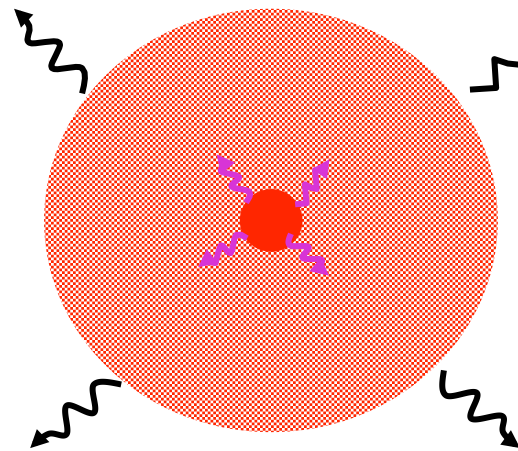


# 4 恒星の進化と終末の概略

- 恒星の定義：核融合反応を起こしている星
- 基本的には、**温度が約1千万度**を超えると、水素核燃焼が始まる。水素の核燃焼反応経路は、いろいろあるが、詳細を無視すれば、
$$4\text{H} \rightarrow \text{He} + 2\text{e}^+ + 2\nu + \text{光 (熱, 26 MeV)}$$
- 水素の核燃焼を起こしている恒星は“**主系列星**”
- 木星は太陽の0.1%の質量だが、組成は主に水素とヘリウムで太陽と大きく違うわけではない。しかし核融合反応を起こさない
- **どのような場合に核融合反応が起きるのか？**

# 恒星とガス惑星

- 恒星は表面からの放射量と核融合による中心でのエネルギー生成量がつりあっている



$L_s$ : 表面からの放射光度

$L_c$ : 中心のエネルギー生成率

定常な星  $L_s = L_c$

- ガス惑星も表面から放射し冷え、現在の状態に至ったと考えられる。どうやって平衡状態を保っているのか？つまり圧力源は？

## もしも熱源がなかったら…

$$L_{\odot} \approx 4\pi\sigma_s R_{\odot}^2 T_s^4 = 3.84 \times 10^{26} \text{ J/s} \quad \text{太陽光度}$$

$$U = \frac{M_{\odot}}{m_{\text{H}}} \times \frac{3k_B T}{2} \times 2 (\because \text{H}^+, e^-) \approx 5 \times 10^{41} \left( \frac{T}{10^7 \text{ K}} \right) \text{ J}$$

太陽のもつ内部エネルギー

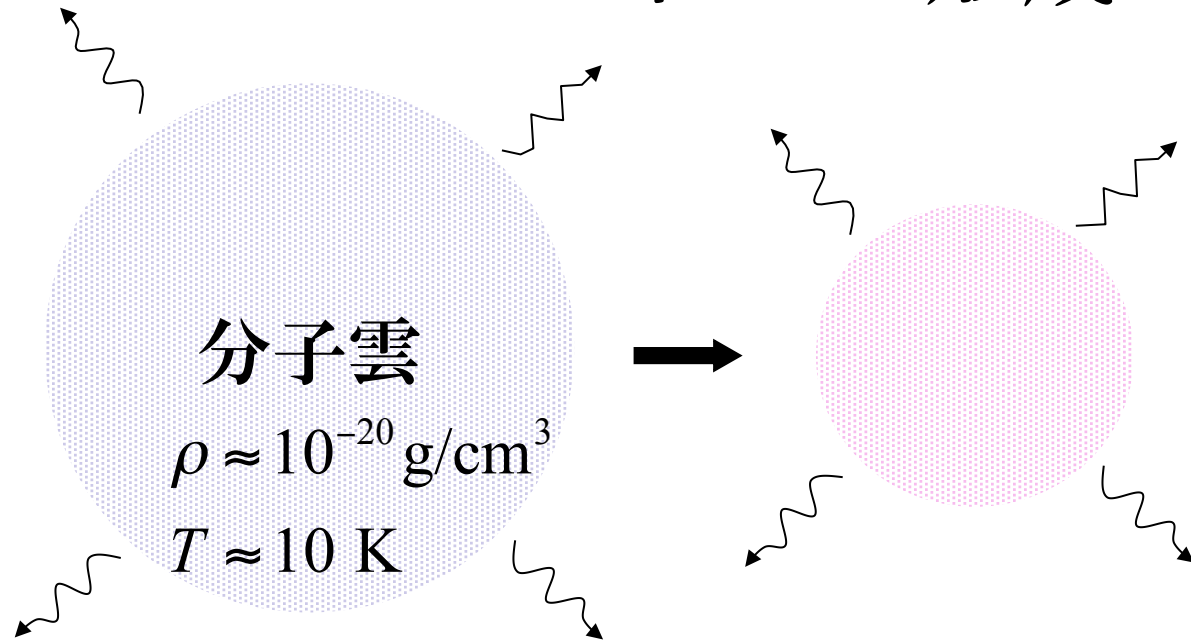
$$\therefore \tau = \frac{U}{L_{\odot}} \approx 4.1 \times 10^7 \text{ yr}$$

約4千万年で冷え切って、潰れてしまう  
(ケルビン・ヘルムホルツ時間と呼ばれる)

$$\text{cf. } W = \frac{GM_{\odot}^2}{R_{\odot}} \approx 3.8 \times 10^{41} \text{ J} \sim U$$

$$\left( M_{\odot} = 2 \times 10^{30} \text{ kg}, R_{\odot} = 7 \times 10^5 \text{ km} \right)$$

# 恒星の形成



やがて中心が十分に密になり核が出来る。

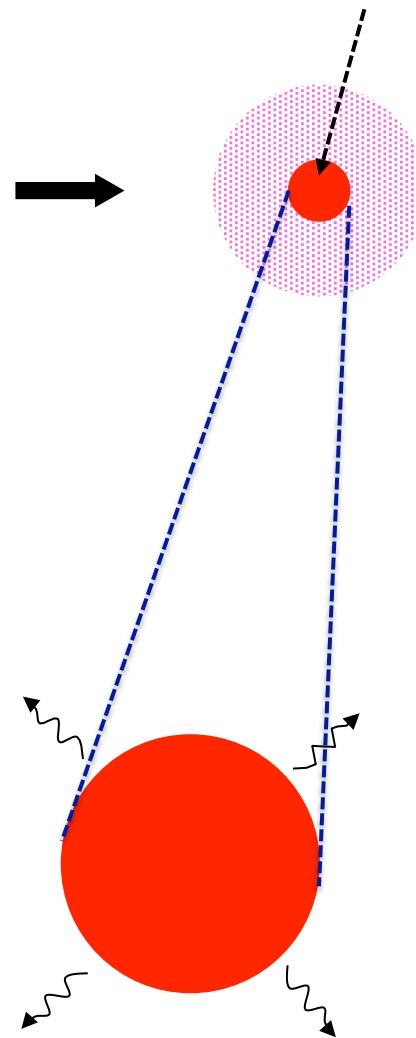
放射冷却⇒収縮

全てが恒星になるわけではない(例、木星)



?

放射冷却⇒収縮、温度上昇



# 星の圧力源：密度が原子核密度以下の場合

## ・ 3つの主要な源

1. ガス圧

2. 輻射圧

3. 電子の縮退圧

$$P = (\Gamma - 1) \rho \varepsilon = \frac{kT \rho (1 + \mu_e^{-1})}{m_u}$$

$\mu_e$  1電子  
当たりの  
バリオン数

$$P = \frac{1}{3} a T^4$$

$$P = P(\rho) \rightarrow \begin{cases} \frac{3^{2/3} \pi^{4/3} \hbar^2}{5 m_e m_u^{5/3} \mu_e^{5/3}} \rho^{5/3} & \rho \ll 10^6 \text{ g/cm}^3 \\ \frac{3^{1/3} \pi^{2/3} \hbar c}{4 m_u^{4/3} \mu_e^{4/3}} \rho^{4/3} & \rho \gg 10^6 \text{ g/cm}^3 \end{cases}$$

温度はフェルミエネルギーよりも低いと仮定

- ・ 太陽程度の質量の恒星は、ガス圧が主体。
- ・ 質量が軽いと、電子の縮退圧が効いてくる。
- ・ 質量が重いと、輻射圧が効いてくる。

# 太陽といえども電子の縮退圧が結構効く

$$\frac{P_{\text{deg}}}{P_{\text{gas}}} = \frac{1}{kT(1+\mu_e^{-1})} \frac{3^{2/3} \pi^{4/3} \hbar^2}{5m_e m_u^{2/3} \mu_e^{5/3}} \rho^{2/3} \approx 0.1 \left( \frac{T}{10^7 \text{ K}} \right)^{-1} \left( \frac{\rho}{10^2 \text{ g/cm}^3} \right)^{2/3}$$

電子は非相対論的

木星は、中心温度が約15000Kで  
中心密度が40g/cm<sup>3</sup>。  
明らかに縮退圧が優っている

# ガス圧で支えている場合

簡単のため水素とヘリウムプラズマを仮定すると

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM\rho}{r^2}, \quad P \approx \frac{1.875\rho k_B T}{m} \quad m \text{ は原子質量定数}$$

$$\Rightarrow \frac{P_c}{R} \sim \frac{GM\bar{\rho}}{R^2} \left( \bar{\rho} = \frac{M}{4\pi R^3 / 3} \sim \frac{M}{R^3} \right)$$

$$\Rightarrow P_c \sim GM^{2/3} \bar{\rho}^{4/3}$$

$$\Rightarrow T_c \sim \frac{GM^{2/3} \bar{\rho}^{1/3} m}{k_B}$$

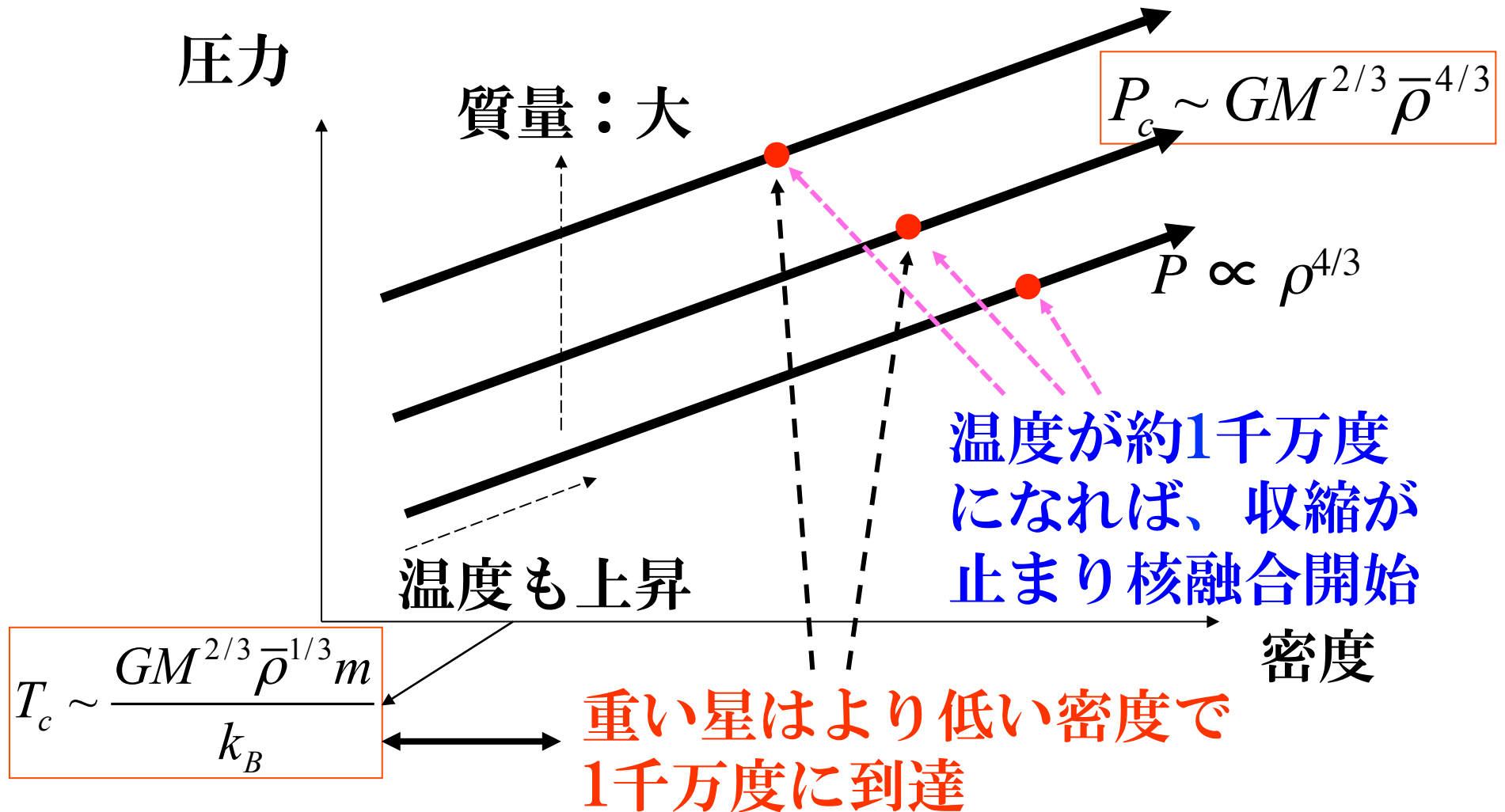
温度が同じならば、  
質量が大きい星の  
方が密度が低い

太陽：  $M=2 \times 10^{33}$  g、平均密度 =  $1.4$  g/cm<sup>3</sup>

$$m=1.66 \times 10^{-24}$$
 g

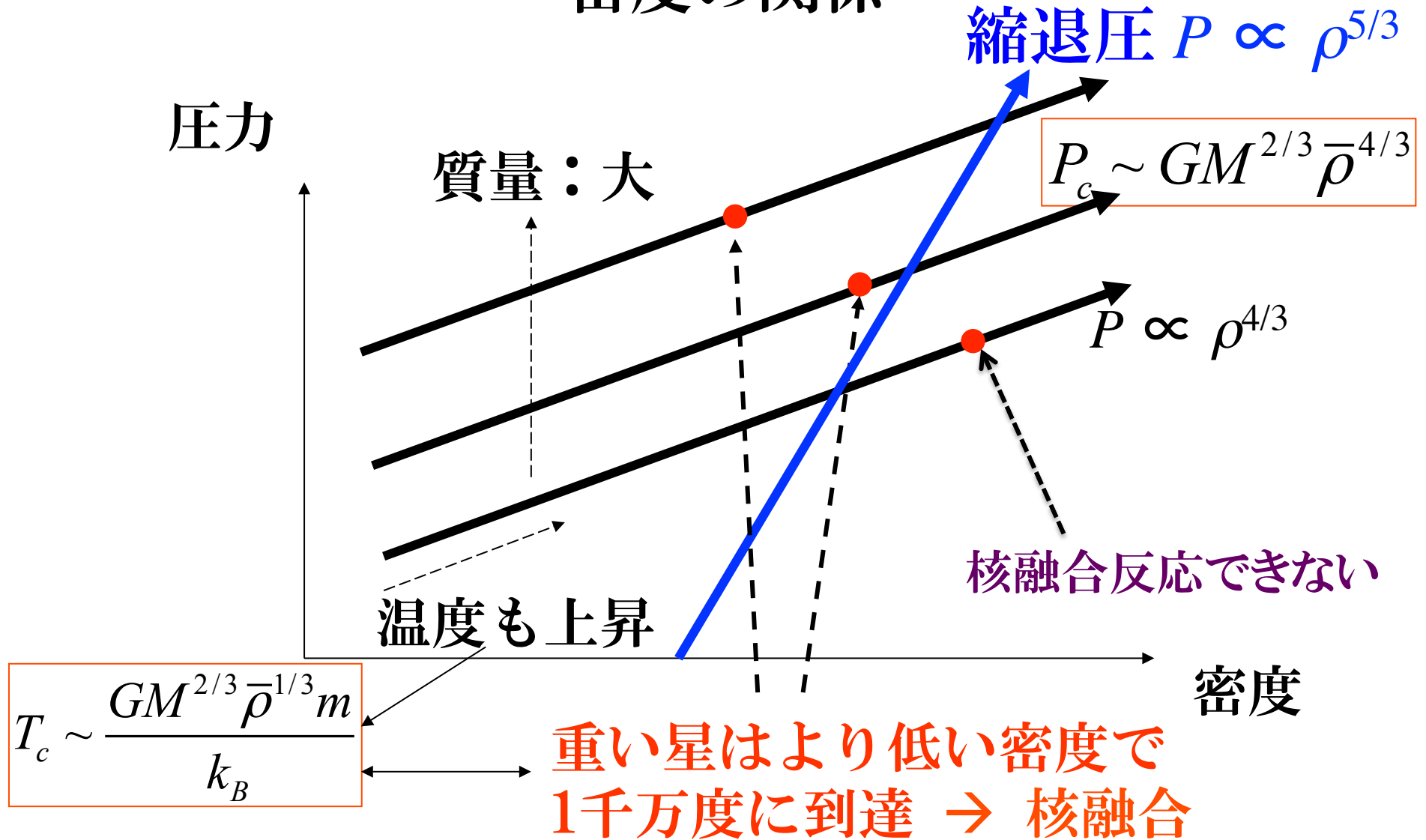
$\Rightarrow T_c \sim 1$  千万度

# ガス圧で支えている星の収縮による圧力と密度の関係





# ガス圧で支えている星の収縮による圧力と密度の関係



# 恒星質量の下限のまとめ

- ・ 質量が十分に大きくない場合、温度が十分に上がるまで収縮する前に縮退圧が効いてしまう  
→ 1千万度まで温度が上がらず、核融合反応が起こらない
- ⇒ 縮退圧で自己重力を支える星 = 褐色矮星になる。

質量の閾値 = 太陽の0.08倍

# 最小恒星質量の近似的導出

$$P_{\text{deg}} = P_{\text{gas}} \Rightarrow \frac{3^{2/3} \pi^{4/3} \hbar^2}{5m_e m_u^{5/3} \mu_e^{5/3}} \rho^{5/3} = \frac{(1 + \mu_e^{-1}) k_B T \rho}{m_u}, \quad \mu_e^{-1} \approx 0.875$$

$$\Rightarrow \rho^{2/3} = \frac{5m_e m_u^{2/3} (1 + \mu_e^{-1}) k_B T}{3^{2/3} \pi^{4/3} \hbar^2} \mu_e^{5/3}$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM\rho}{r^2} \Rightarrow \frac{P_c}{R} \sim \frac{GM\rho_c}{R^2} : P_c \approx 2 \times \frac{(1 + \mu_e^{-1}) \rho_c k_B T_c}{m_u} = 2 \times \frac{(1 + \mu_e^{-1}) \bar{\rho} k_B T_c}{m_u} \alpha$$

$$P_c \sim \frac{GM\rho_c}{R} = GM^{2/3} \bar{\rho}^{4/3} \alpha \left( \frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} \quad \left( \because \bar{\rho} = \frac{M}{4\pi R^3 / 3} \right)$$

$$\Rightarrow k_B T_c \sim \frac{GM^{2/3} \bar{\rho}^{1/3} m_u \left( \frac{4\pi}{3} \right)^{1/3}}{2(1 + \mu_e^{-1})} = \frac{GM^{2/3} m_u \left( \frac{4\pi}{3} \right)^{1/3}}{2(1 + \mu_e^{-1})} \left[ \frac{5m_e m_u^{2/3} (1 + \mu_e^{-1}) k_B T_c}{3^{2/3} \pi^{4/3} \hbar^2} \mu_e^{5/3} \right]^{1/2}$$

$$\Rightarrow M \sim (k_B T_c)^{3/4} \frac{2^{3/2} 3^{1/2} \pi \hbar^{3/2} (1 + \mu_e^{-1})^{3/4}}{5^{3/4} G^{3/2} m_u^2 m_e^{3/4}} \left( \frac{3\alpha}{4\pi} \right)^{1/2} \mu_e^{-5/4} \quad \text{Note: } \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2.176 \times 10^{-5} \text{ g}$$

プランク質量

$$= \frac{(18\pi\alpha)^{1/2} (1 + \mu_e)^{3/4}}{5^{3/4} (m_u \mu_e)^2} \left( \frac{k_B T_c}{m_e c^2} \right)^{3/4} \left( \frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2} \approx 0.12 M_{\odot} \left( \frac{T_c}{10^7 \text{ K}} \right)^{3/4} \left( \frac{\alpha}{6} \right)^{1/2}$$

# 恒星質量の上限

- ガス圧と輻射圧の比は

$$\frac{P_{\text{gas}}}{P_{\text{rad}}} = \frac{1.875\rho k_B T / m}{aT^4 / 3} = \frac{45\rho k_B}{8amT^3}$$

- ガス圧で支えられた星の釣り合いは

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM\rho}{r^2} \Rightarrow \frac{P_c}{R} \sim \frac{GM\rho_c}{R^2} \left( \rho_c = \alpha\bar{\rho} = \frac{\alpha M}{4\pi R^3 / 3} \right)$$

$$\Rightarrow P_c \sim \alpha \left(4\pi / 3\right)^{1/3} GM^{2/3} \bar{\rho}^{4/3}$$

$$P_{\text{gas}} = P_{\text{rad}} \Rightarrow P_c \sim \alpha \left(4\pi / 3\right)^{1/3} GM^{2/3} \left(45k_B \alpha / 8am\right)^{-4/3} T_c^4$$

$$P_c = 2P_{\text{rad}} \Rightarrow 2a / 3 \sim \alpha \left(4\pi / 3\right)^{1/3} GM^{2/3} \left(45k_B \alpha / 8am\right)^{-4/3}$$

$$\Rightarrow M \sim \sqrt{3\alpha / 4\pi a} \left(2 / 3G\right)^{3/2} \left(45k_B / 8m\right)^2 = 143M_{\odot} \left(\frac{\alpha}{54}\right)^{1/2}$$

## ゆえ、重い恒星は、輻射圧で支えられるようになる

- 1バリオン当たりの輻射のエントロピーは熱力学第一法則より

$$d\left(\frac{aT^4}{n}\right) = -\frac{1}{3}aT^4 d\left(\frac{1}{n}\right) + Tds \Rightarrow s_\gamma = \frac{4amT^3}{3\rho}$$

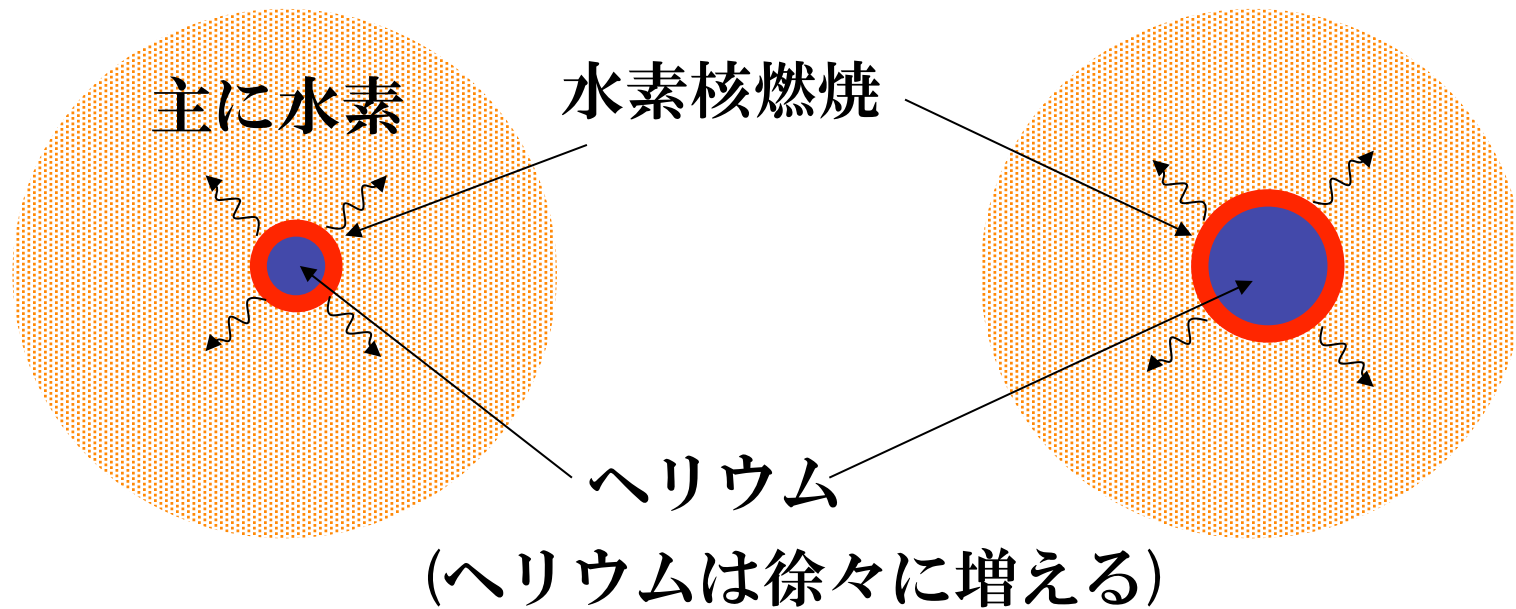
重い恒星は強い自己の重力を支えるために圧力を増やす必要があり激しく核融合 → 対流が発生。  
その結果、星全体がよくかき混ぜり、一様化。

$$s_\gamma = \text{const} \Rightarrow T \propto \rho^{1/3}$$

$$P = \frac{1}{3}aT^4 \propto \rho^{4/3}$$

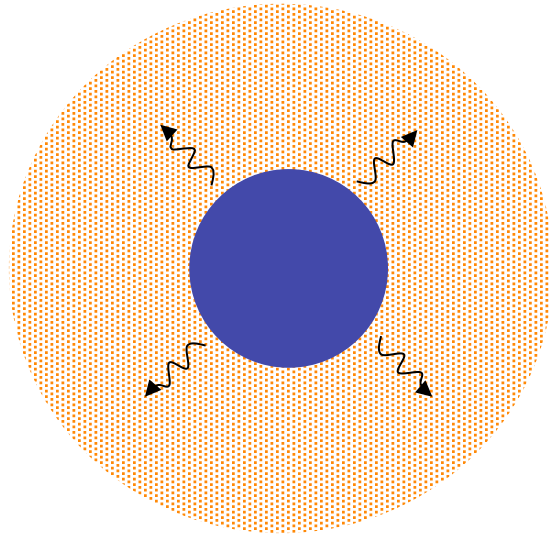
$\Gamma=4/3$ なので中立安定  
→ 不安定化しやすい

# $M > 0.08M_{\odot}$ の星は恒星となり 水素の核融合反応を開始する



水素を燃やししながら、中心にヘリウムを増やす  
期間 = 約100億年  $(M_{\text{sun}}/M)^{2.5}$

# 水素のある割合が核融合反応を終えると

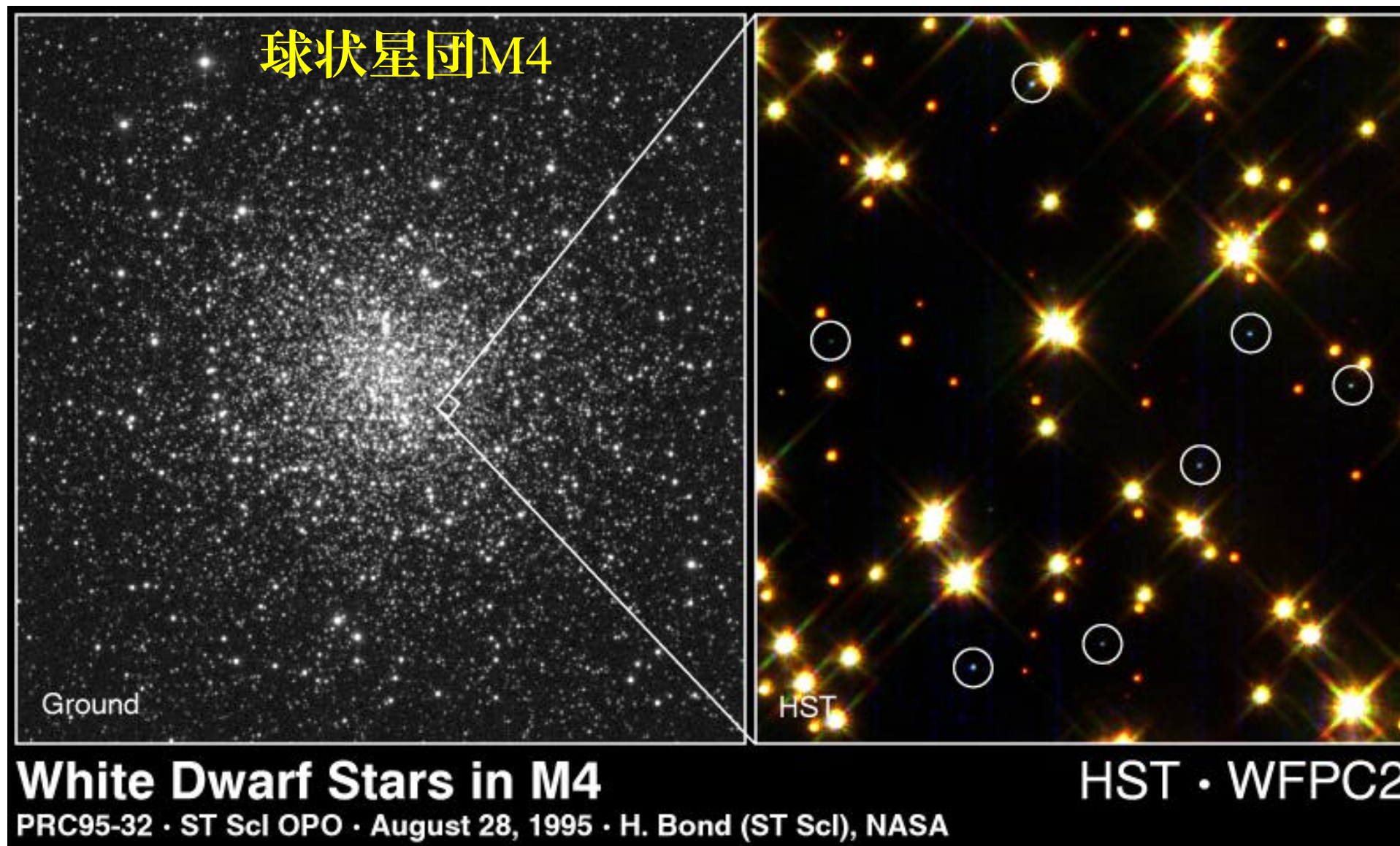


水素が燃えなくなり、中心のヘリウムが冷える  
⇒ 収縮する ⇒ 2通りの可能性

- 1 ヘリウムが核燃焼を開始 (中心温度1億度で開始)
- 2 収縮しながら縮退圧がガス圧を上回る⇒白色矮星

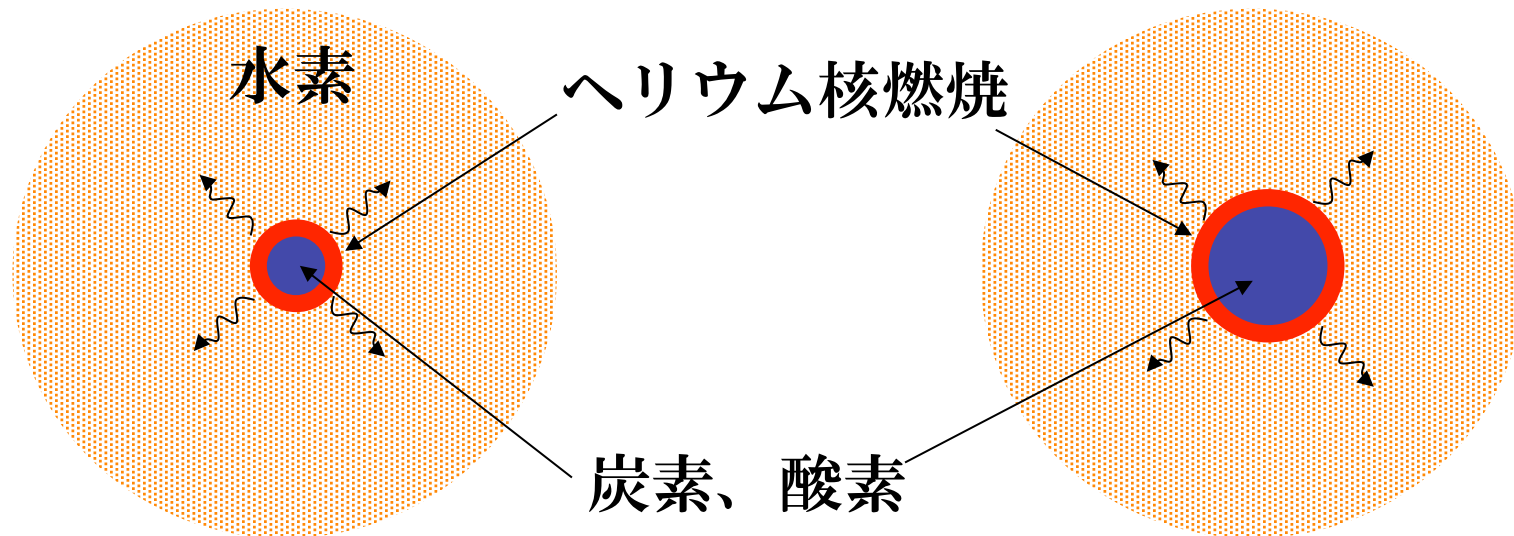
1の場合、ヘリウムを燃やすには十分な質量が必要

# 白色矮星：死んだ星（恒星以外）





# $M > 0.5M_{\odot}$ の星はヘリウムの核融合反応を開始する

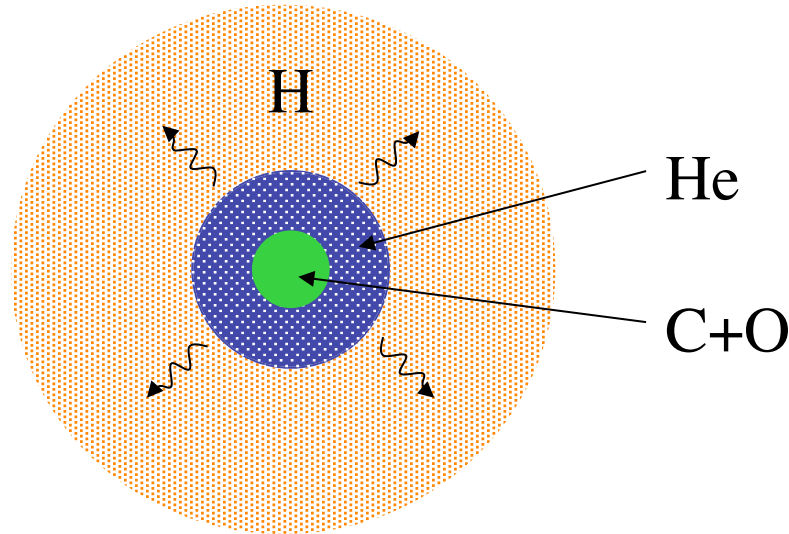


ヘリウムを燃やしながら、中心に炭素・酸素を増やす



質量数 8 に安定な元素が存在しないため、 $2\text{He}$  反応なし

# ヘリウム核融合反応を終えると…



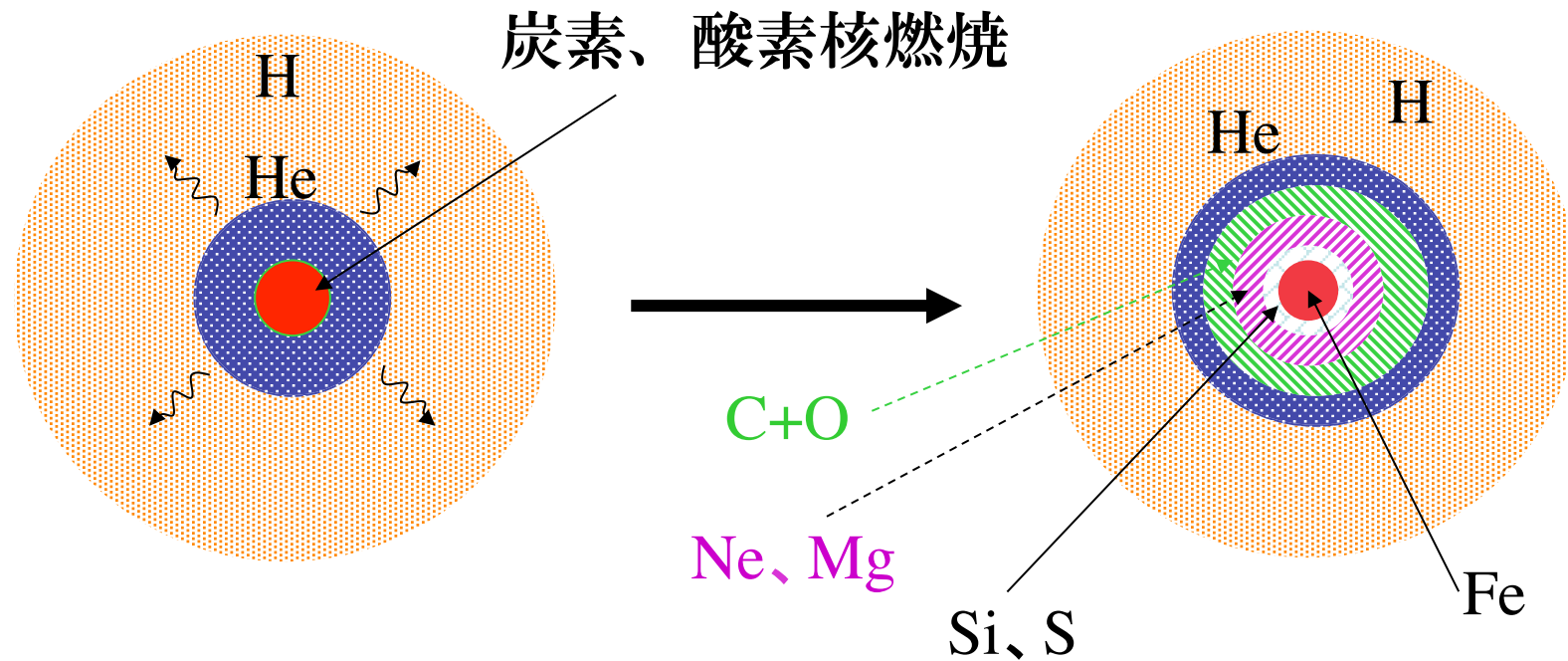
中心の炭素・酸素が冷える

⇒ 収縮する⇒ 2通りの可能性

- 1 炭素・酸素が核燃焼を開始 (中心温度 6 億度で開始)
- 2 収縮しながら縮退圧がガス圧を上回る⇒白色矮星

1 の場合、炭素・酸素を燃やすには、十分な質量が必要

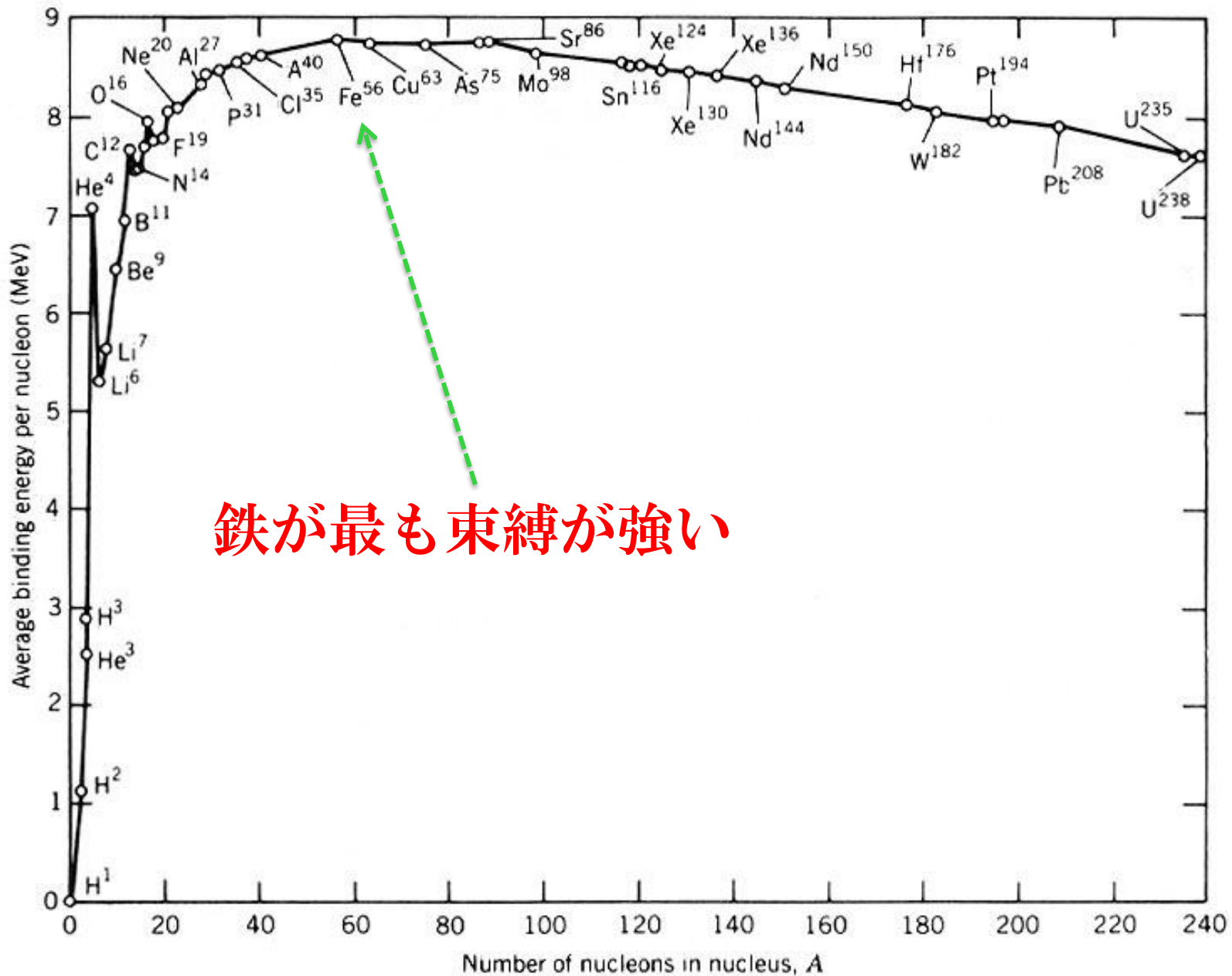
# $M > 8M_{\odot}$ の星は炭素・酸素の核融合反応を開始する



ここから先は縮退を  
起こすことなく、  
次々と核燃焼が進む

最終的に鉄まで進む  
(鉄は全原子核中、  
最も結合エネルギーが  
大きい)

# 原子核の1核子当たりの結合エネルギー



# 鉄中心核の形成後

核融合反応は起こらない

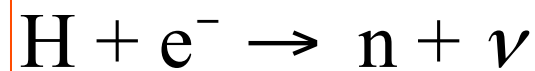
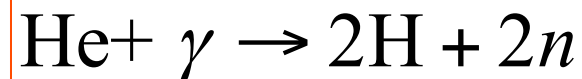
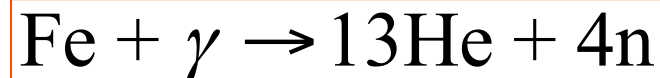
⇒冷える一方

⇒鉄の中心核は収縮を始める

⇒密度と温度が上がる

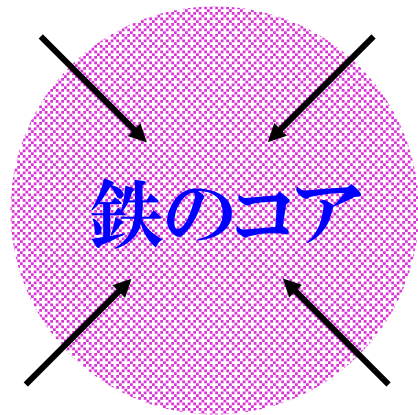
⇒存在する光のエネルギーが上昇、電子の縮退圧も上昇

⇒光は鉄の一部を破壊し、電子は原子核に吸われる

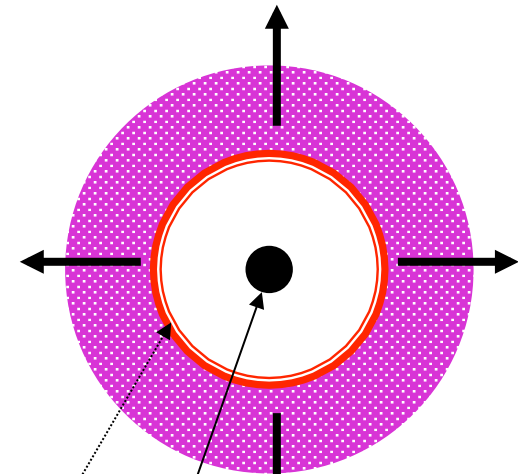
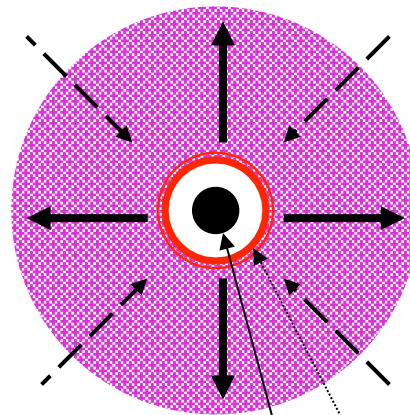


縮退圧や輻射圧が減り、 $\Gamma < 4/3$ となり重力崩壊を始める

# 重力崩壊から超新星爆発へ



半径：約2000km  
質量：約1.5倍太陽質量



衝撃波

原始中性子星

# 超新星残骸(カニ星雲)

超新星 = 重い恒星の進化の最後に爆発して発生する。  
多くの場合、中心に中性子星が残される

# 白色矮星

- 電子の縮退圧で重力を支える恒星の残骸

$$P = P(\rho) \rightarrow \begin{cases} \frac{3^{2/3} \pi^{4/3} \hbar^2}{5m_e m_u^{5/3} \mu_e^{5/3}} \rho^{5/3} & \rho \ll 10^6 \text{ g/cm}^3 \\ & \text{質量が小さい場合} \\ \frac{2^{1/3} \pi^{2/3} \hbar c}{4m_u^{4/3} \mu_e^{4/3}} \rho^{4/3} & \rho \gg 10^6 \text{ g/cm}^3 \\ & \text{質量が大きい場合} \end{cases}$$

- 質量が大きい場合は、 $\Gamma=4/3$ になっている。

$$M = \left( 2.7477 \frac{K}{G} \right)^{3/2} = \left( 2.7477 \frac{3^{1/3} \pi^{2/3} \hbar c}{4m_u^{4/3} \mu_e^{4/3} G} \right)^{3/2} = 1.46 M_{\odot} \left( \frac{\mu_e}{2} \right)^{-2}$$

これが白色矮星の質量上限を与え、Chandrasekhar質量と呼ばれる。この質量を超えた白色矮星は重力崩壊し、暴走核燃焼型超新星爆発を起こすか、中性子星になる。



# 白色矮星の質量と半径の関係

$$P = K\rho^\Gamma : \Gamma = 1 + \frac{1}{n} \quad \& \quad \frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)\rho}{r^2}$$

$$\rho = \rho_c \theta^n, \quad r = a\xi \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{d\theta}{d\xi} = -\theta^n$$

$$\text{Here, } a = \sqrt{\frac{K(n+1)}{4\pi G\rho_c^{1-1/n}}} \quad \Rightarrow \quad R = a\xi_e \quad \text{where } \theta(\xi_e) = 0$$

$$\text{Then, } M \propto R^{(3-n)/(1-n)} \propto \rho_c^{(3-n)/2n}$$

- 白色矮星の場合、 $3/2 < n < 3$ 
  - 質量が増えると半径は減少
- 頻度の高い白色矮星の質量は太陽の約0.6-0.7倍
  - この場合の半径が1万km程度

# 中性子星

- 核子同士の反発力により自己重力を支える星。
- 中性子の縮退圧は主たる圧力ではない

$$P = P(\rho) \rightarrow \begin{cases} \frac{3^{1/3} \pi^{2/3} \hbar c}{4m_u^{4/3} \mu_e^{4/3} G} \rho^{4/3} & \rho < \sim 10^{14} \text{ g/cm}^3 \\ K \rho^\Gamma & \rho > \sim 10^{14} \text{ g/cm}^3 \quad \Gamma = 2.5 \sim 3.5 \end{cases}$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM\rho}{r^2} \Rightarrow \frac{P_c}{R} \sim \frac{GM\rho_c}{R^2} \Rightarrow P_c \sim \frac{GM\rho_c}{R} = \frac{4\pi}{3} G\alpha^{-1} \rho_c^2 R^2$$

$$\Rightarrow K \rho_c^\Gamma \sim \frac{4\pi}{3} G\alpha^{-1} \rho_c^2 R^2$$

$$\Rightarrow R \sim \left( \frac{3\alpha K}{4\pi G} \right)^{1/2} \rho_c^{(\Gamma-2)/2}$$

半径が中心密度や  
質量に弱く依存

$$R = \left( \frac{3M}{4\pi\bar{\rho}} \right)^{1/3} = 13.3\text{km} \left( \frac{M}{1.4M_\odot} \right)^{1/3} \left( \frac{\bar{\rho}}{2.8 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3} \right)^{-1/3}$$

# 中性子星の観測

- 多くの場合、**電波観測で周期的な信号を捉え**、発見する。1969年にBell女史が最初に発見。
- **安定に自転している**→**一定の周期で電波を放射**
- 周期は0.1—1秒のものが多く、最速で1.4ミリ秒
- なぜ中性子星か？回転角速度が速いから。星なので遠心力<自己重力が必要。また星なので、太陽質量程度と想定。半径は小さくはならない。

$$\begin{aligned}\Omega^2 < \frac{GM}{R^3} &\Rightarrow R < \left(\frac{GM}{\Omega^2}\right)^{1/3} = \left(\frac{GMP^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \\ &= 320 \text{ km} \left(\frac{M}{M_{\text{sun}}}\right)^{1/3} \left(\frac{P}{0.1 \text{ s}}\right)^{2/3}\end{aligned}$$

# ニュートン重力の適用限界

$$R = \left( \frac{3M}{4\pi\bar{\rho}} \right)^{1/3} = 13.3\text{km} \left( \frac{M}{1.4M_{\odot}} \right)^{1/3} \left( \frac{\bar{\rho}}{2.8 \times 10^{14} \text{g/cm}^3} \right)^{-1/3}$$
$$\Rightarrow \frac{GM}{c^2 R} = 0.155 \left( \frac{M}{1.4M_{\odot}} \right)^{2/3} \left( \frac{\bar{\rho}}{2.8 \times 10^{14} \text{g/cm}^3} \right)^{1/3}$$

コンパクトさが0.1を超えている  
→ 一般相対論的効果が重要

一般相対論では、中性子星の質量が太陽質量の約3倍を超えると存在できないことが示される。