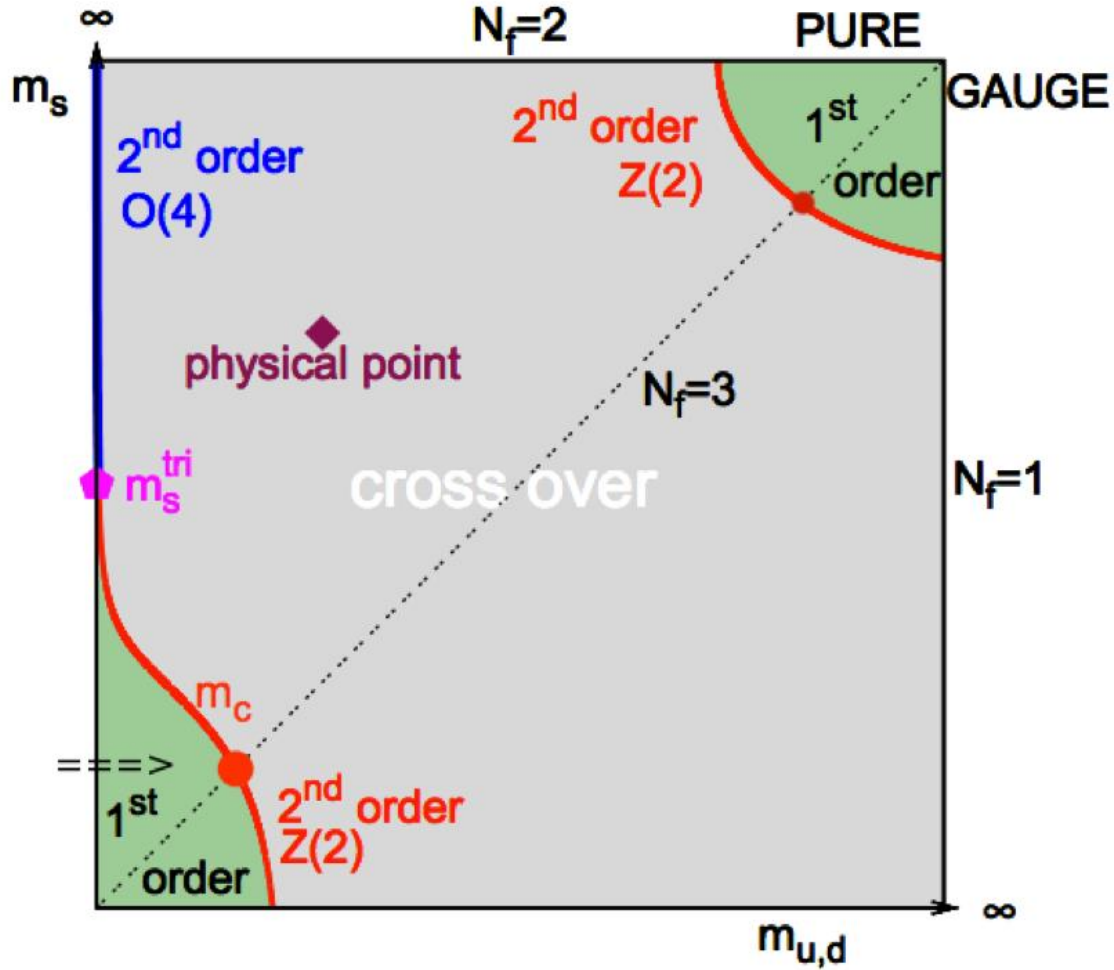
# ホッピングパラメタ展開の 高次項と収束性

北沢正清、江尻信司、金谷和至

※次講演との連続講演

Wakabayashi, Ejiri, Kanaya, MK, PTEP **2022**, 033B05 (2022) [arXiv:2112.06340 [hep-lat]]

# コロンビア図



- 有限温度QCD相転移の次数はクォーク質量に依存
- 軽クォーク・重クォーク領域双方に一次相転移・臨界点

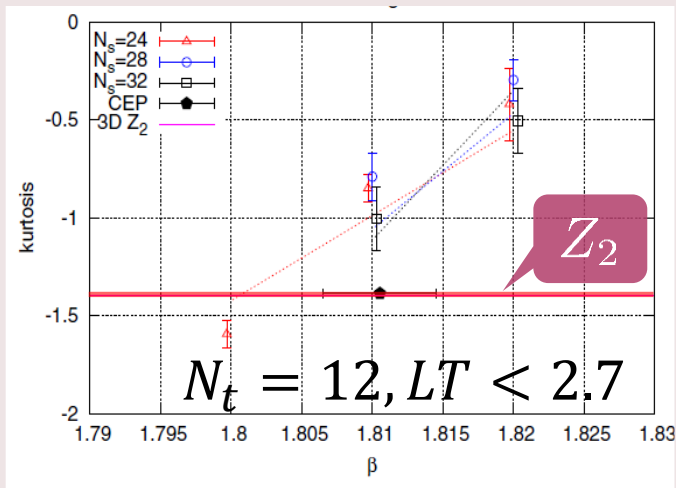


## 課題

- 臨界点の位置
- $Z_2$  スケーリングの確認
- 連続極限

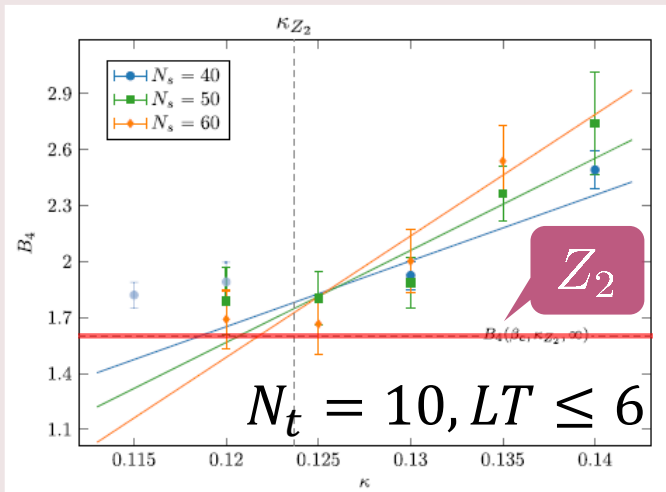
# 臨界点のビンダーキュムラント解析

## 軽クォーク臨界点



Kuramashi+, '20

## 重クォーク臨界点

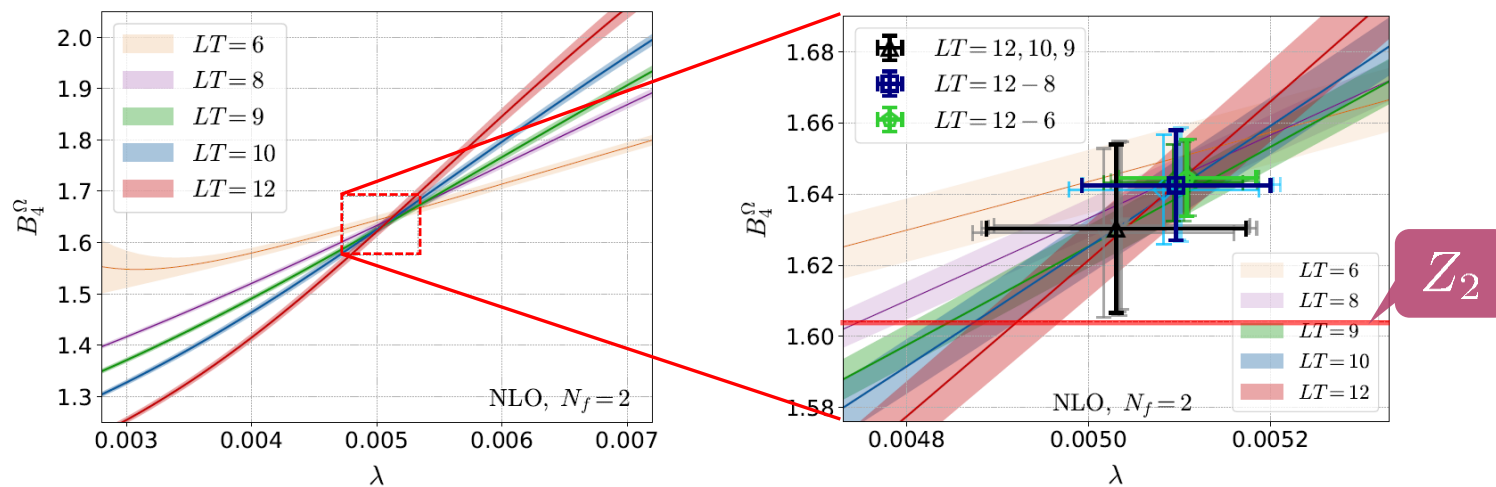


Cuteri+, '21

## 重クォーク臨界点

Kiyohara, MK, Ejiri, Kanaya, '21

- $N_t = 4$
- 大体積  $LT = N_x/N_t = 12$  まで
- ホッピングパラメータ展開(HPE)のNLO解析
- 大体積での  $Z_2$  有限サイズスケーリングの確認



- 大体積・高統計解析の必要性
- HPEはより細かい格子上でも適用可能？
  - 本講演：自由フェルミオン系での収束性
  - 次講演：ゲージ配位上での解析・HPEの改良

# ホッピングパラメータ展開(HPE)

## Wilson フェルミオン行列

$$\begin{aligned} M_{xy}(\kappa) &= \delta_{xy} - \kappa \sum_{\mu} \left[ (1 - \gamma_{\mu}) U_{x,\mu} \delta_{y,x+\hat{\mu}} + (1 + \gamma_{\mu}) U_{y,\mu}^{\dagger} \delta_{y,x-\hat{\mu}} \right] \\ &= \delta_{xy} - \kappa B_{xy} \end{aligned}$$

## ホッピングパラメータ

$$\kappa = \frac{1}{2am_q + 8} \xrightarrow{m_q \rightarrow \infty} \frac{1}{am_q}$$

# ホッピングパラメータ展開(HPE)

## Wilsonフェルミオン行列

$$M_{xy}(\kappa) = \delta_{xy} - \kappa \sum_{\mu} \left[ (1 - \gamma_{\mu}) U_{x,\mu} \delta_{y,x+\hat{\mu}} + (1 + \gamma_{\mu}) U_{y,\mu}^{\dagger} \delta_{y,x-\hat{\mu}} \right]$$
$$= \delta_{xy} - \kappa B_{xy}$$

## ホッピングパラメータ

$$\kappa = \frac{1}{2am_q + 8} \xrightarrow{m_q \rightarrow \infty} \frac{1}{am_q}$$

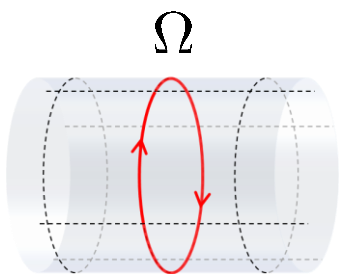
## ホッピングパラメータ展開

$$\ln \det M(\kappa) = -\frac{1}{N_{\text{site}} n} \sum_{n=1}^{\infty} \text{Tr}[B^n] \kappa^n$$

- $\sim 1/am_q$  展開
- HPEの各項は閉じた経路に対応
- HPEの収束性は  $a \rightarrow 0$  で悪化

**LO**

plaquette

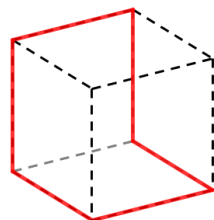


**NLO**

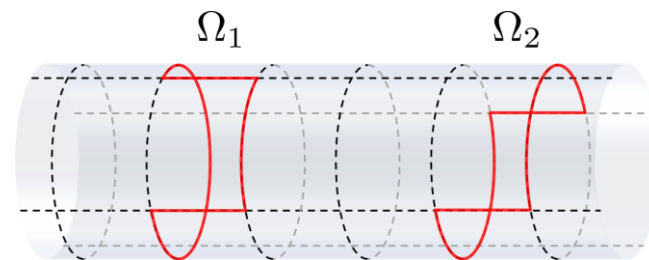
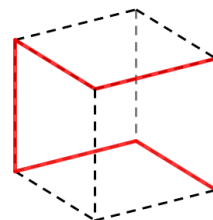
(a) rectangle



(b) chair



(c) crown



※Kiyohara+ : LOで配位生成、NLOを再重み付けで取り込み

# 自由クォーク系のHPE ( $U_\mu = 1$ )

## Wilson フェルミオン行列

$$M_{xy}(\kappa) = \delta_{xy} - \kappa \sum_{\mu} \left[ (1 - \gamma_{\mu}) U_{x,\mu} \delta_{y,x+\hat{\mu}} + (1 + \gamma_{\mu}) U_{y,\mu}^{\dagger} \delta_{y,x-\hat{\mu}} \right]$$

- 最悪の収束性
- 高次項が計算可
- 並進対称性

$$\ln \det M(\kappa) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \kappa^n \quad \begin{aligned} D_n &= \text{Tr}[B^n] \\ B_{xy} &= \sum_{\mu} \left[ (1 - \gamma_{\mu}) \delta_{y,x+\hat{\mu}} + (1 + \gamma_{\mu}) \delta_{y,x-\hat{\mu}} \right] \end{aligned}$$

## 高次展開係数の評価

- $D_n$  は、格子上での  $B$  の多重積演算で計算可

$$D_n = \text{Tr}[B^n] \sim \sum_i {}^t e_i B^n e_i \quad e_i \begin{cases} \text{ノイズ} & \text{一般のゲージ場} \\ = \delta_{i,0} & U_\mu = 1 \end{cases}$$

# 虚時間方向への巻付数による分類

## $n$ 次のHPE係数

$$D_n = W(n) + \sum_m L_m(N_t, n)$$

巻付なし

$m$ 回巻付

## 分類の目的

- Wilson/Polyakov loopの分類
- 有限密度系

# 虚時間方向への巻付数による分類

## $n$ 次のHPE係数

$$D_n = W(n) + \sum_m L_m(N_t, n)$$

巻付なし

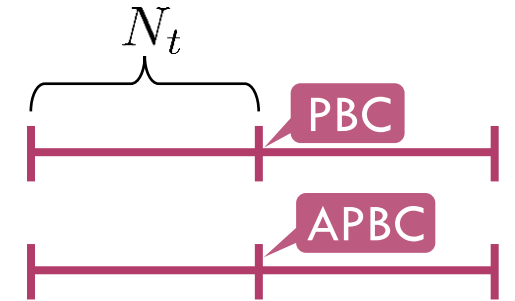
$m$ 回巻付

## Twisted境界条件下の $D_n$

$$\psi(\mathbf{x}, \tau) = e^{i\theta} \psi(\mathbf{x}, \tau + N_t) \quad N_s^3 \times N_t$$

## 分類の目的

- Wilson/Polyakov loopの分類
- 有限密度系



$$\frac{1}{2} (D_{\theta=0}(n) + D_{\theta=\pi}(n)) = W(n) + \sum_m L_{2m}(N_t, n)$$

$$\frac{1}{2} (D_{\theta=0}(n) - D_{\theta=\pi}(n)) = \sum_m L_{2m-1}(N_t, n)$$

$$\frac{1}{4} (D_0 + D_{\pi/2} + D_{\pi} + D_{3\pi/2}) = W(n) + \sum_m L_{4m}(N_t, n)$$

- 様々な境界条件の重ね合わせにより、各展開係数を巻付数に分類可
- 最大巻付数 $M$ のとき、 $M + 1$ 個の境界条件

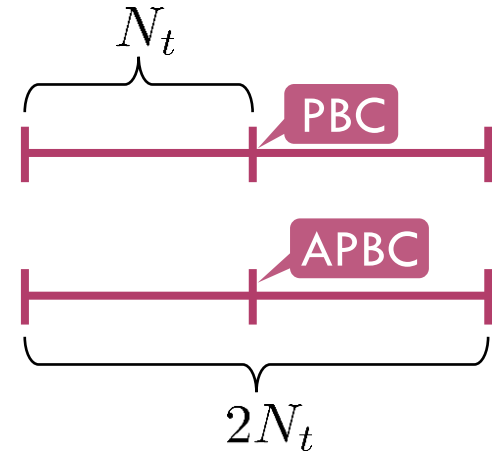
※一般の $U_\mu$ 上では $2M$ 個



# 空間座標の畳み込み

$$\frac{1}{2}(D_{\theta=0}(n) + D_{\theta=\pi}(n)) = W(n) + \sum_m L_{2m}(N_t, n) = D_{\theta=0}^{2N_t}(n)$$

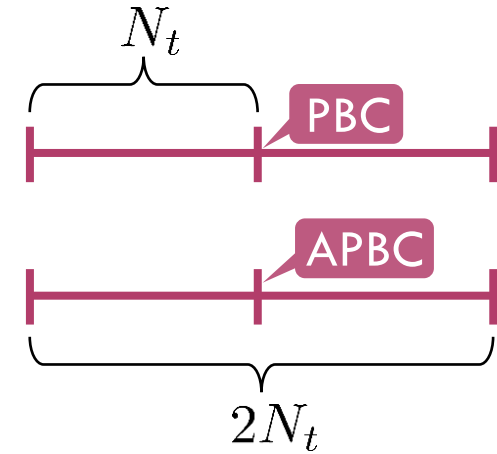
➡ 虚時間方向 $N_t$ の格子上で、 $2N_t$ の展開係数が計算可



# 空間座標の畳み込み

$$\frac{1}{2} (D_{\theta=0}(n) + D_{\theta=\pi}(n)) = W(n) + \sum_m L_{2m}(N_t, n) = D_{\theta=0}^{2N_t}(n)$$

- ➡ 虚時間方向  $N_t$  の格子上で、 $2N_t$  の展開係数が計算可
- ➡  $1^4$  の格子上で  $N_s^3 \times N_t$  のHPE係数を計算可



## HPE展開係数計算式 ( $U_\mu = 1$ )

$$D_{n;N_s^4} = -\frac{N_c}{nN_s^4} \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4=1}^{N_s} \text{tr}_D \left[ b(k_1, k_2, k_3, k_4)^n \right]$$

$$1^4 \text{ の格子上の "hop" 項 : } b(\phi) = \sum_{\mu} \left[ (1 - \gamma_{\mu}) e^{2\pi i \phi / N_s} + (1 + \gamma_{\mu}) e^{-2\pi i \phi / N_s} \right]$$

# 高次展開係数の計算

$$D_{n;N_s^4} = -\frac{N_c}{nN_s^4} \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4=1}^{N_s} \text{tr}_D \left[ b(k_1, k_2, k_3, k_4)^n \right]$$

**1<sup>4</sup>の格子上的"hop"項：**  $b(\phi) = \sum_{\mu} \left[ (1 - \gamma_{\mu}) e^{2\pi i \phi / N_s} + (1 + \gamma_{\mu}) e^{-2\pi i \phi / N_s} \right]$

□  $b$ の固有値を使うと4x4行列の定義も不要  $\text{tr}_D [b(k_1, k_2, k_3, k_4)^n] = \sum_i \lambda_i^n$

□ 巻付数分類も可能

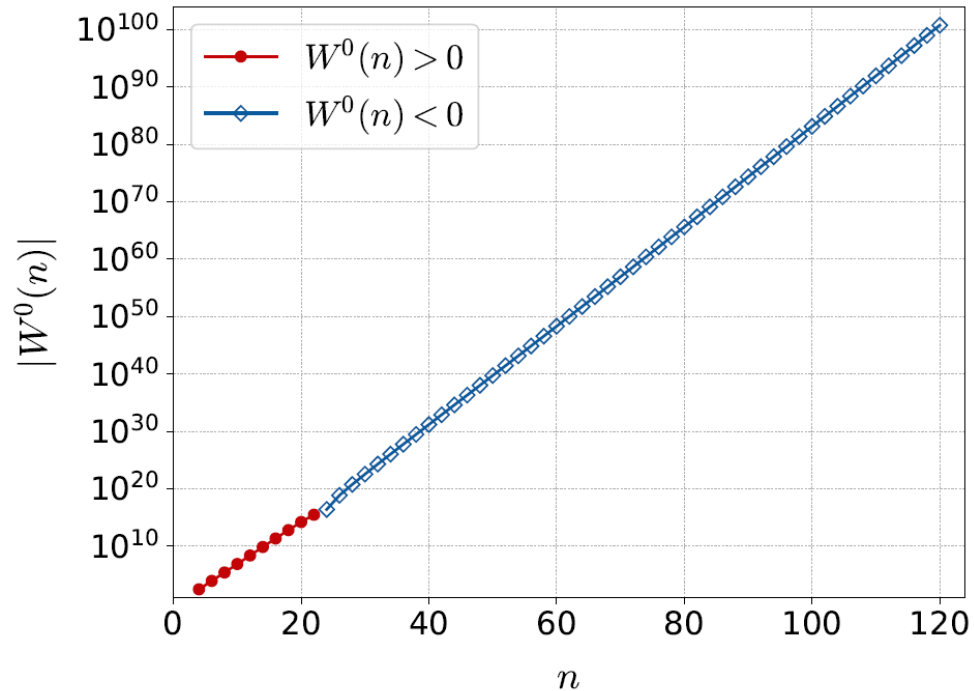
□  $\ln \det M$ の運動量表示をHPEした場合と同じ結果

$$\ln \det M(\kappa) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr}_D \ln \tilde{M}_k(\kappa)$$

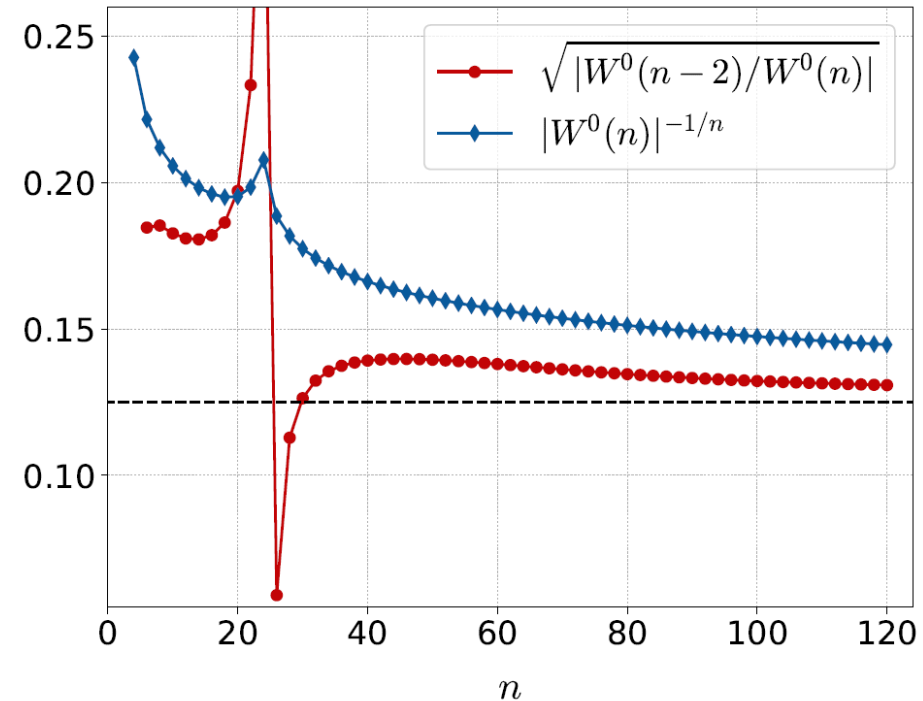
□  $b(\phi)$ の最大固有値 $|\lambda| = 8$   $\Rightarrow$  HPEの収束半径 = 1/8

# W(n) : ウィルソンループ型項

## W(n)の高次項の計算



## 収束半径の評価



## 収束判定の判定

- ダランベールの公式  $r = |W(n-2)/W(n)|^{1/2}$
- コーシー・アダマール公式  $r = W(n)^{-1/n}$

# HPEの収束性

## 重クォーク臨界点の位置( $N_f = 2$ )

$$N_t = 4$$

$$\kappa_c = 0.0602(4) \text{ Kiyohara+, '21 (HPE, NLO, FSS)}$$

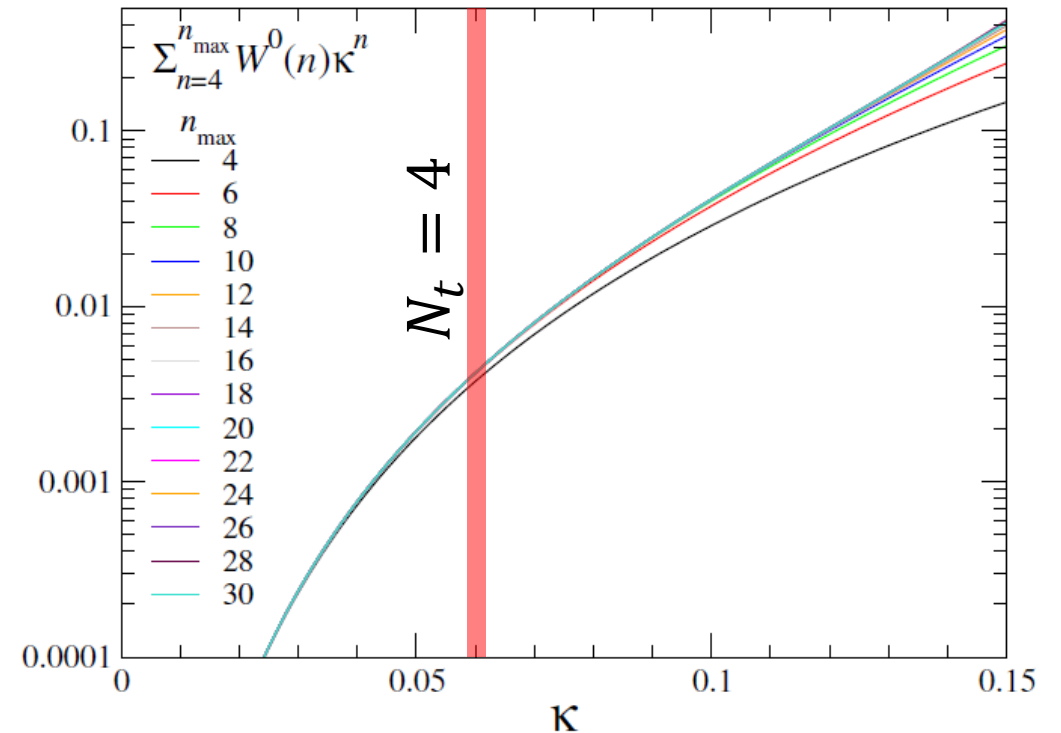
$$N_t = 6$$

$$\kappa_c = 0.0877(9) \text{ Cuteri+, '21 (動的フェルミオン, FSS)}$$

$$\kappa_c = 0.1286(40) \text{ Ejiri+, '20 (HPE, LO, ヒストグラム法)}$$

FSS: 有限サイズスケーリング

$n$ 次までの和  $\ln \det M(\kappa) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \kappa^n$



$N_t = 4$ の $\kappa_c$ 付近ではNLOで高い収束性  $\rightarrow$  Kiyohara+の妥当性の確認

# HPEの収束性

## 重クォーク臨界点の位置

$$N_t = 4$$

$$\kappa_c = 0.0602(4) \text{ Kiyohara+, '21 (HPE, NLO, FSS)}$$

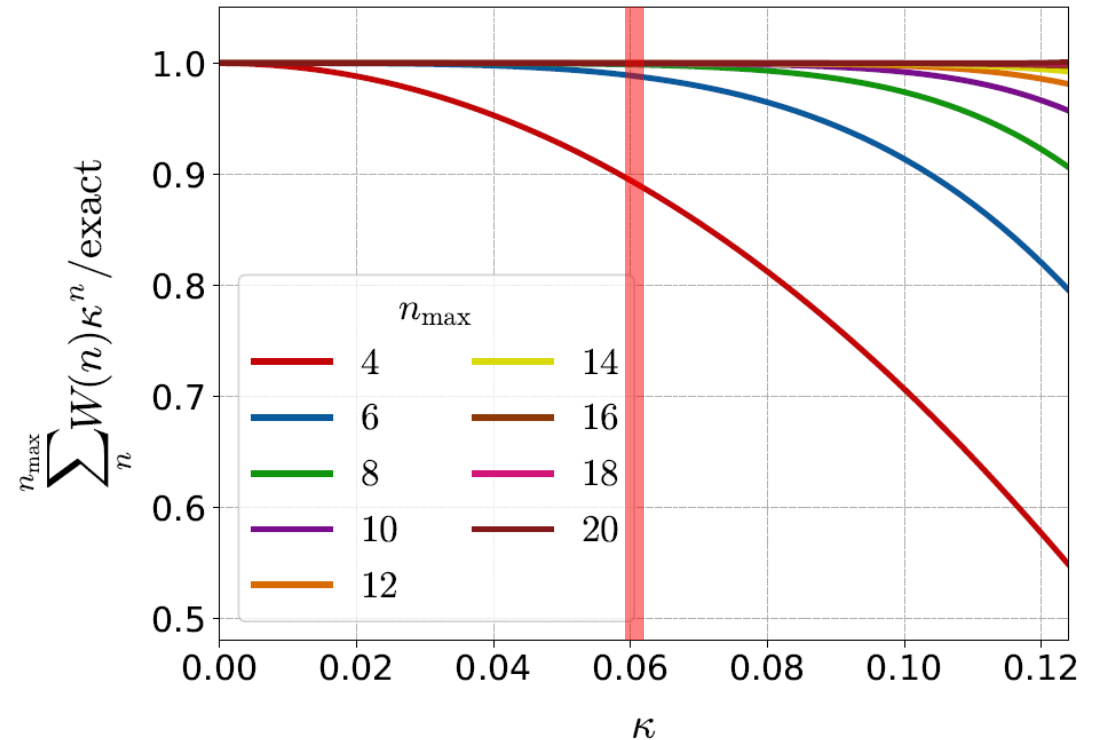
$$N_t = 6$$

$$\kappa_c = 0.0877(9) \text{ Cuteri+, '21 (動的フェルミオン, FSS)}$$

$$\kappa_c = 0.1286(40) \text{ Ejiri+, '20 (HPE, LO, ヒストグラム法)}$$

FSS: 有限サイズスケーリング

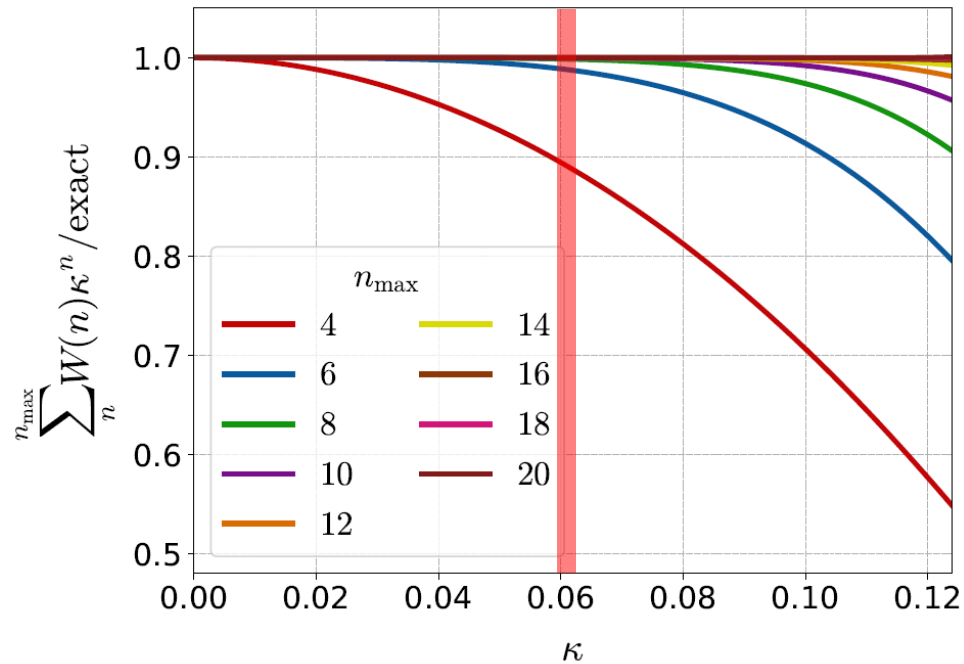
$n$ 次までの和  $\ln \det M(\kappa) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \kappa^n$



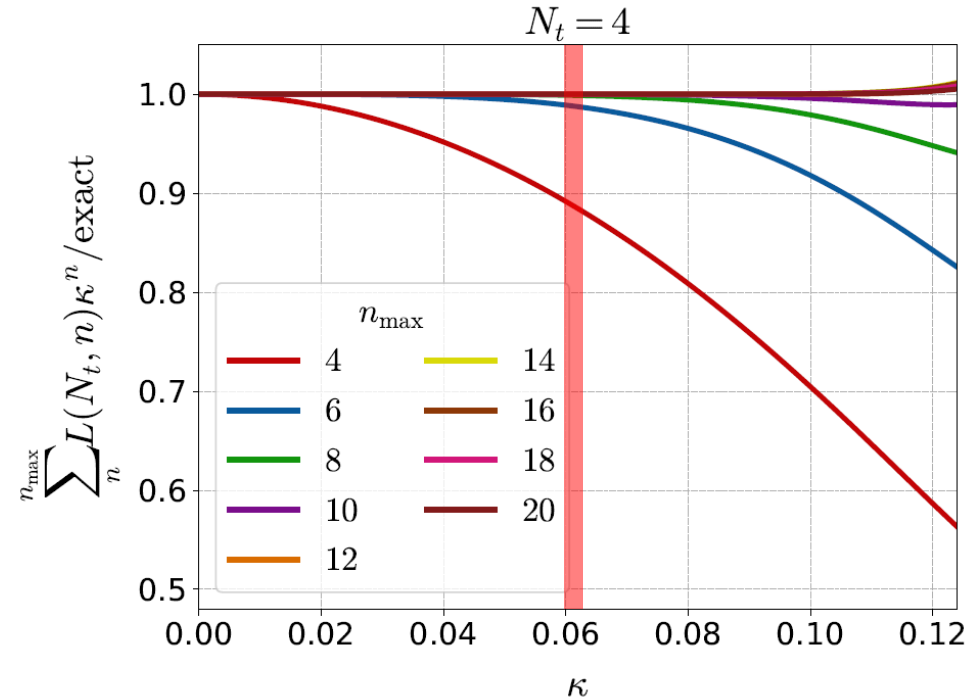
$N_t = 4$ の $\kappa_c$ 付近ではNLOで高い収束性 ➡ Kiyohara+の妥当性の確認

# HPEの収束性@重クォーク臨界点 ( $N_t = 4$ )

## ウィルソン型項 $W(n)$



## ポリヤコフ型項 $L(N_t, n)$



## 重クォーク臨界点

$N_t = 4$   $\kappa_c = 0.0602(4)$  Kiyohara+, '21

$N_t = 6$   $\kappa_c = 0.0877(9)$  Cuteri+, '21 /  $\kappa_c = 0.1286(40)$  Ejiri+, '20

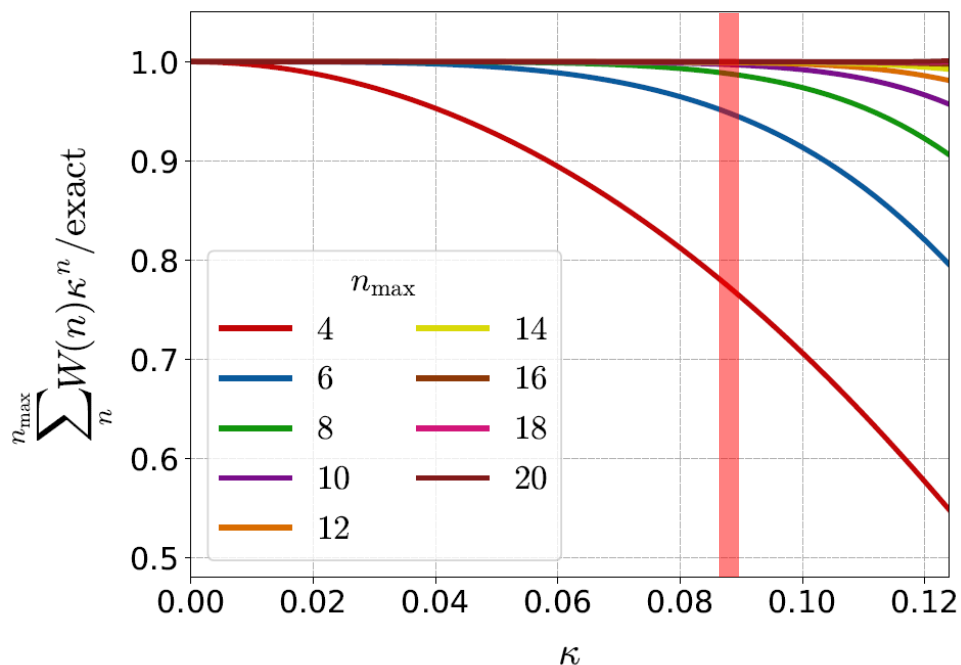
$\kappa_c$  付近でNLOで高い収束性

➡ Kiyohara+の妥当性の確認

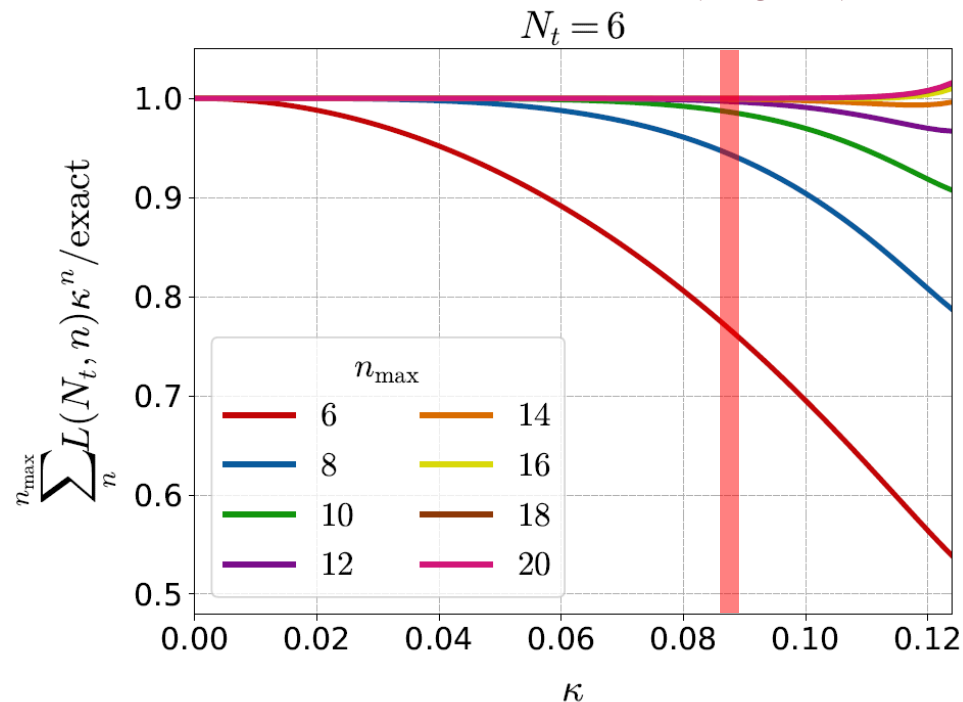
※ $U_\mu = 1$ は最も厳しい収束性の評価

# HPEの収束性@重クォーク臨界点 ( $N_t = 6$ )

## ウィルソン型項 $W(n)$



## ポリヤコフ型項 $L(N_t, n)$



### 重クォーク臨界点

$N_t = 4$   $\kappa_c = 0.0602(4)$  Kiyohara+, '21

$N_t = 6$   $\kappa_c = 0.0877(9)$  Cuteri+, '21 /  $\kappa_c = 0.1286(40)$  Ejiri+, '20

$\kappa_c$  付近でNLOの寄与は約95%

➡ HPEのNLOで解析可能？

※ $U_\mu = 1$ は最も厳しい収束性の評価



# まとめ

- $U_\mu = 1$ でのホッピングパラメータ展開(HPE)係数は、効率的に計算可。
- $\ln \det M$ の展開係数を超高次まで評価。巻付数に分類。収束半径の確認。
- HPEによる重クォーク臨界点の解析可能性の調査
  - $N_t = 4$ ：重クォーク臨界点は、NLO近似が良く成立する領域に存在。
  - $N_t = 6$ ：NLOでの収束性が良いことが期待可。
  - より細かい格子上では要調査。

## 展望

- NLOを超えたHPE高次項の取り込みによる適用範囲の拡張→次講演
- 有限密度系への応用