重力特論(=一般相対論)
担当：柴田　大

居室：基礎物理学研究所K507
http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/
~masaru.shibata/indexj.html

講義目的：一般相対論の基礎の解説

参考図書

- R. Wald “General relativity” (Univ. of Chicago Press, 1984)
- バーナード・シュッツ（訳：二間瀬＆江里口）「一般相対論」
- ランダウ＆リフシッツ 「場の古典論」（東京図書）
- 佐々木節 「一般相対論」(産業図書)
- 須藤靖 「一般相対論入門」(日本評論社)

❖ 基本の習得にどれを読んでも悪くない
（日本語の教科書はその他あるが、僕は読んでいない）

❖ その他分かりやすい参考図書

- E. Poisson “Relativist toolkit” (Cambridge Univ. Press, 2004)
- E. Gourgoulhon “3+1 formalism in general relativity” (Springer, 2012)

講義内容(予定)

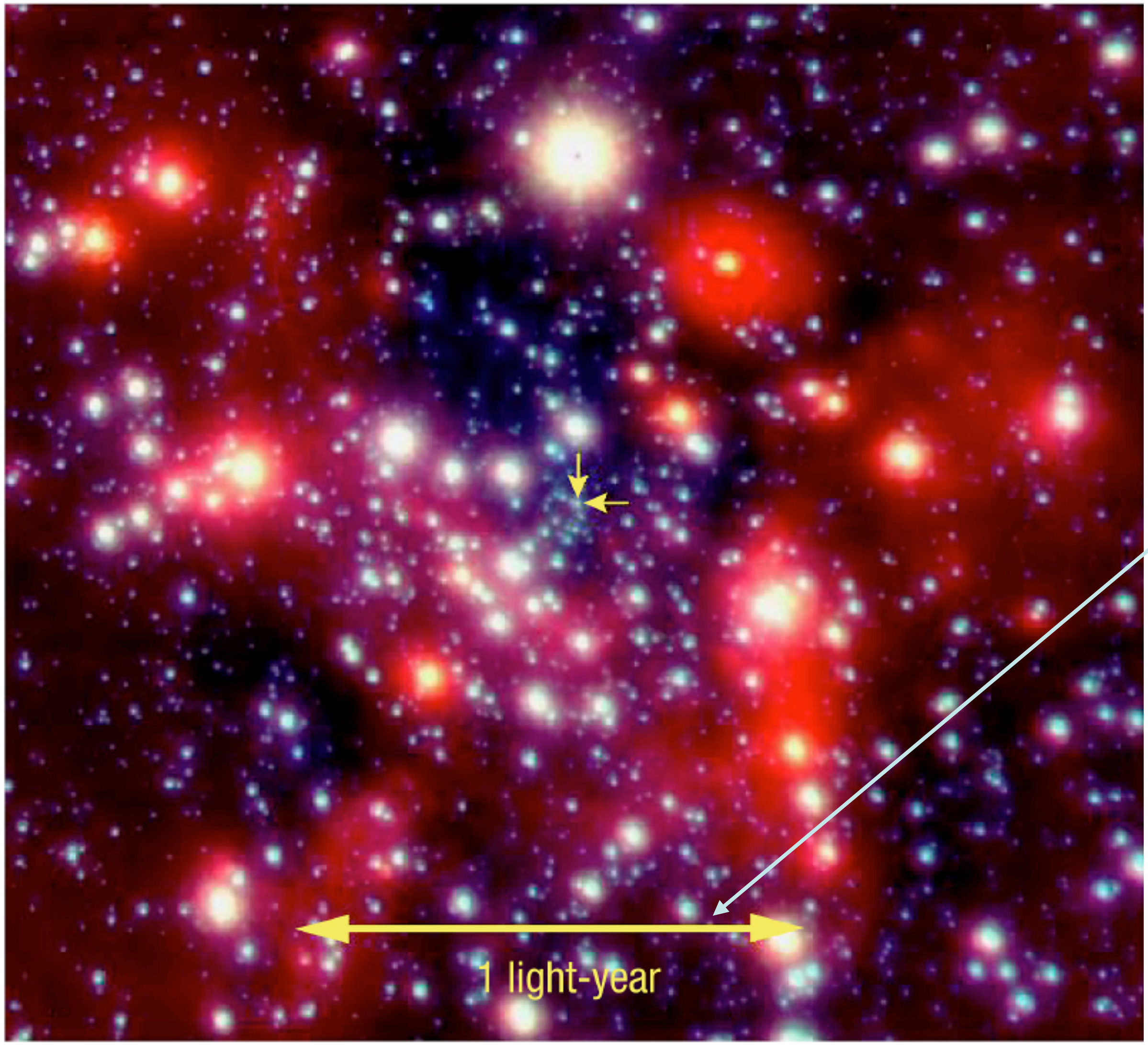
1. イントロダクション
2. 一般相対論の根幹：等価原理と一般相対性原理
3. リーマン幾何学による曲がった時空の定式化：
   テンソル、計量、共変微分、平行移動、曲率、測地線方程式
4. アインシュタイン方程式
5. 物質場の運動方程式
6. ニュートン極限、線形近似、重力波
7. 球対称ブラックホール解とその性質
8. 一般相対論の検証実験
9. 中性子星
10. 重力波の放射、間接的検証、直接観測
11. 膨張宇宙モデルと標準宇宙進化モデル

注①：各項目につき1回というわけではない
注②：進度によっては全て講義できないかも

1　イントロダクション

- アインシュタインの一般相対論　＝　重力の基礎理論
- 来年で誕生100年
- 1960年代序盤までは、数学的研究対象の色彩強し：「ファインマン講義：重力の理論」巻末186ページ参照
- それ以後、強重力天体や宇宙膨張の証拠が相次ぐ：クェーサー、ブラックホール、中性子星(パルサー)、高エネルギーX線源、宇宙背景放射、ビッグバン、宇宙膨張、宇宙論的重力レンズ、マイクロレンズ・・・これらは一般相対論抜きに理解できない
- それ以外にも、太陽系の惑星の正確な軌道の理解やGPSの運用にも一般相対論の理解が不可欠
- 現代「物理学」における必須の教養になった

銀河の中心の観測

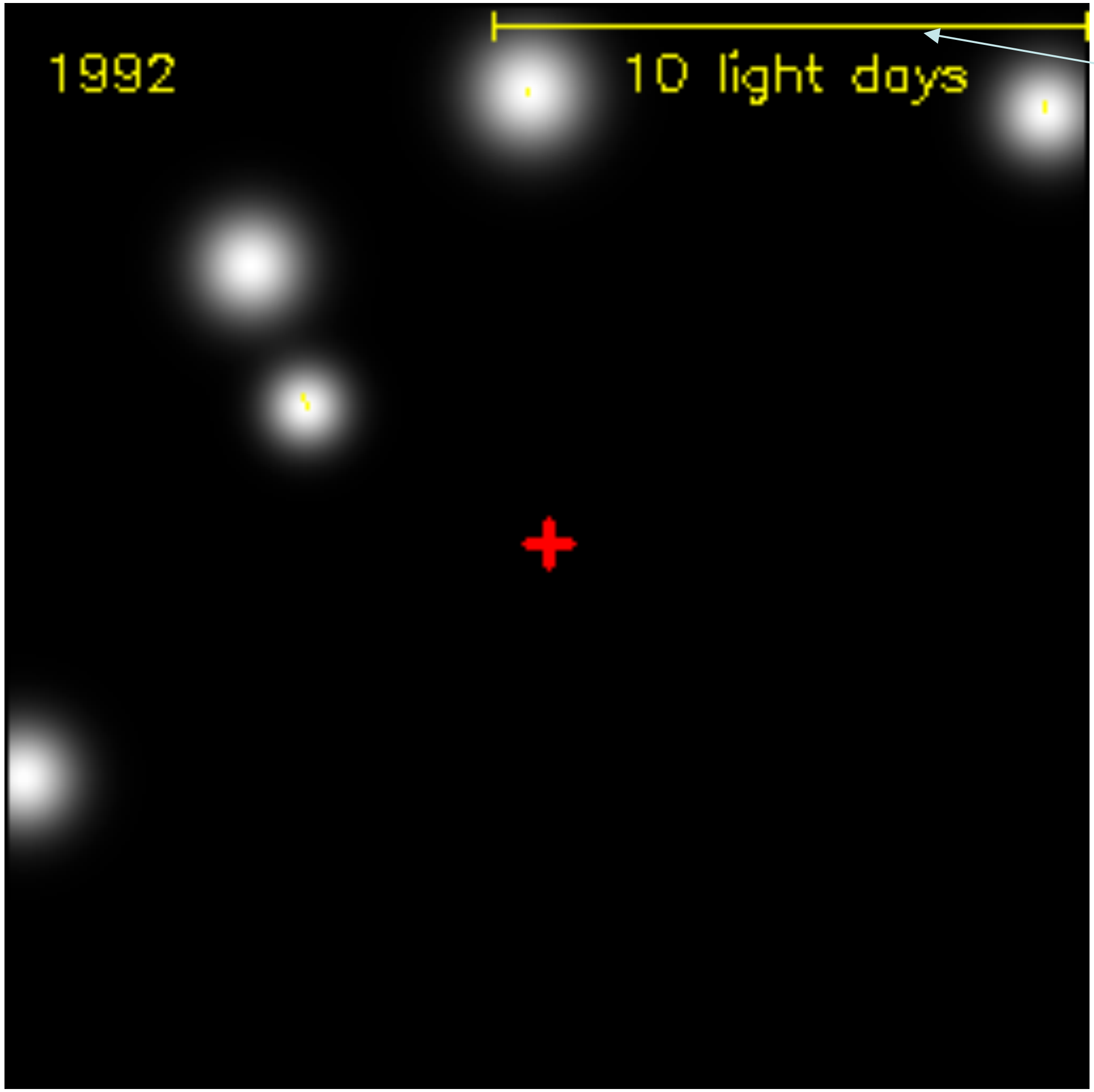


The Centre of the Milky Way
(VLT YEPUN + NACO)
ESO PR Photo 23a/02 (9 October 2002)

1光年
＝6万3千AU

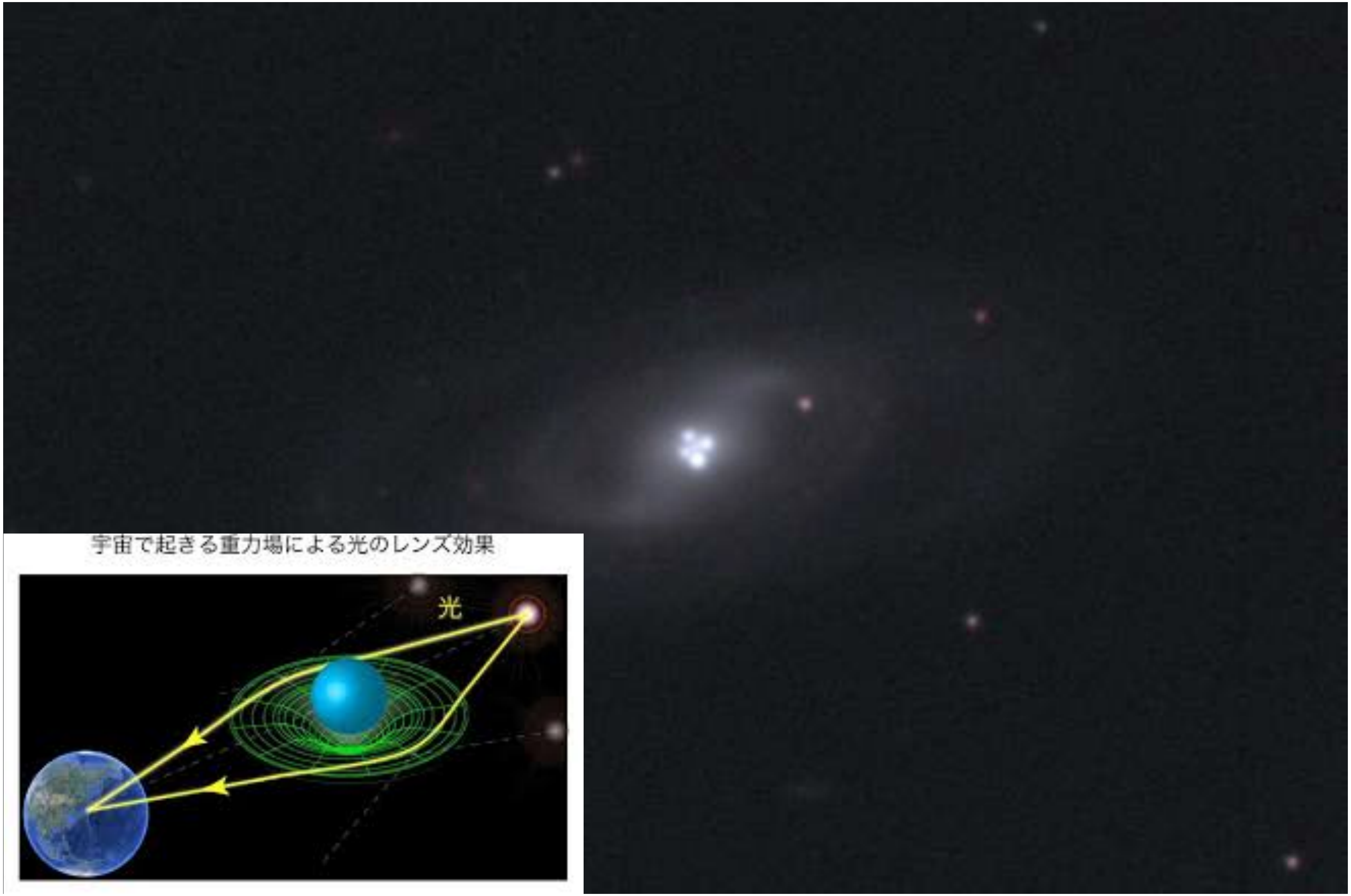
AU=太陽と
地球の間の
距離＝1.5億km

我々の銀河中心：
ブラックホール質量＝約400万太陽質量

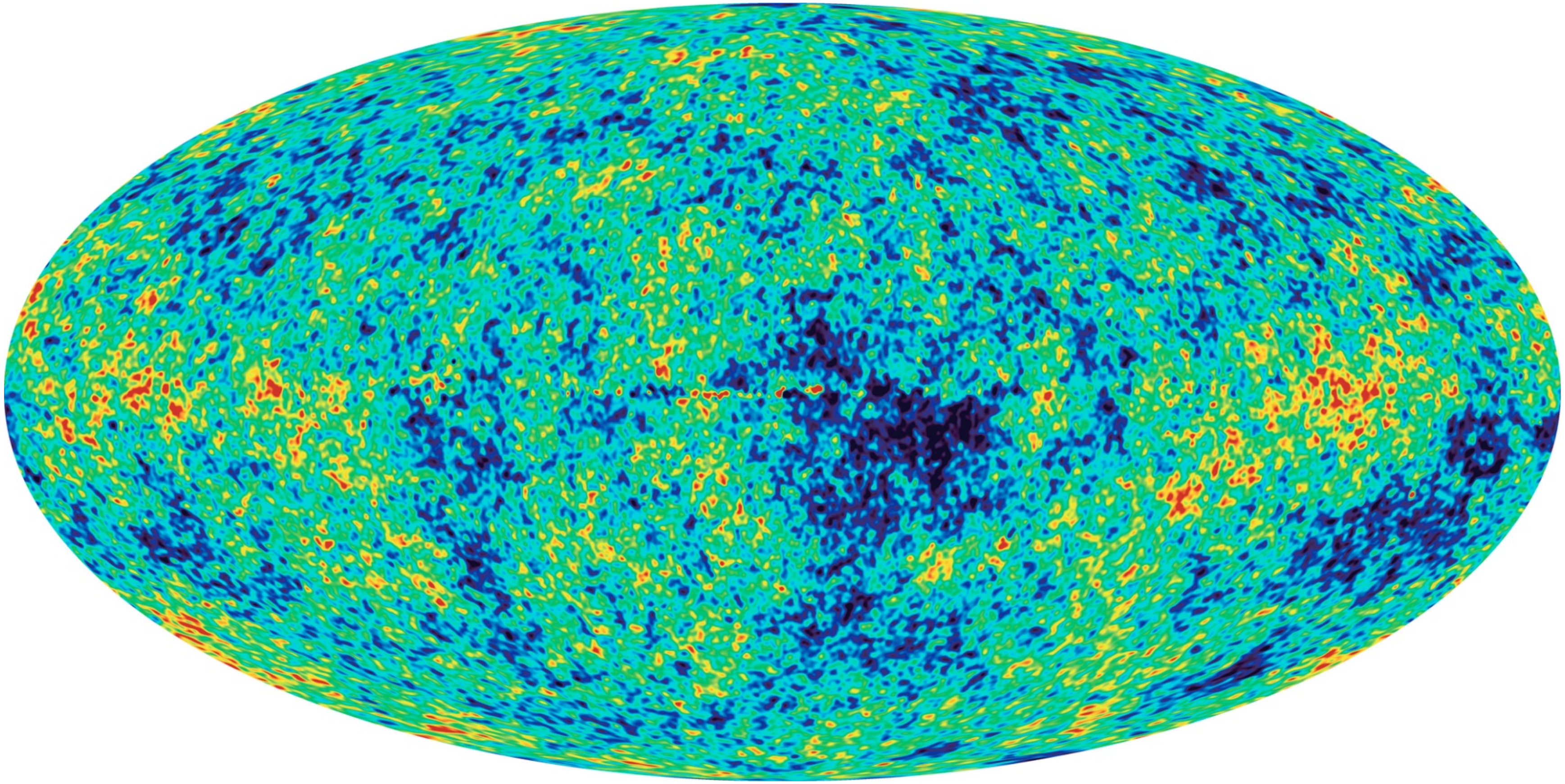


超巨大ブラックホールの周りを恒星が高速度で運動

4つの重力レンズ像



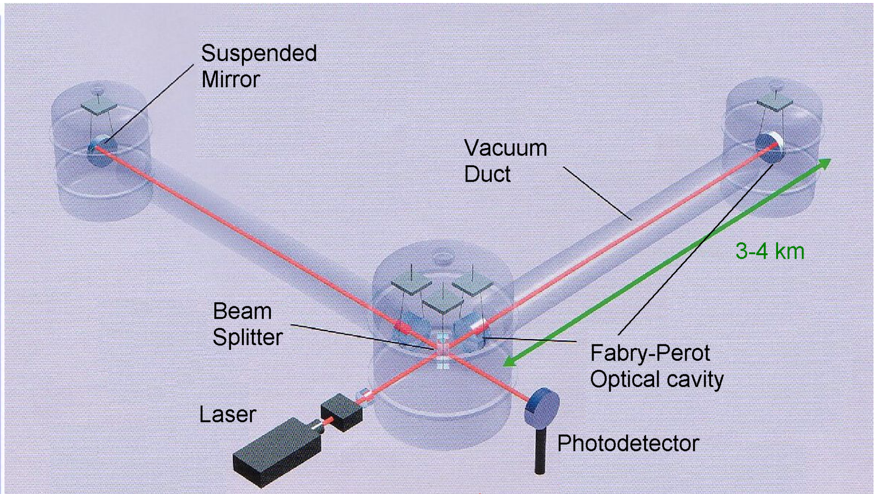
マイクロ波宇宙背景放射の揺らぎ



WMAPのデータ

宇宙誕生約30万年後の宇宙のムラ：
高温・高密度状態の宇宙の姿を反映

重力波天文学の幕開け：2015年～



➤数kmサイズの検出器

2　一般相対論の根幹：
等価原理と一般相対性原理

2.1　ニュートン重力理論とガリレイ変換不変性

2.2　等価原理

2.3　特殊相対論の登場とニュートン理論の限界

2.4　アインシュタインの発想

2.5　一般相対性原理

2.6　等価原理のみから予言される現象

ニュートン重力理論の復習

◆ニュートンの第一法則＝力がかからなければ、等速直線運動を続ける。

◆等速直線運動に見える系を、慣性系と呼ぶ。

✓ 直線とはどんな空間の直線か?
⇒　ニュートン理論では、3次元ユークリッド空間(平坦空間)。つまり、力がかからなければ、物体は空間の最短距離を進む、とも言える。

✓ 等速とはどのような時間で測った速度か?
⇒　絶対時間当たりに進んだ距離。

- 式で書くと、慣性系では

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=0,\quad \frac{d^2z}{dt^2}=0$$

x, y, z は、ユークリッド空間を表す直交座標

慣性系の特徴

❖ 慣性系は無数にある

- まず慣性系を１つ選ぶ。
  それが (x, y, z) で表されるとする。
  すると以下の変換で移ったものも全て慣性系：

1. 並進： $x' = x - d$
2. 回転： $x' = \cos\theta\, x - \sin\theta\, y, \quad y' = \sin\theta\, x + \cos\theta\, y$
3. 他の等速運動系： $x' = x - v\, t$

ただし、時間はどの慣性系で見ても一緒

$\Rightarrow$ 絶対時間 $t' = t$

ガリレイ変換

$$x' = x - v^x t$$

$$y' = y - v^y t$$

$$z' = z - v^z t$$

$$t' = t$$

等速運動する系から別の等速運動する系への座標変換

❖ ニュートン理論では、当時の実験事実を鑑み
全ての慣性系で同じ物理法則が成り立つ
ことを原理として要求する

✓ 言い換えれば、ニュートン理論は
ガリレイ変換に対して不変

⇒ 特定の慣性系は存在しない

ここまでのまとめ

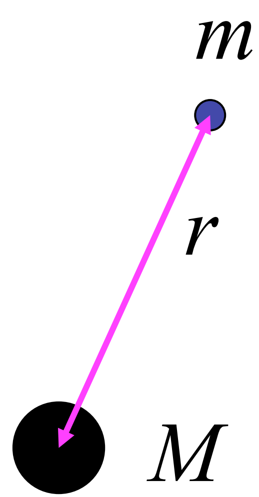
ニュートン理論では、

- ❖　空間は平坦空間(ユークリッド空間)。
- ❖　物体は力が働かなければ、平坦な空間の最短距離を進むことを前提とする。
- ❖　全ての慣性系で同じ物理法則が成り立つことを仮定。
- ❖　時間はどの慣性系でも全く同じ(絶対時間)。

万有引力の法則

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = -m\vec{\nabla}\Phi;$$

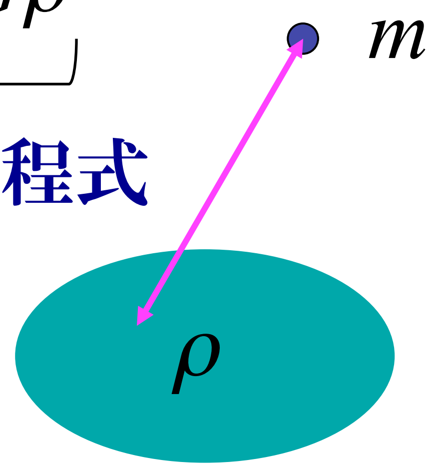
$$\Phi\left(\vec{x}\right) = -\frac{GM}{r} \quad \left(r = \left|\vec{x} - \vec{x}_I\right|\right)$$



連続体の場合

密度

$$\Phi\left(\vec{x}\right) = -\int d^3x'\frac{G\rho\left(\vec{x}'\right)}{\left|\vec{x} - \vec{x}'\right|} \Rightarrow \underbrace{\Delta\Phi = 4\pi G\rho}_{\text{ポアソン方程式}}$$



重力ポテンシャル

ポアソン方程式はガリレイ変換不変

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - v^x t \\ y' &= y - v^y t \\ z' &= z - v^z t \end{aligned}\right\}$$ この変換に対して

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2}$$

が成り立つから

注：重力ポテンシャルはスカラーとする

理論の整合性が満たされている。

慣性質量と重力質量

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -m\vec{\nabla}\Phi \quad \cdots \ \mathrm{EOM}$$

左辺と右辺の質量は、本来意味が異なる

　左辺は慣性質量⇒加速のし難さを表す量

　右辺は重力質量⇒重力場に対する反応を表す量

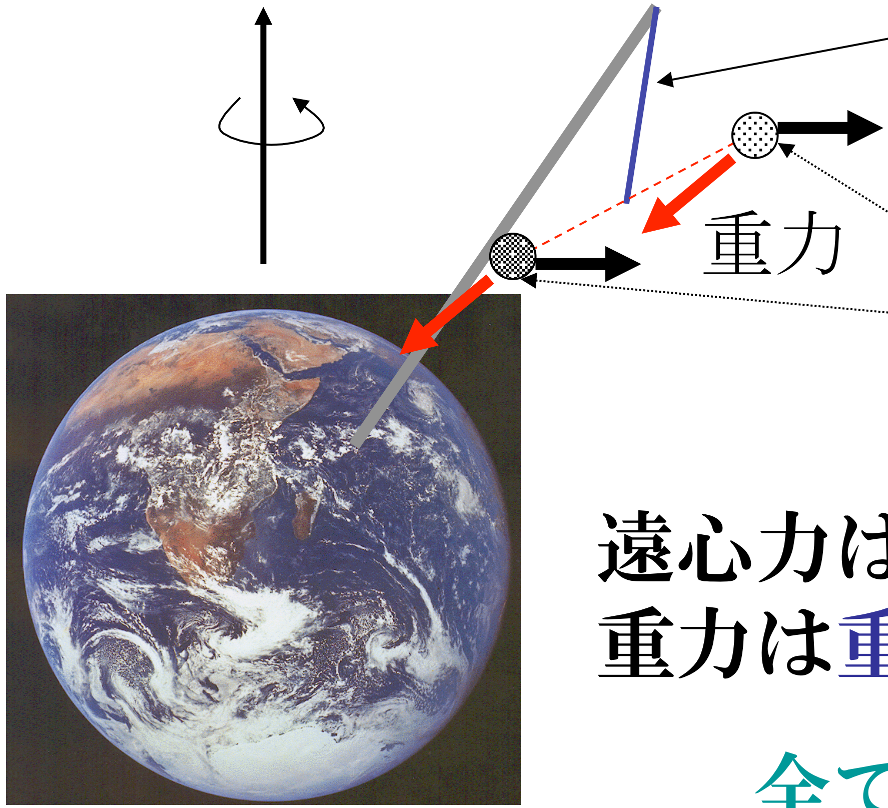
一般には、

$$\boxed{m_I\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -m_g\vec{\nabla}\Phi} \quad \Leftrightarrow \quad m_I\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = q\vec{E} = -q\vec{\nabla}\phi$$

電磁気学を思い起こせば、$m_I \neq m_g$ でよいはず。

しかし、実験事実は、　$m_I = m_g$　　　　不思議

エトベスの実験



棒

遠心力

重力

異なる2物質
AとB

遠心力は慣性質量に比例
重力は重力質量に比例

全ての物体で
慣性質量/重力質量
の比が等しければ、
棒は捩れない。

捩れ具合を
測って調べる

具体的数式

・振れ方向のつりあい

$$m_I^A a^A = m_g^A g, \quad m_I^B a^B = m_g^B g$$

・振れ度

$$\eta \equiv 2\frac{a^A - a^B}{a^A + a^B} = 2\frac{m_g^A / m_I^A - m_g^B / m_I^B}{m_g^A / m_I^A + m_g^B / m_I^B}$$

・現在の最も正確な実験結果

$$\eta \approx 2 \times 10^{-13}$$ Wagner et al. (2012)

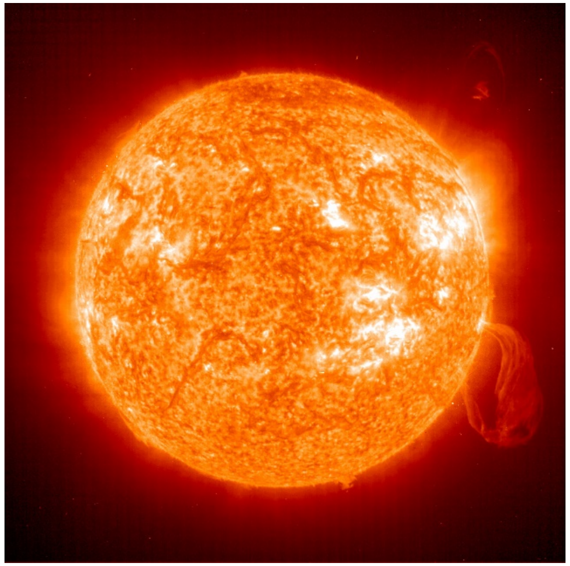
重力質量と慣性質量は高精度で等しい

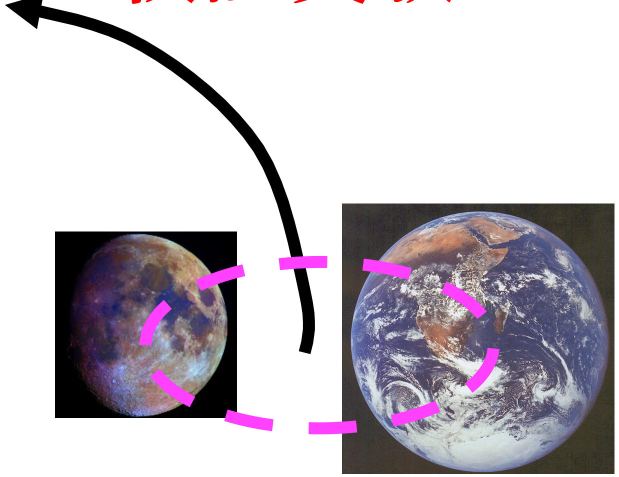
＃　ちなみにエトベスの最初の実験結果は10^{-7}程度

地球と月は同じように落ちるか?

Lunar laser ranging test

「強い等価原理」の検証実験





月も地球も太陽の周りを回っている。

(遠心力=重力)

太陽重力との反応の仕方が月と地球で

異なったら、月の地球周りの軌道が変化する。

簡単のため、地球も月も太陽の重力のみで軌道が決まっているとする

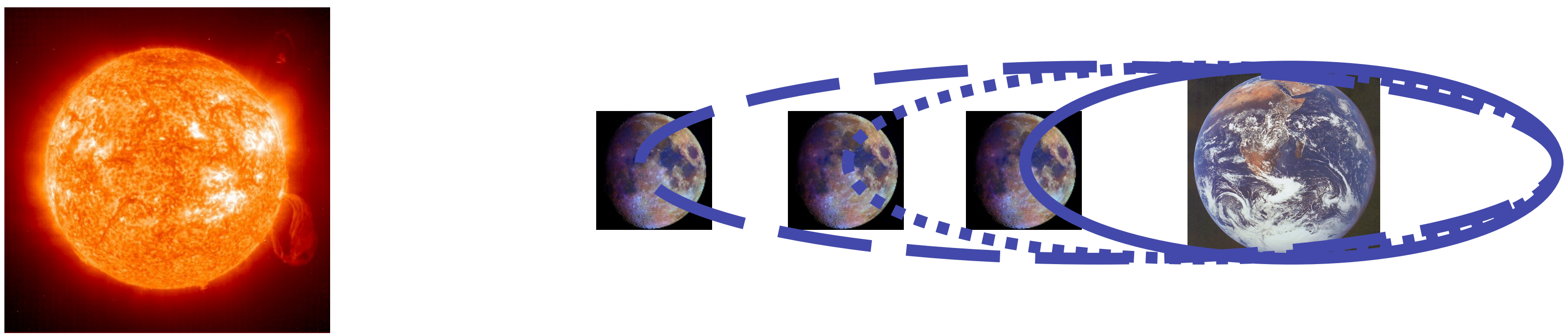
・力の釣り合い：遠心力=重力

$$\boxed{m_I}\frac{v^2}{r} = \frac{GM_e \boxed{m_g}}{r^2} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{GM_e}{r}\frac{m_g}{m_I}$$

⇒　**公転軌道速度は、重力質量と慣性質量の比による**

遠心力は、運動方程式を回転系で書いたときに現れる慣性力である。（コリオリ力も同じ。）

例えば、月の方が太陽重力に敏感に反応したら、、、



月は太陽方向にシフトするであろう
⇒　円軌道が楕円軌道に変化する。

実際は地球に引き付けられるからもっと
複雑だが、いずれにせよ軌道は変化する。

Lunar laser ranging

McDonald Obs.

反射板の位置(アポロなどで設置)

月の反射板

距離精度：数cmの範囲で月の軌道は不変；加速度にして1.5×10^{-13}の精度

実験結果から得られた結論

- ❖　慣性質量と重力質量は何故だか分からないがおそらく等しい。天体ですらそうである。
  ⇒　**等しいという事実を原理として採用する**
- ❖　一般相対論ではこれを**等価原理**と呼び、神棚の一番高い位置に置く（後述）

ニュートン重力理論の限界１

・マイケルソン・モーレーの実験(1887年)
→　実験事実として、光速度は慣性系によらない
→　特殊相対論(1905年)＝ローレンツ変換不変

・特殊相対論の２大原理（アインシュタイン）

◆光速度不変原理（全ての慣性系で光速度が同じ）

◆特殊相対性原理（全ての慣性系で物理法則が同じ）

・ニュートン重力理論＝ガリレイ変換不変だったので、ニュートン理論はローレンツ変換に対しては不変でない：特殊相対論と相容れない。

・相対論的重力理論が必要になった。

変換則

$$t' = \left(t - \frac{Vx}{c^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$x' = \left(x - Vt\right)\frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

ローレンツ変換

$$t' = t$$

$$x' = x - Vt$$

ガリレイ変換

$$t' = \left(t - \frac{Vx}{c^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad \rightarrow \quad t$$

$$x' = \left(x - Vt\right)\frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad \rightarrow \quad x - Vt$$

光速度無限大
の極限で一致

数式で書くと

ガリレイ変換

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho \quad \Rightarrow \quad \Delta'\phi = 4\pi G\rho$$

不変

$$\left\{\begin{aligned} \Delta\phi &= \partial_{xx}\phi + \partial_{yy}\phi + \partial_{zz}\phi \\ \Delta'\phi &= \partial_{x'x'}\phi + \partial_{yy}\phi + \partial_{zz}\phi \end{aligned}\right\} \quad x' = x - Vt$$

ローレンツ変換

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho$$

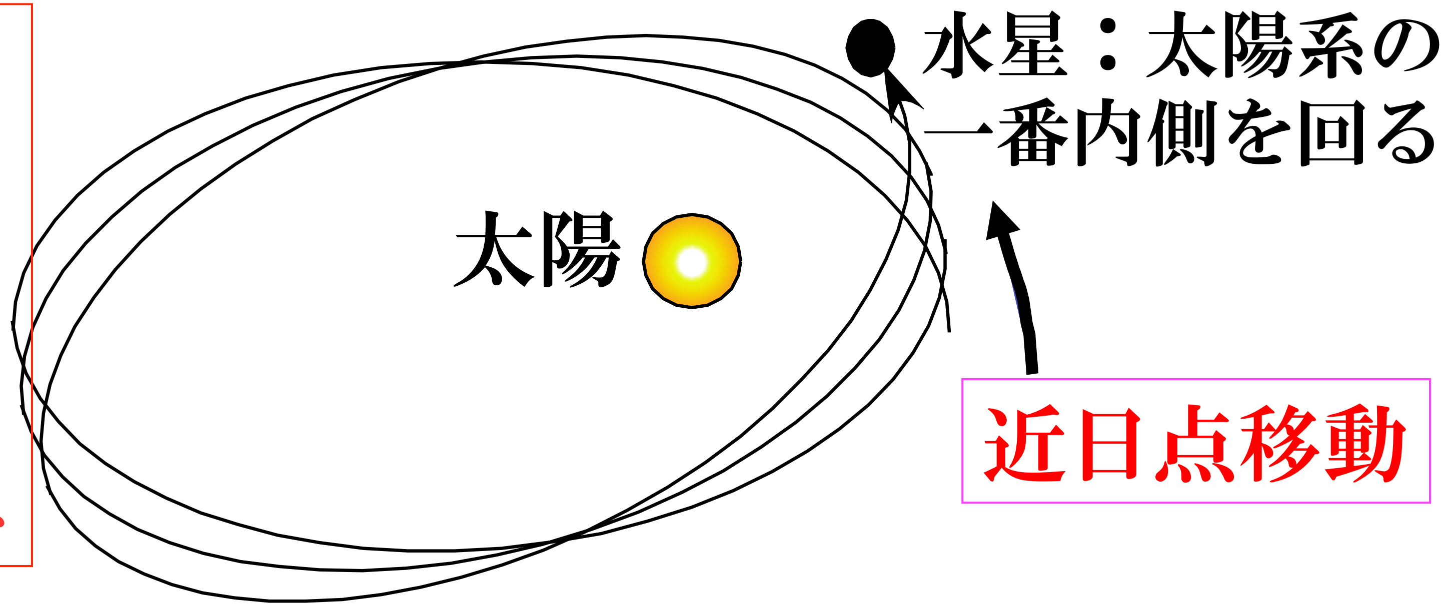
不変でない

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{1 - V^2/c^2}\partial_{x'}^2 + \partial_{y'}^2 + \partial_{z'}^2\right)\phi = 4\pi G\rho$$

ϕはニュートンの重力ポテンシャル、ρは密度

限界２：水星の近日点移動

楕円軌道が
閉じるのは、
中心力がrに
比例するか、
逆2乗に比例
するときのみ



- 惑星の運動＝円運動に近い楕円軌道。
  ニュートン理論では楕円軌道は閉じる。
  （太陽からの重力のみ仮定）
- しかし、どうやら閉じないことが19世紀末までに、
  観測事実によって明らかになっていた。

（水星の場合、1世紀あたり43秒の近日点のずれ。）

19世紀末、20世紀初頭の結論

- ニュートン重力理論は、近似的にしか自然界を記述できない。
- 重力が弱く、物体の運動が遅い場合にのみ、適用可能なのだろう。

$$\varepsilon = \frac{2GM}{Rc^2} \ll 1 \quad \& \quad \frac{V}{c} \ll 1$$

のときのみ近似的に適用可能

R ： 物体の特徴的大きさ

M ： 物体の質量

V ： 物体の特徴的速度

相対論的重力理論への道

- 特殊相対論を拡張し、重力理論を構築したい
- 特殊相対論では：光速度不変、かつ、物理法則が全ての慣性系で同じ形に書けることが原理とされていた
  （例えば電磁気学のマクスウェル方程式）
- 単純な拡張を考えるならば、電磁気学の場合を模倣して、まず慣性系を用意し、その上で不変な重力理論を構築すること、を思い浮かべるのだが、、、、

ありがちな発想

- 大前提として、ニュートン重力理論の場合同様、空間が平坦なことは仮定する。
- その空間の中で等速度で運動している観測者が、慣性系にある観測者である。
- 電磁場同様、重力場は空間内の個々の点で定義される何らかの「場」である。
- これらの場の従う方程式は、慣性系の上で定義された座標上では同じ形をしている。<u>電磁気学の理論はまさに要請通りの形をもっている。</u>

例えば、

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho \quad \Rightarrow \quad \Box\phi = 4\pi G\rho$$

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta\phi = \partial_{xx}\phi + \partial_{yy}\phi + \partial_{zz}\phi \\ \Box\phi = -c^{-2}\partial_{tt}\phi + \partial_{xx}\phi + \partial_{yy}\phi + \partial_{zz}\phi \end{array}\right\}$$

のように変えれば、ローレンツ変換不変になる

しかし、

- 「重力理論において、そもそも慣性系は容易に定義できない」
- 「特に大局的な慣性系は存在し得ない」

ということに、アインシュタインは気がついた。

等価原理の役割

「慣性質量と重力質量が等しい」

ニュートンの運動方程式：（しばらくは、ニュートン理論を考える。）

$$m_I a = m_g g$$

m_I :　慣性質量

m_g :　重力質量

a :　慣性加速度

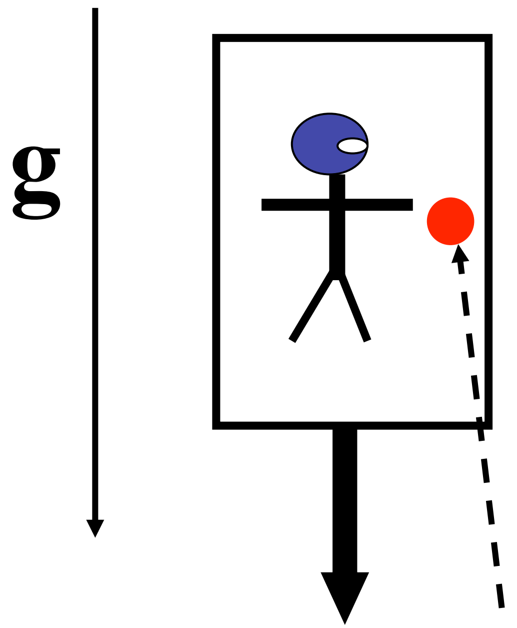
g :　重力加速度

しかし自然界では何故か　$m_I = m_g$

$$\therefore \quad a = g$$

等価原理の重大な帰結

- 一様重力加速度の存在は判別不可能である



ロケットの中に閉じ込められて自由落下する人は、外が見えなければ、自分が自由落下していることは思わないし、重力場が存在するとも思わない。
自分が慣性系にいると考える。

エレベータの人には止まって見える

適当な加速度のある系に座標変換すれば、一様重力は打ち消すことができる。

数学的記述

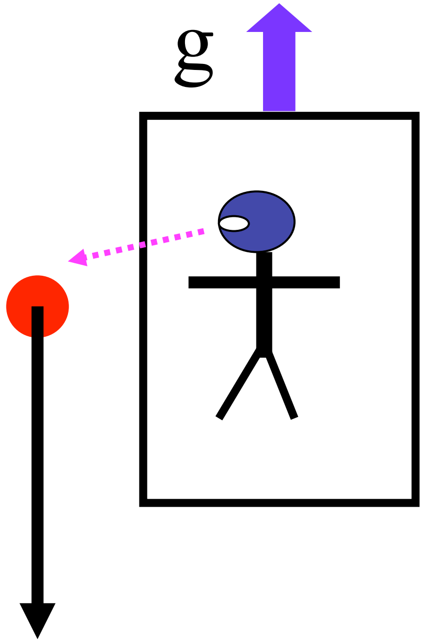
$$a \equiv \frac{d^2 x}{dt^2} = g \quad \cdots$$ 運動方程式

$$x' = x - \frac{g}{2} t^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 x'}{dt^2} = 0$$

座標変換

x’の座標系では無重力！

一様な加速度のかかる系は一様重力場と等価



無重力場におけるロケットを想定。
一様加速度gで上向きに加速する。
外で静止して存在する物体は、
加速度gで反対向きに進むように
見える。

加速度gで落下して見える

一様加速度のかかる系は、その反対の向きに
重力加速度の存在する系と等価である

電場（磁場）の場合とは状況が大きく異なる。

$$m_I a = qE \qquad q: \text{電荷} \quad E: \text{電場}$$

$$\Rightarrow a = \frac{q}{m_I} E$$

粒子ごとに電荷と慣性質量の比は異なる。
よって、異なる粒子の加速度を測定すれば、観測者の加速度によらず電場の強さを測ることは可能である。
他方、一様重力による加速度は測定不可能。

一様重力場の特徴

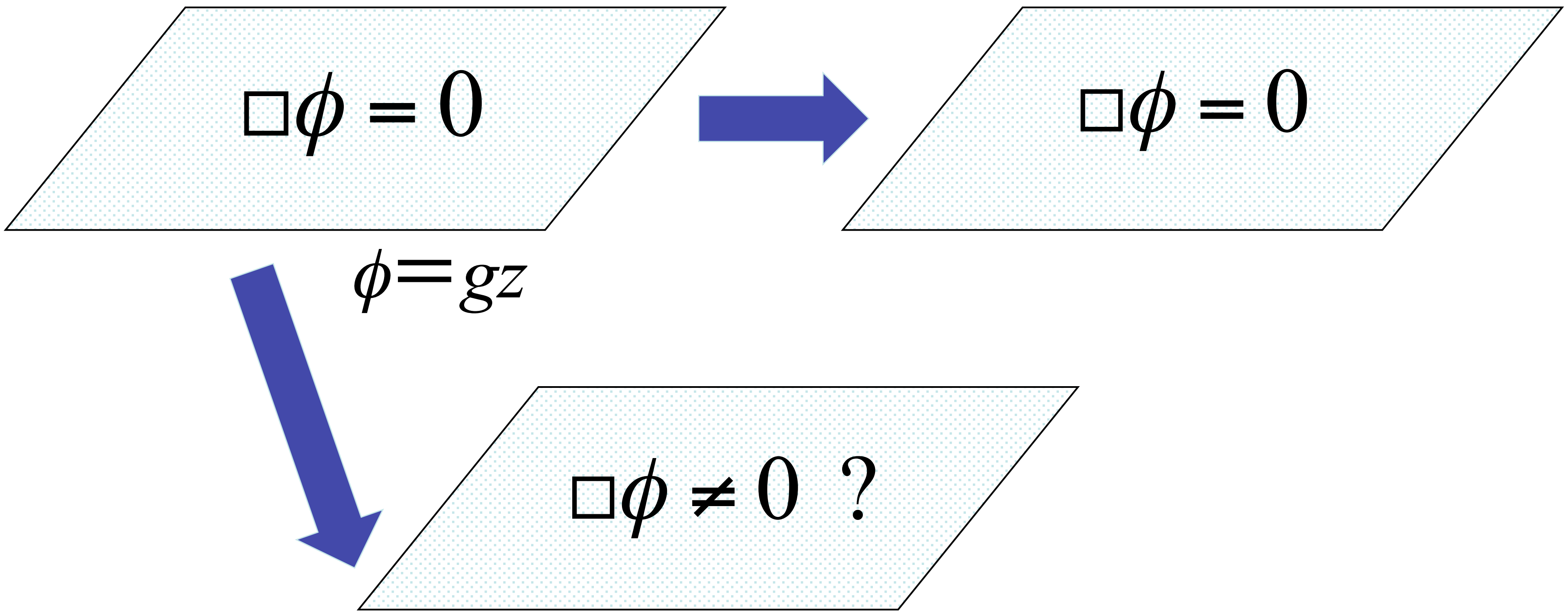
- 電磁場のような「重力場」の絶対的存在の判断が不可能。仮想重力場も作れてしまう。
- 「大局的な慣性系」をまず定義した後に、重力理論を作る方法は使えない。
- 結局、従来のやり方では本質が分からない。

❖　従来とはまったく別の力と考えるべき。

❖　以上の問題は局所的に重力場を観たときにも同様である。つまり局所的に重力場は消せる。

おかしいことのイメージ

慣性系のつもり　　別の慣性系のつもり



一様加速度系＝非慣性系のはずだった。
でも、こちらが慣性系かもしれない。

アインシュタインの思考実験

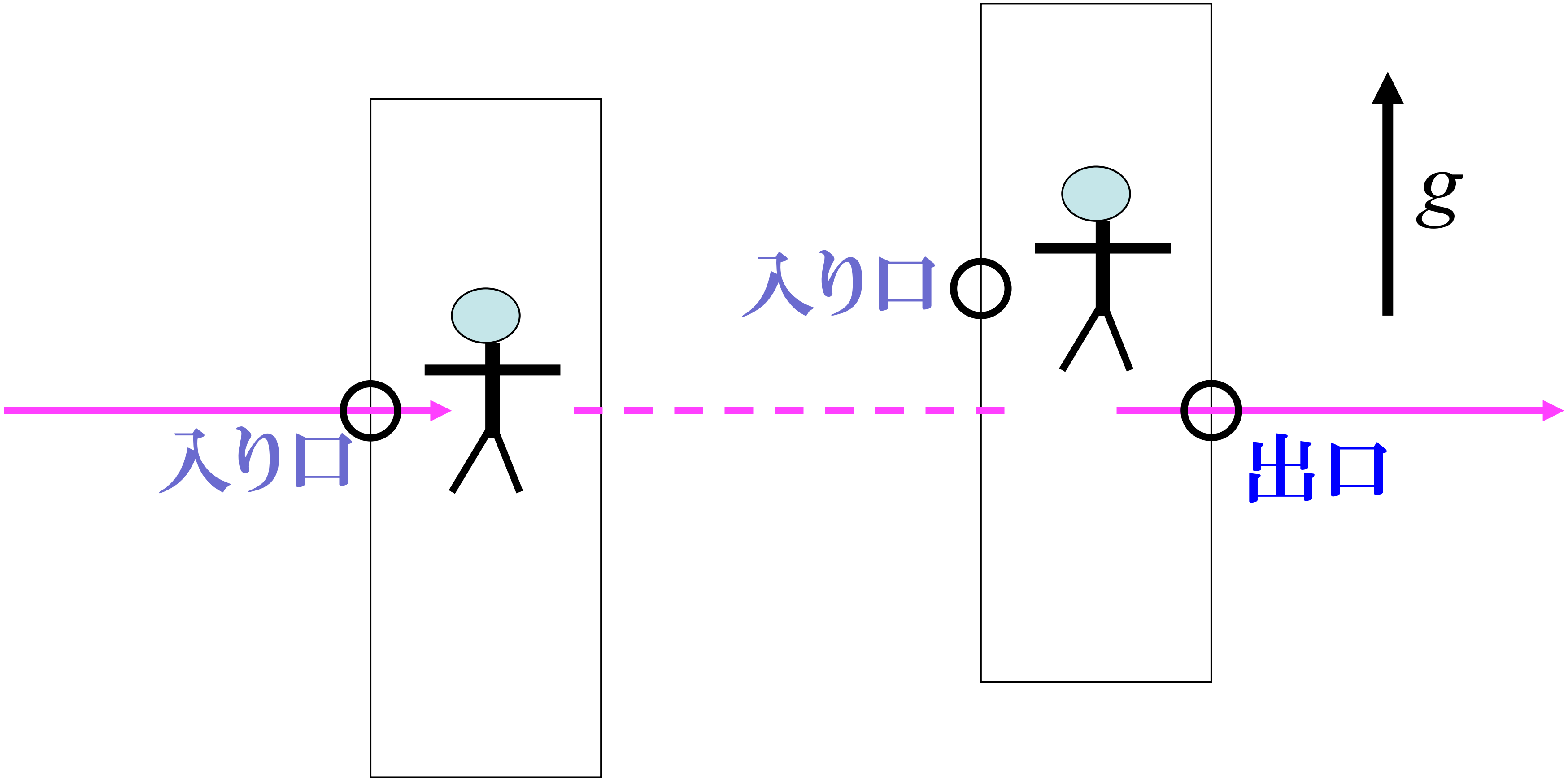
・一様加速度と一様重力加速度は区別不可能。
　つまり一様加速度系は一様重力系と何ら変わり
　はない＝発展解釈された等価原理

というのがこれまでの結論

・この事実が成り立つとして、光の軌跡を考える

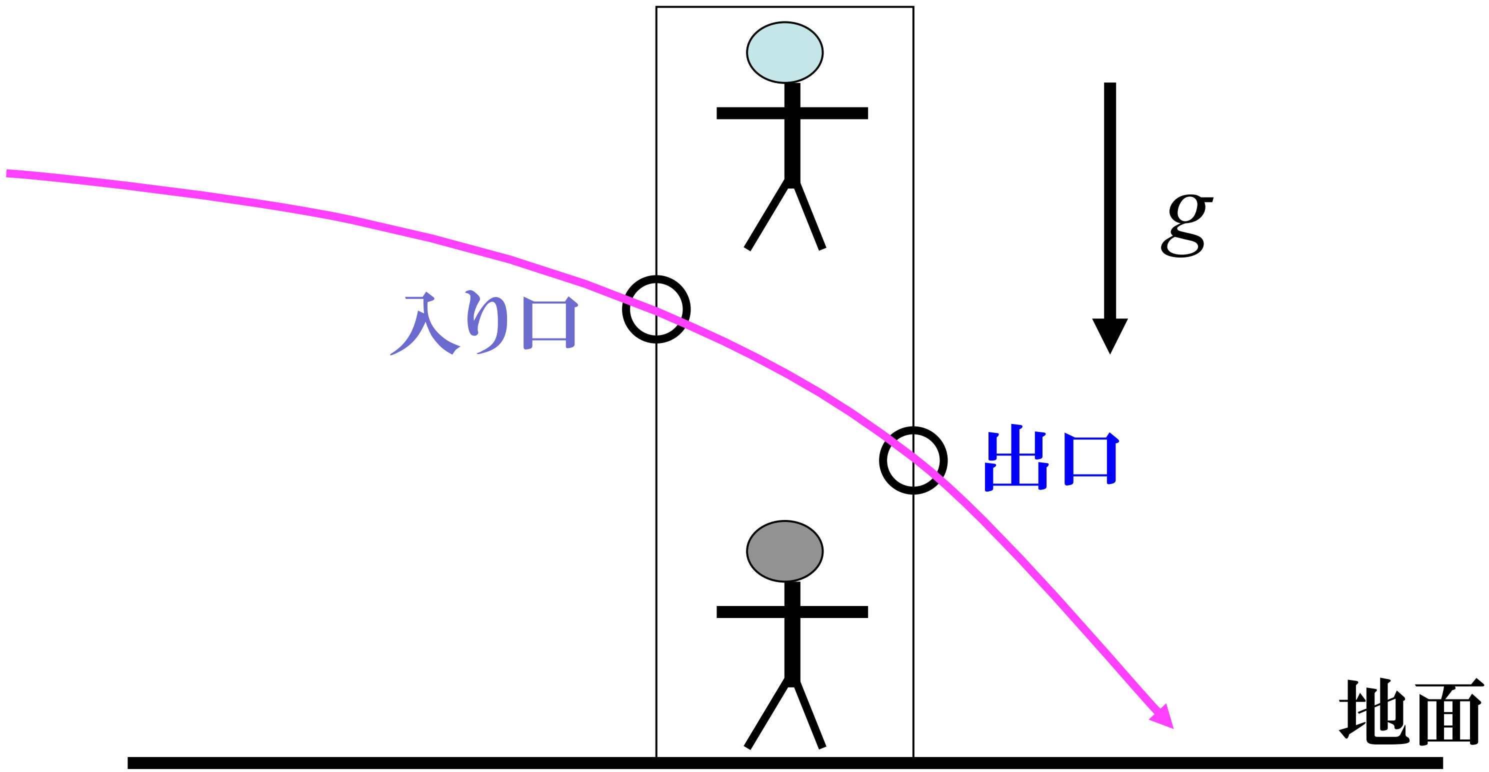
ロケットを用いた思考実験

①　無重力場で加速度運動するとき



光は真っ直ぐ進むが、ロケットの中の人から見ると
光は真っ直ぐ進んでいない。

②　一様重力場で静止しているのと等価



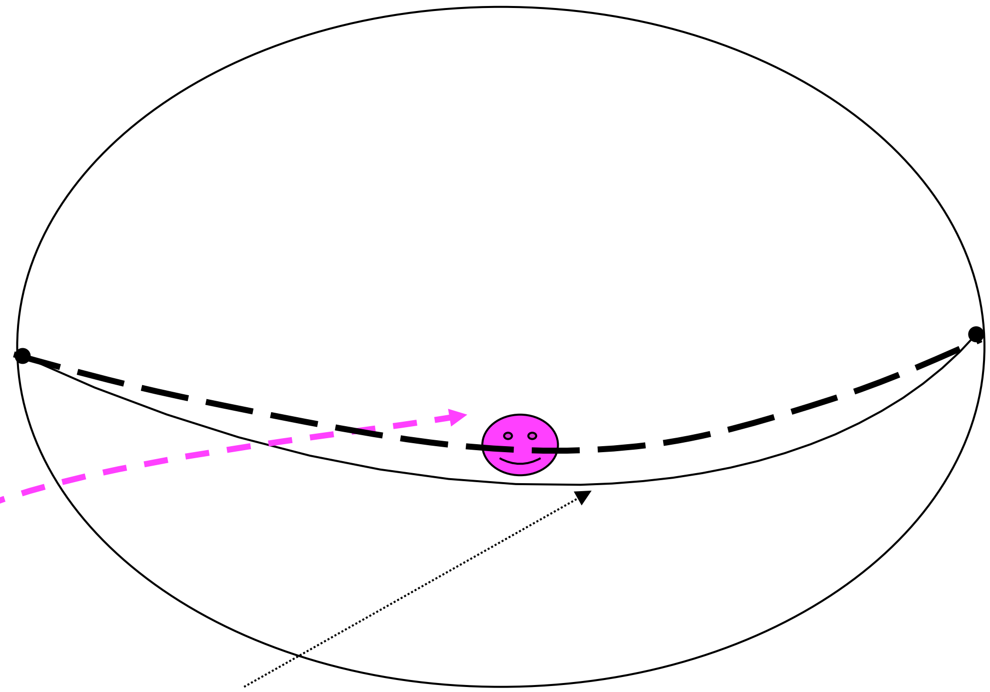
光は曲がっている(注：ニュートン重力でも曲がる)

⇒　時空が曲がっていて、その中を最短距離で進むと考えるのが最も単純である。

ここでニュートンの第一法則を思い出す：力が働かなければ、物体は最短距離を動く (但し平坦時空の中を)

- 重力場の中でも、光やその他の物体は最短距離で進むが、空間が曲がっている、と考えると最もすっきりする。
- 特殊相対論では時間も絶対的ではないので、空間が曲がるなら時間も曲がっている。
- アインシュタインの結論：重力とは時空が曲がっていることの発現である。

例えば、3次元空間中の2次元球面＝曲面



最短距離は曲線（大円)で結ばれる。
距離も単純に $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ ではない。

隣の大円上の観測者から見れば、真っ直ぐ進んでいない

曲がり具合＝幾何学の表し方

・計量を用いて、時空間微小距離を定義

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (\mu, \nu = 0,1,2,3)$$

$$x^0 = ct, \quad (x^1, x^2, x^3):$$ 空間座標

・平坦な場合：

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

✧ ここで、平坦計量のds^2はローレンツ変換で不変。

✧ 自然な拡張として一般計量の場合も、これは不変となるべし

✧ さらに一歩進んで、物理法則も一般座標変換に対して不変になるべきではないか

一般相対性原理

- 一様加速度系と一様重力加速度の系は等価。
  これらは座標変換で両方とも慣性系になってしまうが、従来の考え方だとどちらかは非慣性系。
  → ローレンツ変換に限定された座標変換不変性は、重力理論では無意味である。
- そこで「物理法則は選んだ座標には依らない」という原理を採用＝一般相対性原理
- つまり、基礎方程式は座標変換に対しても形を変えないものでなくてはならない
  ⇒ 基礎方程式は「テンソル方程式」

＃　アインシュタインの原論文(1914)の論理

・特殊相対論では不変的な時空距離は

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

・物体の運動は、以下の式から導出できる

$$\delta \int ds = 0$$

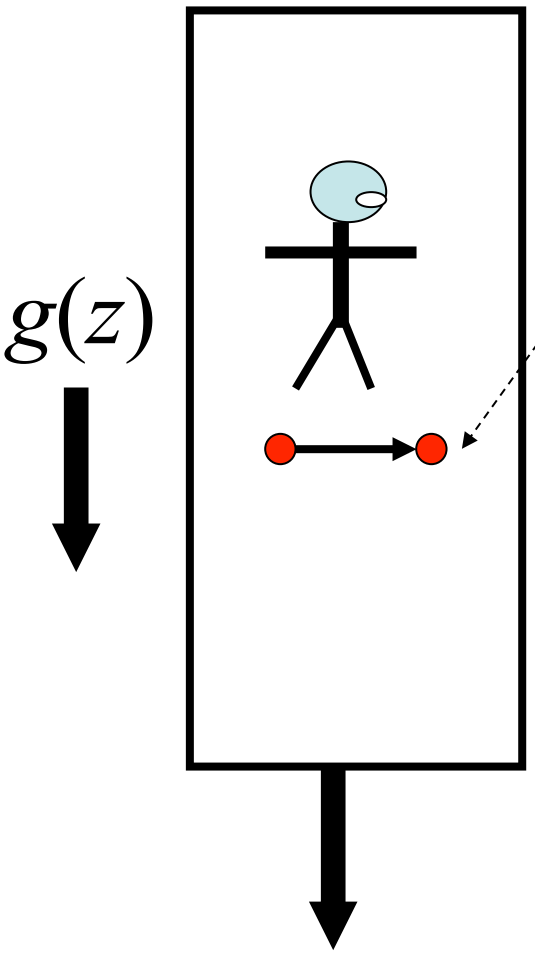
・ローレンツ変換に限る限りは、dsの形は不変

・しかし、重力が存在する場合には、ローレンツ変換に限った不変性に限定してはいられない
→　一般座標変換を考えれば、

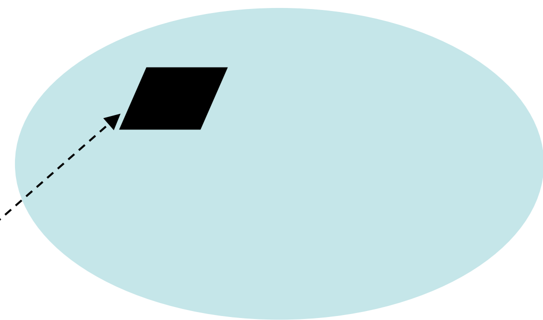
$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

局所慣性系：重力理論における慣性系

- 重力が消せてしまうのは、一様重力場に限らない。
- 局所的には非一様重力場も一様に見える。



自由落下するロケットの
中で見れば、ボールは
水平方向にのみ動く
→　局所慣性系



接平面⇒局所慣性系
が取れる

アインシュタインの発想転換のまとめ

・特殊相対論の2大原理

❖ 光速度不変原理

➢ 大局的な慣性系の存在が大前提

➢ 慣性系は等価で、光速度は慣性系で不変

❖ 特殊相対性原理

➢ 物理法則はローレンツ変換不変

・一般相対論の2大原理

❖ 等価原理

➢ 大局的な慣性系は存在しないが、等加速度系と一様重力系は全て等価

❖ 一般相対性原理

➢ 物理法則は一般座標変換不変。あるいは、局所慣性系では不変。

テンソル

・成分が座標変換に対して以下の変換則に従う

$$T'_{\mu'\nu'\lambda'\cdots} = T_{\mu\nu\lambda\cdots} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\nu'}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\lambda'}} \cdots$$

$$T'^{\mu'\nu'\lambda'\cdots} = T^{\mu\nu\lambda\cdots} \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x'^{\lambda'}}{\partial x^{\lambda}} \cdots$$

$$T'_{\mu'\nu'}{}^{\alpha'\beta'} = T_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\nu'}} \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\beta'}}{\partial x^{\beta}}$$

・ベクトルの偏微分（ $\partial f^{\alpha} / \partial x^{\beta}$ ）はテンソルではない

$$T_{\alpha\beta\gamma\cdots} = T_{abc\cdots} e^{a}_{\alpha} e^{b}_{\beta} e^{c}_{\gamma} \cdots$$

$T_{abc\cdots}$ ： テンソル本体

$T_{\alpha\beta\gamma\cdots}$ ： テンソル成分

e^{a}_{α} ： 基底ベクトル (α=0,1,2,3)

a, b, c がテンソルの脚

α, β, γ が成分の脚

計量の座標変換

$$g_{\alpha'\beta'} = g_{\alpha\beta}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\alpha'}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\beta'}}, \quad g_{\alpha\beta} = g_{\alpha'\beta'}\frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\beta'}}{\partial x^{\beta}}$$

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta} = g_{\alpha'\beta'}\frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\beta'}}{\partial x^{\beta}}dx^{\alpha}dx^{\beta} = g_{\alpha'\beta'}dx'^{\alpha'}dx'^{\beta'}$$

$$\because \quad \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}dx^{\alpha} = dx'^{\alpha'}$$

線素が不変になるには、計量はテンソルであることが必要

ベクトルの偏微分はテンソルにあらず

$$\frac{\partial f'^{\alpha'}}{\partial x'^{\beta'}} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\beta'}}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left(f^{\alpha}\frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\right)$$

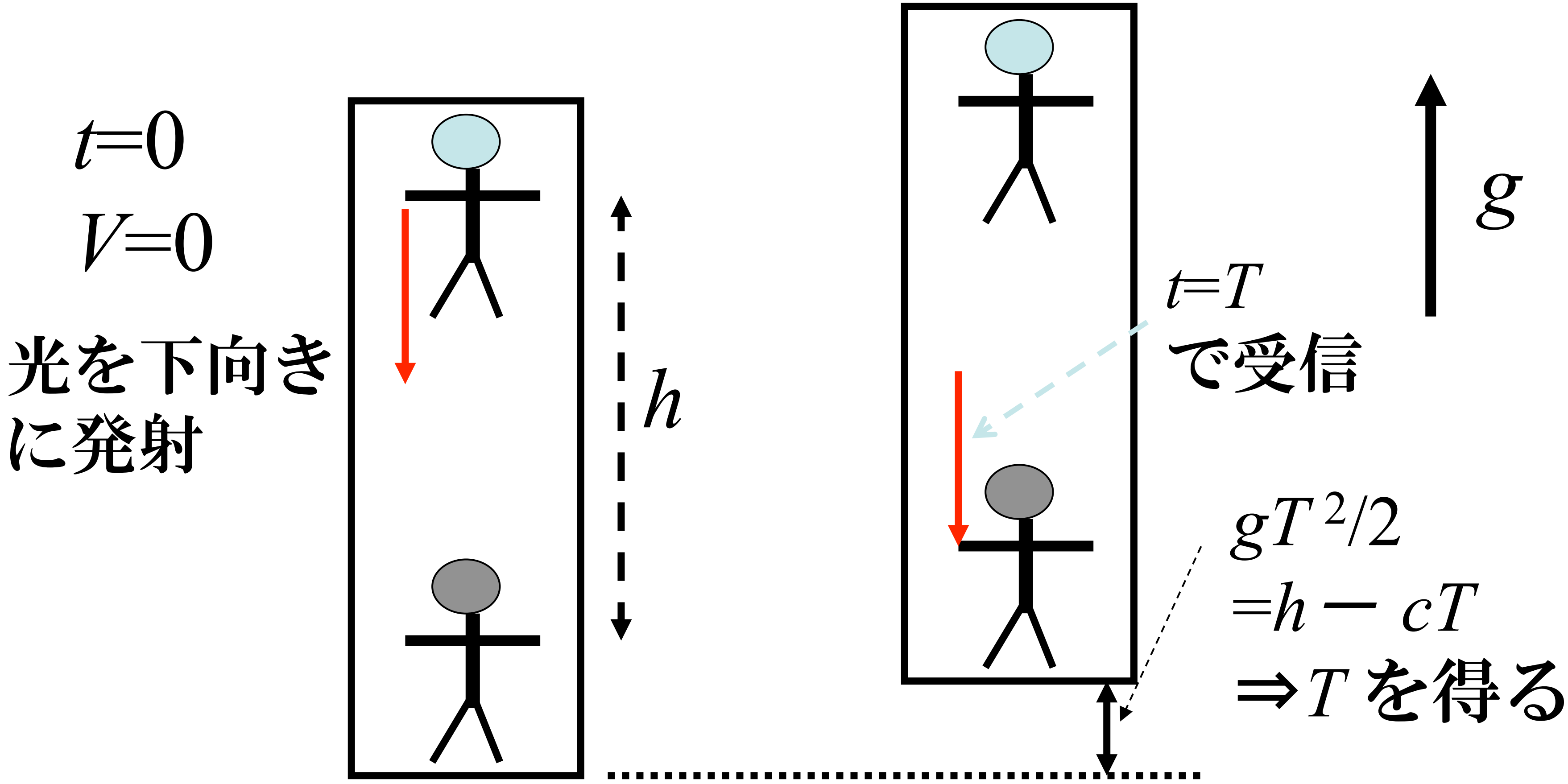
$$= \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\beta'}}\frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial f^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \underline{f^{\alpha}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\beta'}}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left(\frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\right)}$$

おまけがついてしまう

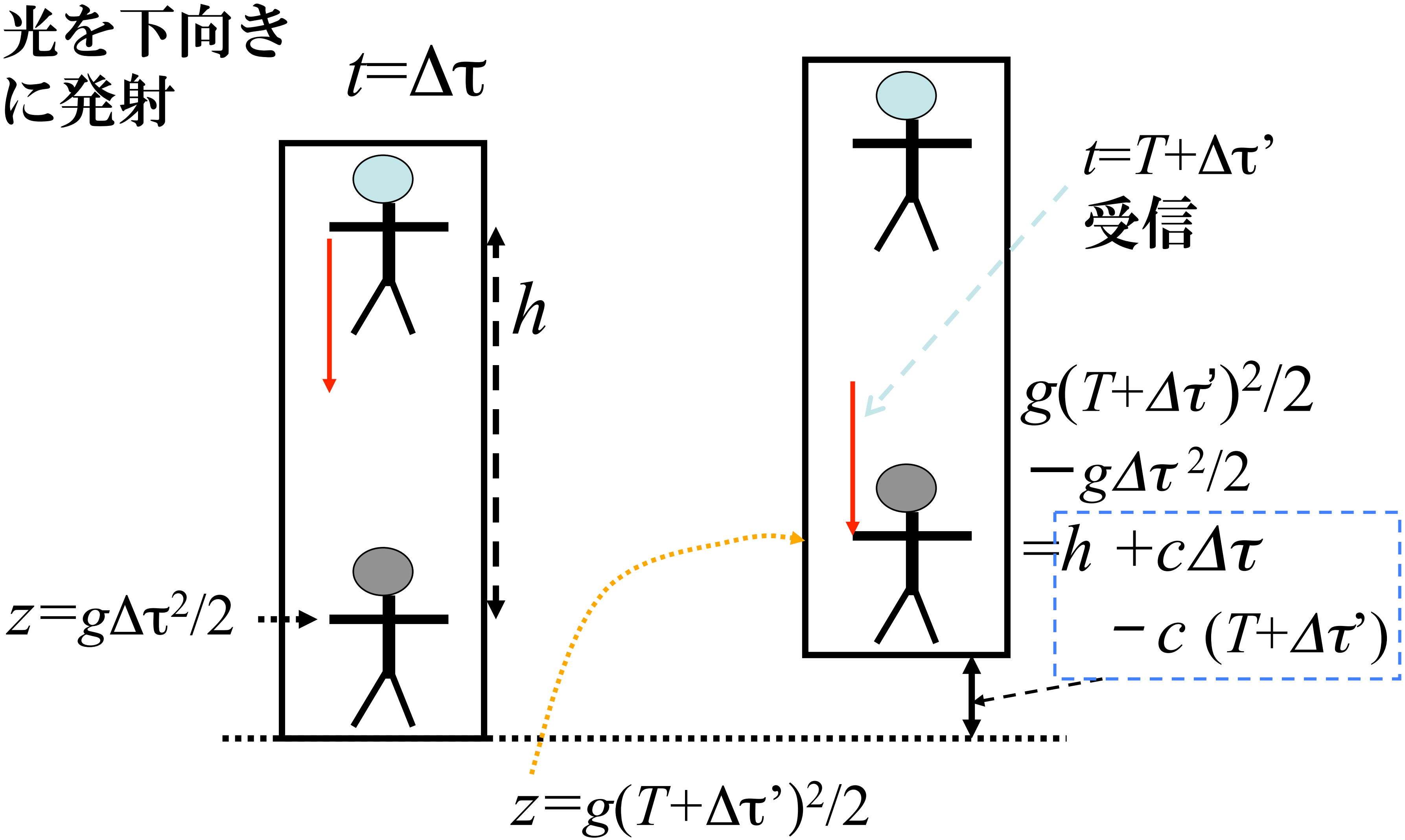
テンソルの「微分」がテンソルになるような微分が必要

時間の遅れ：等価原理の帰結

再び、ロケットを用いた思考実験
①　無重力場で加速度運動するとき



上から等しい時間間隔で光を発射。その時間間隔をΔτとする。



式を解くと、

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{g}{2}T^2 + cT - h = 0 \quad \left(\Rightarrow \ T = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 2gh}}{g} \approx \frac{h}{c} \quad \left(c^2 \gg gh\right) \right) \\ \frac{g}{2}\left[\left(T + \Delta\tau'\right)^2 - \Delta\tau^2\right] + c\left(T + \Delta\tau' - \Delta\tau\right) - h = 0 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{g}{2}\left(2T\Delta\tau' + \Delta\tau'^2 - \Delta\tau^2\right) + c\left(\Delta\tau' - \Delta\tau\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\Delta\tau' \neq \Delta\tau}$$

$$\Delta\tau' = \Delta\tau + \delta, \quad \delta \ll \Delta\tau' \approx \Delta\tau$$

$$\Rightarrow \frac{\delta}{\Delta\tau} \approx -\frac{gh}{c^2} + O\left(c^{-3}\right)$$

時間の進みが遅い

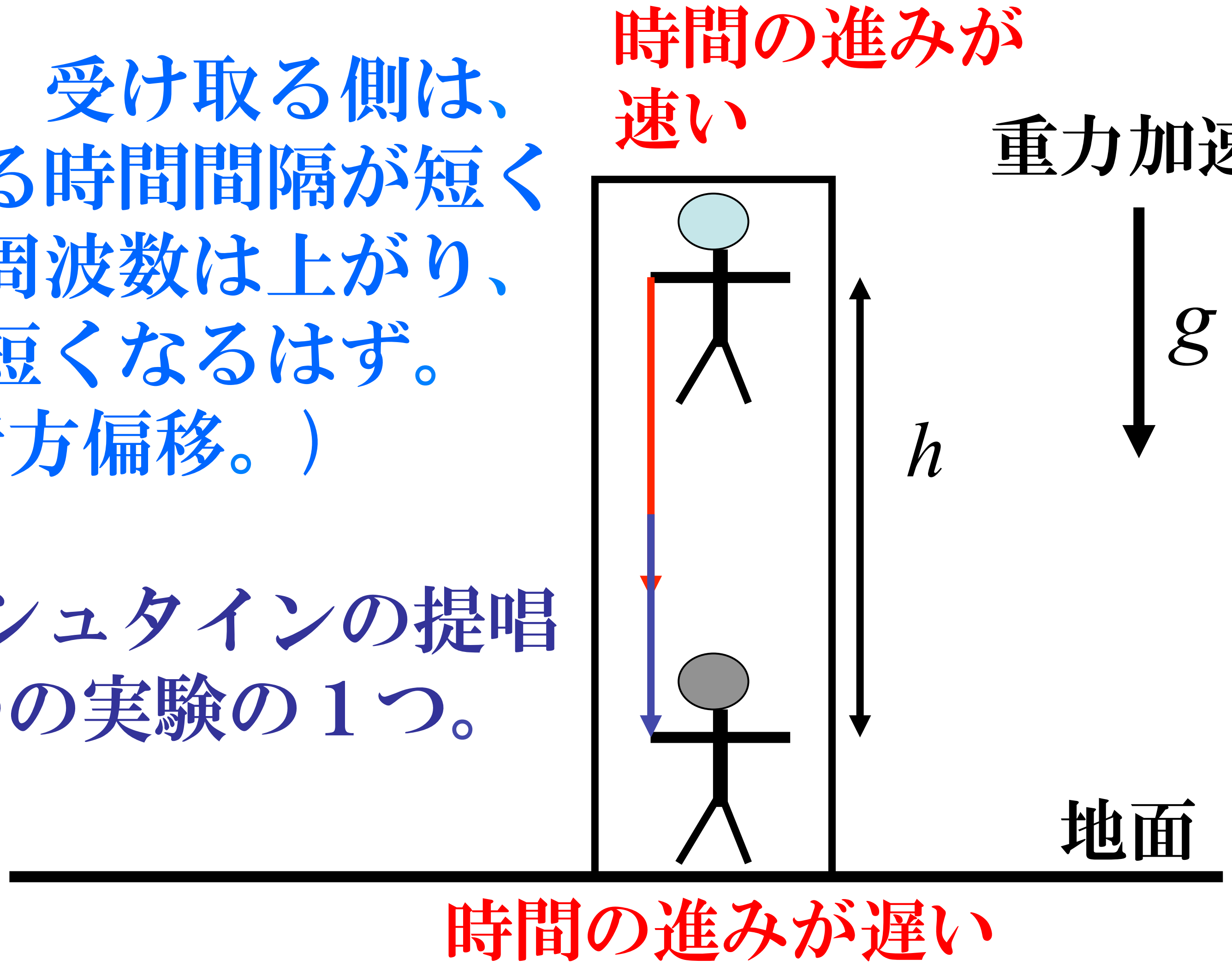
$$\therefore \Delta\tau' \approx \Delta\tau\left(1 - \frac{gh}{c^2}\right) \quad \& \quad f' \approx f\left(1 + \frac{gh}{c^2}\right)$$

受け取る間隔は短くなる　→　周波数は上がる。

②一様重力場で静止しているのと等価

同様に、受け取る側は、受け取る時間間隔が短くなり、周波数は上がり、波長も短くなるはず。（重力青方偏移。）

アインシュタインの提唱した3つの実験の１つ。



一般化

- ところで式に現れる gh は重力ポテンシャルの差
- よって一般的には

$$\Delta\tau' \approx \Delta\tau\left(1-\frac{\Delta\Phi}{c^2}\right) \quad \& \quad f' \approx f\left(1+\frac{\Delta\Phi}{c^2}\right)$$

- 例えば地球周辺では

重力赤方（青方）偏移

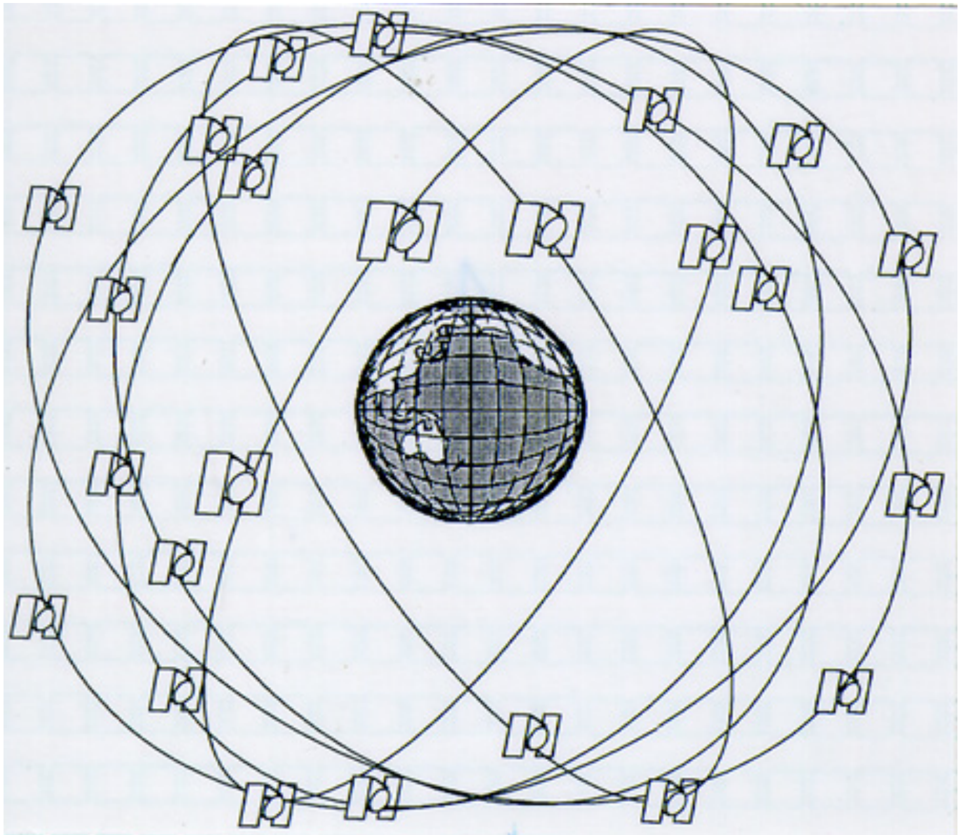
$$\Delta\boldsymbol{\tau}_u \approx \Delta\boldsymbol{\tau}_d\left[1+\frac{GM_\oplus}{c^2}\left(\frac{1}{R_u}-\frac{1}{R_d}\right)\right]$$

$$f_u \approx f_d\left[1-\frac{GM_\oplus}{c^2}\left(\frac{1}{R_u}-\frac{1}{R_d}\right)\right]$$

GPS (Global Positioning System)

- GPS: 24個の人工衛星からなる。
  それぞれが12時間で地球を１周する。
- それぞれが正確な原子時計を搭載。さらに
  一日数回地上と通信し、時計を合わせる。
- 地上から４台と常に通信できるように配置
- ４つの衛星　⇔　地上の通信時間差から、
  地上の座標(t, x, y, z)を決定
- 仮に３mの精度を要求するなら：
  ３m/c=10ナノ秒の精度が必要。軍事目的なら
  もう少し高い精度が必要。

GPS



- 12時間周期の軌道半径

$$12h = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_\oplus}};\quad M_\oplus \approx 6\times10^{24}\ \mathrm{kg}$$

地球の半径

$$\Rightarrow\quad r \approx 27000\ \mathrm{km}\ \approx 4.2R_\oplus\quad (R_\oplus \approx 6400\ \mathrm{km})$$

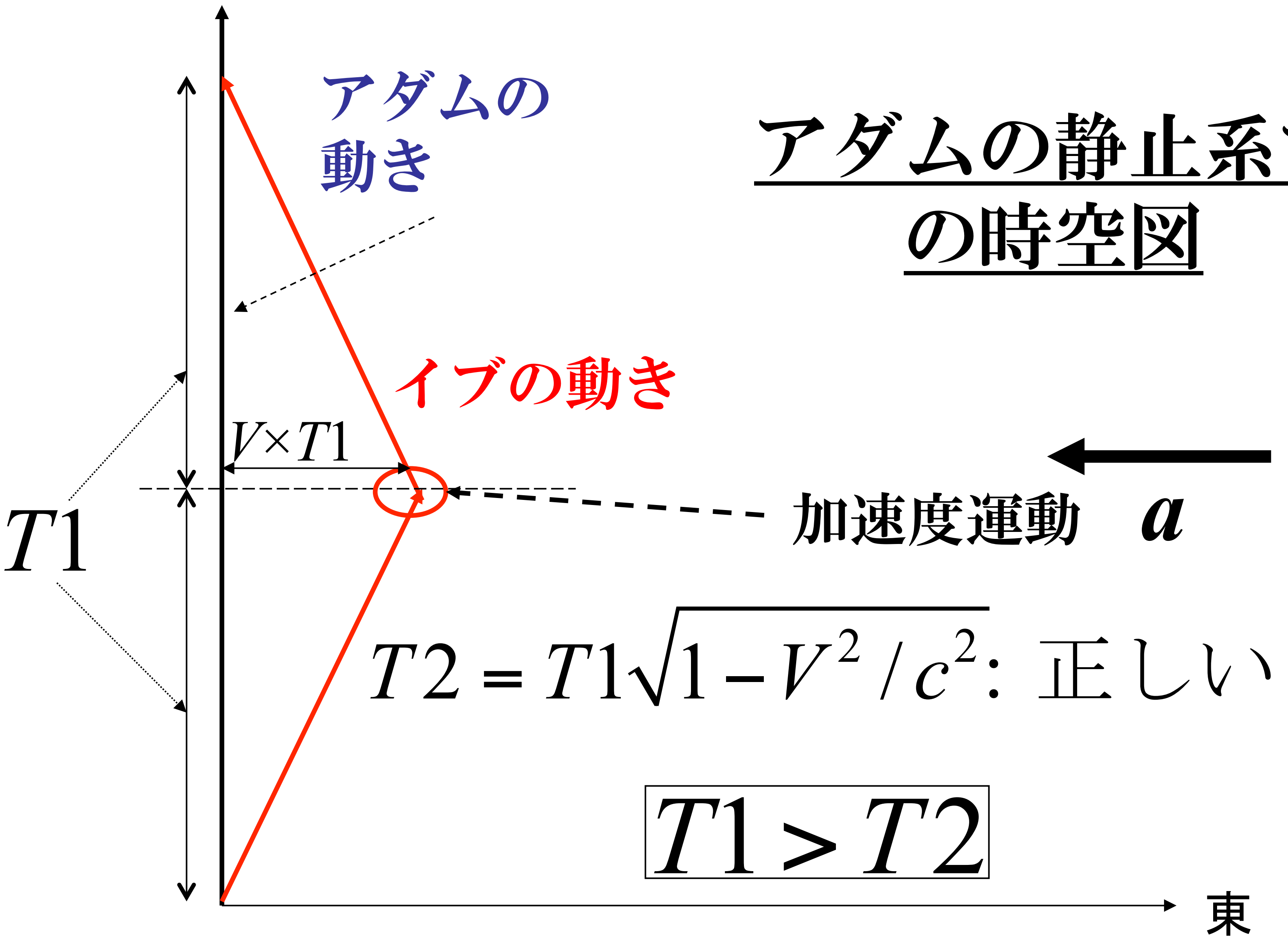
- 時間間隔の差

$$\Delta\tau_{\mathrm{GPS}} = \Delta\tau_{地上}\left[1+\frac{GM_\oplus}{c^2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_\oplus}\right)\right] \approx \Delta\tau_{地上}\left(1+\underline{3.4\times10^{-10}}\right)$$

- 小さいようで小さくない。地上で1分経過すれば、GPSでは20ナノ秒余分に時間が進む
⇒非常に大きい!
- 一般相対論的効果を知らずにGPSを作ると使い物にならない

双子のパラドクスの解

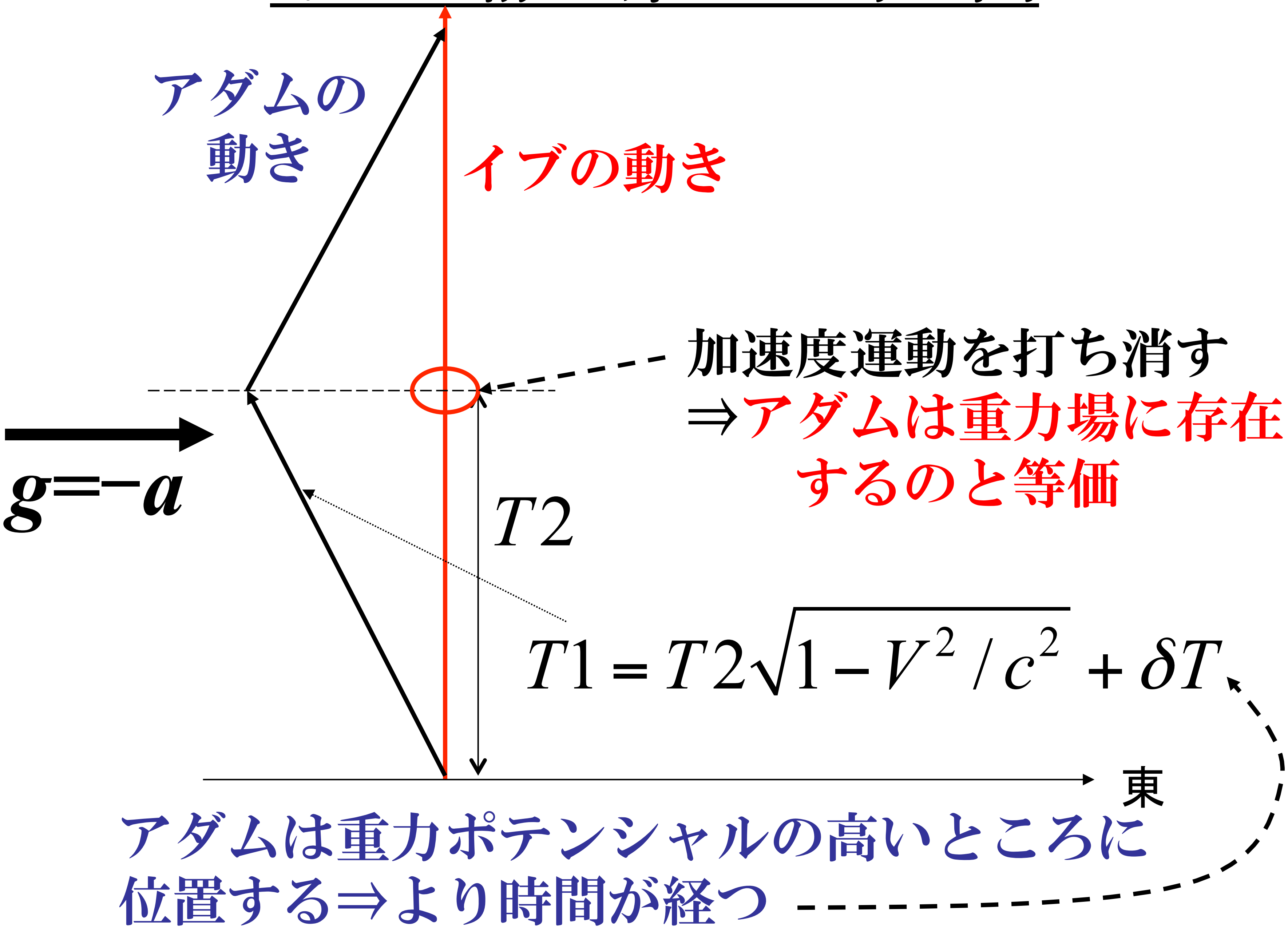
アダムの静止系での時空図



$$T2 = T1\sqrt{1-V^2/c^2}\text{: 正しい}$$

$$\boxed{T1 > T2}$$

イブの静止系での時空図



具体的計算 (参考までに)

転回点でのイブの加速時間をδtとすると、

加速度は $g = 2V/\delta t.$

イブが転回点に達するまでに進む距離は、$VT_1 \equiv L.$

イブが加速している間、イブの静止系でのアダムの経過時間

$$\delta T = \delta t \times \left(1 + \underline{\frac{gL}{c^2}}\right) = \delta t + \frac{2V}{c^2} VT_1 \xrightarrow{\delta t \to 0} \frac{2}{c^2} V^2 T_1$$

イブの片道の間にアダムの過ごす時間

$$T_1 = T_2\sqrt{1 - V^2/c^2} + \underline{\delta T/2} = T_1\left(1 - V^2/c^2\right) + \underline{T_1 V^2/c^2} = T_1$$

つじつまがあう