5　特殊相対性原理と特殊相対性理論

相対性理論の成立・基礎概念

相対性理論登場(1905年)以前の概念の復習

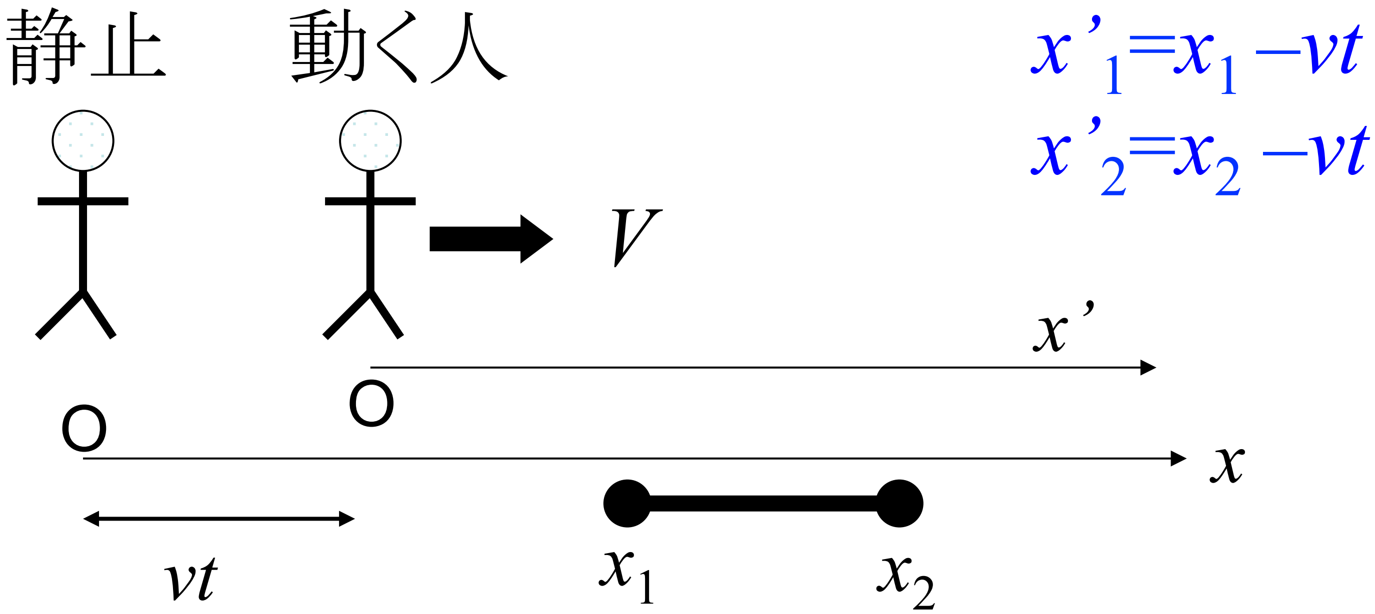
- 空間は平坦(ユークリッド空間)。
- 物体は力が働かなければ、平坦空間の最短距離(直線上)を進む(運動の第一法則)。
- 外力の働いていない系を「慣性系」と呼ぶ。
- 全ての慣性系では同じ物理法則が成り立つ。(基礎方程式はガリレイ変換に対して不変。)
- 時間はどの慣性系でも全く同じ(絶対時間)。
- 時間と空間は全く別物・独立なもの。

ガリレイ変換：復習

座標系を次のように変換すること： $x' = x - vt.$

速度 v **で動いている人が原点となる座標が** x',

止まっている人が原点となる座標が x



棒の長さ $x_2 - x_1 = x'_2 - x'_1$ **は**

どちらの系で見ても等しい。

運動の第二法則

- 物体に外力が作用しているとき、物体の加速度は外力に比例する

⇒ 運動方程式＝ガリレイ変換不変

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -m\vec{\nabla}\Phi$$

重力のある場合

ガリレイ変換 $\vec{x}' = \vec{x} - \vec{V}t$

$$m\frac{d^2\vec{x}'}{dt^2} = -m\vec{\nabla}'\Phi$$

確かに不変

$$\left(\vec{\nabla}' = \left[\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'}\right] = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] = \vec{\nabla}\right)$$

ニュートン的世界観に対する反例

- 電磁気学の法則の完成(1864年におけるマクスウエル方程式の導出)
- マクスウエル方程式によれば、電磁波は光速度で伝わる（光速度、c＝約30万km/s）

⬇

- 光に向かって等速運動する人から見れば、ニュートン理論では光速度は　$c+V$

⬇

- マクスウエル方程式は、ガリレイ変換に対して不変でない。「絶対系」（$V=0$）でしか成立しないように見える（絶対系以外では形が変わる）。
- 光速度を測れば、地球の絶対系(宇宙の重心)に対する速度が分かるはずである！

例：真空でのマクスウエル方程式
＝電場も磁場も波動方程式に従う

波動方程式(例えばスカラー場の場合)

$$\Box\phi=\left(-\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi=0$$

ガリレイ変換　$x'=x-Vt,\ \ y'=y,\ \ z'=z$

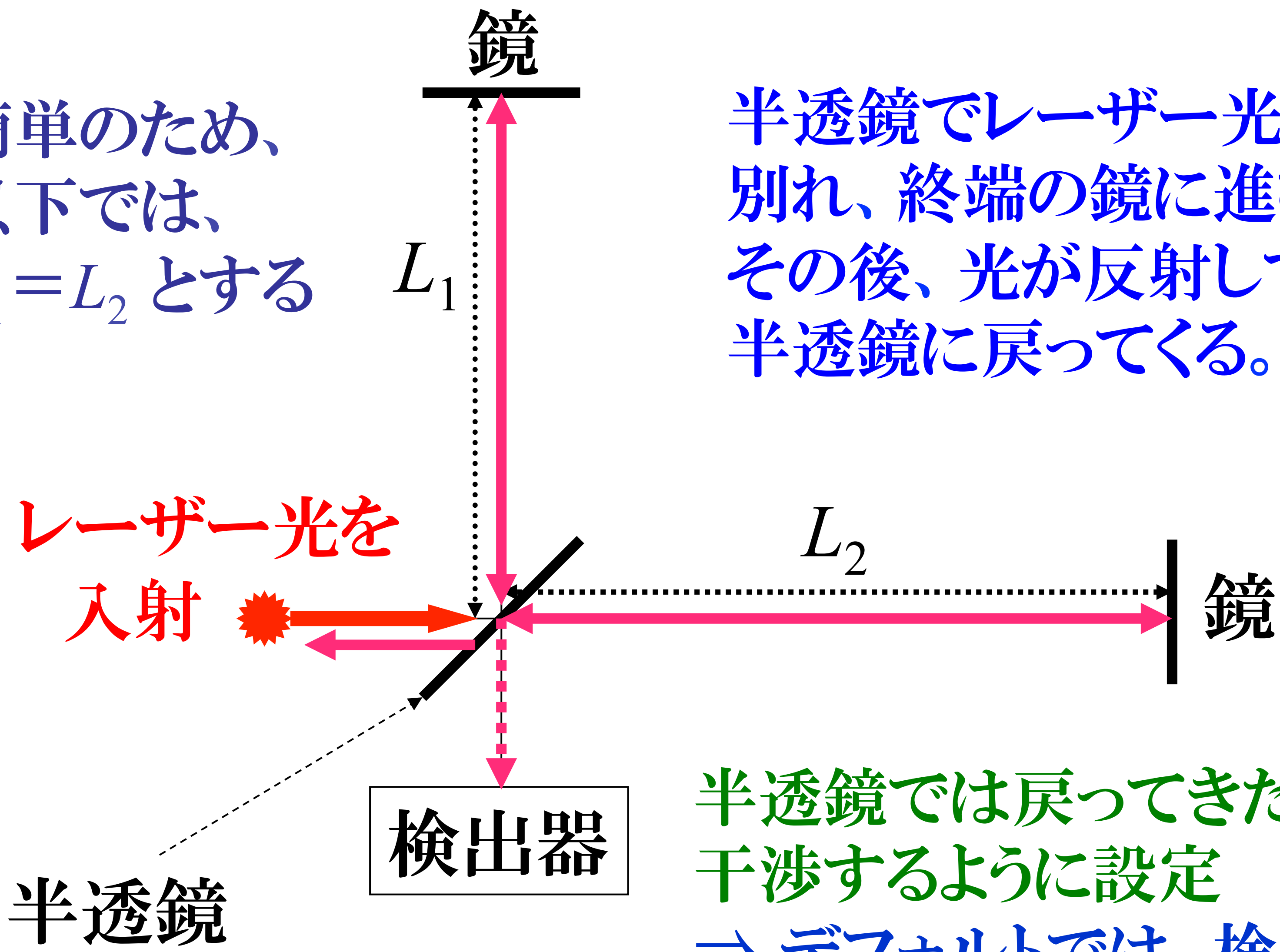
$$\Rightarrow\begin{cases}\left.\dfrac{\partial}{\partial t}\right|_{x,y,z}=\left.\dfrac{\partial t}{\partial t}\right|_{x,y,z}\left.\dfrac{\partial}{\partial t}\right|_{x'}+\left.\dfrac{\partial x'}{\partial t}\right|_{x,y,z}\left.\dfrac{\partial}{\partial x'}\right|_{t}=\left.\dfrac{\partial}{\partial t}\right|_{x'}-V\left.\dfrac{\partial}{\partial x'}\right|_{t}\\[2ex]\left.\dfrac{\partial}{\partial x}\right|_{t,y,z}=\left.\dfrac{\partial}{\partial x'}\right|_{t,y,z},\quad\left.\dfrac{\partial}{\partial y}\right|_{t,y,z}=\left.\dfrac{\partial}{\partial y'}\right|_{t,y,z},\quad\left.\dfrac{\partial}{\partial z}\right|_{t,y,z}=\left.\dfrac{\partial}{\partial z'}\right|_{t,y,z}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\left(\underline{-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}-V\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2}+\frac{\partial^2}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2}{\partial z'^2}\right)\phi=0$$

ガリレイ変換不変ではない

マイケルソンとモーレーの実験（19世紀末）

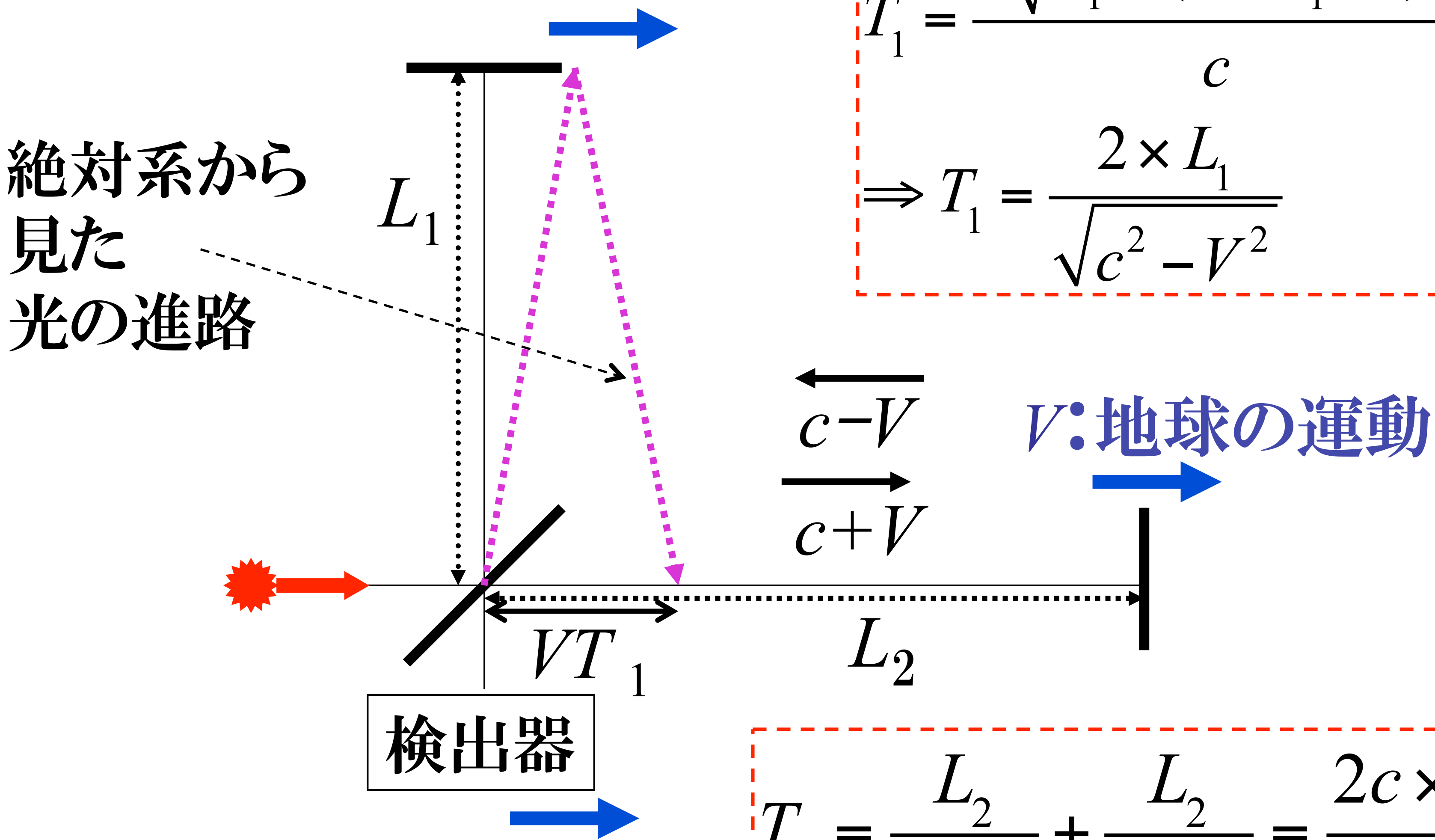
簡単のため、
以下では、
$L_1 = L_2$ とする



半透鏡でレーザー光が2つに別れ、終端の鏡に進む。
その後、光が反射して、再び半透鏡に戻ってくる。

半透鏡では戻ってきた光は干渉するように設定
⇒ デフォルトでは、検出器には
　レーザー光が入射しない。

動いている場合



$$T_1 = \frac{2\sqrt{L_1^2 + (V \times T_1 / 2)^2}}{c}$$

$$\Rightarrow T_1 = \frac{2 \times L_1}{\sqrt{c^2 - V^2}}$$

$$T_2 = \frac{L_2}{c+V} + \frac{L_2}{c-V} = \frac{2c \times L_2}{c^2 - V^2}$$

$$\neq T_1 \ (\text{for} \ \ V \neq 0)$$

干渉のずれが速度に依存

⇒速度が測れる

マイケルソンとモーレーの測定結果

$$\Rightarrow \quad T_1 \approx T_2$$

$$V \approx 0 \ !!? \ (V \ll 30\mathrm{km/s})$$

光速度はどう測っても不変だった。
地球は宇宙の中心か？

↓

地球は太陽の周りを回っているのでありえない。

↓

基礎とした理論が間違っている。

特殊相対性理論の登場

- アインシュタインは、特殊相対性原理を要請：つまり、どの慣性系で見ても物理法則は不変と考えた。
- その結果、実験結果を受け入れ(それまでの常識を捨て去り)、光速度不変の原理を要請。
- つまり、どの慣性系からみても光速度は不変と要請。（注意：大局的な慣性系の存在を認めている。）

その結果

1. 時間と空間は、全く別物ではない
2. よって、時間は絶対的なものではない
3. 物理法則は、ガリレイ変換に対して不変ではない
4. よって、棒の長さも観測者の速度によって異なる

などの必然的結論を受け入れた。

どの慣性系でも光速度が不変になるには？

ガリレイ変換不変性を要求するのをやめ、
ローレンツ変換不変性を要求する必要あり

$$t' = \left(t - \frac{Vx}{c^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

$$x' = \left(x - Vt\right)\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

$\Longleftrightarrow$

ガリレイ変換

$t' = t$

$x' = x - Vt$

時間座標を取り替える必要がある
⇒　絶対時間の概念がなくなる。

慣性系ごとに固有の時間が存在する

ローレンツ変換＝光速度不変の証明

ローレンツ変換
$$\begin{cases} t' = \left(t - \dfrac{Vx}{c^2}\right)\dfrac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ x' = (x - Vt)\dfrac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \end{cases}$$

元の慣性系での光路：$x = ct$

$$\Rightarrow \begin{cases} t'_{\mathrm{light}} = t\left(1 - \dfrac{V}{c}\right)\dfrac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ x'_{light} = t(c - V)\dfrac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \end{cases}$$

原点は一致する。
光は原点から放射。

$$\therefore \quad \frac{x'_{light}}{t'_{light}} = c$$

速度が遅い極限

$$t' = \left(t - \frac{Vx}{c^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad \rightarrow \quad t$$

$$x' = \left(x - Vt\right)\frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad \rightarrow \quad x - Vt$$

（V/c）の2乗を無視。

↓

ガリレイ変換に一致。

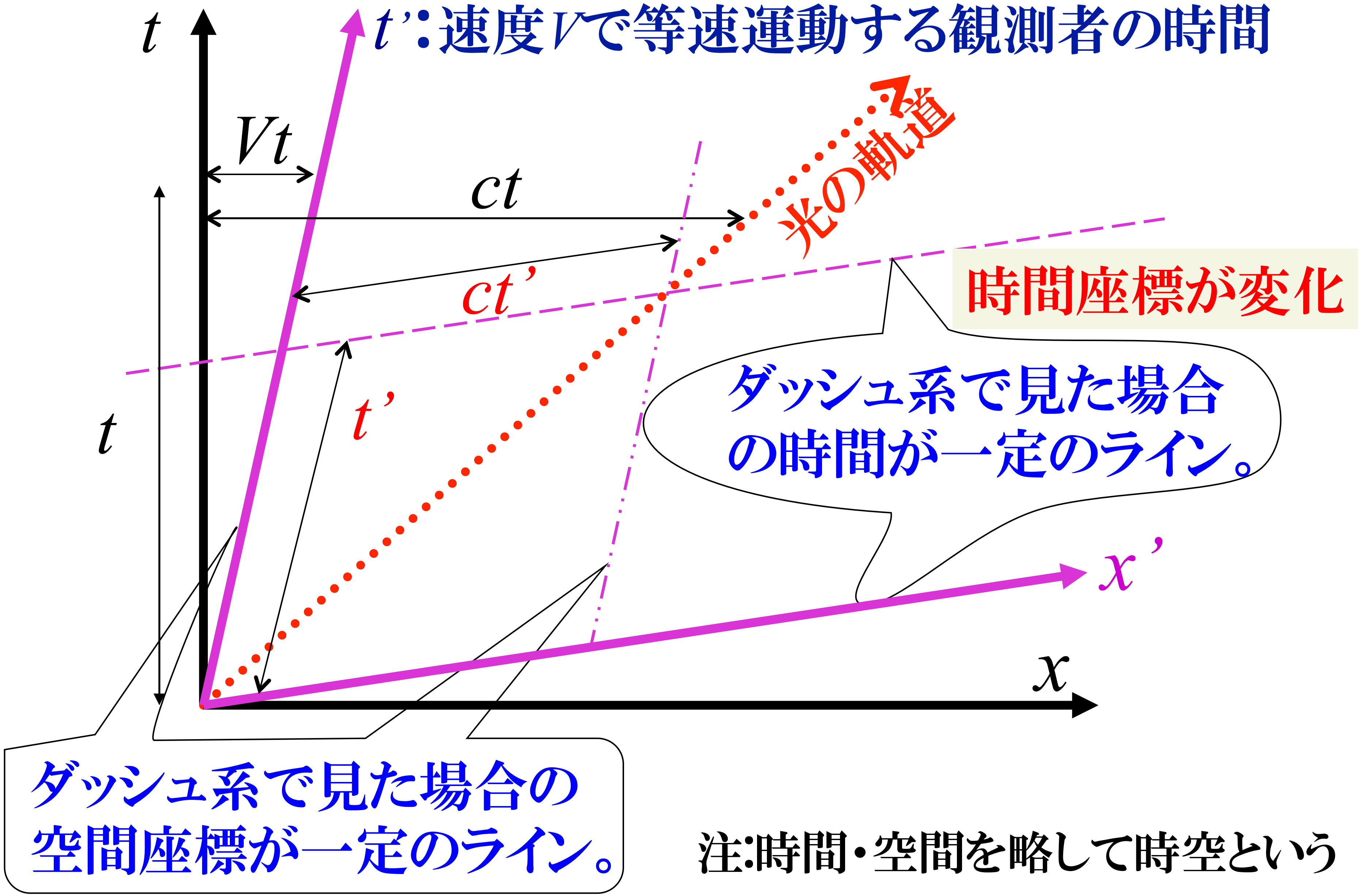
c＝3億m/s。
例えば飛行機は、
約300m/sで飛ぶ。
地球の公転速度は
約3万m/s。
cより十分に小さい。

速度が光速度に比べ遅い場合には、
特殊相対論はニュートン理論と一致。

⇔

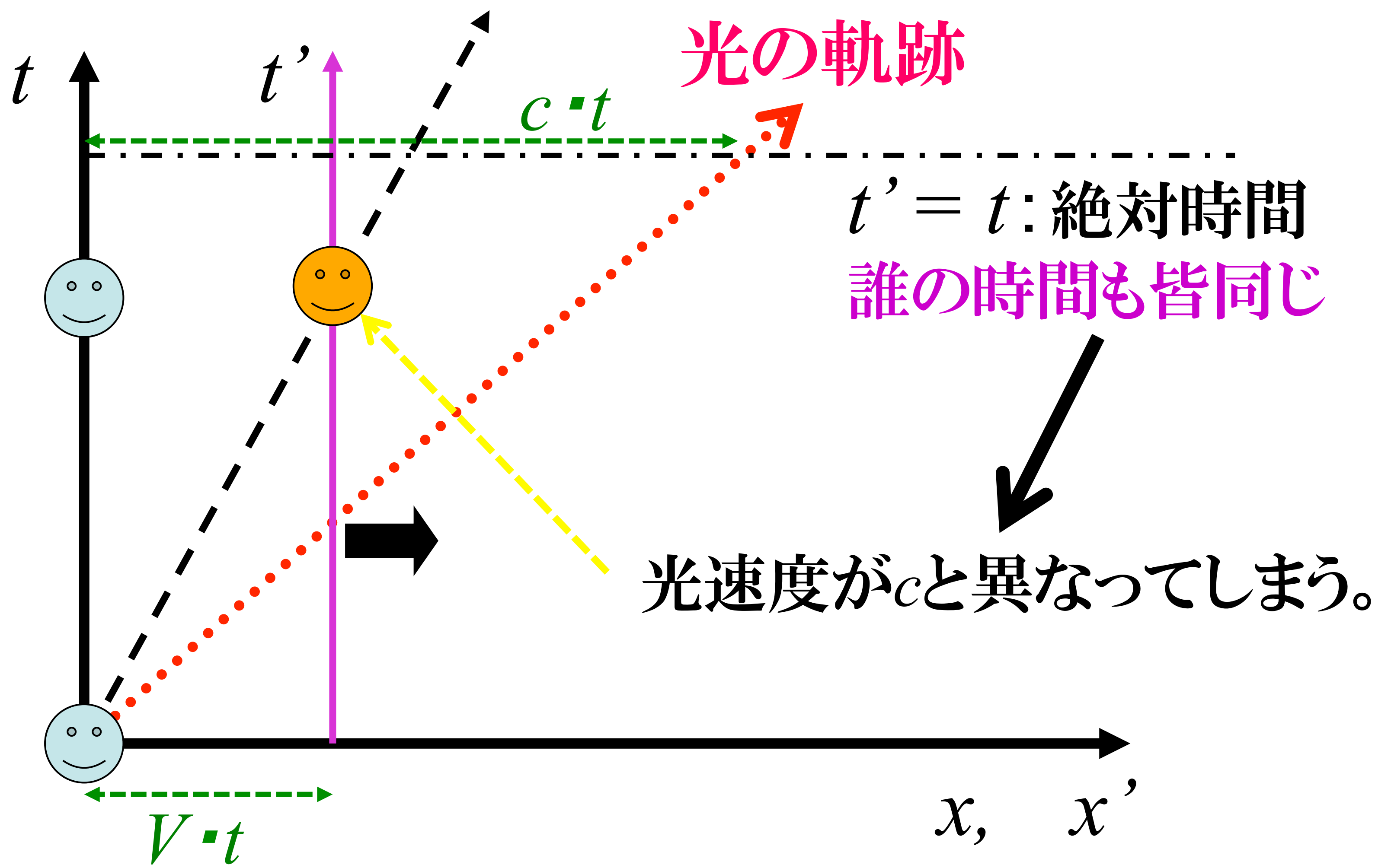
日常生活では
気がつかない！

(1) 同時刻の相対性と時空図



注:時間・空間を略して時空という

参考：相対論以前の時空図



$$x' = x - Vt$$

(2) 棒の見かけの長さの変化：ローレンツ収縮

- 特殊相対論以前： 棒の長さ $x_2 - x_1$ は不変。
  つまり、 $x_2 - x_1 = x'_2 - x'_1$
- 特殊相対論では違う

$$x_1' = (x_1 - Vt)\frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

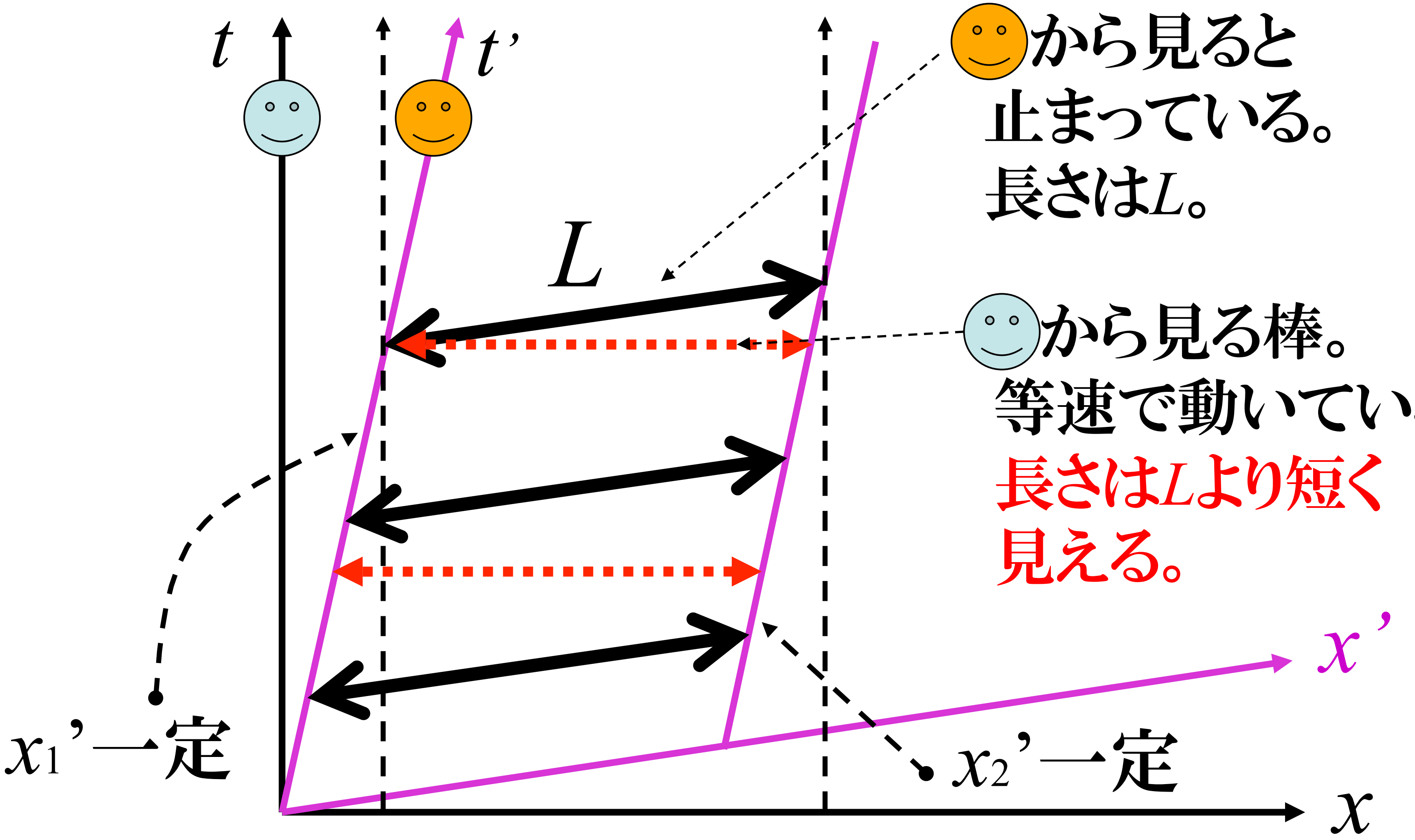
$$x_2' = (x_2 - Vt)\frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$x_2' - x_1' = (x_2 - x_1)\frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \neq x_2 - x_1$$

$$\therefore x_2 - x_1 = (x_2' - x_1')\sqrt{1 - V^2/c^2}$$

ローレンツ収縮＝棒が動くと縮んで「見える」

時空図で見たローレンツ収縮



から見ると
止まっている。
長さはL。

から見る棒。
等速で動いている。
長さはLより短く
見える。

見かけ上、縮んで見えることに注意

では何が不変か？

$$-(ct_2 - ct_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 = -(ct_2' - ct_1')^2 + (x_2' - x_1')^2$$

$$\equiv \Delta s^2$$

4次元長

棒の長さ $L = x_2 - x_1$ ではなく、4次元長が不変。

L には不変的な意味がない。

線素 $ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$

は座標に依存しない不変量＝絶対的な意味がある。

$ds^2 < 0$: Timelike　時間方向に進む曲線

$ds^2 = 0$: Null　光の経路

$ds^2 > 0$: Spacelike　空間方向に進む曲線

並進と回転に対してはニュートン理論同様に変換不変性はある。

1. 並進 : $x' = x - d$　(+時間並進対称性： $t' = t - \tau$)
2. 回転 : $x' = \cos\theta\, x - \sin\theta\, y,\ y' = \sin\theta\, x + \cos\theta\, y$
3. ~~他の等速運動系への変換~~ : $x' = x - v\,t$

↓

ローレンツ変換

ローレンツ変換は時空の複素的回転と見なすこともできる

$$\begin{cases} t' = \left(t - \dfrac{Vx}{c^2}\right)\dfrac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \\ x' = \left(x - Vt\right)\dfrac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \end{cases}$$

$$\cosh\theta = \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \quad \sin\mathrm{h}\,\theta = \frac{V/c}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

$\Rightarrow T = ct, \ T' = ct'$　として

$$\boxed{T' = T\cosh\theta - x\sinh\theta, \quad x' = -T\sinh\theta + x\cosh\theta}$$

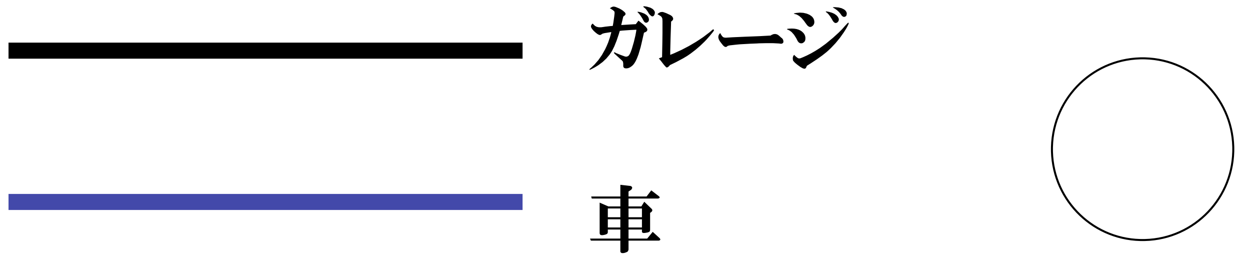
$$\Rightarrow -dT'^2 + dx'^2 = -dT^2 + dx^2$$

車とガレージのパラドクス

- 車の長さ＝ガレージの長さとする。
- 車は超高性能なので、柔軟性があり、かつ瞬時に止まることが出来る、 とする。
- 車がすっぽり入った瞬間にドアボーイがガレージのシャッターを閉める。
- ドアボーイは、車は動いているからローレンツ収縮するので、「容易にガレージに入れる」、と思うであろう。
- 一方運転者は、ガレージがローレンツ収縮してしまうので、「ガレージに車が入ることは出来ない」、と思うであろう。

はたして、何がおかしいのか？

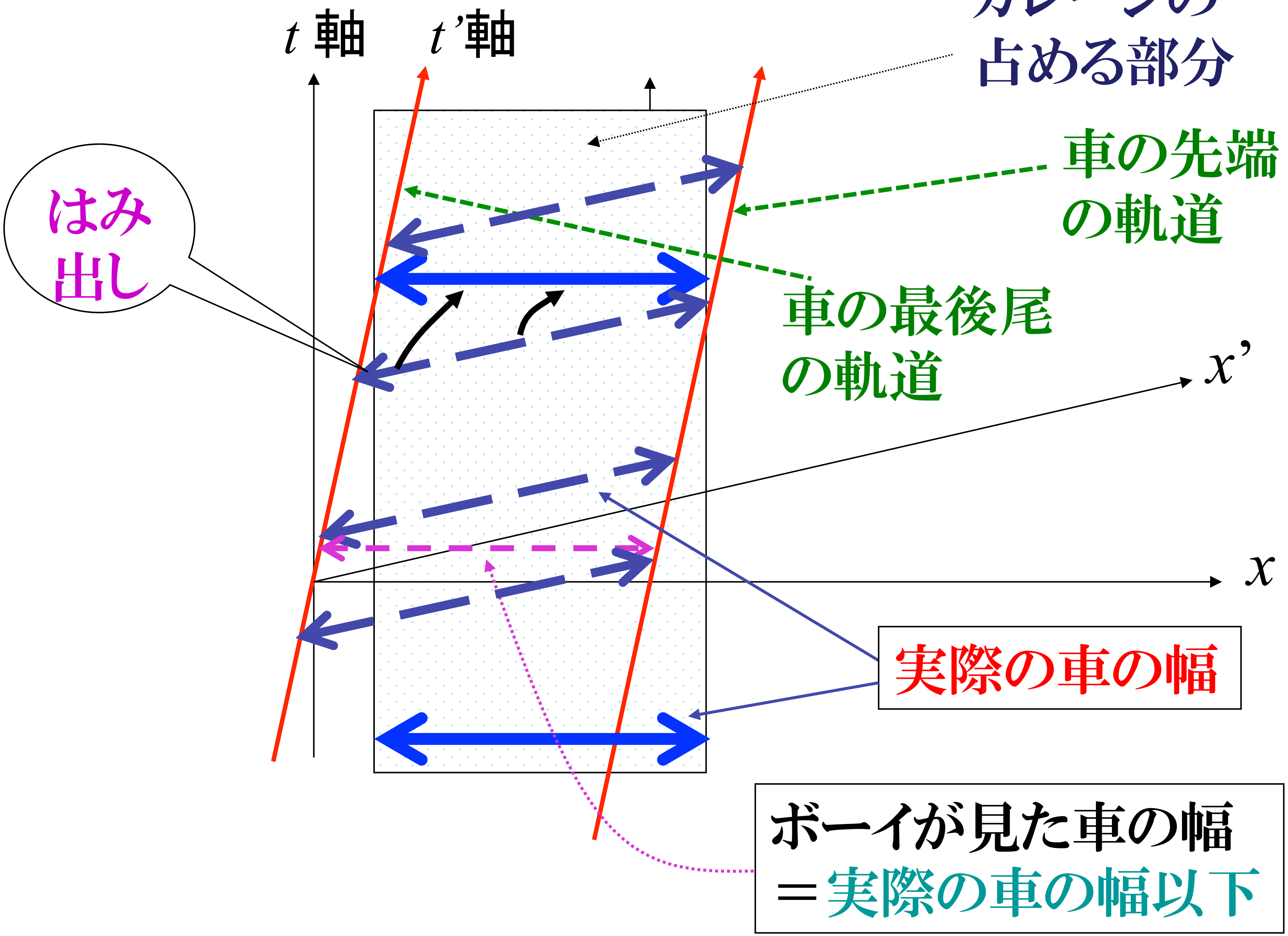
- 車が止まっていれば:



- ドアボーイから見ると:

- 車から見ると:

時空図



t 軸
t’軸
ガレージの
占める部分
車の先端
の軌道
はみ
出し
車の最後尾
の軌道
x’
x
実際の車の幅
ボーイが見た車の幅
＝実際の車の幅以下

答え

- 車に乗った人から見れば、ガレージに入れないように見える。
- しかし、先頭がガレージの先端に接触してすぐに、ブレーキを踏んで、先頭から順に止まれば理想的には車庫に収まる。
- (理想的な車なら)矛盾がないが、現実的には危ない。

(3) 時間の遅れ

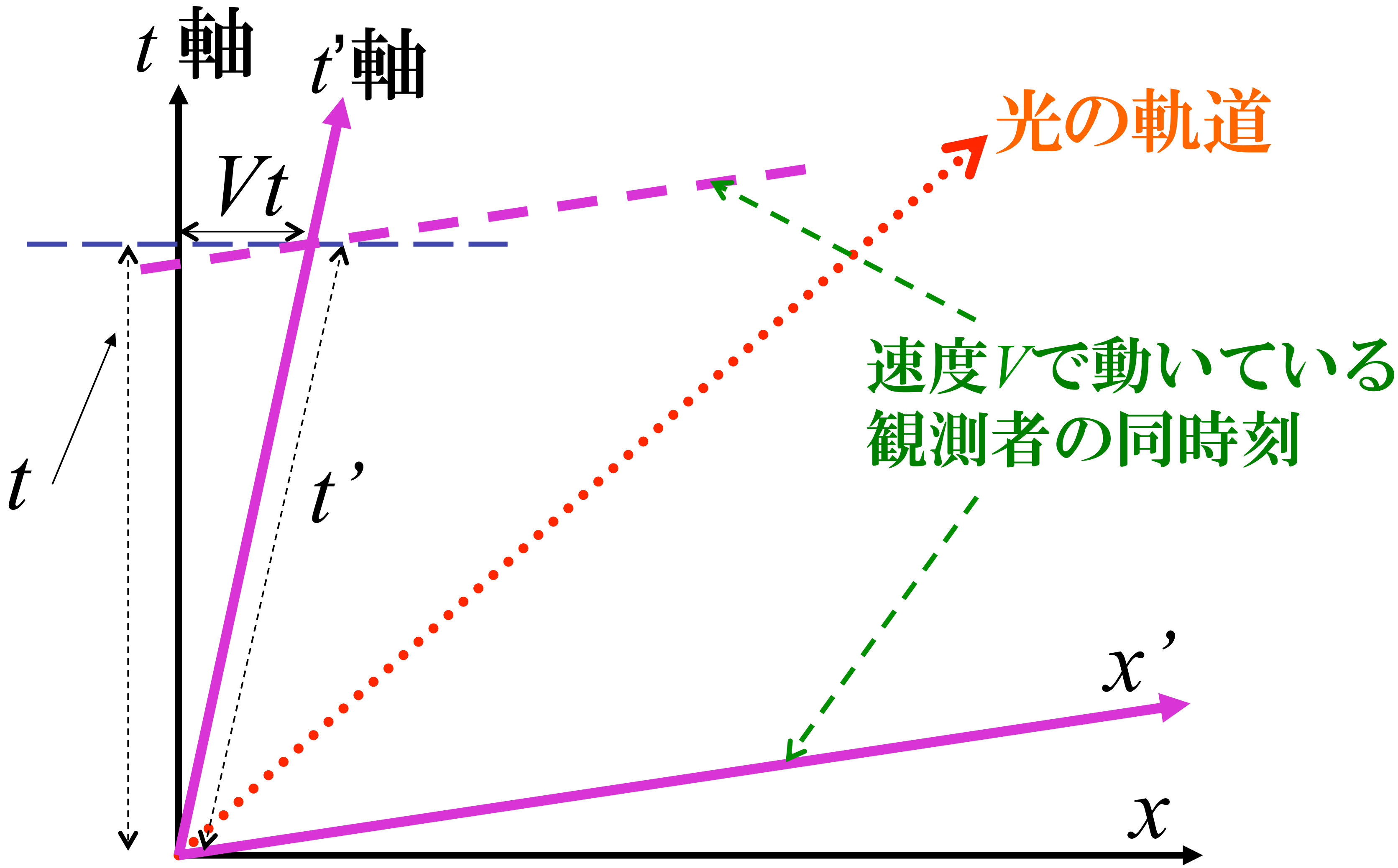
- 速度 V で動く人の軌道を、動いていない人が表現すれば、$x=Vt$。これをローレンツ変換の式に代入すると

$$t' = \left(t - \frac{Vx}{c^2} \right) \frac{1}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}} \quad \& \quad x = Vt$$

$$\Rightarrow t' = \left(t - \frac{V^2 t}{c^2} \right) \frac{1}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}} = \underline{\underline{t\sqrt{1 - V^2 / c^2}}} < t$$

動いている人は動いていない人から見て、
時間の進み具合が遅い！

時間の遅れ（続き）



$$\boxed{t' = t\sqrt{1 - V^2 / c^2} < t}$$

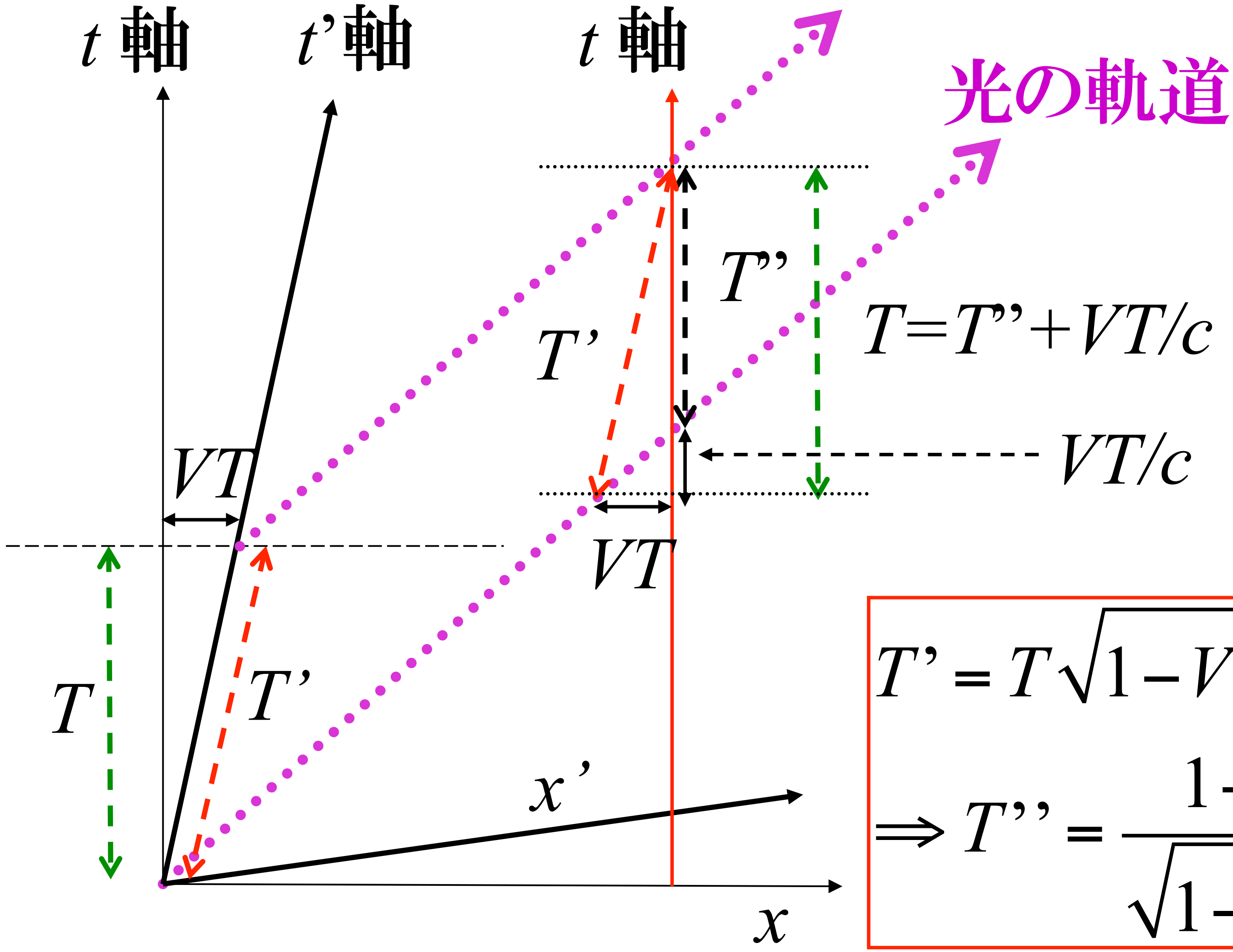
不安定粒子の延命

- 大抵の粒子は不安定：例えば中性子、中間子など。安定なのは光、陽子、電子などのみ。
- 中性子の平均寿命は約886秒。
- 光速の99パーセントで運動していている中性子の平均寿命を静止系で観測すると寿命が延びて見える。

$$t = 886/\sqrt{1 - V^2/c^2}\ \sec \approx 6280\sec$$

- μ粒子は不安定だが(平均寿命が約2.2μ秒)、高速で動いていると、この寿命が延びることは精度よく測られている(CERN, 1977)。

ドップラーシフト



$$T' = T\sqrt{1 - V^2/c^2}$$

$$\Rightarrow T'' = \frac{1 - V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,T'$$

ドップラーシフト：続き

- 動いている人が T' 当たりに一回信号を発したとする(周波数$1/T'=f'$)
- 静止系ではT''に一回観測(周波数$1/T''=f''$)
- 故、

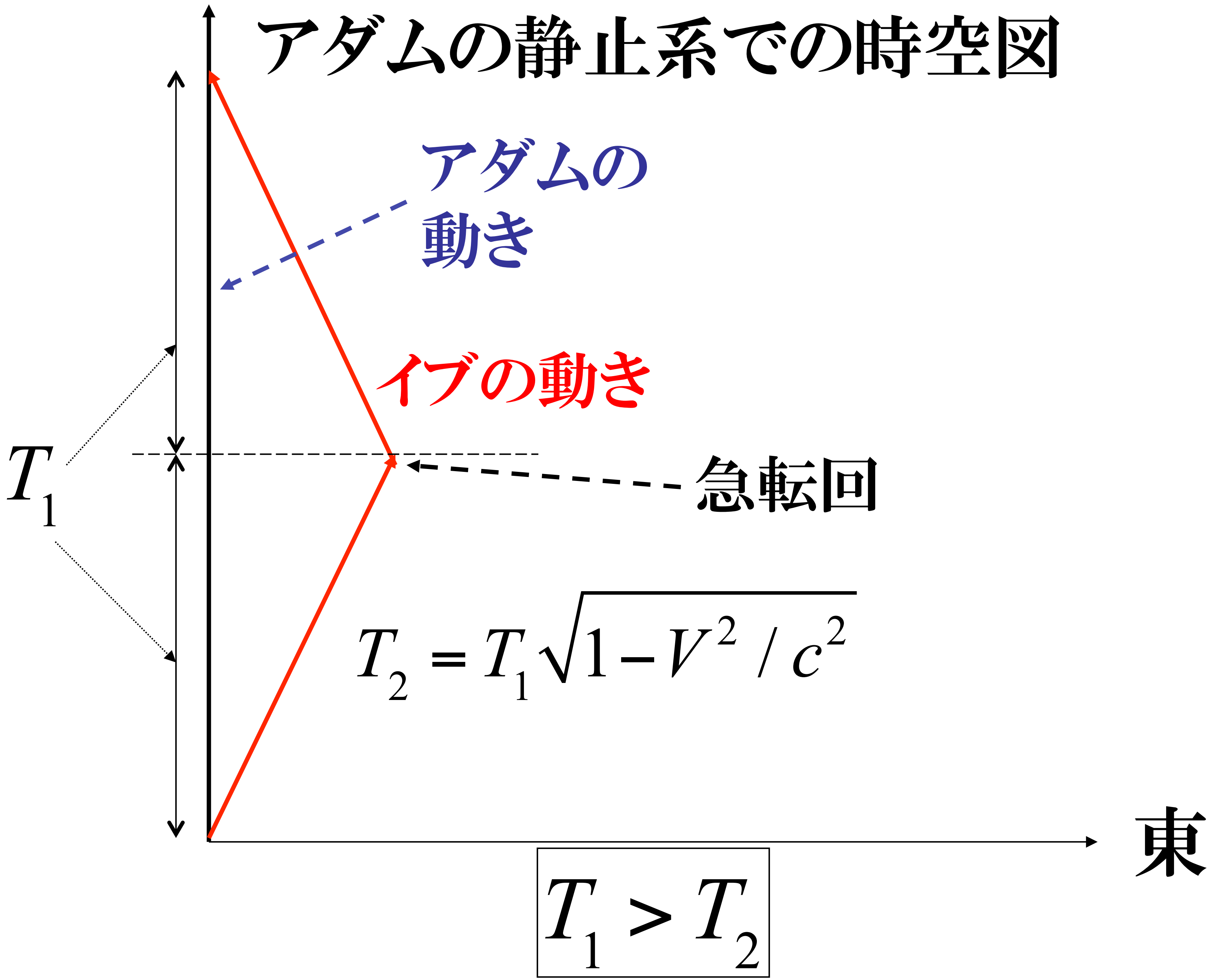
$$f'' = \frac{\sqrt{1-V^2/c^2}}{1-V/c} f'$$

$$\lambda'' = \frac{1-V/c}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \lambda'$$

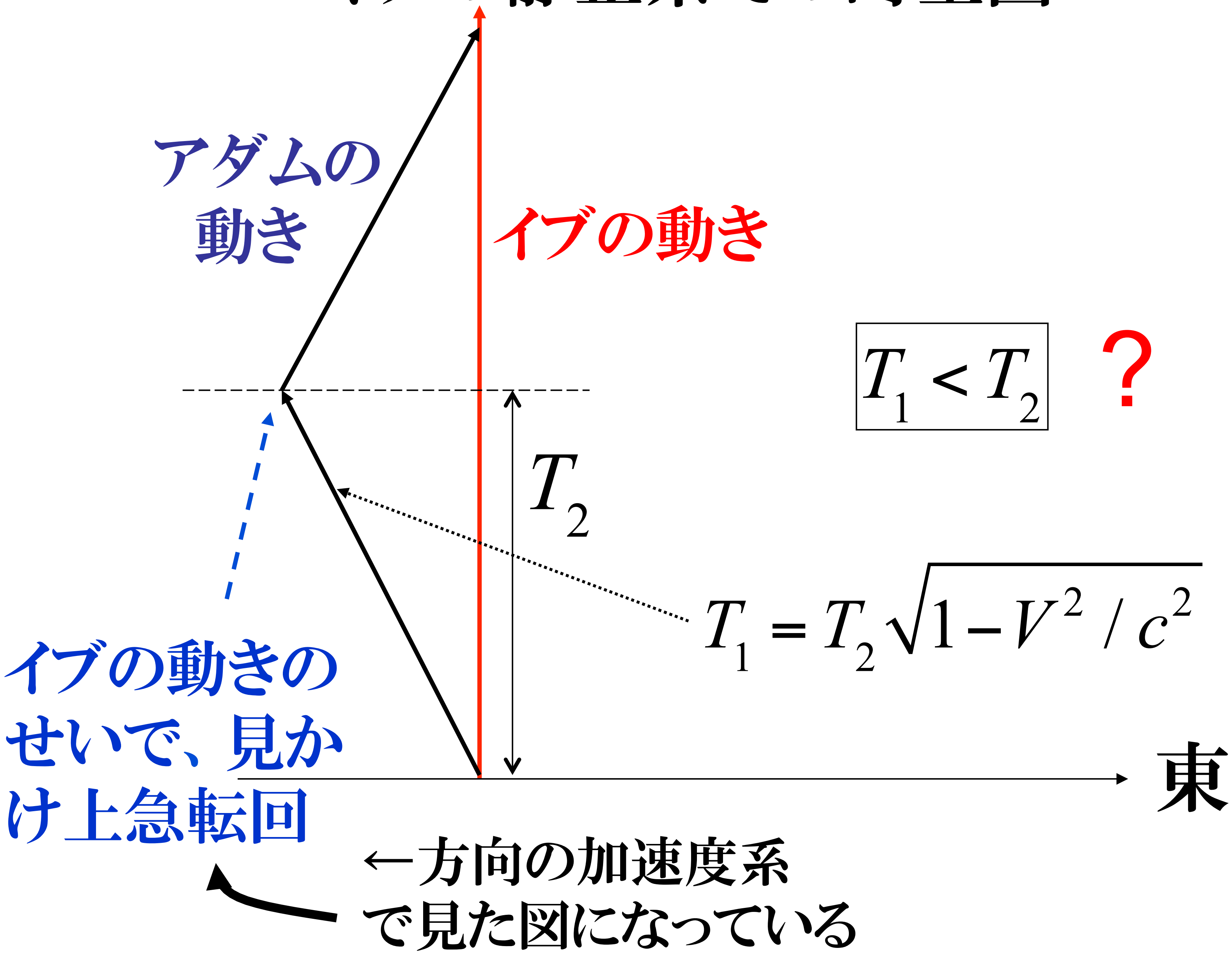
V/c の2次の項の分だけ、音のドップラーシフトの関係と異なる

双子のパラドクス

- アダムとイブがいる。
- アダムはじっとしている。
- 一方イブは、東に等速度 V で走った後に、用意していたジェット噴射で急ブレーキをかけ、西の方向に等速度 V で走り、再びアダムのところへ戻った。
- イブは、速度 V で動いていたのだから、アダムよりも歳をとっていないはずである。
- 一方イブが止まっていてアダムが動いている座標を取ることも可能である。すると、今度はアダムの方が若いはずである。
- どこに勘違いが潜んでいるのであろう？


アダムの静止系での時空図
アダムの
動き
イブの動き
急転回
T_1
$T_2 = T_1\sqrt{1 - V^2 / c^2}$
東
$T_1 > T_2$

イブの静止系での時空図



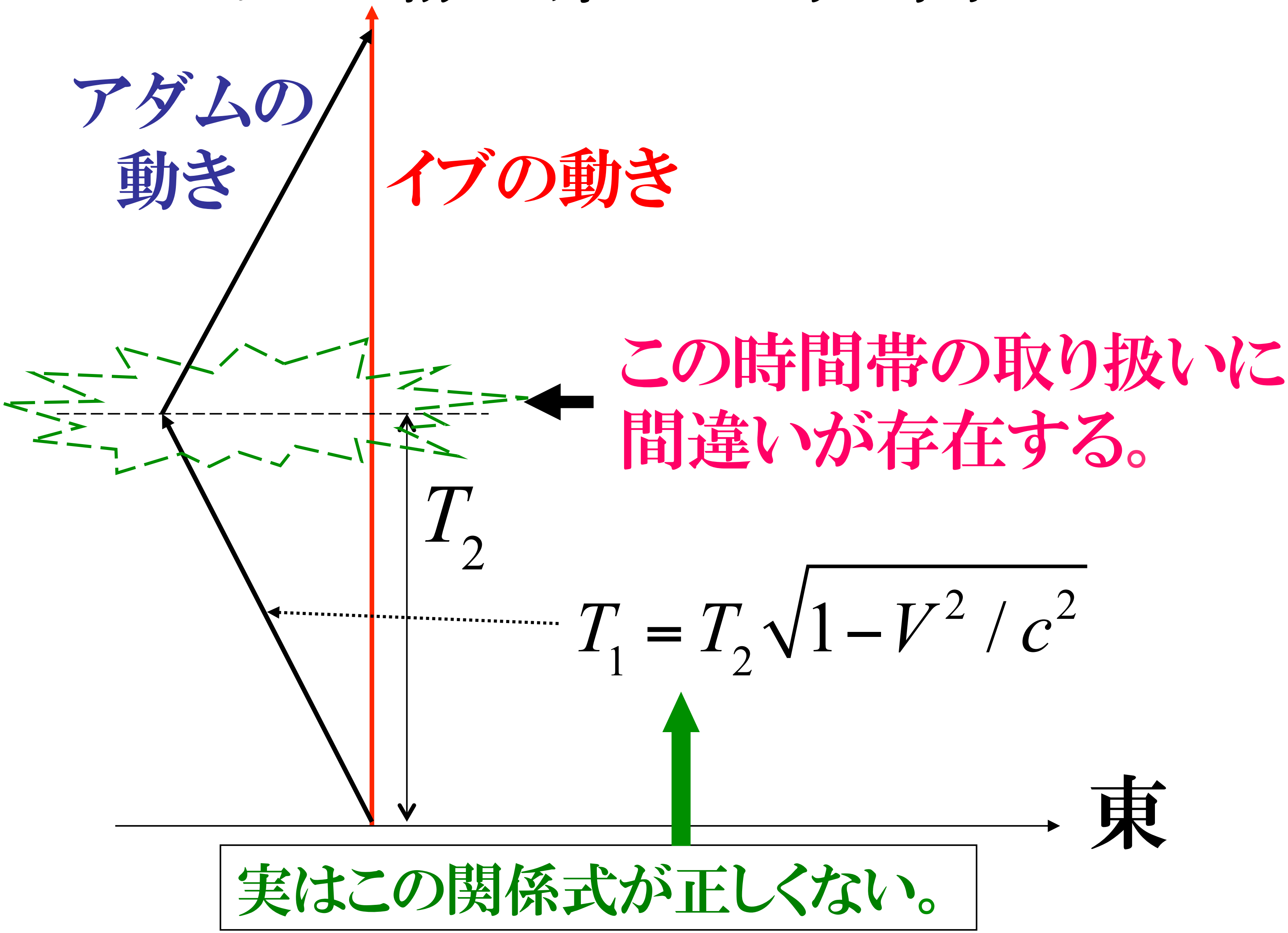
考え足らずの点

・イブは引き返すときにジェット噴射によって速度を変化させている。つまり加速度が存在し、慣性系以外の座標系に乗った時間帯が存在する。この場合には、特殊相対論は使えない。

・一方、アダムは常に慣性系にいる。

⇒ したがって、2つの座標系を入れ変えるときには注意が必要。

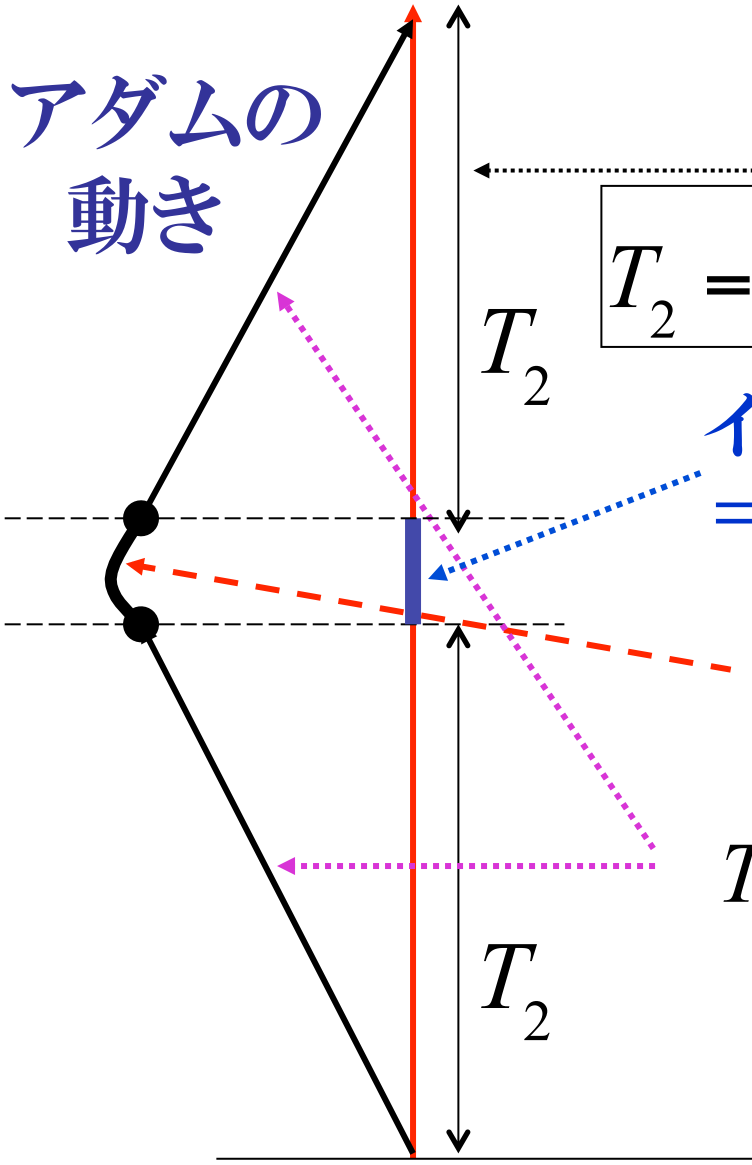
イブの静止系での時空図



慣性加速度と重力は等価（等価原理）

- イブが加速したときに、イブから見てアダムは反対向きの加速度を受けたように見える。
- じつはこれは、アダムが重力加速度をうけたのと等価である。（等価原理：詳しくは次節。）
  ⇒具体的にはイブが強い重力場にいることになる
- 重力場中を運動する物体を外から見ると、時間がゆっくり進む。（特殊相対論の範疇を超えた議論が必要：次回説明。）
- よってイブから見ると、アダムはイブが加速していた間に、余計な時間を費やしている。

イブの静止系での正しい時空図



イブの動き

$$\boxed{T_2 = T_1\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

イブが加速した時間帯
＝イブが見るとほぼゼロだが、

$$\boxed{\Delta T_1 = 2\cdot T_1\cdot V^2/c^2}$$

$$T_1' = T_2\sqrt{1-V^2/c^2}$$
$$= T_1\left(1-V^2/c^2\right)$$

東

$2\cdot T_1 = 2\cdot T_1' + \Delta T_1$ となりつじつまが合う。

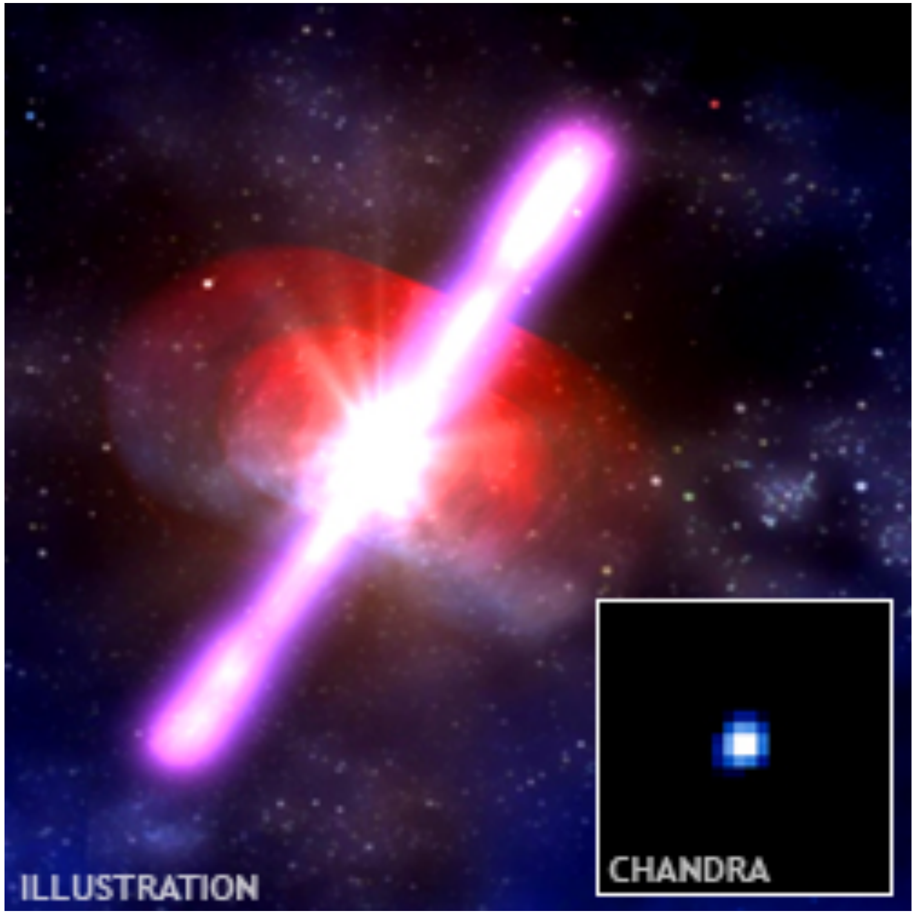
結論

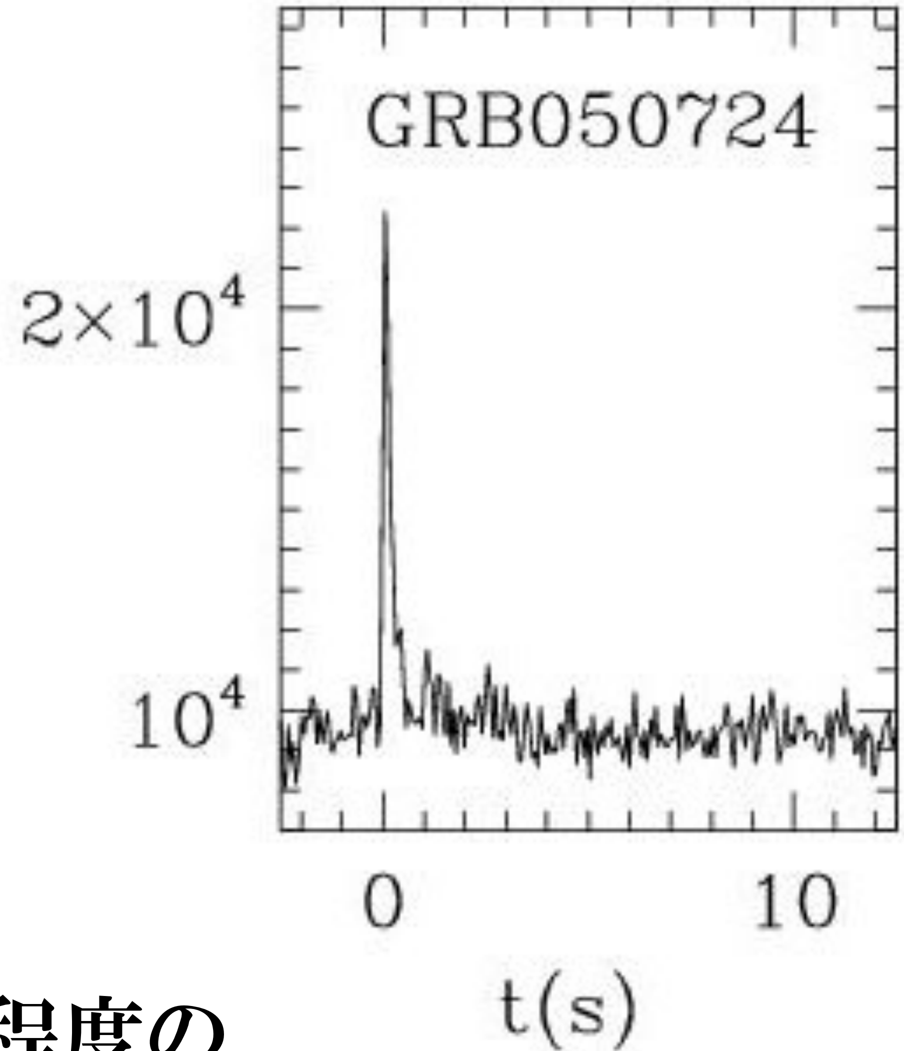
イブの方が歳をとっていない！

教訓

- 気をつけるべき点は、人によって「同時刻」の取り方が変更してしまう点である。
- パラドクスと名の付くものは、実はパラドクスではない。単に特殊相対論をよく理解していないだけなのである。

相対論的ビーミングとγ線バースト





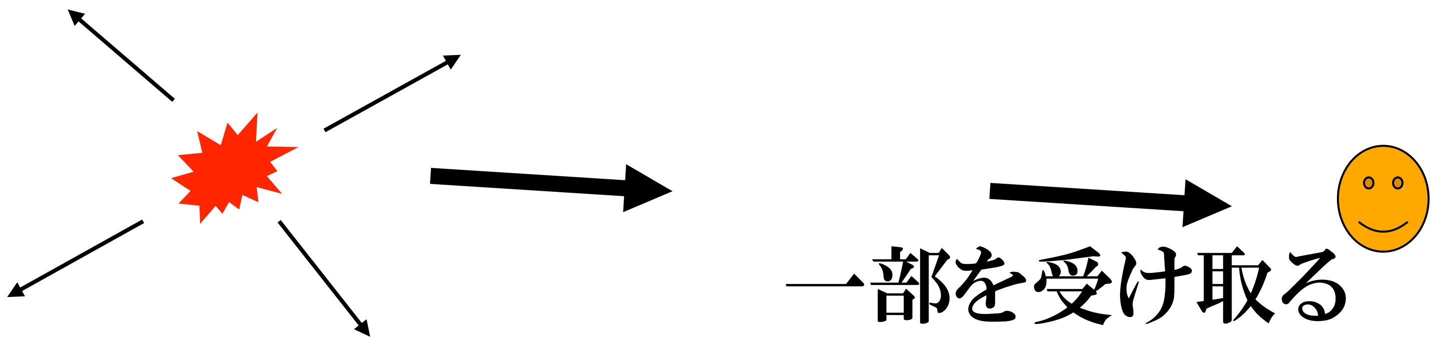
10－100秒程度に10^{44}J程度の
γ線を放射する突発的天体現象

10^{44} Jとはどの位大きいのか？

- 太陽の光度：4×10^{26} J/s
- 太陽の寿命：約100億年＝3×10^{17}秒
- 太陽が一生かけて放射するエネルギーが約10^{44} J
- γ線バーストでは、それが10－100秒程度で放射される。とんでもない天体。
- ブラックホールが存在し、そこから何らかの高エネルギー現象が発生していると推定されている。

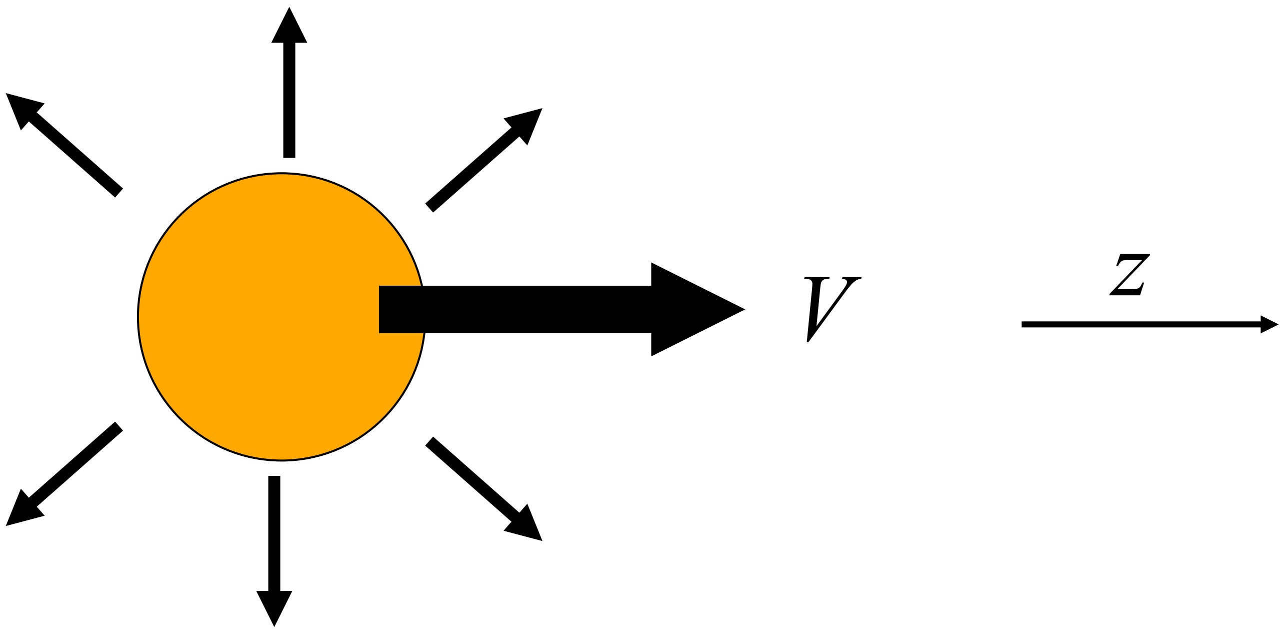
γ線バーストエネルギーの観測値

- 「観測値」は、10^{44}J よりも大きい場合がある。
- 最大で10^{47}J と見積もられる場合が!!
- 10^{47}J は太陽の静止質量エネルギーに匹敵する (Mc^2)。大きすぎるので、かつて理解に苦しんでいた。
- 観測値は、受け取る単位時間、単位面積あたりに受け取るエネルギー流量 f と発生源までの距離 D を観測から決め、$4\pi fD^2$ から求めていた。 (等方的な放射を仮定。)



相対論的ビーミング

- (運動系で見て)球対称に放射する物体が高速度でz方向に動いている場合を考える
- 静止系で輻射はどのように見えるか



- 空間3次元を考慮したローレンツ変換を考える。

(x, y, z, t): 物体と共に動く系

ある光の軌跡 $\begin{Bmatrix} z = ct\cos\theta \\ x = ct\sin\theta\cos\phi, \quad y = ct\sin\theta\sin\phi \end{Bmatrix}$

(x', y', z', t'): 静止系(我々観測者)

$$t' = \left(t + \frac{Vz}{c^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

θ、ϕ は放射方向を表す。
等方的な放射を仮定。

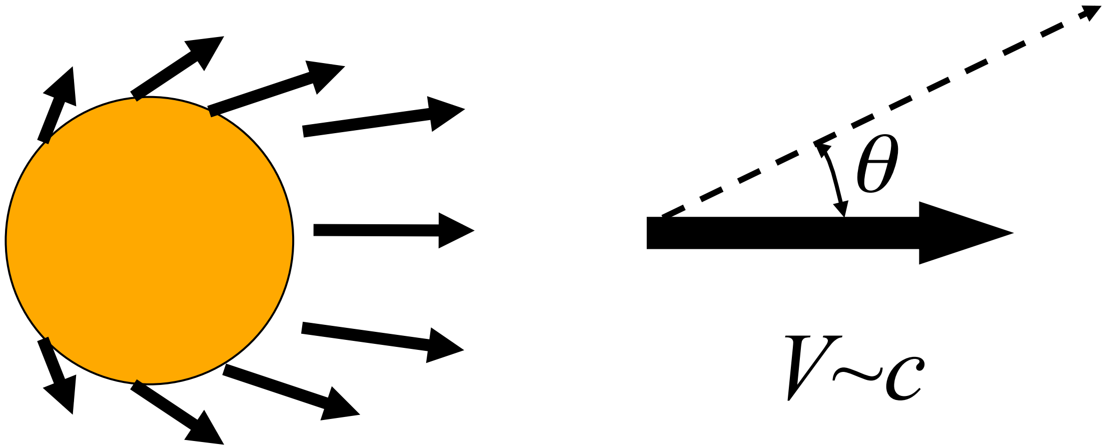
$$z' = (z + Vt)\frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad x' = x, \quad y' = y$$

静止系での光の軌跡 $\begin{Bmatrix} t' = \left(1 + \frac{V}{c}\cos\theta\right)\frac{t}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ z' = \underline{\underline{(c\cos\theta + V)}}\frac{t}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \end{Bmatrix}$

運動系で光のz軸とのなす角がθなら
静止系で見て方向余弦は

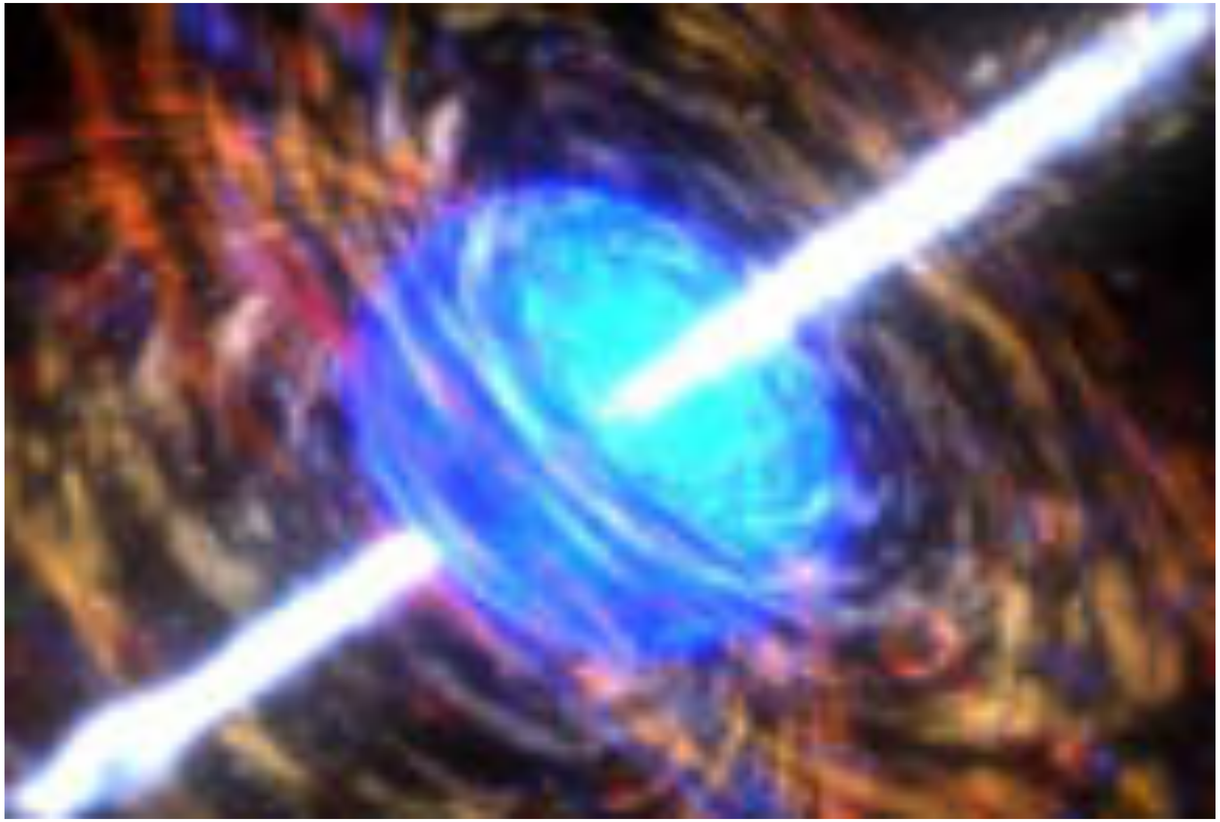
$$\frac{z}{ct}=\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{z'}{ct'}=\frac{c\cos\theta+V}{c+V\cos\theta}$$

Vが光速に近い場合　$z'/ct' \rightarrow 1$



進行方向に光が集まる＝ビーミング

γ線バーストを光速に近い速度で運動する物体からの放射とすれば、エネルギーを$\underline{4\pi f D^2}$で評価すると過大評価。
$4\pi f D^2 \times$補正(補正$<<1$)が正しい。
⇒本当の放射エネルギーが下がって解決



相対論において「測る」の意味

- **測定量は全て値＝スカラー**
- 物理量は一般にテンソルなので、座標によって値が全く異なってしまう。
- 例えば、x方向に速度 V で動いている人から見た自身の4元速度の成分は $(1, 0, 0, 0)$。
(自ら自分を見れば止まって見えるから。)
一方止まっている人から見れば4元速度は

$$u^a = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}, \frac{V}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}, 0, 0 \right)$$

- **成分は観測者ごとに異なるので本質的な意味がない**

測定にはまず観測者の座標を決定しなくてはならない

- 観測者の4元速度を u^a_{obs} とする。
- 観測者が4元速度 p^a を持つ粒子のエネルギーを測りたければ以下のように内積をとり、スカラー量を作る：

$$E = -\eta_{ab} p^a u^a_{\mathrm{obs}}$$

- 同様にある方向の運動量を求めたければ、u^a_{obs} に直行する単位4元ベクトルを作り、内積を取る。

$$u^a_{\mathrm{obs}} = \left(1, 0, 0, 0\right)$$

$$e^a_1 = \left(0, 1, 0, 0\right), \quad e^a_2 = \left(0, 0, 1, 0\right)$$

詳しい式

止まっている観測者から見た

等速運動している物体の４元速度

$$u^a = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}, \frac{V}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}, 0, 0 \right) \to p^a = m u^a$$

止まっている観測者が観測したエネルギー

$$E = -\eta_{ab} p^a u^b_{\mathrm{obs}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}} \xrightarrow{V = c} mc^2 + \frac{1}{2} m V^2$$

x方向の運動量

$$p^x = \eta_{ab} p^a e^b_1 = \frac{mV}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}$$