3　ニュートン重力理論

1. ニュートン重力理論の基本：
   慣性系とガリレイ変換不変性
2. ニュートン重力理論の定式化
3. 等価原理
4. 流体力学方程式とその基礎

3.1 ニュートン重力理論の基本

◆ニュートンの第一法則＝力がかからなければ、等速直線運動を続ける。

◆等速直線運動に見える系を「慣性系」と呼ぶ。

✧ 直線とはどんな空間の直線か?
⇒ ニュートン理論では、3次元ユークリッド空間(平坦空間)の直線。つまり、力がかからなければ、物体は空間の最短距離を進む、とも言える。

✧ 等速とはどのような時間で測った速度か?
⇒ 絶対時間当たりに進んだ距離。

• 式で書くと、慣性系で運動方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=0,\quad \frac{d^2z}{dt^2}=0$$

x, y, z は、直交座標

慣性系の特徴

- 慣性系は無数にある

- まず慣性系を1つ選ぶ。
  それが (x, y, z) で表されるとする。
  すると以下の変換で移ったものも全て慣性系：

1. 並進： $x' = x - d$
2. 回転： $x' = \cos\theta\ x - \sin\theta\ y, \quad y' = \sin\theta\ x + \cos\theta\ y$
3. 他の等速運動系： $x' = x - v\,t$

ただし、<u>時間はどの慣性系で見ても一緒</u>

⇒ 絶対時間 $t' = t$

ガリレイ変換

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - v^x t \\ y' &= y - v^y t \\ z' &= z - v^z t \\ t' &= t \end{aligned}\right\}$$

等速運動する系から、別の等速運動する系への座標変換

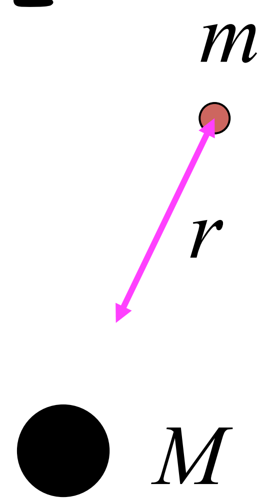
❖ ニュートン理論では“当時の実験事実”を鑑み
全ての慣性系で同じ物理法則が成り立つ
ことを原理として要求する

✓ 言い換えれば、
ニュートン理論はガリレイ変換に対して不変
⇒ 特定の慣性系は存在しない

3.2 万有引力の法則の定式化

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}=\vec{F}=-\frac{GMm}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}=-m\vec{\nabla}\Phi;$$

$$\Phi\left(\vec{x}\right)=-\frac{GM}{r}\quad\left(r=\left|\vec{x}-\vec{x}_I\right|\right)$$

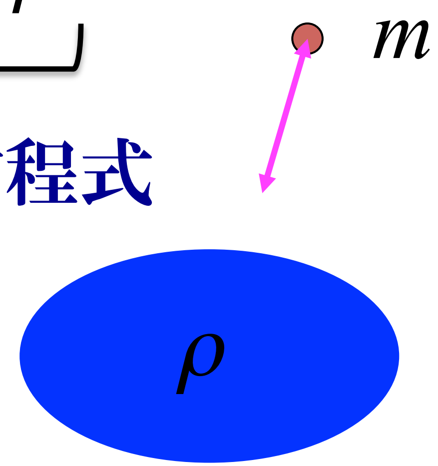


連続体の場合

$$\Phi\left(\vec{x}\right)=-\int d^3x'\frac{G\rho\left(\vec{x}'\right)}{\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|}\Rightarrow\underbrace{\Delta\Phi=4\pi G\rho}_{\text{ポアソン方程式}}$$

密度

重力ポテンシャル



注：デルタ関数 $\Delta\left(\frac{1}{\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|}\right)=-4\pi\delta^{(3)}\left(\vec{x}-\vec{x}'\right)$

ポアソン方程式はガリレイ変換不変

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - v^x t \\ y' &= y - v^y t \\ z' &= z - v^z t \end{aligned}\right\}$$ この変換に対して

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2}$$

が成り立つから。

理論の整合性が満たされている。

注：重力ポテンシャルはスカラーだから
座標系に依存しない量

例：球状の静的な星の基本方程式

$$P(r-\Delta r/2)4\pi(r-\Delta r/2)^2 - P(r+\Delta r/2)4\pi(r+\Delta r/2)^2$$

$$= \frac{GM(r)}{r^2}4\pi r^2 \Delta r \rho(r)$$

$$\Delta r \to 0:$$

$$-\frac{dP}{dr}4\pi r^2 \Delta r = \frac{GM(r)}{r^2}4\pi r^2 \Delta r \rho(r)$$

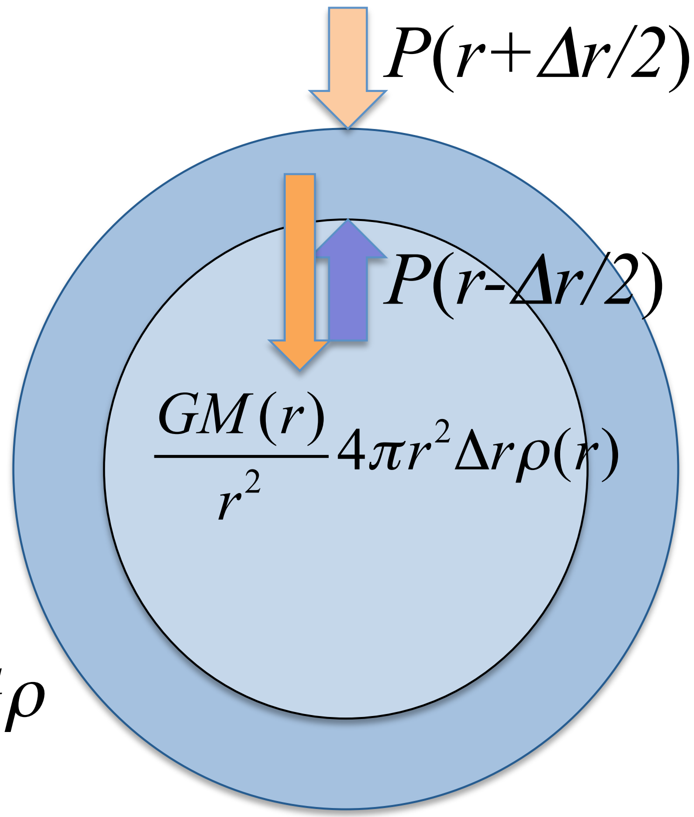
$$\Rightarrow \boxed{\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}\rho(r)}$$

$$\boxed{\Delta\Phi = 4\pi G\rho} \Leftrightarrow \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Phi}{dr}\right) = 4\pi G\rho$$

$$\boxed{M(r) = 4\pi\int \rho(r) r^2\, dr}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}P = -\rho\vec{\nabla}\Phi}$$

一般の場合に成り立つ式



3.3　等価原理：慣性質量と重力質量

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -m\vec{\nabla}\Phi \quad \cdots \quad \mathrm{EOM}$$ 運動方程式

左辺と右辺の質量は、本来意味が異なる。

左辺は慣性質量 ⇒ 加速のし難さを表す量

右辺は重力質量 ⇒ 重力場に対する反応を表す量

一般には、

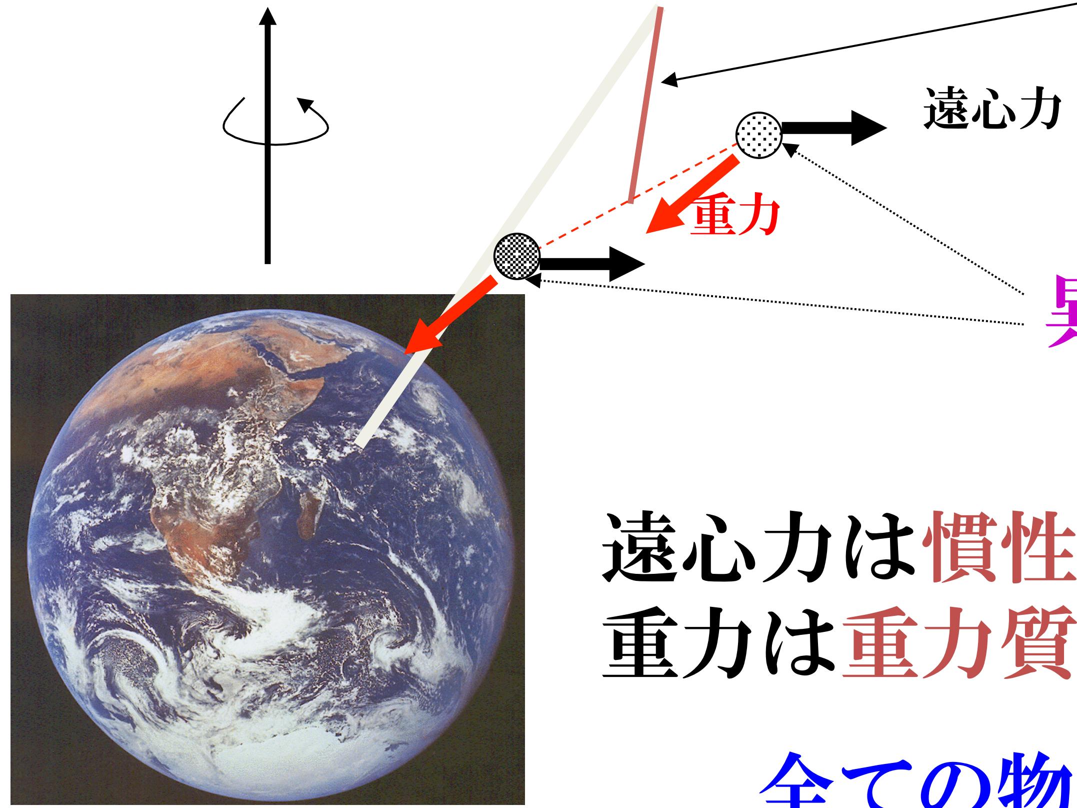
$$\boxed{m_I\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -m_g\vec{\nabla}\Phi} \quad \Leftrightarrow \quad m_I\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = q\vec{E} = -q\vec{\nabla}\phi$$

静電場中のEOM

電磁気学を思い起こせば、$m_I \neq m_g$ でよいはず。

しかし、実験事実は、$m_I = m_g$。　不思議と思うべき

エトベスの実験



遠心力は慣性質量に比例
重力は重力質量に比例

全ての物体で
慣性質量/重力質量
の比が等しければ、
棒は振れない。

振れ具合を
測って調べる

具体的数式

- 振れ方向のつりあい

$$m_I^A a^A = m_g^A g, \quad m_I^B a^B = m_g^B g$$

- 振れ度

$$\eta \equiv 2\frac{a^A - a^B}{a^A + a^B} = 2\frac{m_g^A / m_I^A - m_g^B / m_I^B}{m_g^A / m_I^A + m_g^B / m_I^B}$$

- 現在の最も正確な実験結果

$\eta \approx 2 \times 10^{-13}$ Wagner et al. (2012)

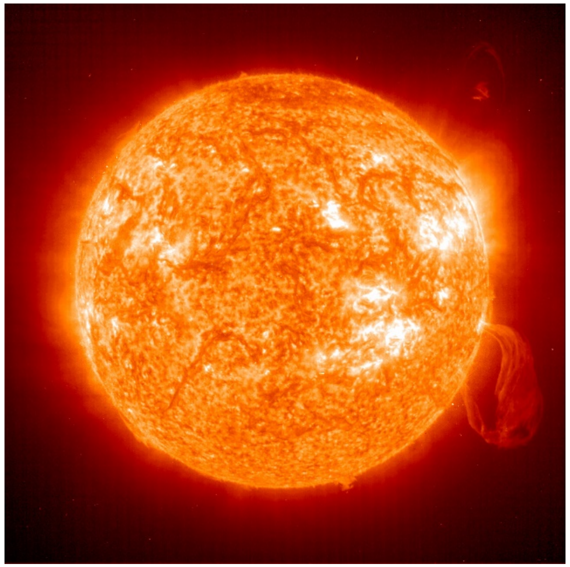
重力質量と慣性質量は高精度で等しい

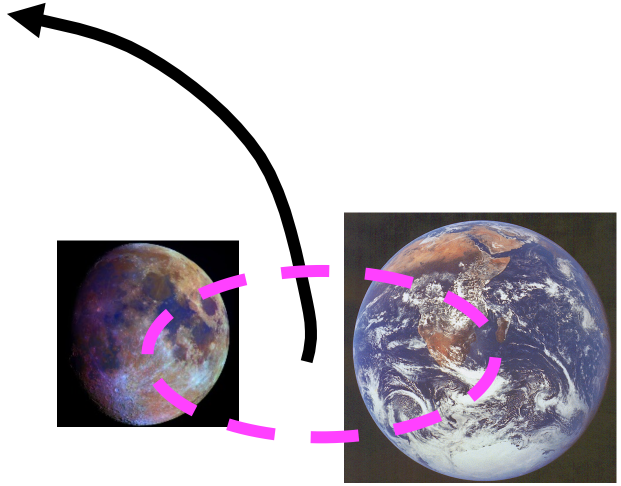
＃　ちなみにエトベスの最初の実験結果は10^{-7}程度

地球と月は同じように落ちるか?

Lunar laser ranging test

「強い等価原理」の検証実験





月も地球も太陽の周りを回っている(遠心力=重力)。

太陽重力との反応の仕方が月と地球で異なったら、
月の地球周りの軌道が変化する。

簡単のため、地球も月も太陽の重力のみで軌道が決まっているとする

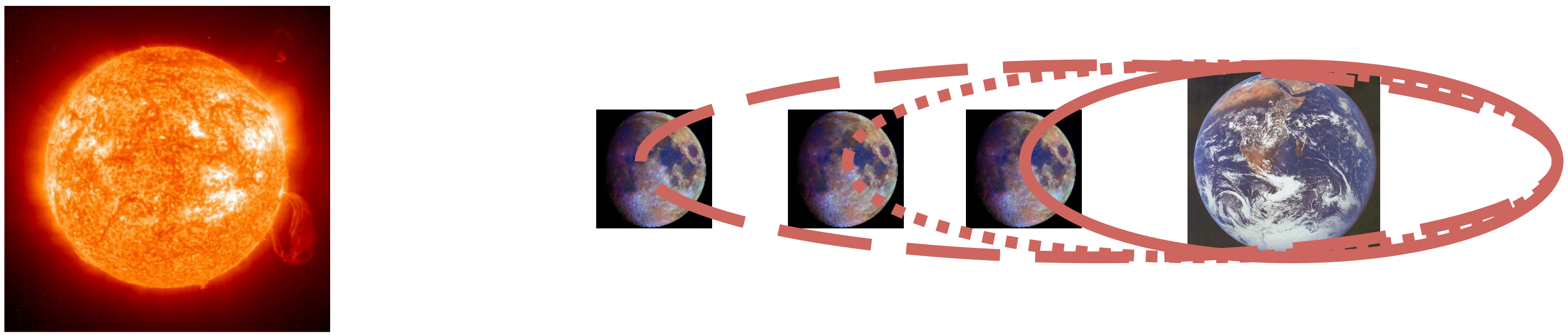
- 力の釣り合い：遠心力=重力

$$\boxed{m_I}\frac{v^2}{r} = \frac{GM_{\odot}\boxed{m_g}}{r^2} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{GM_{\odot}}{r}\frac{m_g}{m_I}$$

⇒ **公転軌道速度は、重力質量と慣性質量の比による**

＃ 遠心力は、運動方程式を回転系で書いたときに現れる慣性力。(コリオリ力も同じ。)

例えば、月の方が太陽重力に敏感に反応したら



月は太陽方向にシフトするであろう
⇒　円軌道が楕円軌道に変化する。

実際は地球に引き付けられるからもっと複雑だが、
いずれにせよ軌道は変化するはず。

Lunar laser ranging

McDonald Obs.

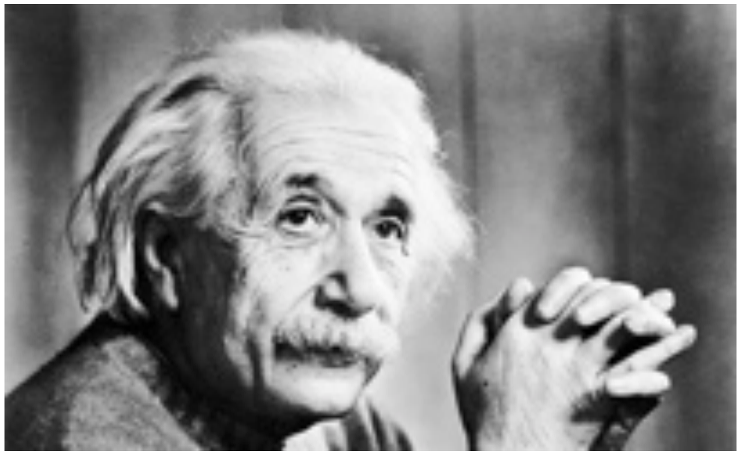
反射板の位置(アポロなどで設置)

月面の反射板

距離精度：数cmの範囲で月の軌道は不変；加速度にして1.5×10^{-13}の精度

実験結果から得られた結論

- ❖ 慣性質量と重力質量は "何故だか分からない"がおそらく等しい。
- ❖ 自己重力が重要な役割を果たす天体の場合ですら、同様に成り立つ。
  ⇒ 等しいという事実を原理として採用する
- ❖ 一般相対論ではこれを**等価原理**と呼び、 理論の骨幹とする (これは後述)



3.4 流体力学方程式とその基礎

- 多くの星は流体力学で記述される。
- 完全流体を仮定して良い場合が多い。
(粘性は考える必要がない場合が多い。)
- 以下では完全流体を仮定する。

流体力学の基本方程式⓪

0. オイラー微分とラグランジュ微分

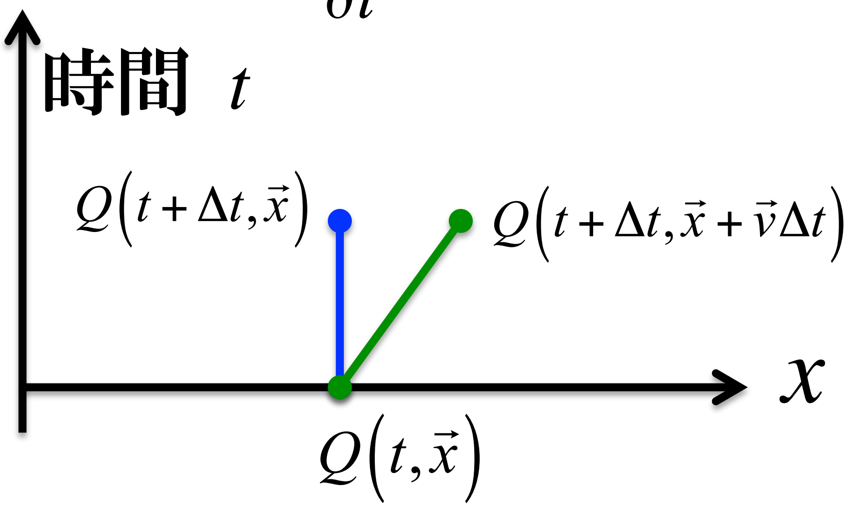
オイラー微分：ある固定点での時間微分

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Q\left(t + \Delta t, \vec{x}\right) - Q\left(t, \vec{x}\right)}{\Delta t}$$

ラグランジュ微分：流体と一緒に動く系で見た時間微分

$$\frac{dQ}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Q\left(t + \Delta t, \vec{x} + \vec{v}\Delta t\right) - Q\left(t, \vec{x}\right)}{\Delta t} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right) Q$$

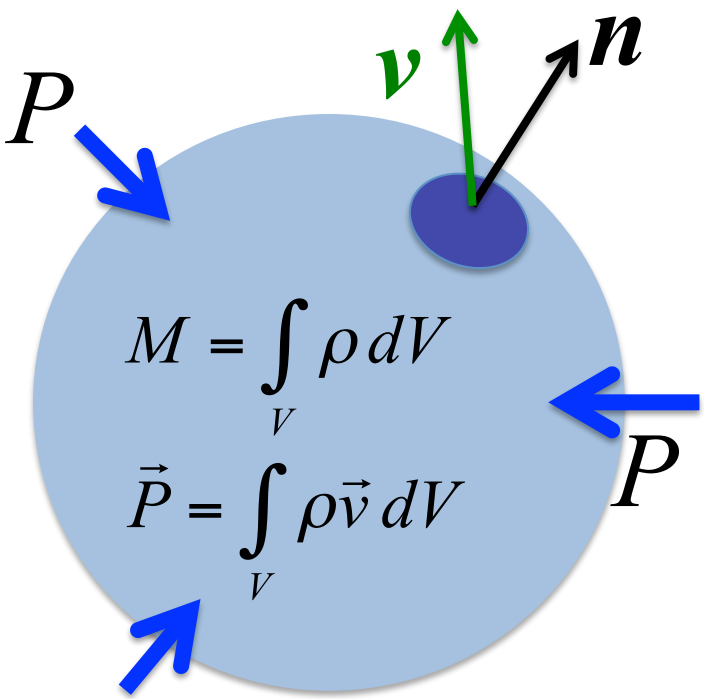
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{v}$$



流体力学の基本方程式①

1. 連続の式(質量保存則)：

ρ は密度, v は速度



P: 圧力

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho \, dV = -\oint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS$$

$$\Rightarrow \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\int_V \vec{\nabla} \cdot \left(\rho \vec{v}\right) dV$$

任意の領域に対して成立するので

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\rho \vec{v}\right) = 0} \quad \text{連続の式}$$

$$\Rightarrow \int dV \frac{\partial \rho}{\partial t} + \int dV \vec{\nabla} \cdot \left(\rho \vec{v}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} M = \int dV \dot{\rho} = 0 \quad \text{質量保存}$$

流体力学の基本方程式②

2. オイラーの式（運動方程式）：

ラグランジュ微分

$$\frac{d}{dt}\int_V \vec{P}\,dV = -\oint_S P\cdot\vec{n}\,dS - \int_V \rho\vec{\nabla}\Phi\,dV$$

ここで
$$\frac{d}{dt}\int_V \vec{P}\,dV = \frac{d}{dt}\int_V \rho\vec{v}\,dV = \int_V \rho\frac{d\vec{v}}{dt}dV$$

$$= \int_V \rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v}\right)dV \qquad \left[Note: \frac{d}{dt}\left(\rho dV\right) = 0\right]$$

$$\therefore \int_V \rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v}\right)dV = -\int_V \vec{\nabla}P\,dV - \int_V \rho\vec{\nabla}\Phi\,dV$$

任意の領域に対して成立するので

$$\Rightarrow \boxed{\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \rho\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v} = -\vec{\nabla}P - \rho\vec{\nabla}\Phi} \qquad \text{オイラーの式}$$

流体力学の基本方程式③

3. エネルギー方程式(エネルギー保存則)：

熱力学第一法則 (ラグランジュ微分で書かれている)

$$d\varepsilon = -Pd\left(\frac{1}{\rho}\right) \Rightarrow \rho\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{P}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = -P\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$$

$$\Rightarrow \quad \rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \rho\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\varepsilon = -P\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$$

εは単位質量当たりの内部エネルギー

$$e \equiv \varepsilon + \frac{v^2}{2}$$

オイラー方程式を用いる

$$\rho\frac{\partial e}{\partial t} + \rho\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)e + \vec{\nabla}\cdot\left(P\vec{v}\right) = -\rho\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\Phi$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial\left(\rho e\right)}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\left[\left(\rho e + P\right)\vec{v}\right] = -\rho\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\Phi}$$

エネルギー保存則

エネルギー方程式を体積積分すると導出される：

$$\int dV \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \int dV \vec{\nabla}\cdot\left[(\rho e + P)\vec{v}\right] = -\int dV \rho\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\Phi$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\frac{d}{dt}\int dV \rho e \qquad + \qquad 0 \qquad = -\int dV \rho \frac{d\vec{x}}{dt}\cdot\vec{\nabla}\Phi$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

これは非自明

$$\frac{d}{dt}(U + T) \qquad = \qquad -\frac{d}{dt}W$$

$$\therefore \frac{dE}{dt} = 0, \qquad E = U + T + W$$

エネルギー保存則

$$U = \int dV \rho\varepsilon, \qquad T = \int dV \frac{1}{2}\rho v^2, \qquad W = \int dV \frac{1}{2}\rho\Phi$$

内部エネルギー　　運動エネルギー　　重力ポテンシャルエネルギー

ビリアル定理

オイラーの式に x をかけて体積積分する:

$$\int dV \rho \vec{x} \frac{d\vec{v}}{dt} = -\int dV \vec{x} \cdot \vec{\nabla} P - \int dV \rho \vec{x} \vec{\nabla} \Phi$$

$$\vec{x} \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{x} \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\vec{x} \frac{d\vec{x}}{dt} \right) - \vec{v}^2 = \frac{1}{2} \frac{d^2 \vec{x}^2}{dt^2} - \vec{v}^2$$

$$\Rightarrow \int dV \rho \vec{x} \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \int \rho \vec{x}^2 \, dV - 2 \int \rho v^2 \, dV$$

Here, $\begin{cases} \int dV \vec{x} \cdot \vec{\nabla} P = -\int dV P \vec{\nabla} \cdot \vec{x} = -3 \int P \, dV \equiv -3\Pi \\ \int dV \rho \vec{x} \vec{\nabla} \Phi = W \end{cases}$ これは非自明

$$\therefore \quad \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \int \rho \vec{x}^2 \, dV = 2T + 3\Pi + W$$

定常な系なら
左辺はゼロ

非自明部分の説明

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho \quad \Rightarrow \quad \Phi(x) = -G\int \frac{\rho(y)}{|\vec{x}-\vec{y}|} d^3 y$$

$$\int d^3 x \rho \vec{x}\cdot\vec{\nabla}\Phi = -G\iint d^3x\ d^3y\ \rho(x)\rho(y)\vec{x}\cdot\frac{\vec{x}-\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|^3} = \frac{1}{2}\left(\text{original} + (x \leftrightarrow y)\right)$$

$$= -\frac{1}{2}G\iint d^3x\ d^3y\ \rho(x)\rho(y)(\vec{x}-\vec{y})\cdot\frac{\vec{x}-\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|^3}$$

$$= -\frac{1}{2}G\int d^3x\rho(x)\int d^3y \frac{\rho(y)}{|\vec{x}-\vec{y}|} = \frac{1}{2}\int d^3x\rho(x)\Phi(x) = W$$

$$\int d^3x\rho\frac{d\vec{x}}{dt}\cdot\vec{\nabla}\Phi = -G\iint d^3x\ d^3y\ \rho(x)\rho(y)\frac{d\vec{x}}{dt}\cdot\frac{\vec{x}-\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|^3}$$

$$= -\frac{1}{2}G\iint d^3x\ d^3y\ \rho(x)\rho(y)\frac{d(\vec{x}-\vec{y})}{dt}\cdot\frac{\vec{x}-\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|^3}$$

$$= -\frac{1}{2}G\iint d^3x\ d^3y\ \rho(x)\rho(y)\frac{d}{dt}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} \qquad \text{Here, } \frac{d}{dt}\left[d^3x\rho(x)\right] = 0$$

$$= -\frac{1}{2}G\frac{d}{dt}\iint d^3x\ d^3y\ \rho(x)\rho(y)\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} = \frac{dW}{dt}$$

定常な星に成り立つ関係

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\int \rho \vec{x}^2\, dV = 2T + 3\Pi + W = 0$$

$$\Rightarrow \quad E = U + T + W = U - 3\Pi - T$$

$$\text{Assume ideal fluid: } P = (\Gamma - 1)\rho\varepsilon$$

$$\Pi = 3\int P\, dV = 3(\Gamma - 1)U$$

$$\Rightarrow \quad E = (4 - 3\Gamma)U - T$$

常温で
単原子理想気体なら
Γ=5/3
２原子分子なら
Γ=7/5

$$U > 0,\ \ T \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{if } T = 0,\ \ E \leq 0 \ \text{ only for } \Gamma \geq \frac{4}{3}$$

束縛系と存在できるのは、限られた状態方程式のときのみ

自然界では、Γ～4/3となる場合が数多くあり、不安定現象が起こるゆえに、現象が多様になる。

星の安定性：簡単のため球対称を仮定

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{GM(r)}{r^2} : \quad v \equiv \frac{dr}{dt}$$

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 \, dr'$$

$$\text{ideal fluid + adiabatic: } P = (\Gamma - 1)\rho\varepsilon \;\; \& \;\; d\varepsilon = -P d\rho^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad P = K\rho^{\Gamma} : \Gamma = \text{adiabatic constant}$$

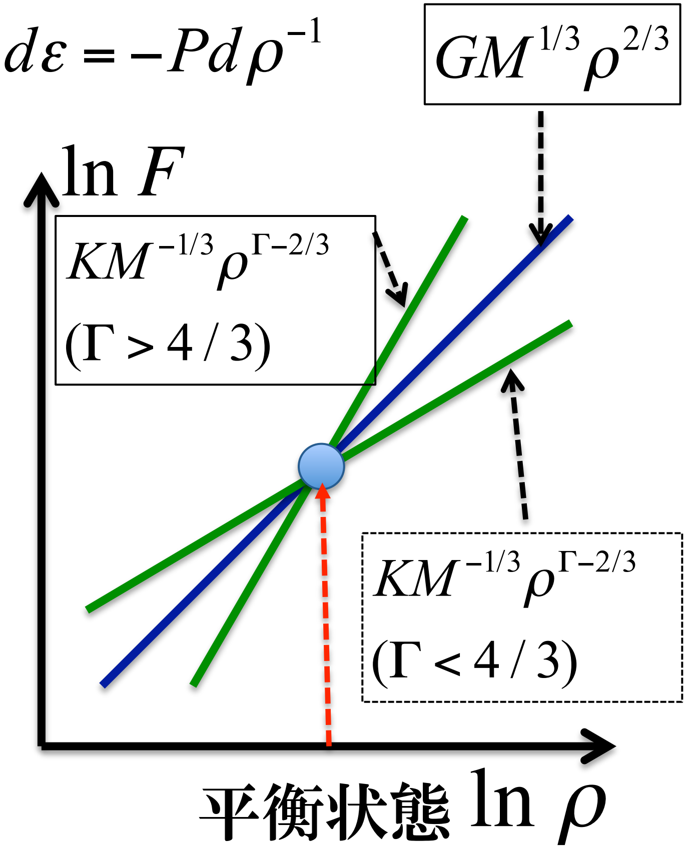
次元解析

$$M \sim \rho R^3 \;\; \Rightarrow \;\; GM/r^2 \sim GM^{1/3}\rho^{2/3}$$

$$(\partial P/\partial r)/\rho \sim -K\rho^{\Gamma-1}/R \sim -KM^{-1/3}\rho^{\Gamma-2/3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} \sim KM^{-1/3}\rho^{\Gamma-2/3} - GM^{1/3}\rho^{2/3}$$

$\Gamma > 4/3$ の場合安定



Γ=4/3の星の特徴

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{GM(r)}{r^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (\sim KM^{-1/3}\rho^{\Gamma-2/3}) - (\sim GM^{1/3}\rho^{2/3}) = 0$$

$$\text{For} \quad \Gamma = \frac{4}{3} \quad [\sim KM^{-1/3} - (\sim GM^{1/3})]\rho^{2/3} = 0$$

$$\Rightarrow \quad M \sim \left(\frac{K}{G}\right)^{3/2}$$ 正確には $$M = \left(\frac{2.7477K}{G}\right)^{3/2}$$

質量が決まってしまう(Kの値で決まる)。
最も重要な重力の性質の1つ。