6　ニュートン重力理論の限界

限界1：光速度不変の実験結果

- マイケルソン・モーレーの実験 (1887年)
  → 実験事実として、光速度は慣性系によらない
  → 特殊相対論(1905年)＝ローレンツ変換不変
- ニュートン重力理論はガリレイ変換不変。ゆえに、
  <u>ニュートン理論はローレンツ変換不変でない</u>
  → 特殊相対論、特殊相対性原理と相容れない。
- 「相対論的重力理論」が必要になった。

数式で書くと

ガリレイ変換

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho \quad \Rightarrow \quad \Delta'\phi = 4\pi G\rho$$

不変

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta\phi = \partial_{xx}\phi + \partial_{yy}\phi + \partial_{zz}\phi \\ \Delta'\phi = \partial_{x'x'}\phi + \partial_{yy}\phi + \partial_{zz}\phi \end{array}\right\} \quad x' = x - Vt$$

ローレンツ変換

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho$$

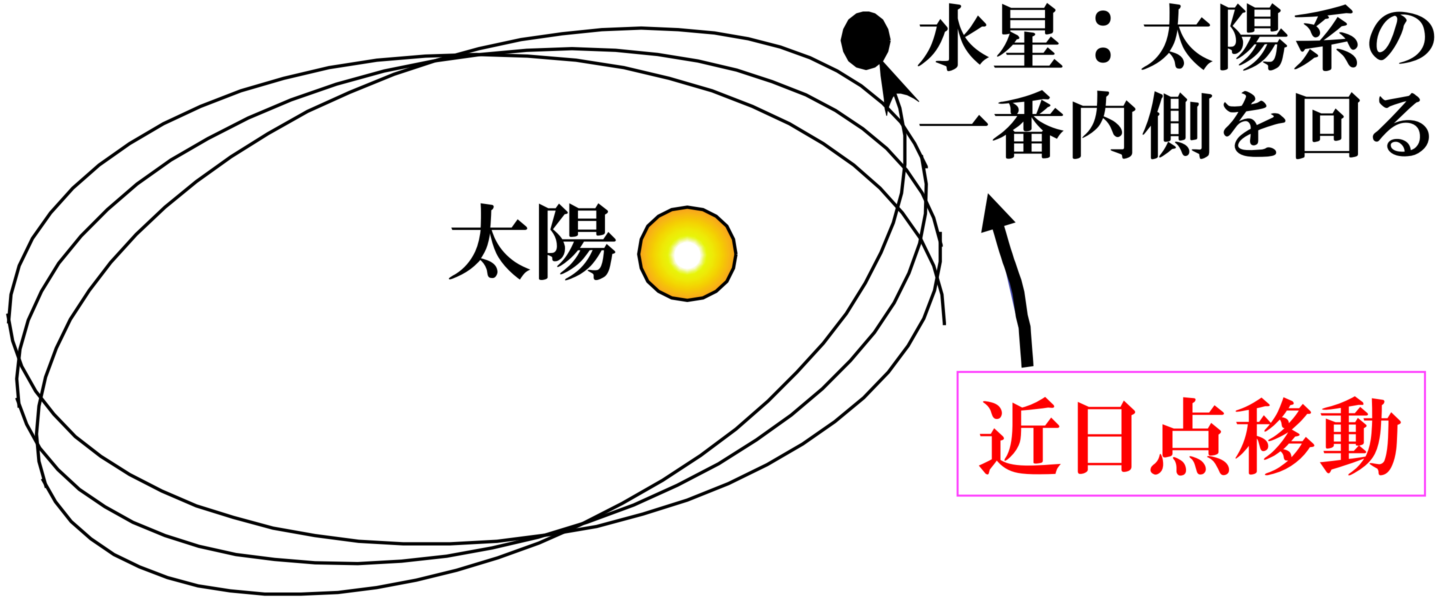
不変でない

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{1 - V^2/c^2} \partial_{x'}^2 + \partial_{y'}^2 + \partial_{z'}^2 \right)\phi = 4\pi G\rho$$

ϕはニュートンの重力ポテンシャル、ρは密度

限界2：水星の近日点移動

楕円軌道が閉じるのは、中心力が r に比例するか、逆2乗に比例するときのみ



- 惑星の運動＝円運動に近い楕円軌道。
  ニュートン理論では楕円軌道は閉じる。
  （太陽を質点と仮定しその重力のみ仮定した場合）
- しかし、どうやら閉じないことが19世紀中頃、
  観測事実によって明らかになっていた。

＃ 水星の場合、1世紀あたり43秒の近日点のずれ。

正確には

- ルベリエ(フランス・当時パリ天文台所長)が1859年に水星の正確な運動を発表：水星の近日点は1世紀あたり574秒角ずれる(観測結果)。
- ニュートンの重力理論では、

1. 金星の摂動で277秒角
2. 木星の摂動で153秒角
3. 地球の摂動で約90秒角
4. その他の惑星の寄与が約10秒角

- 合計で531秒角が説明可能
- しかし残りの約43秒角が説明できない
  →一般相対論の登場まで多数の怪しげな解釈が出た

19世紀末、20世紀初頭の結論

- ニュートン重力理論は、近似的にしか自然界を記述できない。
- 重力が弱く、物体の運動が遅い場合にのみ、適用可能なのだろう。

$$\varepsilon = \frac{2GM}{Rc^2} \ll 1 \quad \& \quad \frac{V}{c} \ll 1$$

のときのみ近似的に適用可能

R ： 物体の特徴的大きさ

M ： 物体の質量

V ： 物体の特徴的速度

相対論的重力理論への道

- 特殊相対論を拡張し、重力理論を構築したい。
- 特殊相対論では光速度不変原理と特殊相対性原理(物理法則が全ての慣性系で同じ形に書けること)が採用されていた。
- 電磁気学の基本方程式はこれらの原理を満たす。
- 単純な拡張を考えるならば、電磁気学の場合を模倣して、まず慣性系を用意し、その上でローレンツ不変な重力理論を構築すること、を思い浮かべる。
- その場合、電磁場同様、重力場は平坦な空間内の個々の点で定義される何らかの「場」である、と仮定。

例えば、 $\Delta\phi = 4\pi G\rho \quad \Rightarrow \quad \Box\phi = 4\pi G\rho$

$$\begin{cases} \Delta\phi = \partial_{xx}\phi + \partial_{yy}\phi + \partial_{zz}\phi \\ \Box\phi = -c^{-2}\partial_{tt}\phi + \partial_{xx}\phi + \partial_{yy}\phi + \partial_{zz}\phi \end{cases}$$

のようにに変えれば、ローレンツ変換不変になる。
光速度無限大の極限でニュートン理論にも帰着。

しかし、

- 重力理論において、そもそも、慣性系を容易に定義することができない、
- 特に、大局的な慣性系は存在し得ない、

ということに、アインシュタインは気がついた。

7　等価原理の意味

❖ 等価原理＝慣性質量と重力質量が等しい

アインシュタインの発想

等価原理の役割が大きい！

ニュートンの運動方程式：
(ニュートン理論で考える)

$$m_I a = m_g g$$

m_I：慣性質量

m_g：重力質量

a：　慣性加速度

g：　重力加速度

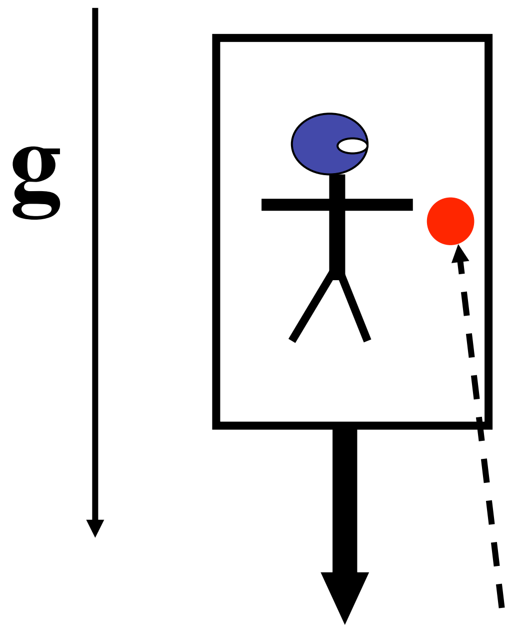
しかし自然界では何故か　$m_I = m_g$

$$\therefore \quad a = g$$

→　原理として採用しているが
　　深淵な意味があるのではないか？

等価原理の重大な帰結

・一様重力加速度の存在は判別不可能である



ロケットの中に閉じ込められて自由落下する人は、外が見えなければ、**自分が自由落下しているとは思わないし、重力場が存在することも認識しない。**
自分が慣性系にいると考える。

エレベータの人には止まって見える

座標変換すれば一様重力は打ち消される

数学的記述

$$a \equiv \frac{d^2x}{dt^2} = g \quad \cdots$$ 運動方程式

$$x' = x - \frac{g}{2}t^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x'}{dt^2} = 0$$

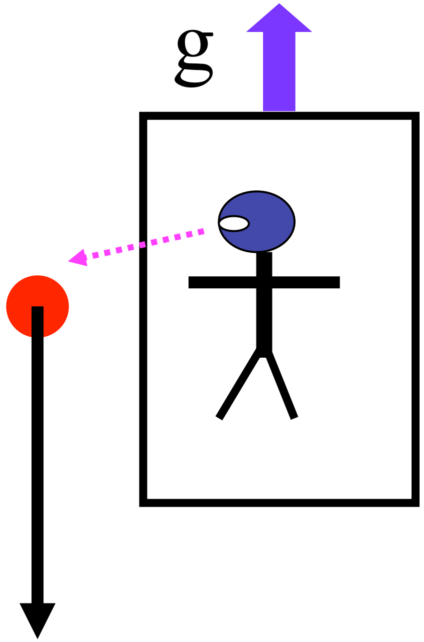
座標変換

x' の座標系では無重力！

x' 系を慣性系と見て何が悪い??

通常は x 系を慣性系と見なして、その上で
重力場を記述している。

一様な加速度のかかる系は一様重力場と等価



無重力場におけるロケットを想定。
一様加速度ｇで上向きに加速する。
外で静止して存在する物体は、
加速度ｇで反対向きに進むように
見える。

加速度ｇで落下して見える

一様加速度のかかる系は、その反対の向きに
重力加速度の存在する系と等価である

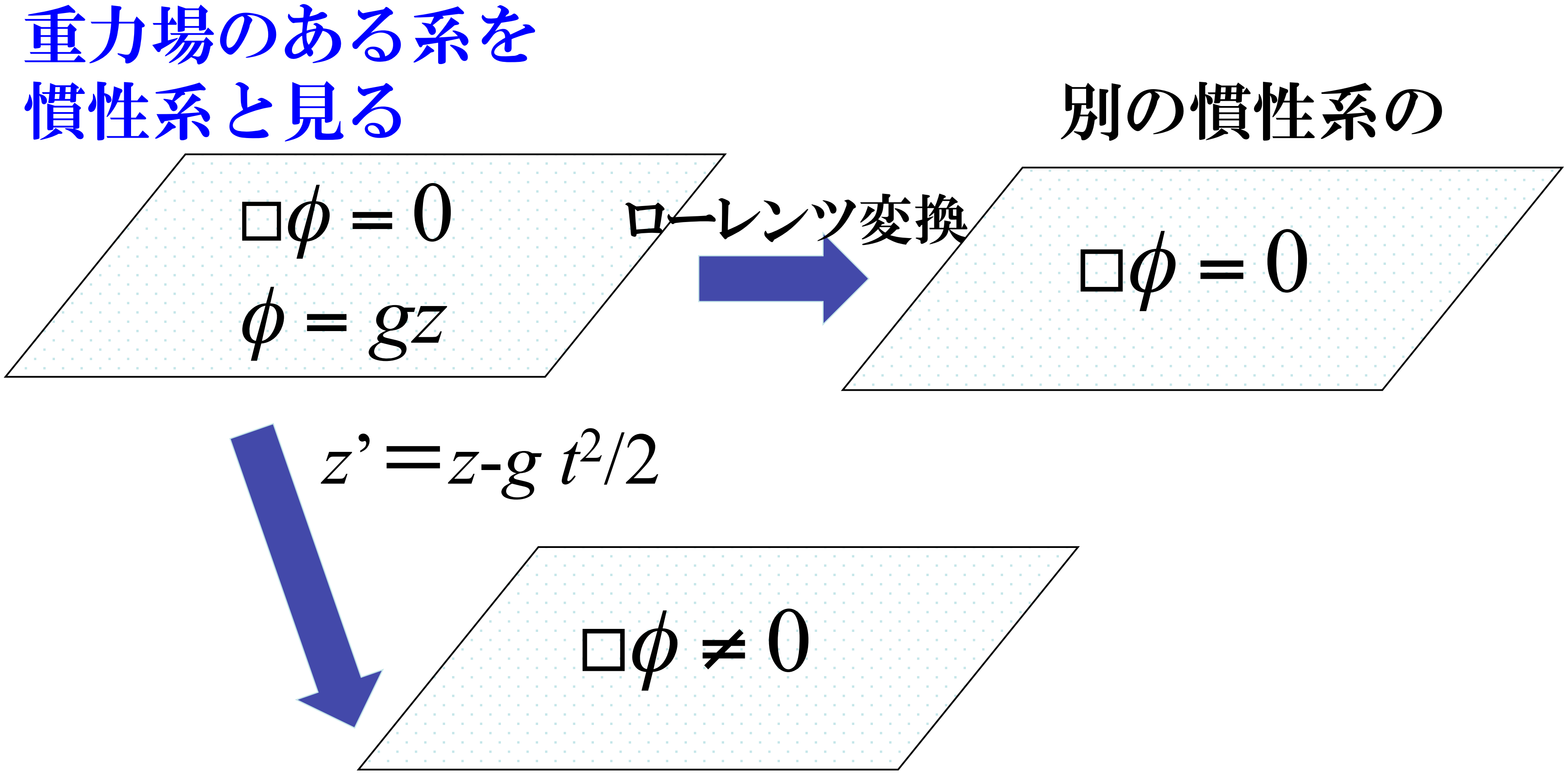
一様重力場の特徴

- 電磁場のような「重力場」の絶対的存在の判断が不可能。仮想重力場も作れてしまう。
- 「大局的な慣性系」をまず定義した後に、重力理論を作る方法は使えない。なぜならば、どちらが本物の慣性系か、判別できないから。
  →重力が存在する場合、大局的な慣性系は存在しえない(革命的変更)。

❖　重力は従来とはまったく別の力と考えるべき。

❖　以上の問題は一様でない重力場を局所的に観たときにも　同様である。局所的に重力場は消せる。

おかしいことのイメージ



加速度のない系のはず。
でも、慣性系の式にならない。
これをなぜ慣性系と見なせない？

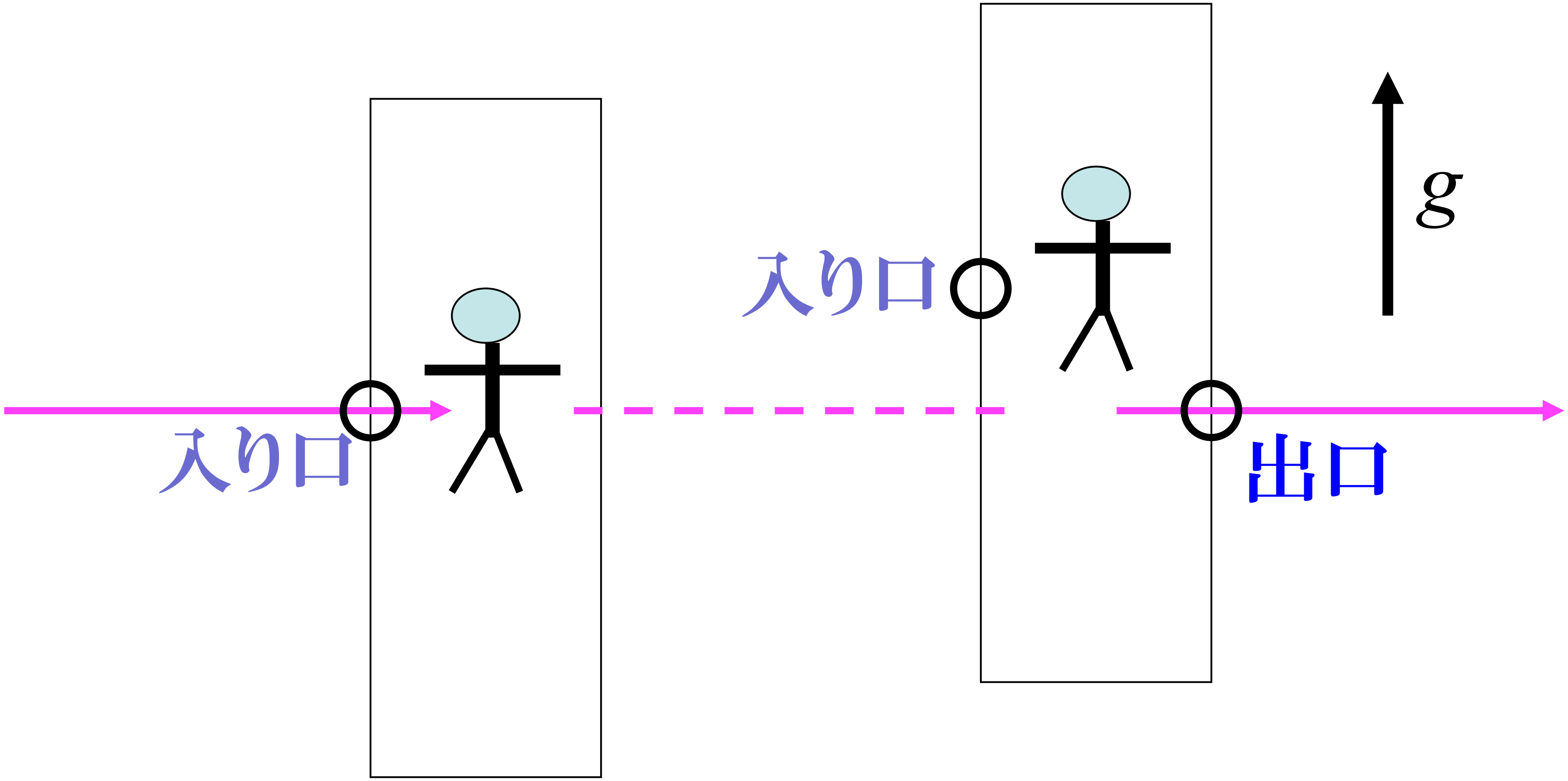
アインシュタインの思考実験

- 一様加速度と一様重力加速度は区別不可能。
- つまり一様加速度系は一様重力系と変わりはない
  ＝ 発展解釈された等価原理

という事実が成り立つとして光の軌跡を考える

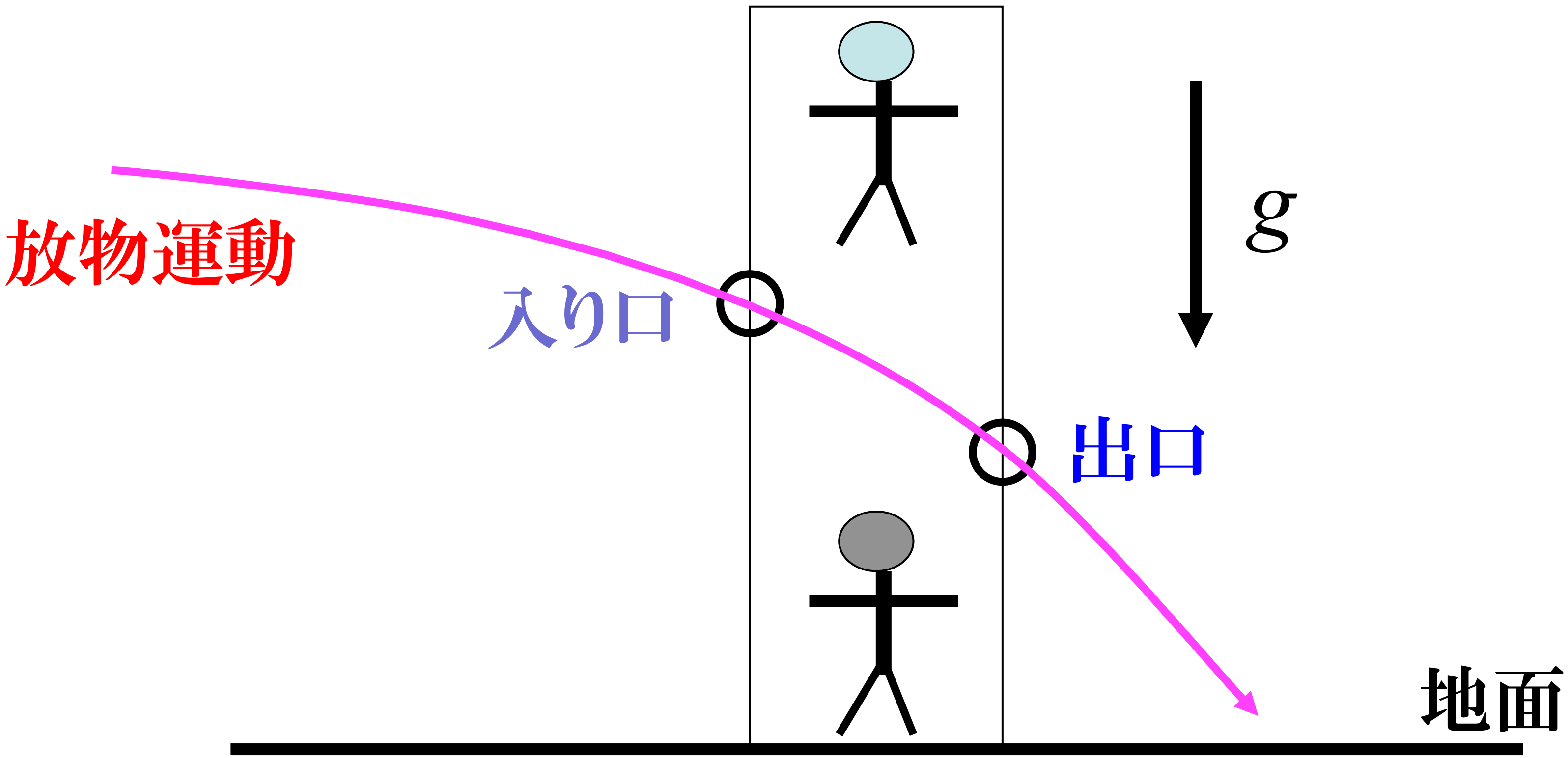
ロケットを用いた思考実験

①　無重力場で加速度運動するとき



光は真っ直ぐ進むが、ロケットの中の人から見ると
光は真っ直ぐ進んで見えず、光路は曲がって見える。

② 一様重力場で静止しているのと等価



光は曲がっている！

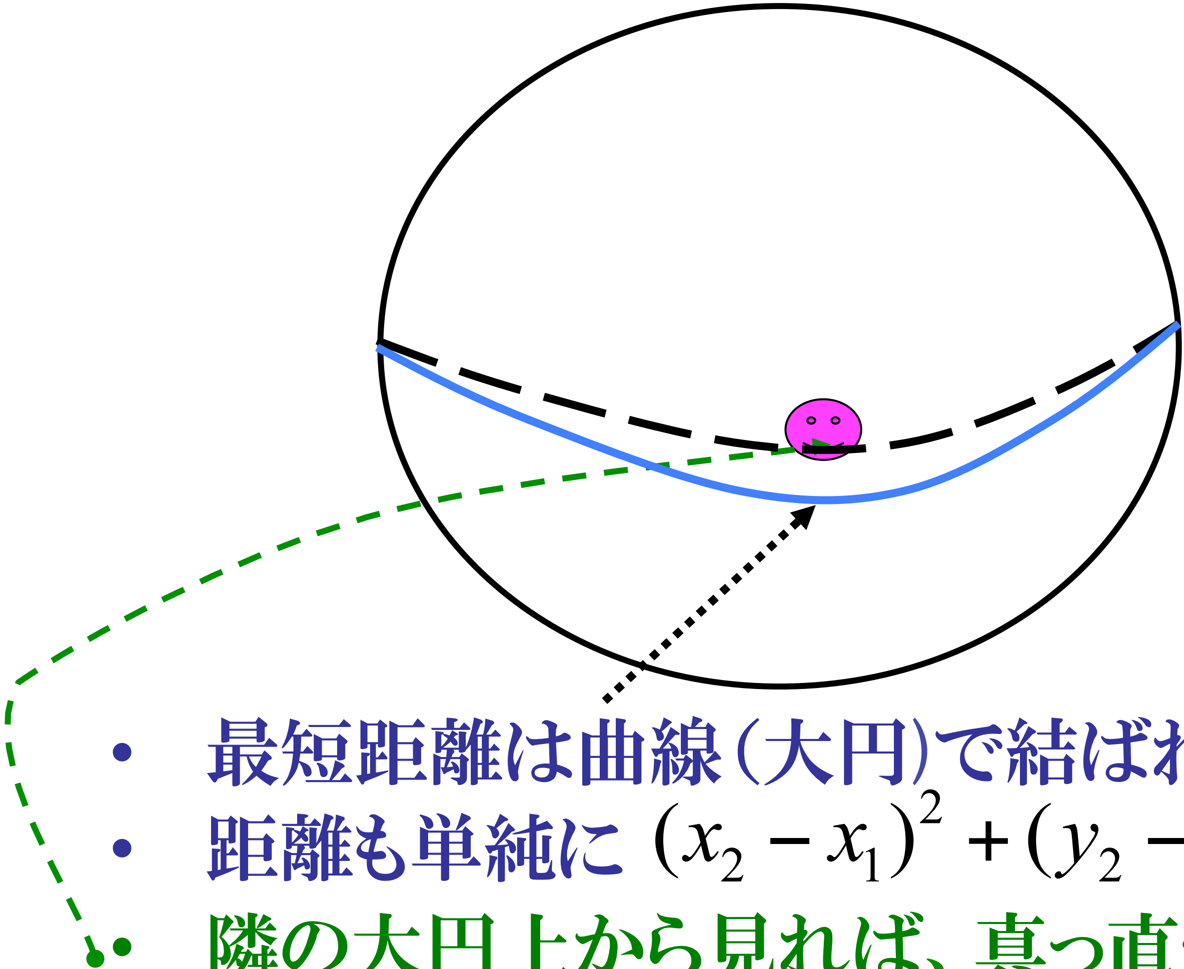
（注：ニュートン重力でも曲がる）

ロケットの中の人は、重力か一様加速か区別できない

ここでニュートンの第一法則を思い出す：力が働かなければ、物体は最短距離を動く (但し平坦時空の中を)

- 重力場の中でも、光やその他の物体は最短距離を進むが、空間が曲がっているから光路が曲がる、と考えると最もすっきりする。
- 相対論では、時間も絶対的ではないので、空間が曲がるなら時間も曲がるはずである。
- アインシュタインの結論： 重力とは時空が曲がっていることの発現である。

例えば、3次元空間中の2次元球面＝曲面



- 最短距離は曲線(大円)で結ばれる。
- 距離も単純に $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ ではない。
- 隣の大円上から見れば、真っ直ぐ進んで見えない。
- 球上の近傍の2点間距離の2乗は

$$dl^2 = a^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

曲がり具合＝幾何学の表し方

・計量を用いて、時空間微小距離を定義

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (\mu, \nu = 0,1,2,3)$$

$$x^0 = ct, \quad (x^1, x^2, x^3):$$ 空間座標

・平坦な場合：

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

✧ ここで、平坦計量の ds^2 はローレンツ変換で不変。

✧ 自然な拡張として、一般計量の場合も ds^2 は不変になるべき

✧ さらに一歩進んで、物理法則も一般座標変換に対して不変になるべきではないか → 一般相対性原理

8　一般相対性原理

- 一様加速度系と一様重力加速度の系は等価。
  これらは座標変換で両方とも加速度のない系に移れるが、従来の考え方だと、どちらかは非慣性系。
  →　ローレンツ変換に限定された座標変換不変性は、重力理論では無意味である。
- 従来の慣性系の考え方に縛られたら駄目である。
- そこで「物理法則は選んだ座標には依らない」という原理を新たに採用＝一般相対性原理
- つまり、基礎方程式は一般座標変換に対して形を変えないものでなくてはならない
  ⇒　基礎方程式は「テンソル方程式」

＃　アインシュタインの原論文(1914)の論理

- 特殊相対論では不変的な時空距離は

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

- 物体の運動は、以下の式から導出できる

$$\delta \int ds = 0$$

- ローレンツ変換に限る限りは、ds の形は不変
- しかし、重力が存在する場合には、ローレンツ変換に限った不変性に限定してはいられない

→　一般座標変換を考えれば、

$$\boxed{ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$$

曲がった時空の運動が記述される

計量“テンソル

テンソル

- 成分が座標変換に対して以下の変換則に従う

$$T'_{\mu'\nu'\lambda'\cdots} = T_{\mu\nu\lambda\cdots} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\nu'}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\lambda'}} \cdots$$

$$T'^{\mu'\nu'\lambda'\cdots} = T^{\mu\nu\lambda\cdots} \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x'^{\lambda'}}{\partial x^{\lambda}} \cdots$$

$$T'_{\mu'\nu'}{}^{\alpha'\beta'} = T_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\nu'}} \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\beta'}}{\partial x^{\beta}}$$

- 計量の座標変換

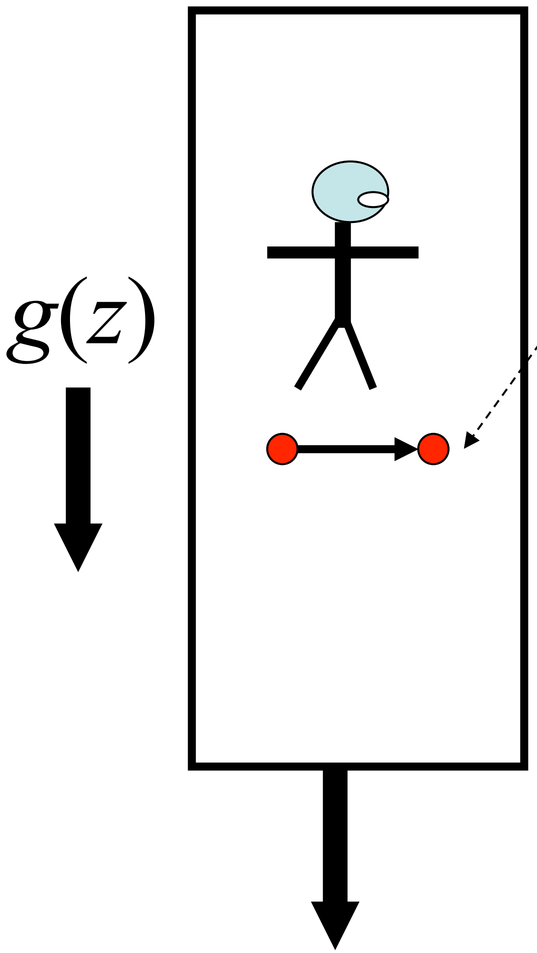
$$g_{\alpha'\beta'} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\beta'}}, \qquad g_{\alpha\beta} = g_{\alpha'\beta'} \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\beta'}}{\partial x^{\beta}}$$

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} = g_{\alpha'\beta'} \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\beta'}}{\partial x^{\beta}} dx^{\alpha} dx^{\beta} = g_{\alpha'\beta'} dx'^{\alpha'} dx'^{\beta'}$$

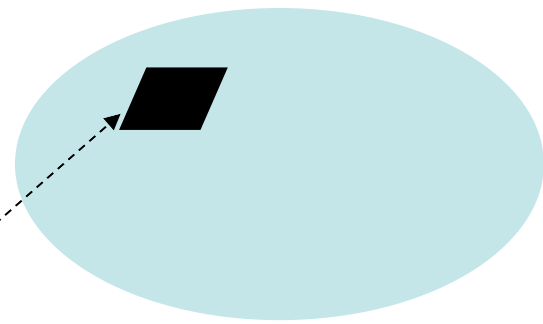
$$\because \quad \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} dx^{\alpha} = dx'^{\alpha'}$$

局所慣性系：重力理論における慣性系

- 重力が消せてしまうのは、一様重力場に限らない。
- 局所的には非一様重力場も一様に見える。



自由落下するロケットの
中で見れば、ボールは
水平方向にのみ動く
→　局所慣性系



接平面⇒局所慣性系
が取れる

アインシュタインの発想転換のまとめ

・特殊相対論の2大原理

❖ 光速度不変原理

➢ 大局的な慣性系の存在が大前提

➢ 慣性系は等価で、光速度は慣性系で不変

❖ 特殊相対性原理

➢ (慣性系で記述された)物理法則はローレンツ変換不変

・一般相対論の2大原理

❖ 等価原理

➢ 大局的な慣性系は存在しない

➢ 等加速度系と一様重力加速度系は等価

❖ 一般相対性原理

➢ 物理法則は一般座標変換不変。その結果、局所慣性系では不変。

まとめ

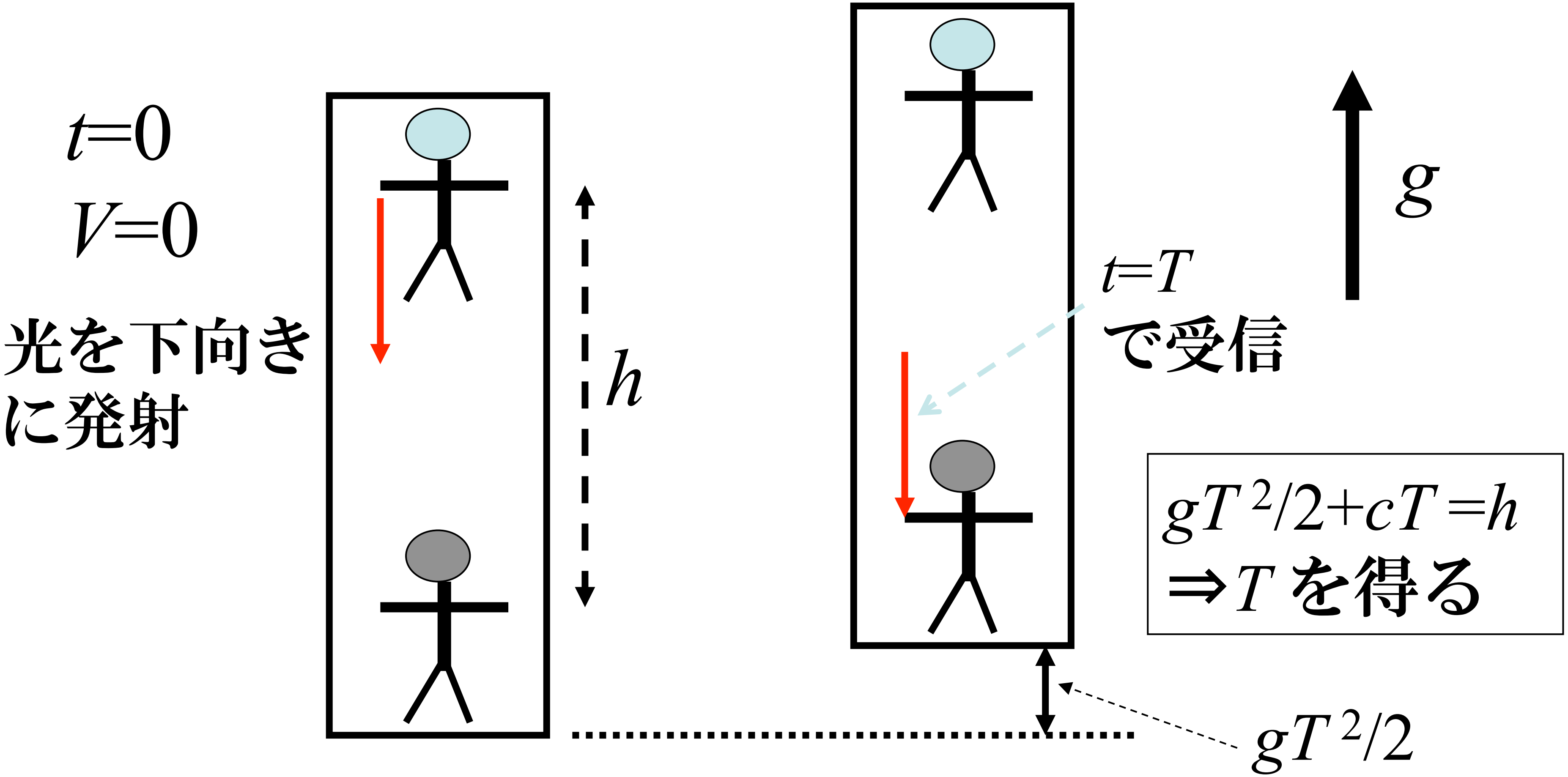
	要求する不変性	基本原理
ニュートン重力	ガリレイ変換不変性	ガリレイの相対性原理
特殊相対論	ローレンツ変換不変性	光速度不変の原理
一般相対論	一般座標変換不変性	等価原理

テンソルからなる
方程式のみが、
基本方程式になる。

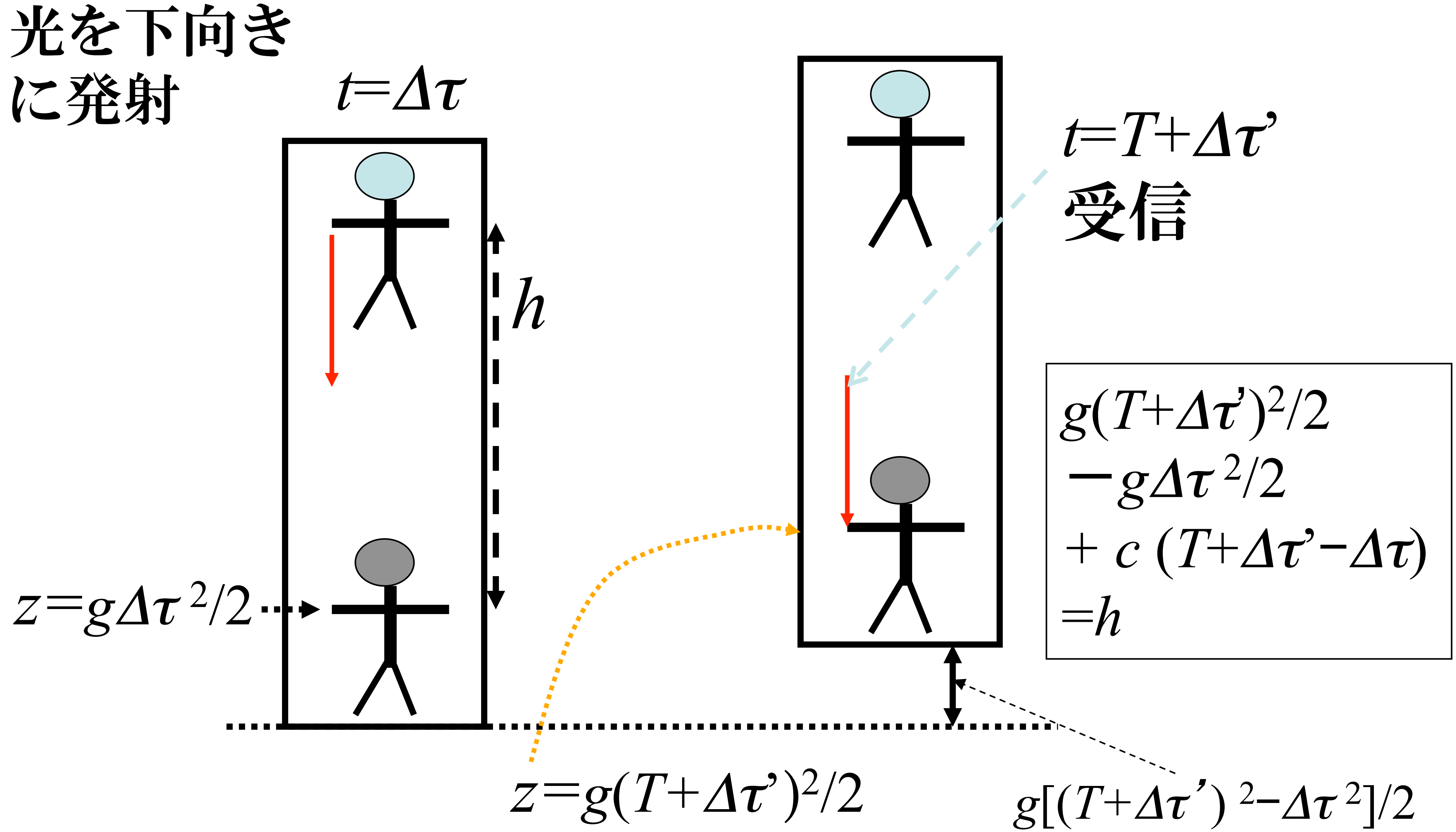
時空は曲がっている
→ リーマン幾何学による時空の記述。

等価原理の帰結：重力的時間の遅れ

再び、ロケットを用いた思考実験：
①　無重力場で加速度運動するとき



上から等しい時間間隔で光を発射。その時間間隔をΔτとする。



式を解くと、

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{g}{2}T^2 + cT - h = 0 \quad \left(\Rightarrow \ T = \frac{-c+\sqrt{c^2+2gh}}{g} \approx \frac{h}{c} \quad \left(c^2 \gg gh\right) \right) \\
&\frac{g}{2}\left[\left(T+\Delta\tau'\right)^2 - \Delta\tau^2\right] + c\left(T+\Delta\tau'-\Delta\tau\right) - h = 0
\end{aligned}
\right\}
$$

$$
\Rightarrow \frac{g}{2}\left(2T\Delta\tau' + \Delta\tau'^2 - \Delta\tau^2\right) + c\left(\Delta\tau' - \Delta\tau\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\Delta\tau' \neq \Delta\tau}
$$

$$
\Delta\tau' = \Delta\tau + \delta, \quad \delta \ll \Delta\tau' \approx \Delta\tau
$$

$$
\Rightarrow \frac{\delta}{\Delta\tau} \approx -\frac{gh}{c^2} + O\left(c^{-3}\right)
$$

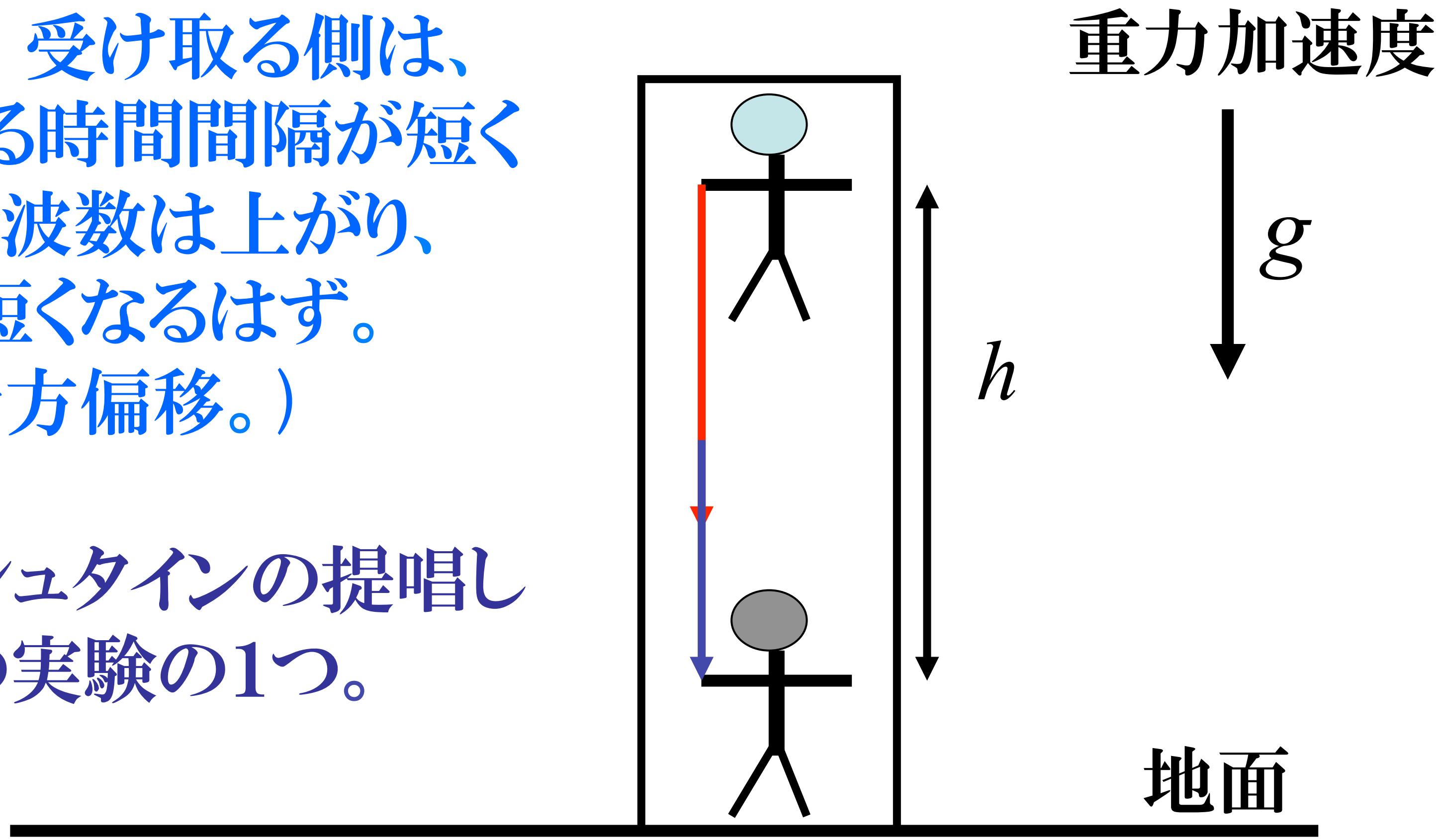
$$
\therefore \Delta\tau' \approx \Delta\tau\left(1 - \frac{gh}{c^2}\right) \quad \& \quad f' \approx f\left(1 + \frac{gh}{c^2}\right)
$$

受け取る間隔は短くなる　→　周波数は上がる。

②一様重力場で静止しているのと等価

同様に、受け取る側は、
受け取る時間間隔が短く
なり、周波数は上がり、
波長も短くなるはず。
(重力青方偏移。)

アインシュタインの提唱し
た3つの実験の1つ。



この効果は、Vessot & Levine (1979) によるロケットを
用いた実験によって最初に検証されている。

一般化

- ところで式に現れる gh は重力ポテンシャルの差
- よって一般的には

$$\Delta\tau' \approx \Delta\tau\left(1-\frac{|\Delta\Phi|}{c^2}\right) \quad \& \quad f' \approx f\left(1+\frac{|\Delta\Phi|}{c^2}\right)$$

- 例えば地球周辺では

重力青方（赤方）偏移

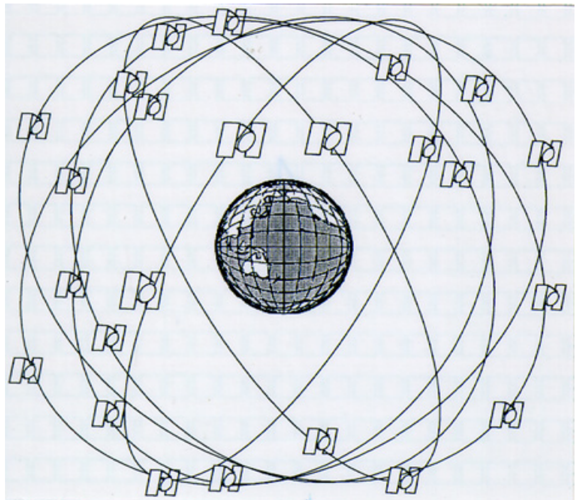
$$\Delta\tau_d \approx \Delta\tau_u\left[1+\frac{GM_\oplus}{c^2}\left(\frac{1}{R_u}-\frac{1}{R_d}\right)\right] < \Delta\tau_u$$

$$f_d \approx f_u\left[1-\frac{GM_\oplus}{c^2}\left(\frac{1}{R_u}-\frac{1}{R_d}\right)\right] \qquad (R_u > R_d)$$

重力ポテンシャルが深い方が時間の進みが遅い

GPS (Global Positioning System)

- GPSは、24個の人工衛星からなる。各々が12時間で地球を1周する。
- 各々が正確な原子時計を搭載。さらに一日数回地上と通信し、時計を合わせる。
- 地上から最低4台と常に通信できるように配置
- 4つの衛星 ⇔ 地上の通信時間差から、地上の座標(t, x, y, z)を決定
- 仮に3mの精度を要求するなら、$3\text{m}/c = 10$ナノ秒の精度が必要。軍事目的ならもう少し高い精度が必要。



- 12時間周期の軌道半径

$$12h = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_\oplus}};\quad M_\oplus \approx 6\times 10^{24}\ \mathrm{kg}$$

地球の半径

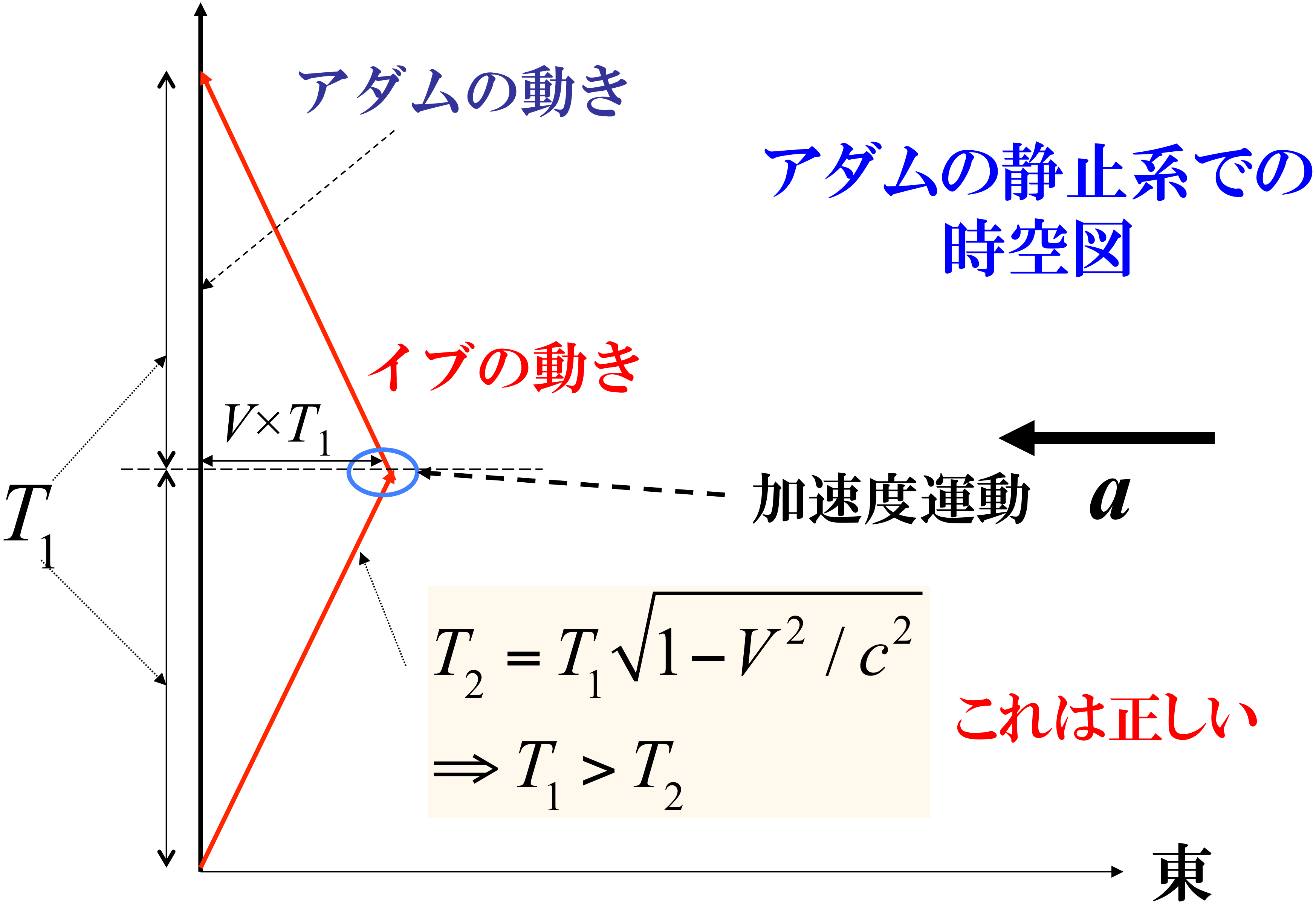
$$\Rightarrow\quad r \approx 27000\ \mathrm{km}\ \approx 4.2R_\oplus\quad (R_\oplus \approx 6400\ \mathrm{km})$$

- 時間間隔の差

$$\Delta\tau_{\mathrm{GPS}} = \Delta\tau_{\mathrm{ground}}\left[1-\frac{GM_\oplus}{c^2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_\oplus}\right)\right] \approx \Delta\tau_{\mathrm{ground}}\left(1+\underline{3.4\times 10^{-10}}\right)$$

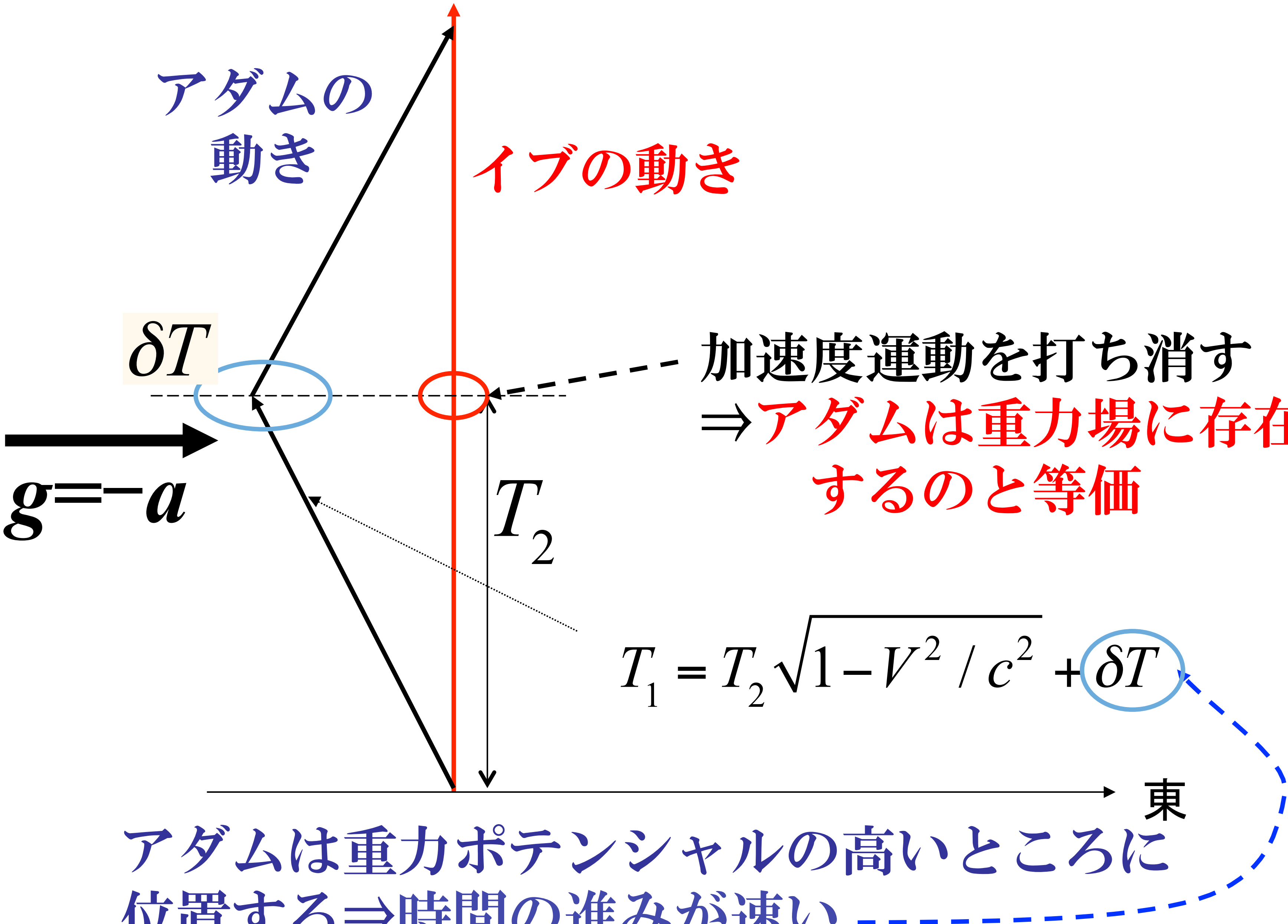
- 小さいようで小さくない。地上で1分経過すれば、GPSでは20ナノ秒余分に時間が進む　⇒非常に大きい!
- 一般相対論的効果を知らずにGPSを作ると使い物にならない

双子のパラドクスの解



アダムの動き
アダムの静止系での
時空図
イブの動き
$V \times T_1$
T_1
加速度運動　a
$T_2 = T_1\sqrt{1 - V^2 / c^2}$
$\Rightarrow T_1 > T_2$
これは正しい
東

イブの静止系での時空図



アダムは重力ポテンシャルの高いところに
位置する⇒時間の進みが速い

具体的計算

転回点でのイブの加速時間をδtとすると、

加速度は $g = 2V/\delta t.$

イブが転回点に達するまでに進む距離は、$VT_1 \equiv L.$

イブが加速している間、イブの静止系でのアダムの経過時間

$$\delta T = \delta t \times \left(1 + \underline{\frac{gL}{c^2}}\right) = \delta t + \frac{2V}{c^2} VT_1 \xrightarrow{\delta t \to 0} \frac{2}{c^2} V^2 T_1$$

イブの片道の間にアダムの過ごす時間

$$T_1 = T_2\sqrt{1 - V^2/c^2} + \underline{\delta T/2} = T_1\left(1 - V^2/c^2\right) + \underline{T_1 V^2/c^2} = T_1$$

つじつまがあう