

# 数値相対論の進展

柴田 大 (東大総合文化)

2006年春季物理学会

# 0 数値相対論とは

$$G_{\mu\nu} = 8\pi \frac{G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

アインシュタイン方程式  
(時空の曲がり = 物質の状態)

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\mu} T^{\mu}_{\nu} = 0 \\ \nabla_{\mu} (\rho u^{\mu}) = 0 \end{array} \right\}$$

運動方程式(主に流体)

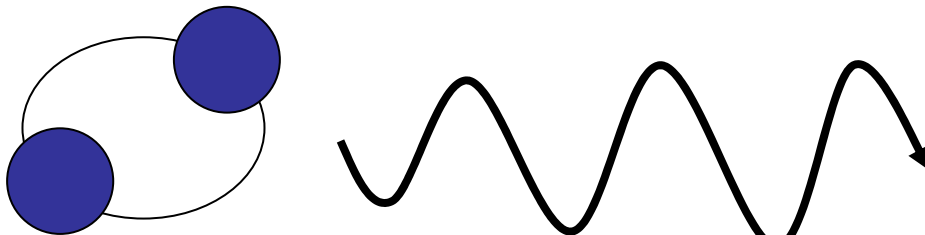
$$\left( \begin{array}{l} \nabla_{\mu} F^{\mu\nu} = -4\pi j^{\nu} \\ \nabla_{[\mu} F_{\nu\lambda]} = 0 \\ \text{Radiation .....} \end{array} \right)$$

さらには電磁場、輻射輸送

これらの連立方程式を解いて時間変動する解  
を求めるのが、数値相対論

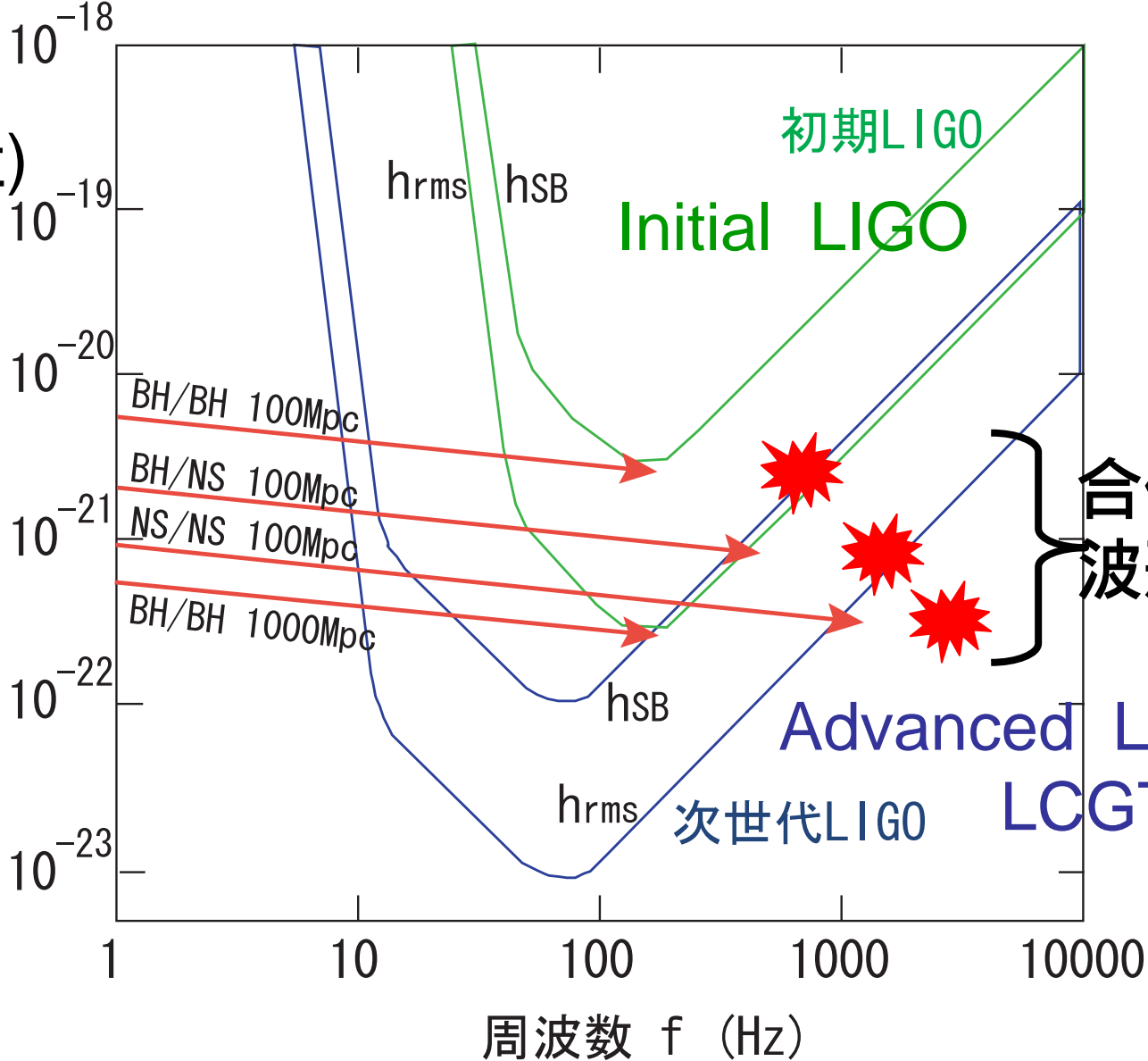
# 1 数値相対論の役割

A : 重力波の波形を予言すること



振幅  
無次元量)

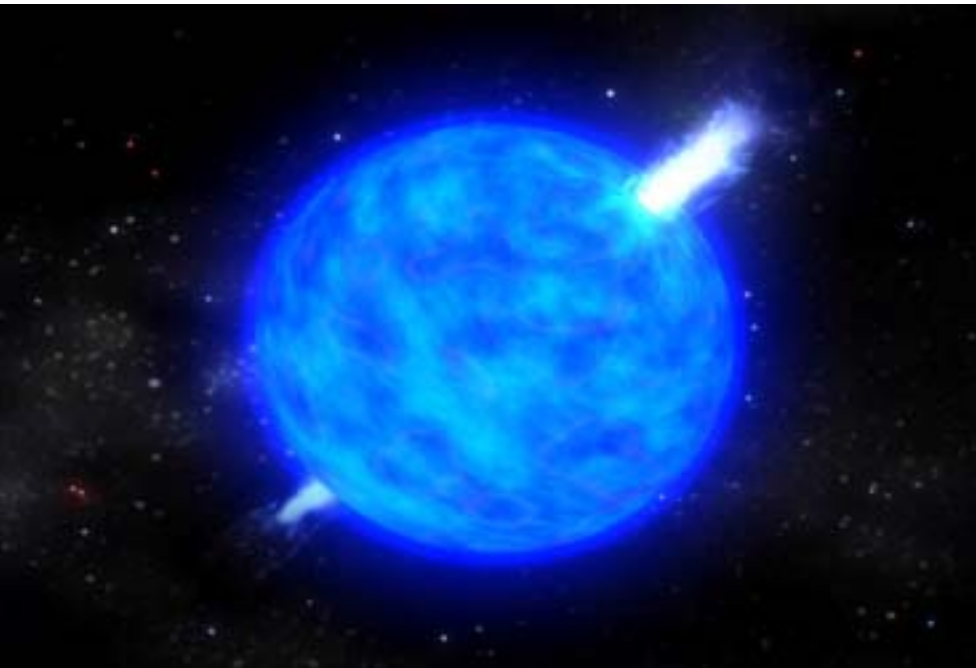
$h$



BHBH in  $\sim 100$ Mpc is the source for initial LIGO.  
NSNS in  $\sim 300$ Mpc for advanced LIGO.

# 1 数値相対論の役割(続き)

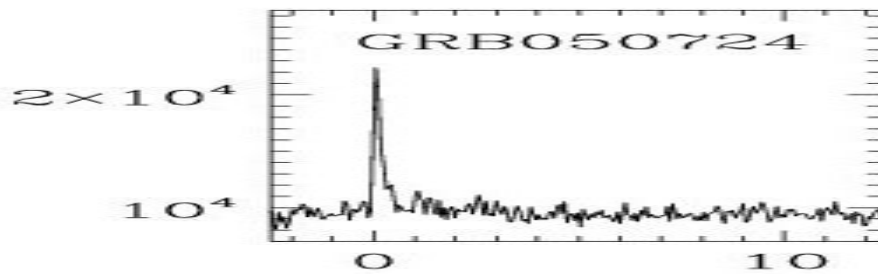
B: 一般相対論的天体(中性子星・ブラックホール)の形成/連星の合体過程を明らかにすること



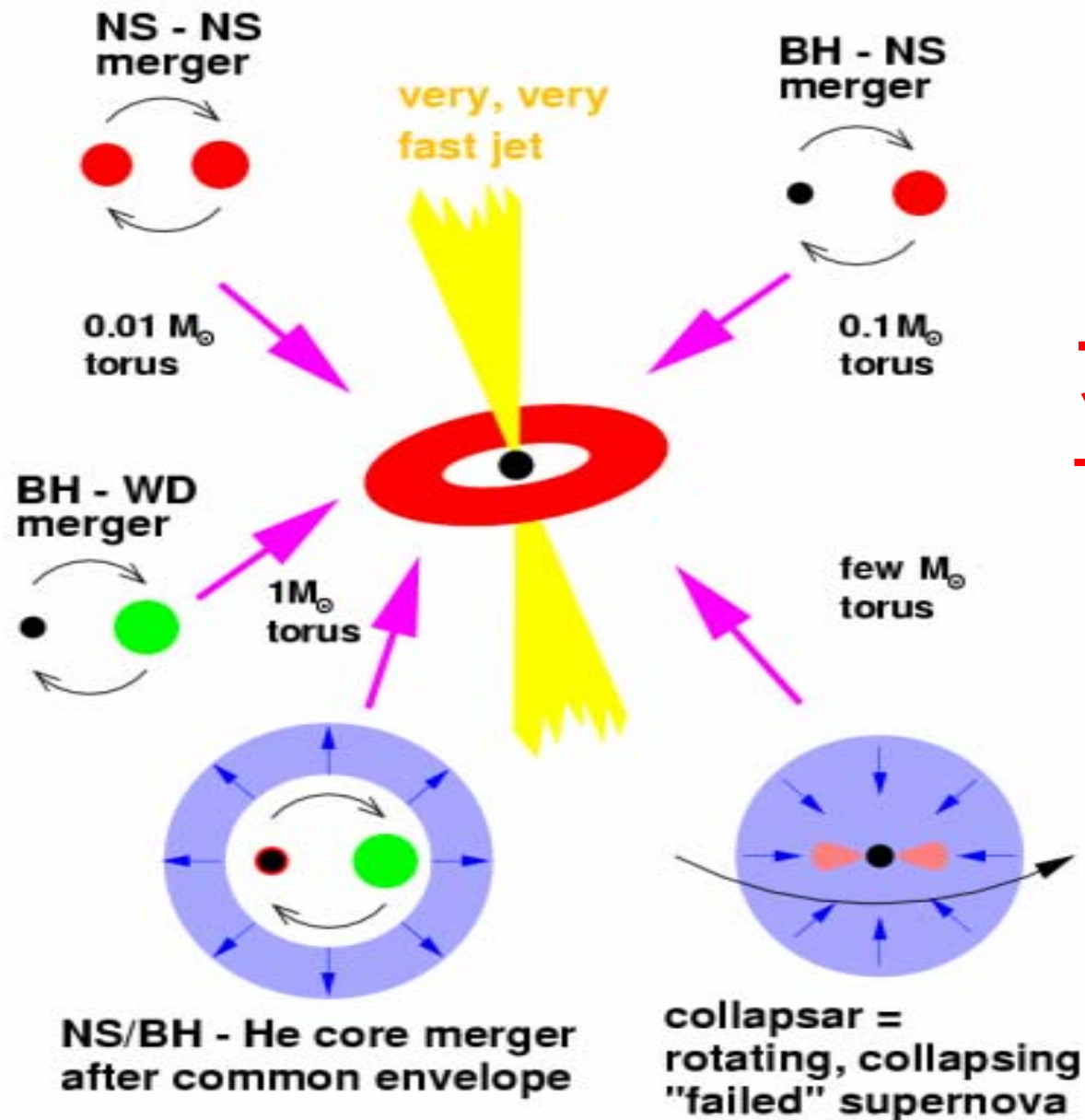
大質量星の重力崩壊  
によるブラックホール形成  
連星中性子星の合体

ガンマ線バースト

数秒で $\sim 10^{51}$ エルグ  
のガンマ線



# Hyperaccreting Black Holes



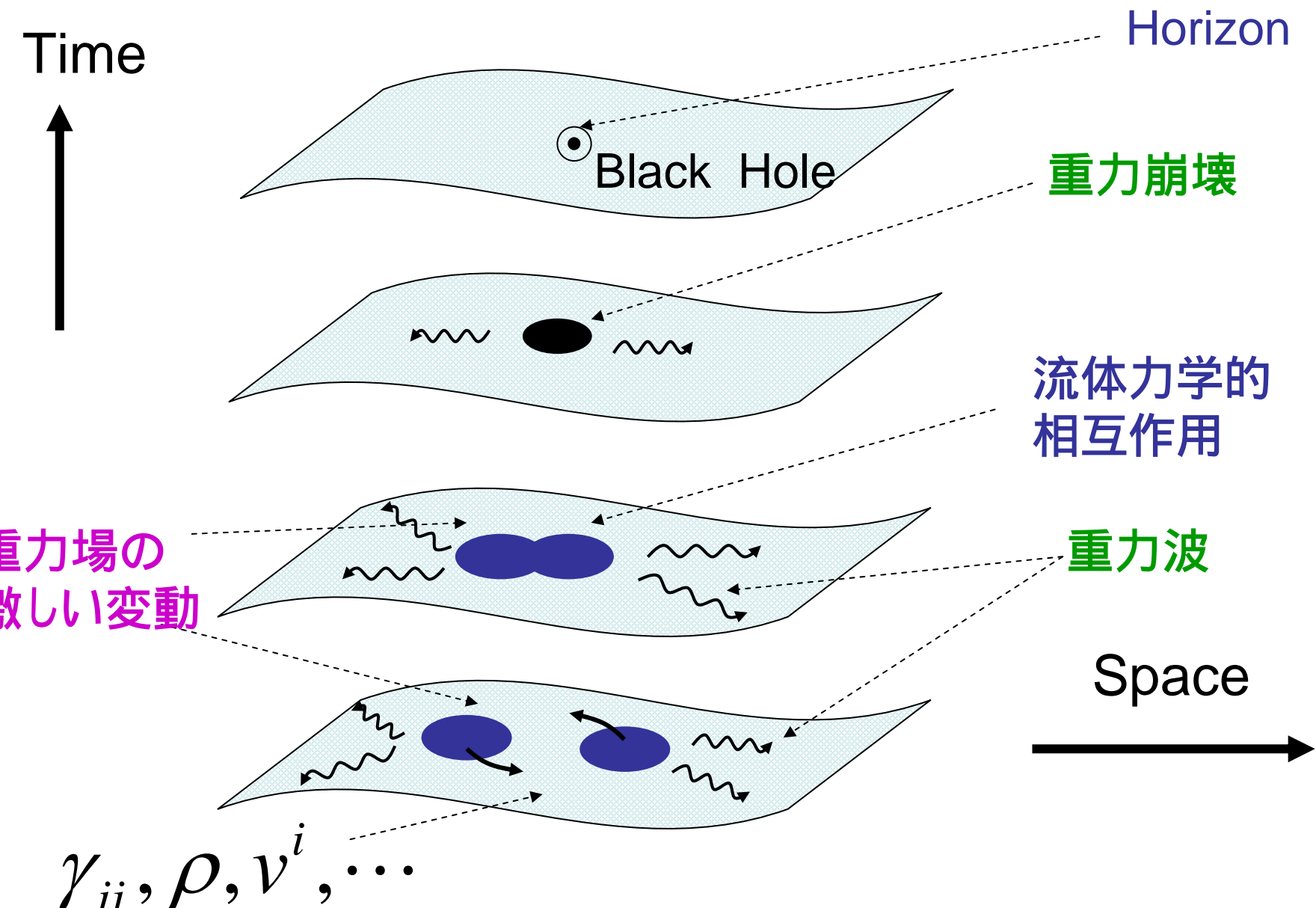
ガンマ線  
バースト

=

ブラックホール  
+ 高温・高密度  
トラス

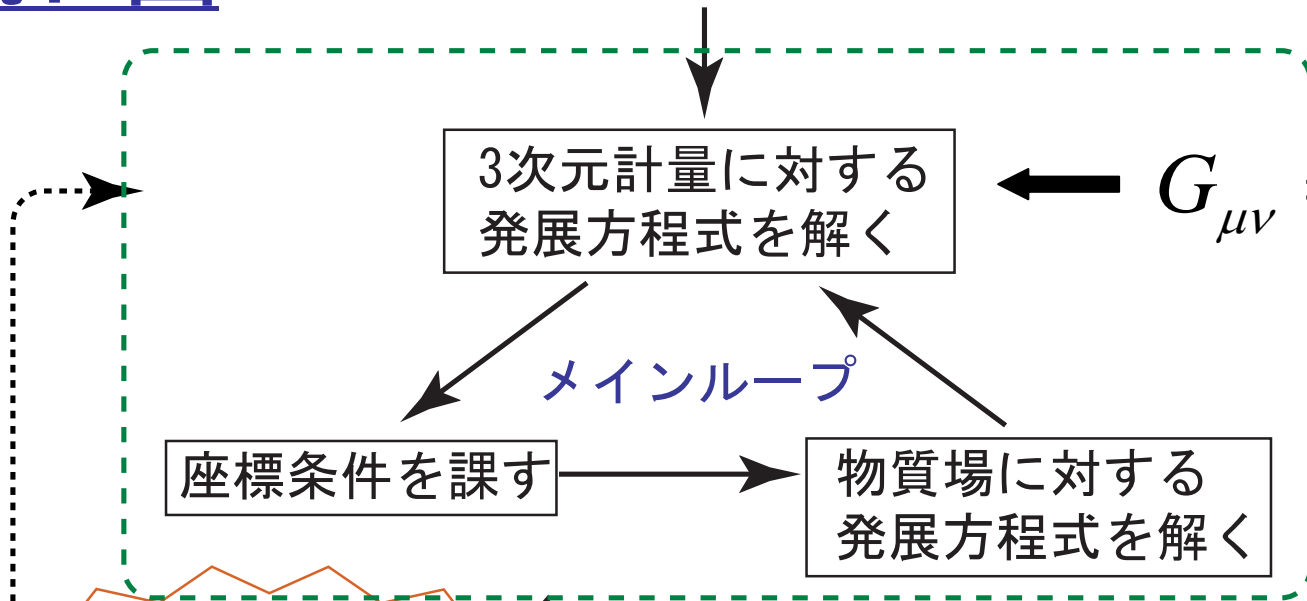
どれが本当??

# 2 数値相対論の概要



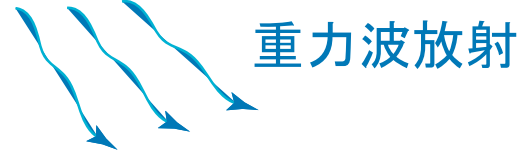
# 流れ図

現実的初期条件を設定



ブラックホールの存在位置の決定

地平線内部の計算領域切り取り



波動帯にて重力波を計量から抽出

スーパーコンピュータが必要





# 3 どこが難しかったのか？

ここでは特に

- アインシュタイン方程式を如何に解くか
- ブラックホールをどう扱うか
- 計算機資源の問題

に焦点を絞る

# アインシュタイン方程式の解法

- **数値計算では定式化がまず重要: 例、流体**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v^i}{\partial x^i} = 0, \quad \frac{\partial \rho v^j}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v^j v^i + P \delta^{ij})}{\partial x^i} = 0$$

保存系(保存量が保存する)、衝撃波も追える。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v^i}{\partial x^i} + v^i \frac{\partial \rho}{\partial x^i} = 0, \quad \frac{\partial v^j}{\partial t} + v^i \frac{\partial v^j}{\partial x^i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x^j} = 0 \quad \times$$

保存量の保存が保障されていない。

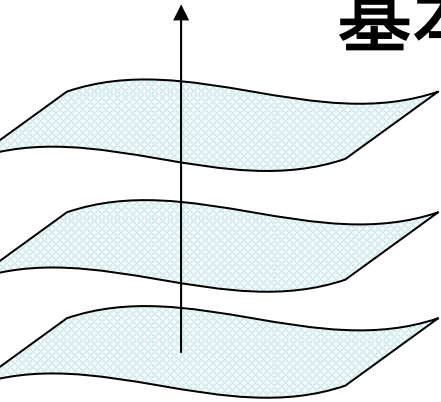
- **流体(準線形偏微分方程式)でも数値実験の末、優れた定式化が分かった。**
- **一方、アインシュタイン方程式は高度に非線形な偏微分方程式** **まずどう定式化?**

# アインシュタイン発展方程式に対する定式化

ADM Formalism :

$$K_{ij} \sim \dot{\gamma}_{ij}$$

**基本量**  $(\gamma_{ij}, K_{ij})$       **3次元計量と外的曲率**



$$\left\{ \begin{array}{l} 6 \text{ hyperbolic equations} \\ + 4 \text{ constraint equations} \end{array} \right\}$$

(Arnowitt, Deser, Misner 1962; York, 1979)

標準的には、constraints を解かずに、  
発展方程式だけを使って系を進化させる



**線形重力波を発展させても不安定**  
(発散する非物理的モードが存在するため)

Constraint violation instability

# 新しい定式化の1つ: BSSN形式

Nakamura (87), Shibata-Nakamura (95),  
Baumgarte-Shapiro (99), Alcubierre-Bruegman (00).....

Choose variables:

$$\phi \equiv \frac{1}{12} \ln(\det(\gamma))$$

$$\tilde{\gamma}_{ij} \equiv e^{-4\phi} \gamma_{ij}$$

$$K \equiv K_k^k$$

$$\tilde{A}_{ij} \equiv e^{-4\phi} \left( K_{ij} - \frac{1}{3} \gamma_{ij} K \right)$$

$$F_i \equiv \delta^{jk} \partial_j \tilde{\gamma}_{ik}$$

17 components

The Important step

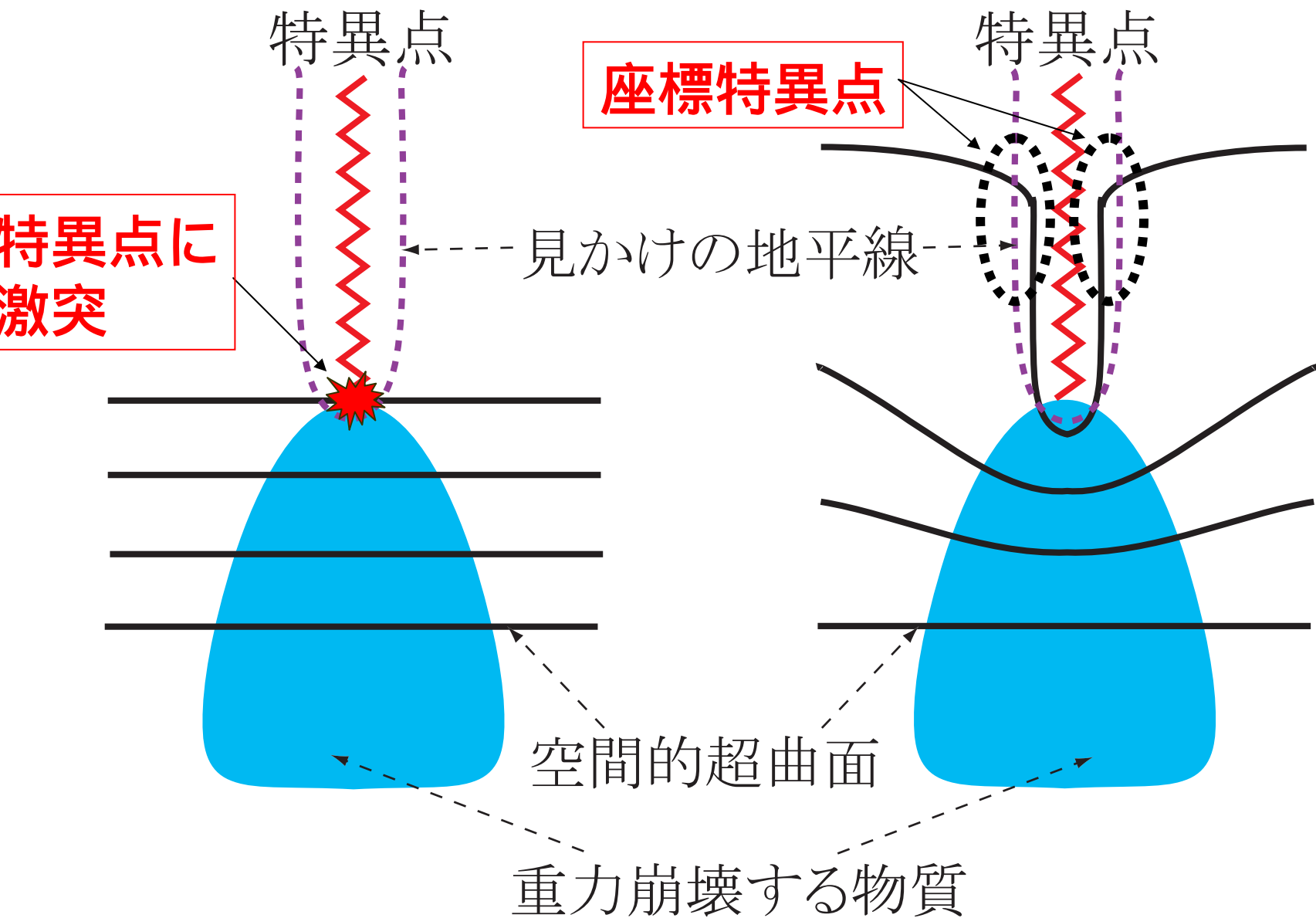
Rewrite ADM equations using

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{constraint equations} \\ \det(\tilde{\gamma}_{ij}) = 1 \end{array} \right\}$$

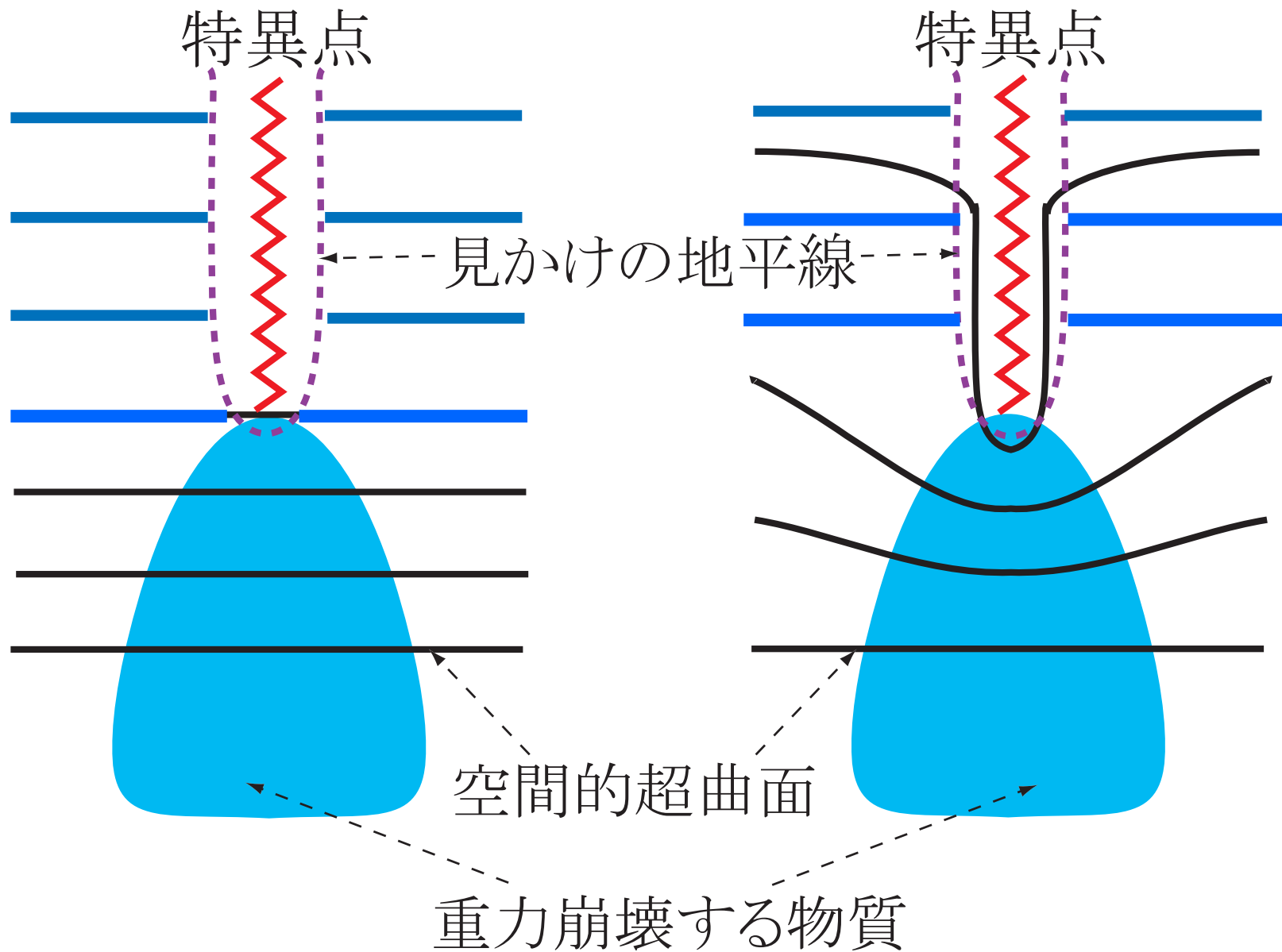
Unconstrained  
free evolution

安定な数値計算が可能に

# ブラックホール時空をどう追うか



# Black hole excision (Unruh)



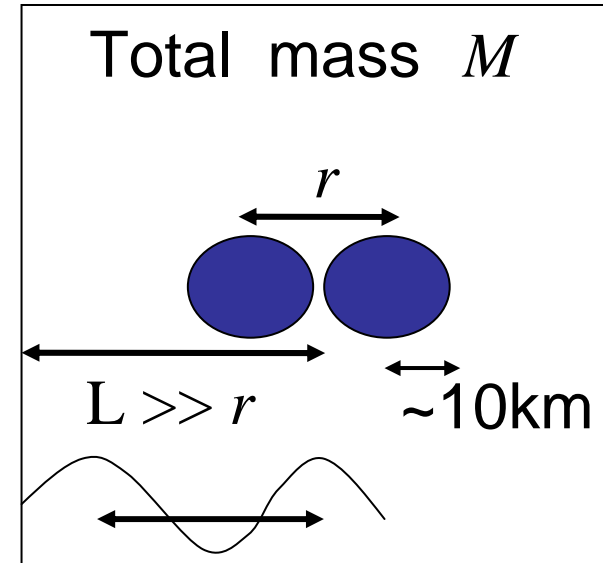
# 計算機資源と重力波の抽出

重力波を精度よく抽出するために  
必要となる最小限度のグリッド  
— 連星中性子星の場合 —

$$\lambda_{\text{ISCO}} \approx 310\text{km} \left( \frac{M}{2.8M_{\odot}} \right)^{-1/2} \left( \frac{r}{35\text{km}} \right)^{3/2}$$

Require  $L \geq \lambda_{\text{ISCO}}$  &  $\Delta x \leq 1\text{ km}$

$$\Rightarrow \frac{L}{\Delta x} \geq 310 \quad \& \quad N \geq 620 \quad (+ - 2\text{方向})$$



$$\lambda = \pi c \sqrt{\frac{r^3}{GM}}$$

一様なグリッドを張ったときに必要最小限のグリッド数:  
~ 600 \* 600 \* 300 (赤道面对称を仮定)

Memory required ~ 200 GBytes (~200 variables)

現時点で可能

# 計算機資源と重力波の抽出II

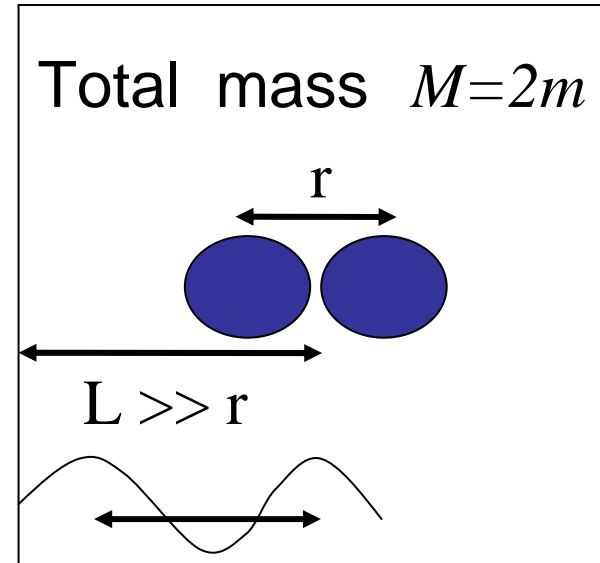
## 一連星ブラックホールの場合一

$$\lambda_{\text{ISCO}} \approx 46 \left( \frac{GM}{c^2} \right) \left( \frac{rc^2}{6GM} \right)^{3/2}$$

Require  $L \geq \lambda_{\text{ISCO}}$

$$\& \Delta x \leq 0.1 \times \frac{2Gm}{c^2} = 0.1 \frac{GM}{c^2}$$

$$\Rightarrow \frac{L}{\Delta x} \geq 460 \quad \& \quad N \geq 920$$



$$\lambda = \pi c \sqrt{\frac{r^3}{GM}}$$

一様なグリッドを張ったときに**必要最小限**のグリッド数:  
~ 1000 \* 1000 \* 1000

Memory required ~ 1.5 TBytes (~200 variables)  
現時点で難しい(実行してもやや精度不足)



# 4 数値相対論2005

## 数値相対論における課題

- 連星ブラックホールの合体(重力波源)
- 連星中性子星の合体(重力波源/GRB候補)
- 大質量星の重力崩壊(GRB候補)

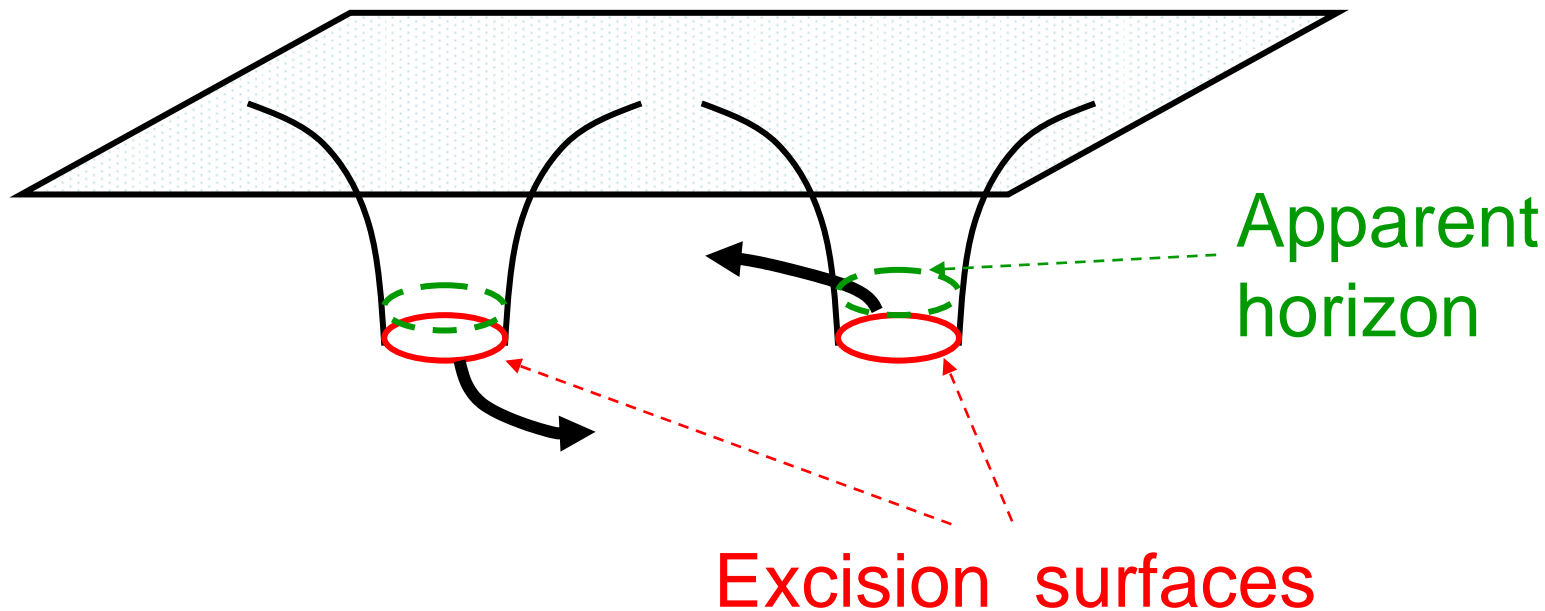
を明らかにすること

**出来る！**

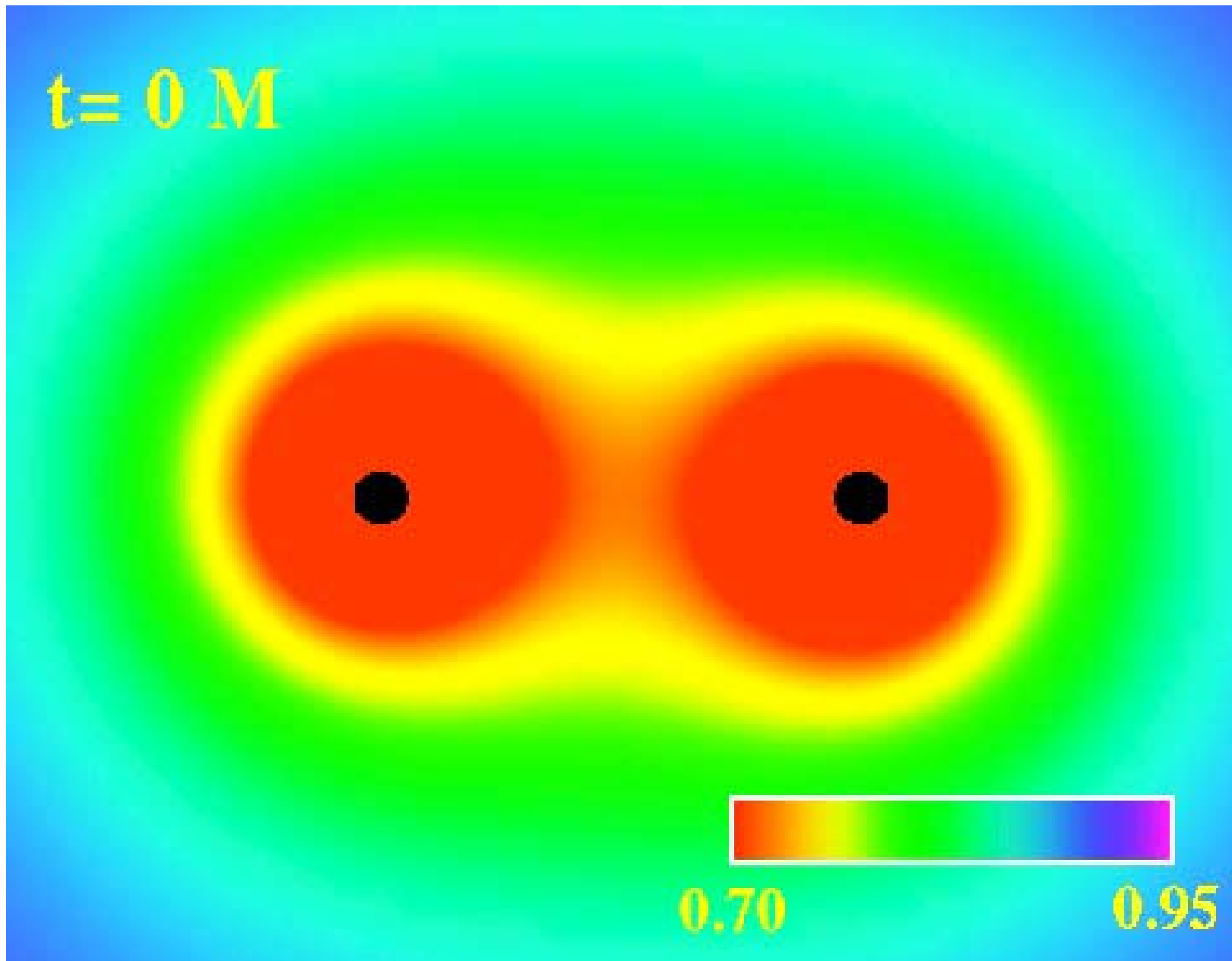
以下、これらの最新シミュレーションの結果を紹介

# (1) 連星ブラックホールの合体 (F. Pretorius 05)

- ブラックホールを追うのに適した定式化を独自で導出
- “動く”ブラックホールに対して切り取り技法を用いる
- 多層格子法(BH周りに細かいメッシュ)
- 任意の初期条件に適用可能(現時点では不完全)

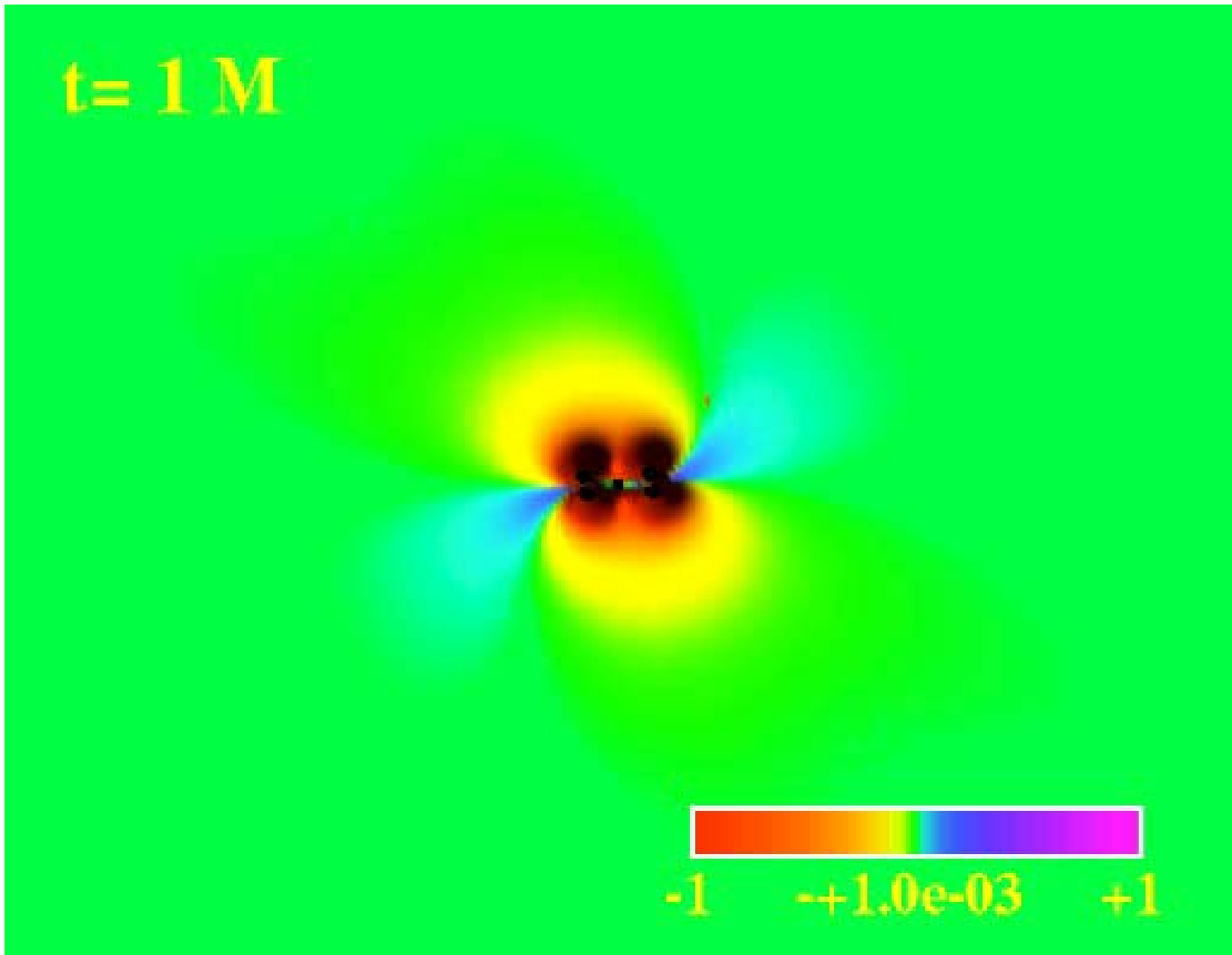


# Simulation by Pretorius (2005)

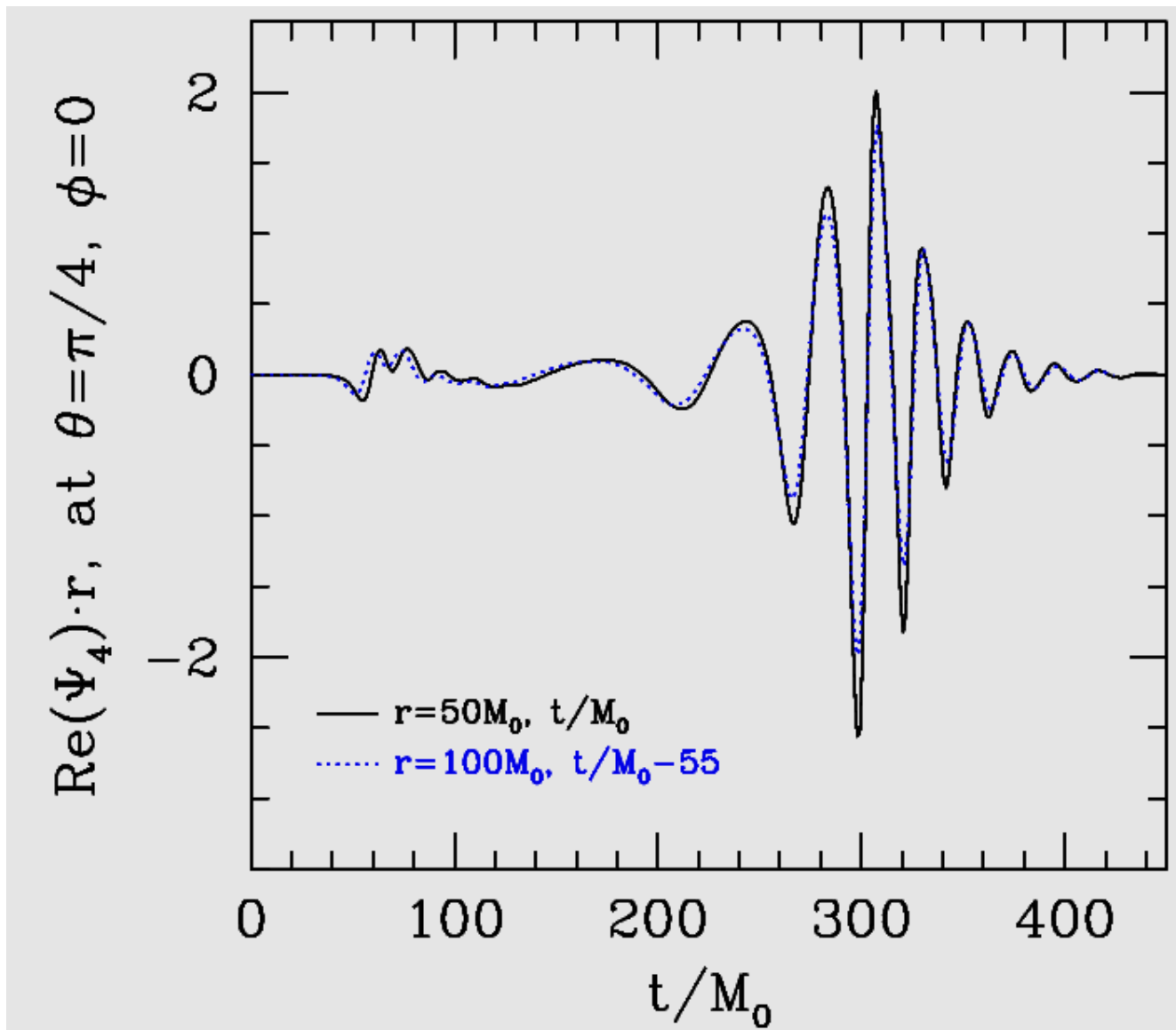


# Pretorius; GW ( $\Psi_4$ )

$t = 1 M$



# Waveform



A few % mass energy is lost in the ringdown phase

## (2) 連星中性子星の合体 (柴田、谷口、瓜生)

### 必要な要素

- 現実的な初期条件
- 現実的な状態方程式
- 衝撃波を高精度で追える流体コード
- ブラックホール形成後にはブラックホール切り取り

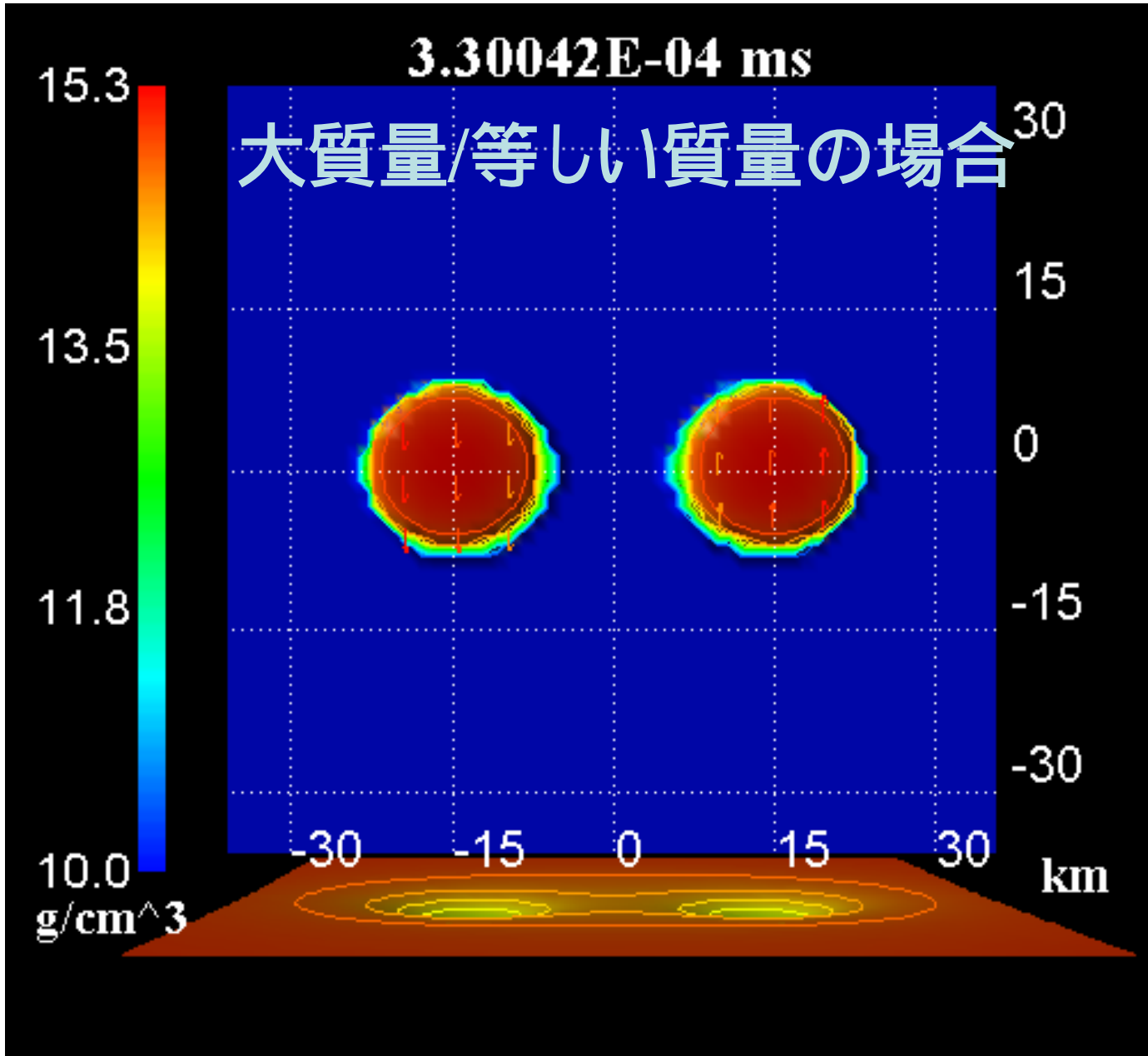
OK!

### 最近得られた知見(Shibata-Taniguchi, PRD73, '06)

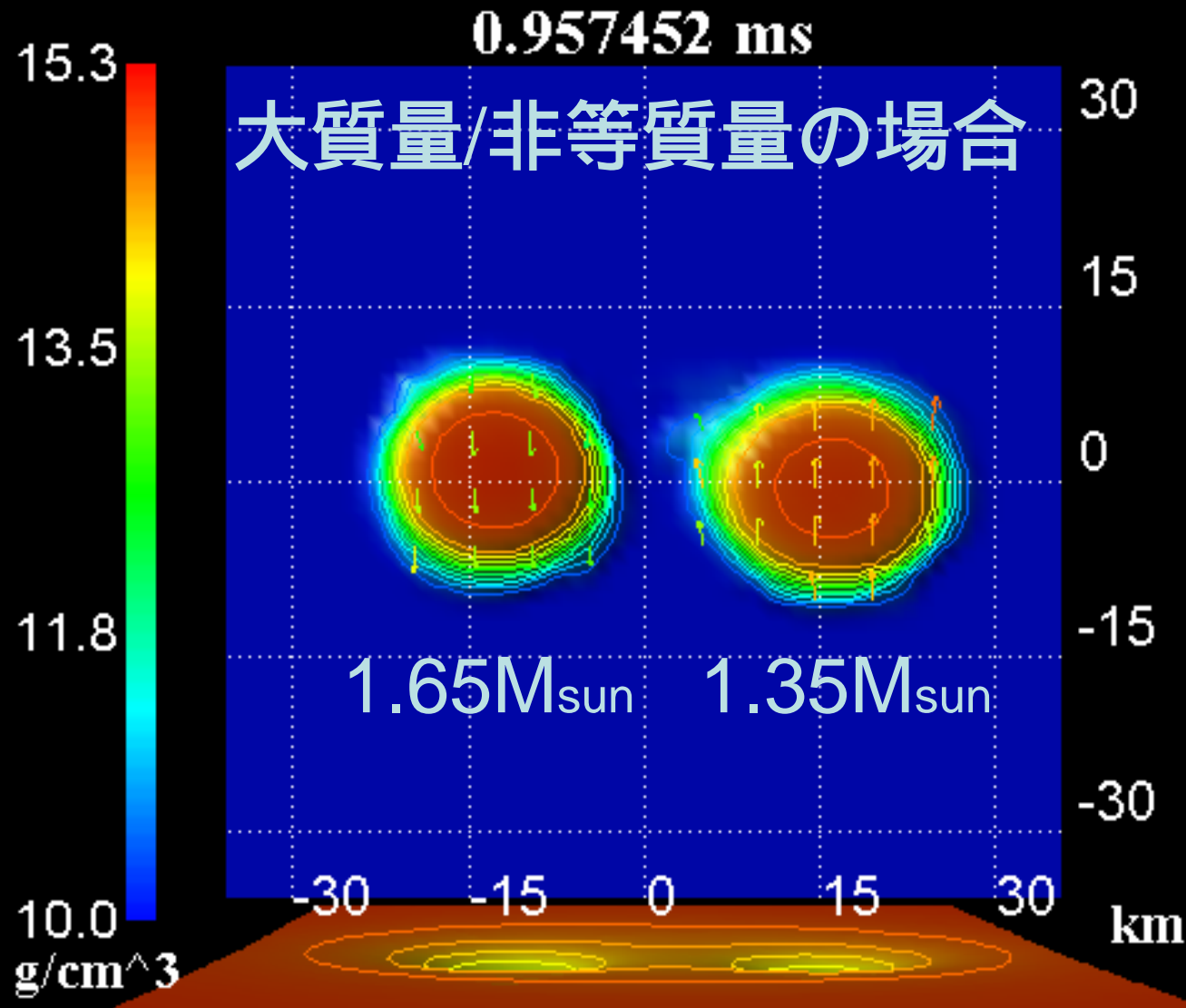
- 合体後に何が誕生するのか
  - 特徴的な重力波の波形は
  - ガンマ線バースト源になりそうか
- に対して答えが得られた。

# Merger of NS-NS ( $3M_{\text{sun}}$ ) to BH

Excision for  $t > 2.04 \text{ ms}$

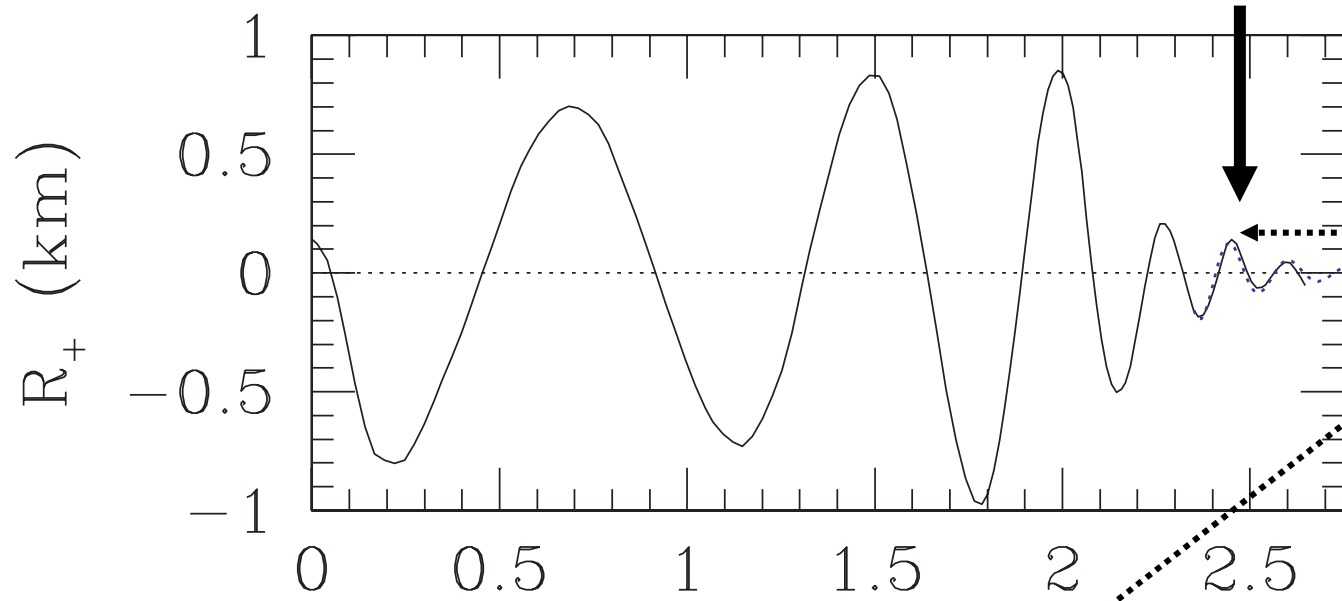


Mass ratio = 0.8,  $3M_{\text{sun}}$

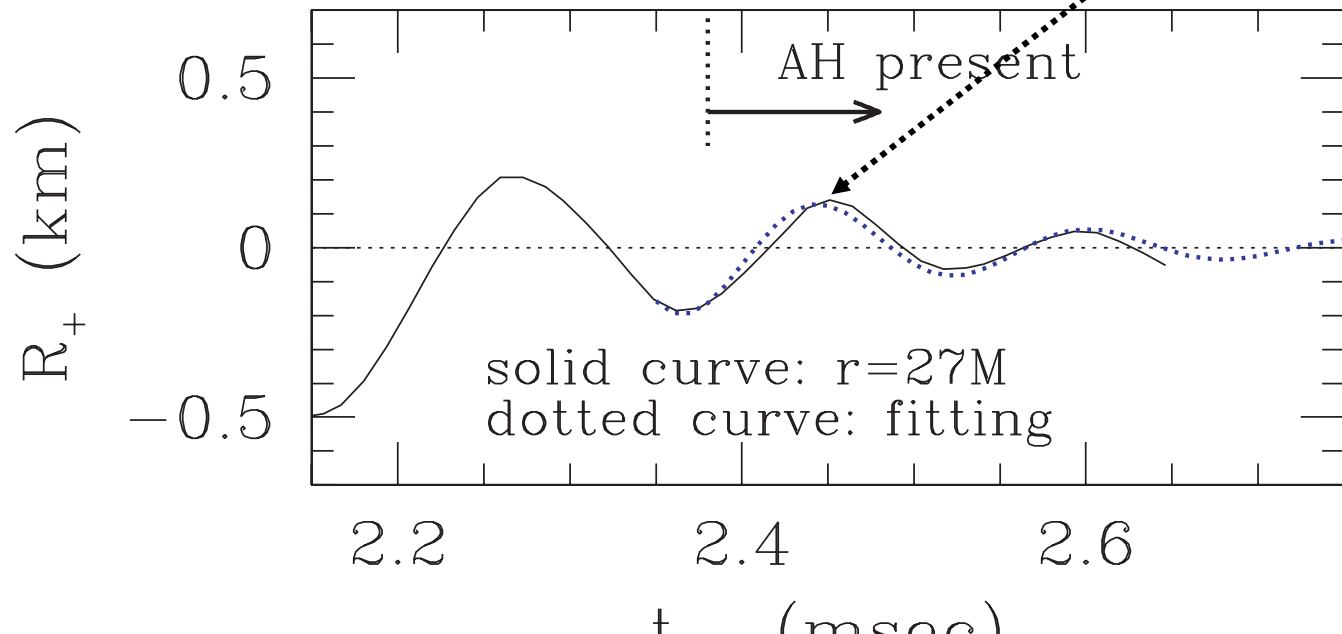




# Gravitational waves; QNM ringing

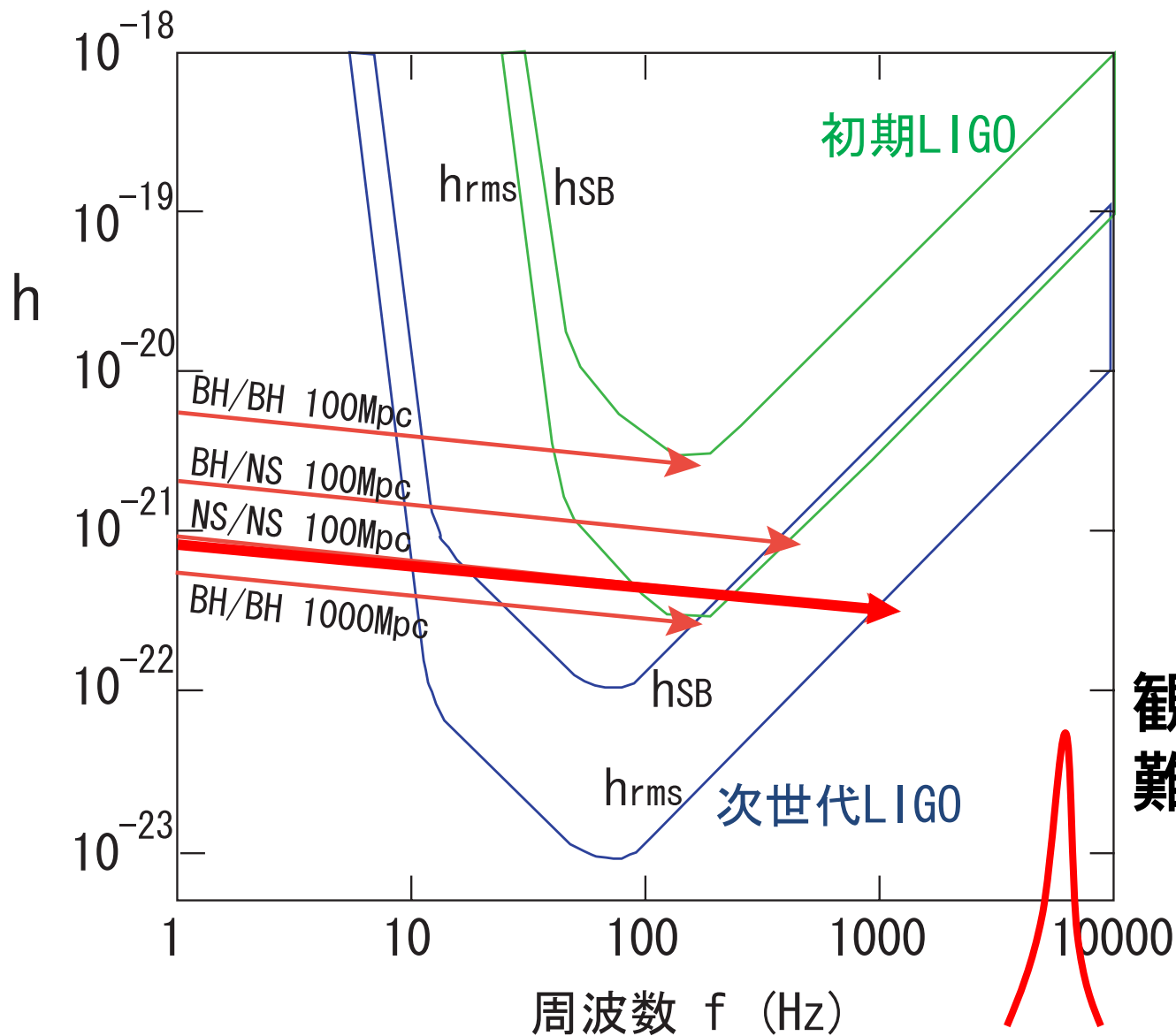


$h \sim 5 \cdot 10^{-23}$   
at  $r = 100 M_p$

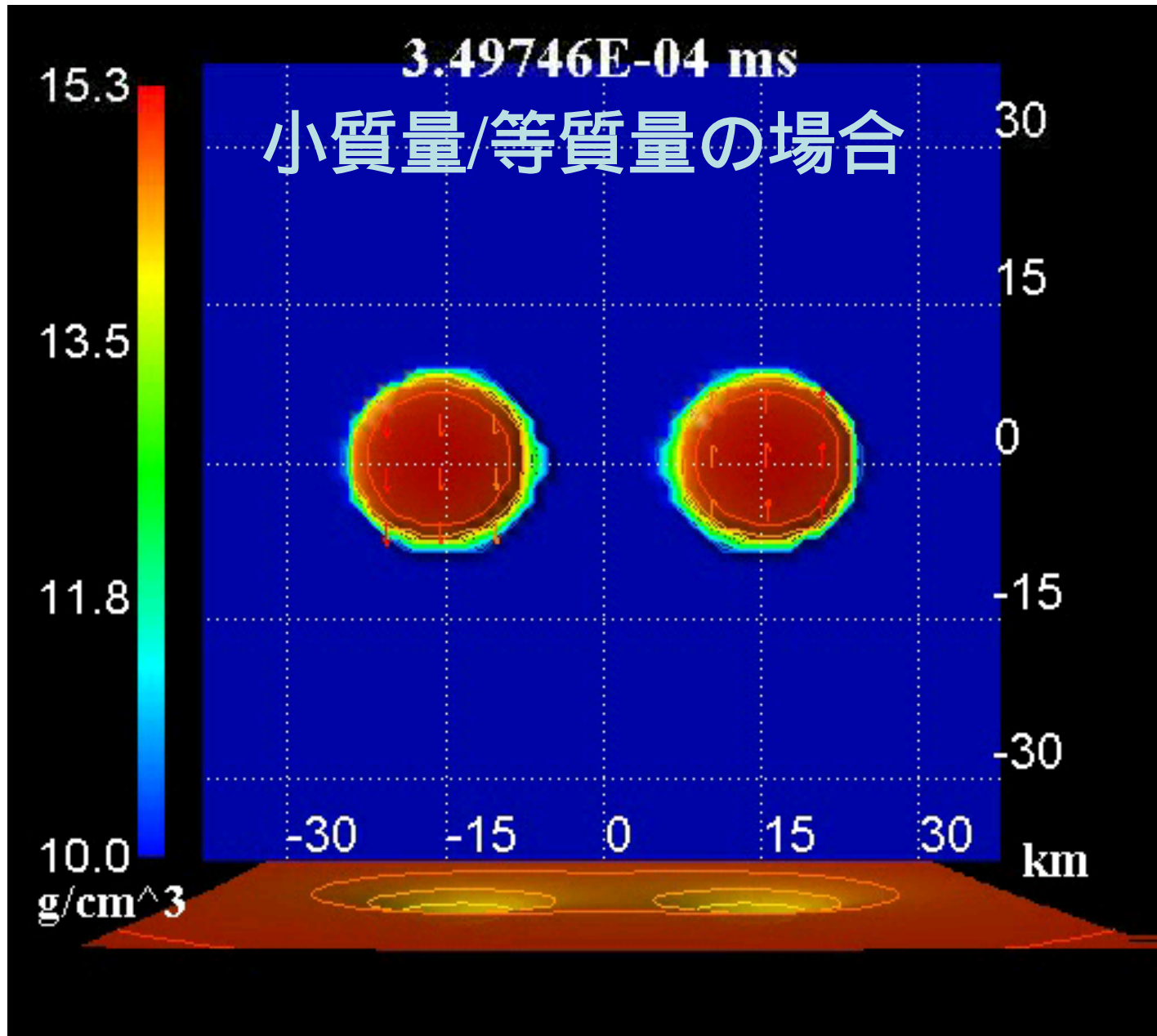


$f = 6.5$  kHz  
for  $a = 0.75$  &  
 $M = 2.9 M_{\text{sun}}$

# 重力波検出器の感度

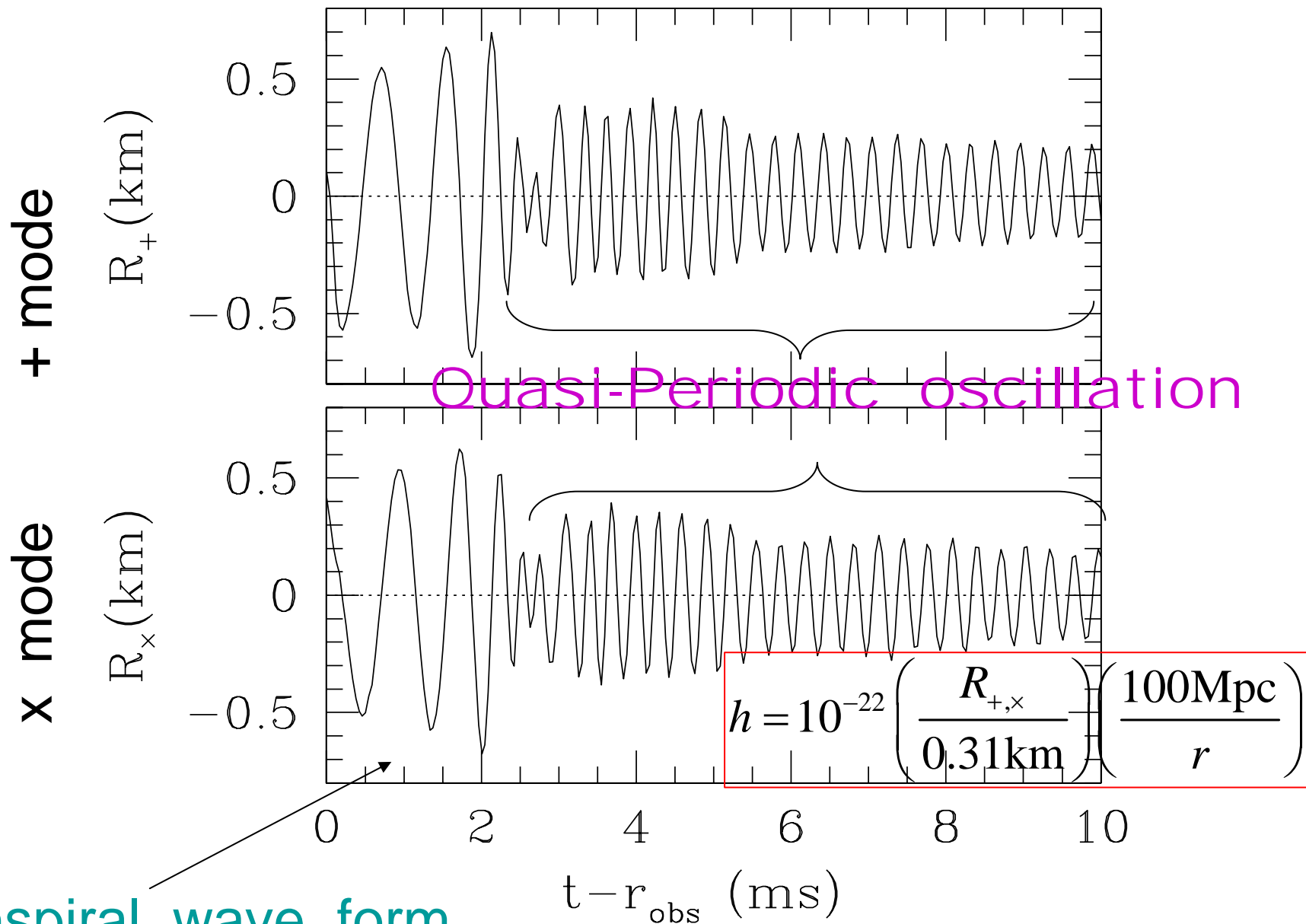


# NS-NS to HMNS; $M=2.6 M_{\text{sun}}$

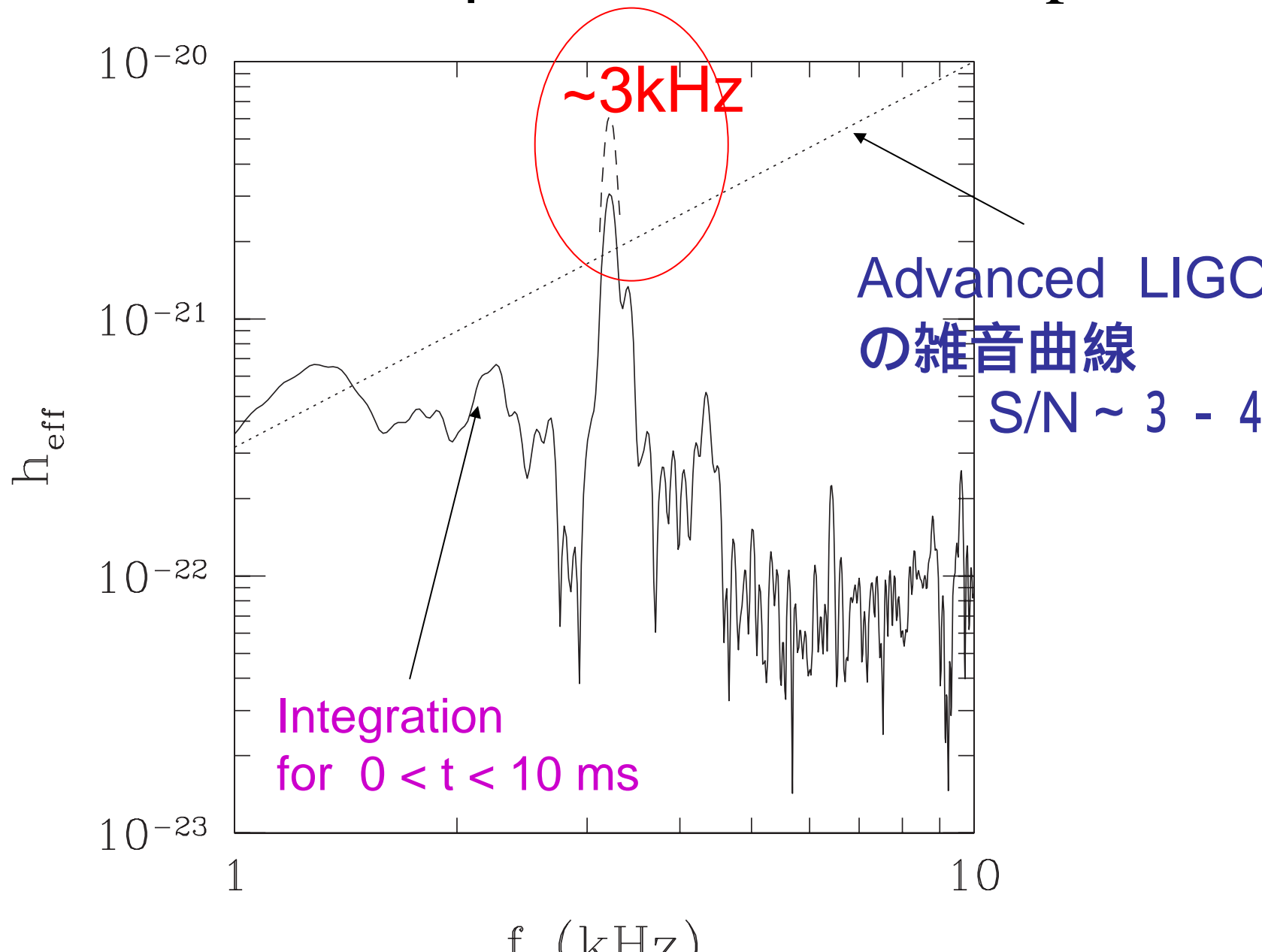


← Lapse

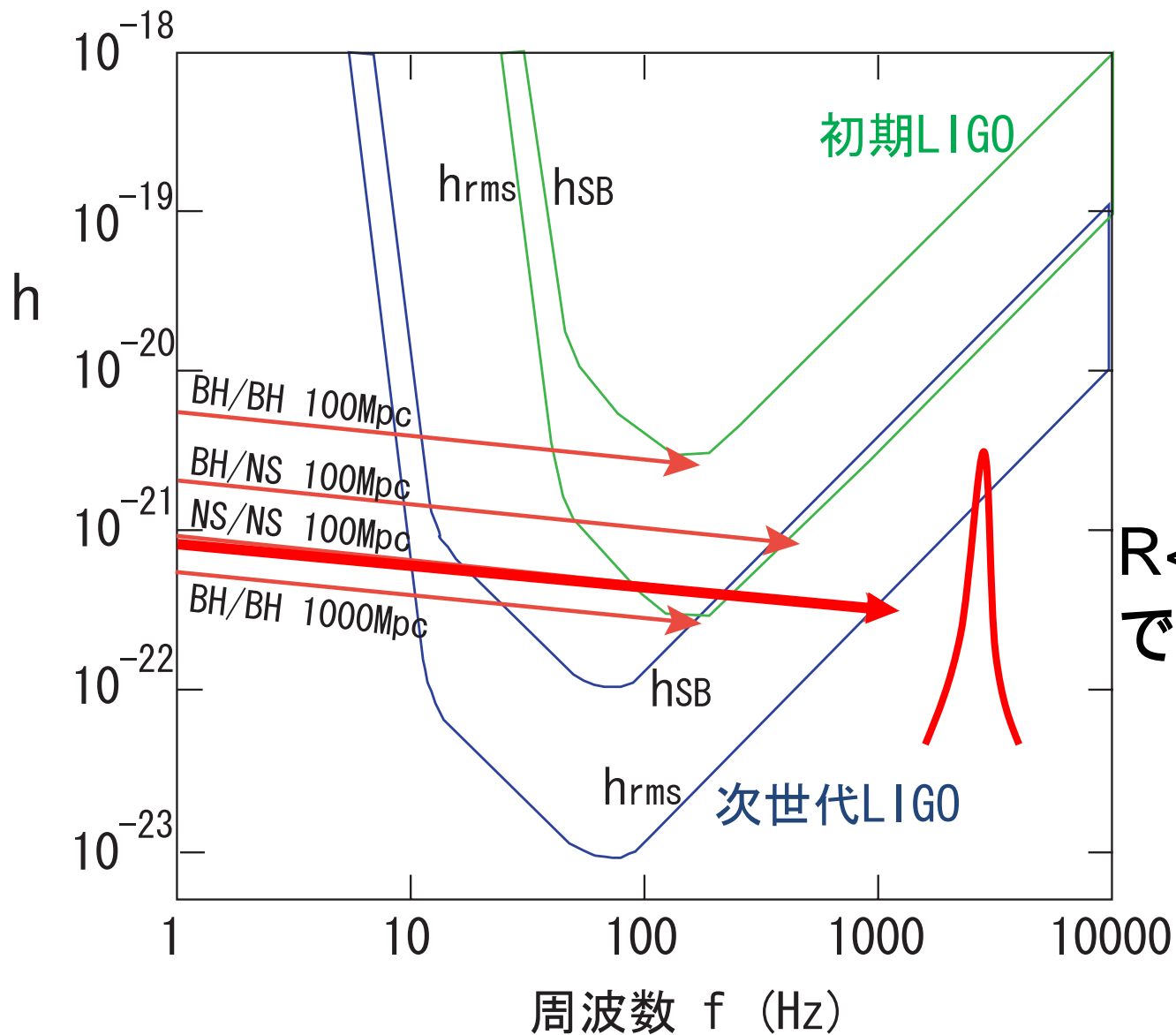
# Gravitational waves from HMNS



# Effective amplitude for $r=50\text{Mpc}$



# 重力波検出器の感度



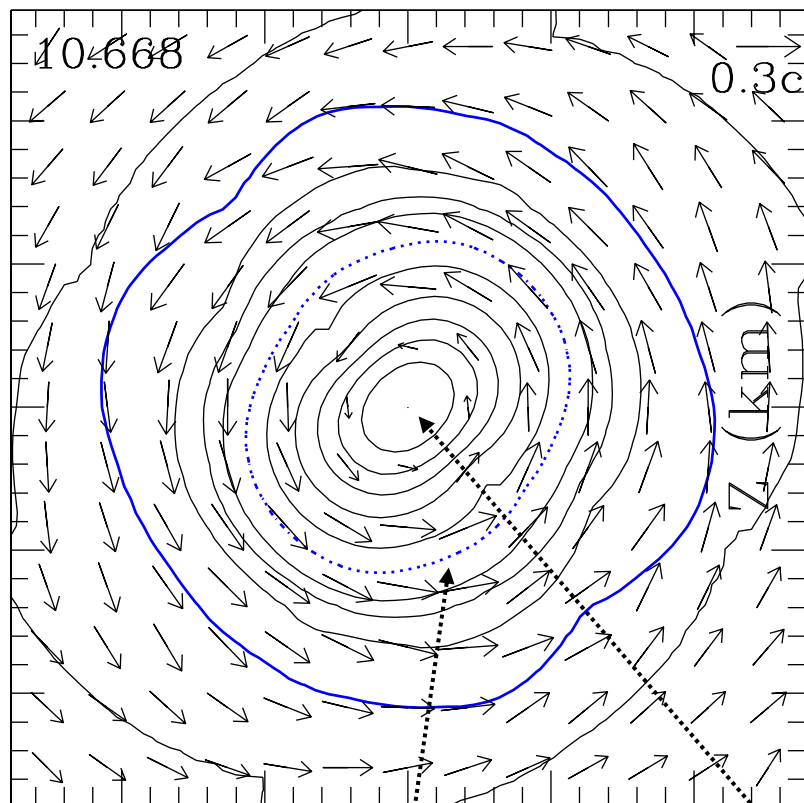
# (3) HMNSの運命と一般相対論的MHD

HMNS=大質量・高速回転・楕円体

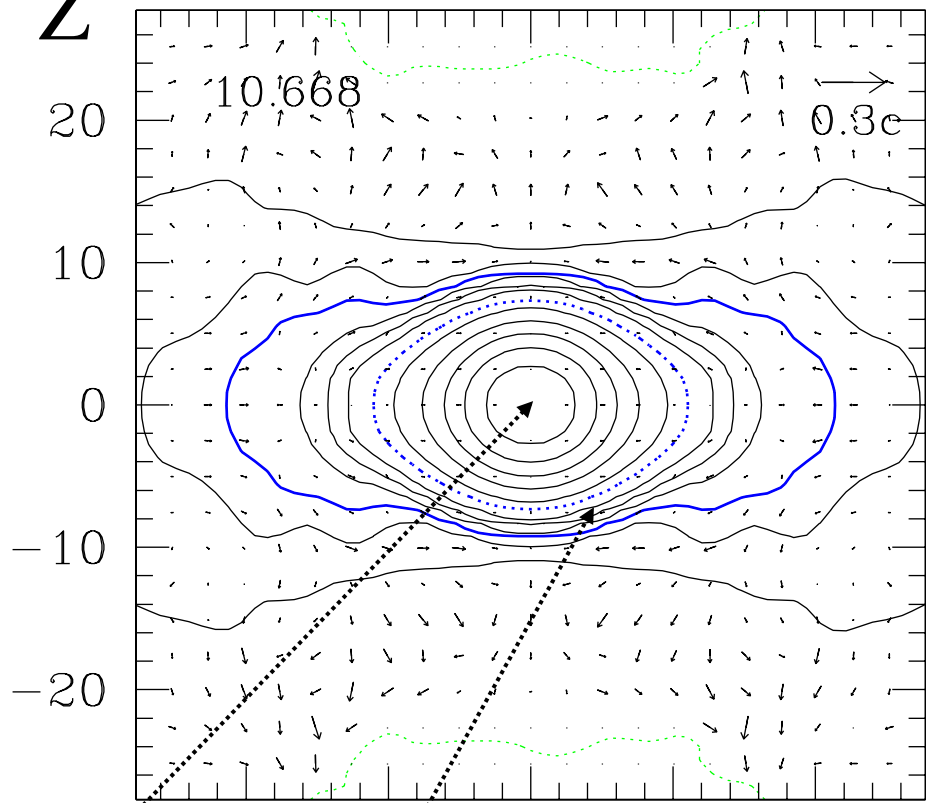
X—Y plane

X—Z plane

Y



Z



$1.3e15$  g/cc

Dotted curve= $2e14$  g/cc

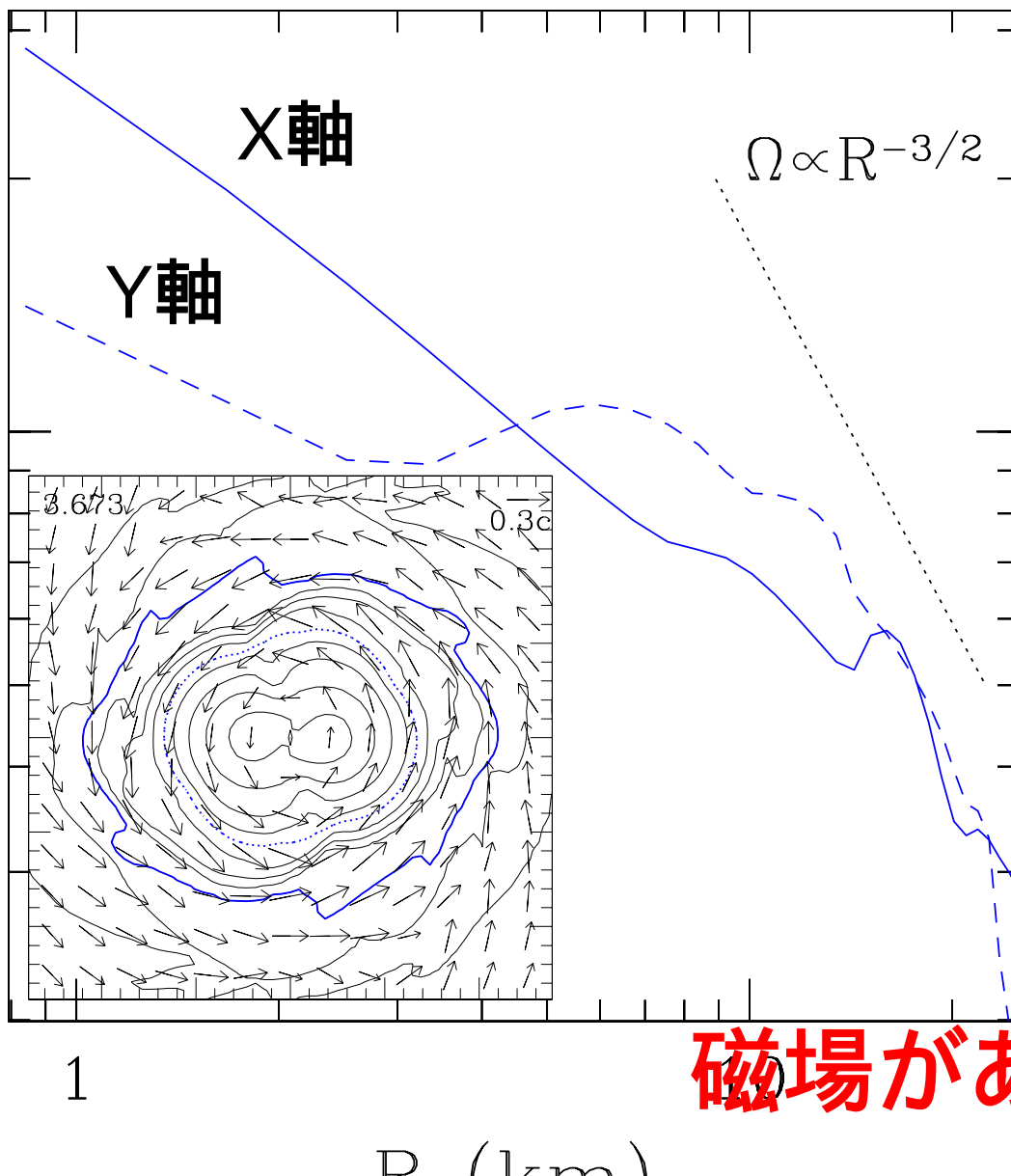
# 大質量中性子星は高速差動回転

差動回転と高速回転で  
重い中性子星を支えている

角速度

$\Omega$  (1/s)

中心周期  
0.2 - 0.5ms



磁場があったら？



# 大質量・差動回転・強磁場中性子星の運命

## 強磁場中性子星

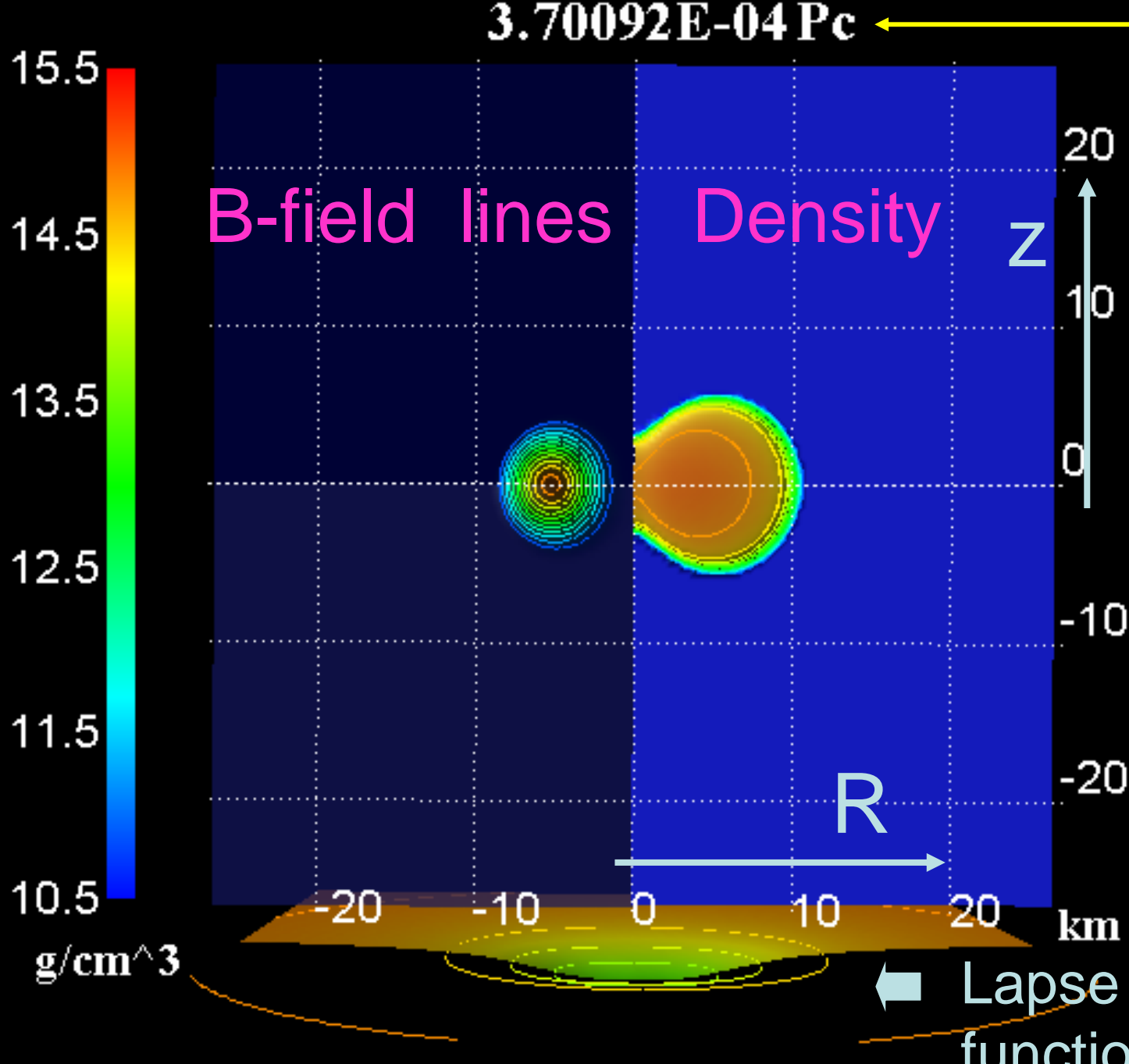
- 差動回転の結果、磁場は捻られトロイダル成分が成長(磁場の巻き込み)
- 磁気回転不安定性によってポロイダル成分が暴走成長 (MRI; Balbus-Hawley, 91)

中心から外へ角運動量が輸送される

大質量を支えきれなくなり中心から重力崩壊するであろう(Baumgarte-Shapiro-Shibata 00)

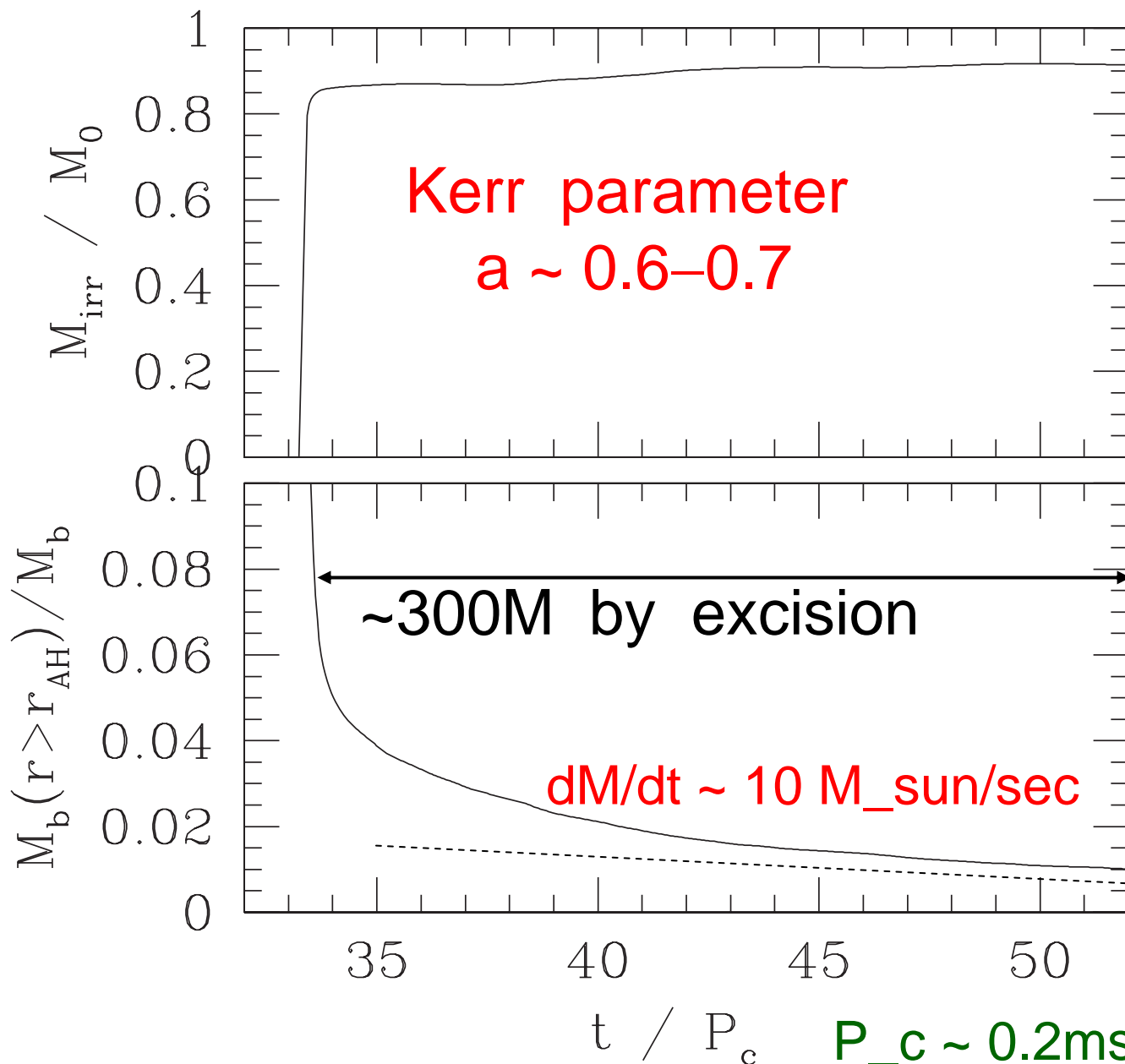
具体的な過程は?

Axisymmetric simulation



中心の周期(約0.2ミリ秒)を  
単位にした経過時間

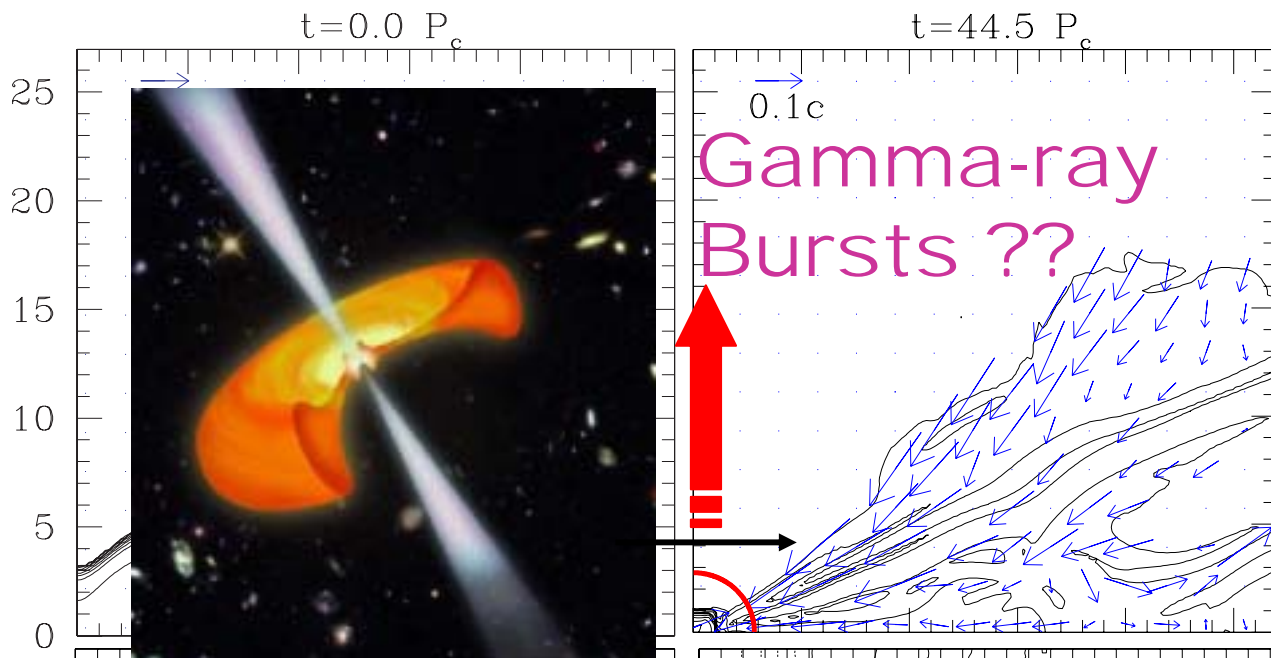
# Horizon Mass & mass of torus



Lifetime of  
torus  
 $\sim 10$  ms

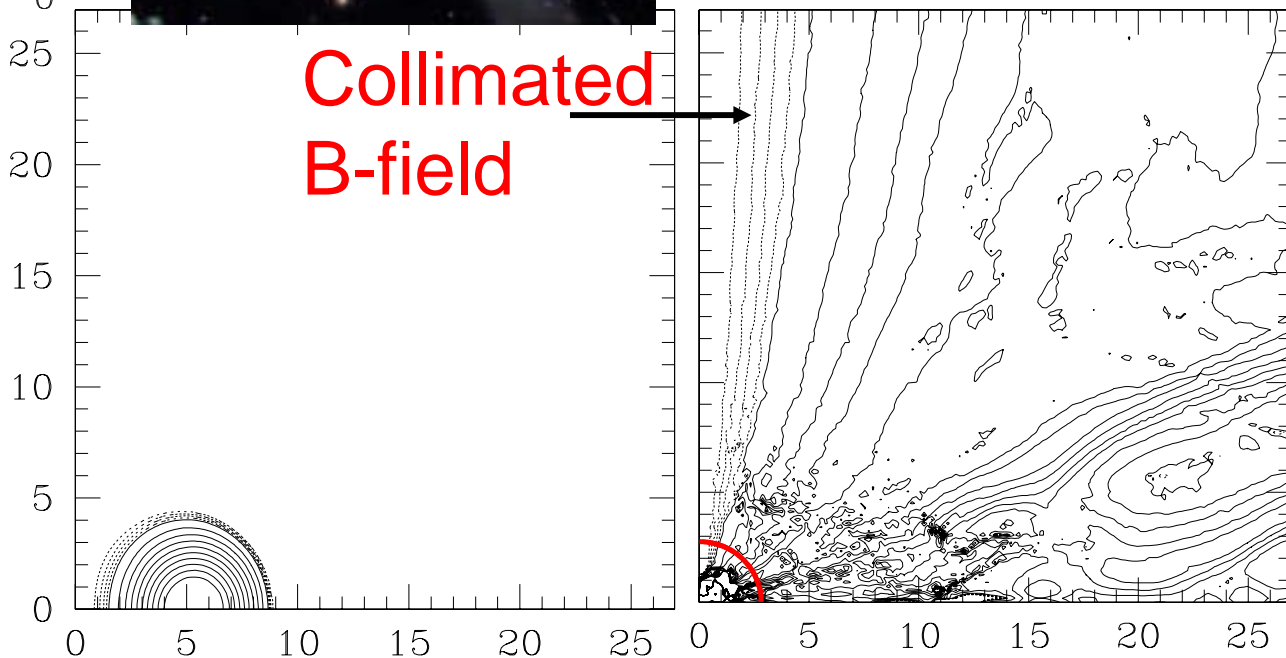
上: 密度

Z(km)

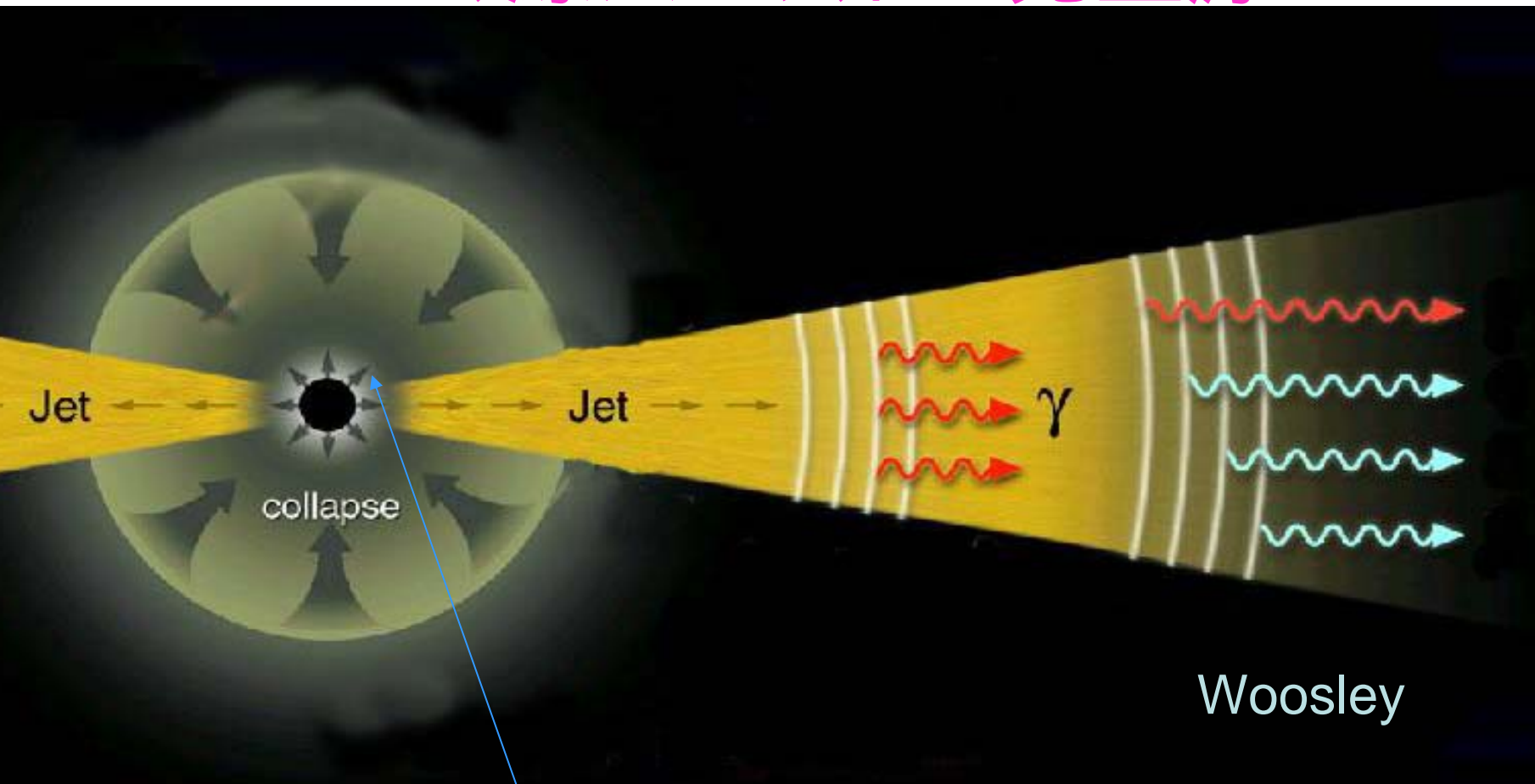


下: 磁力線

Z(km)

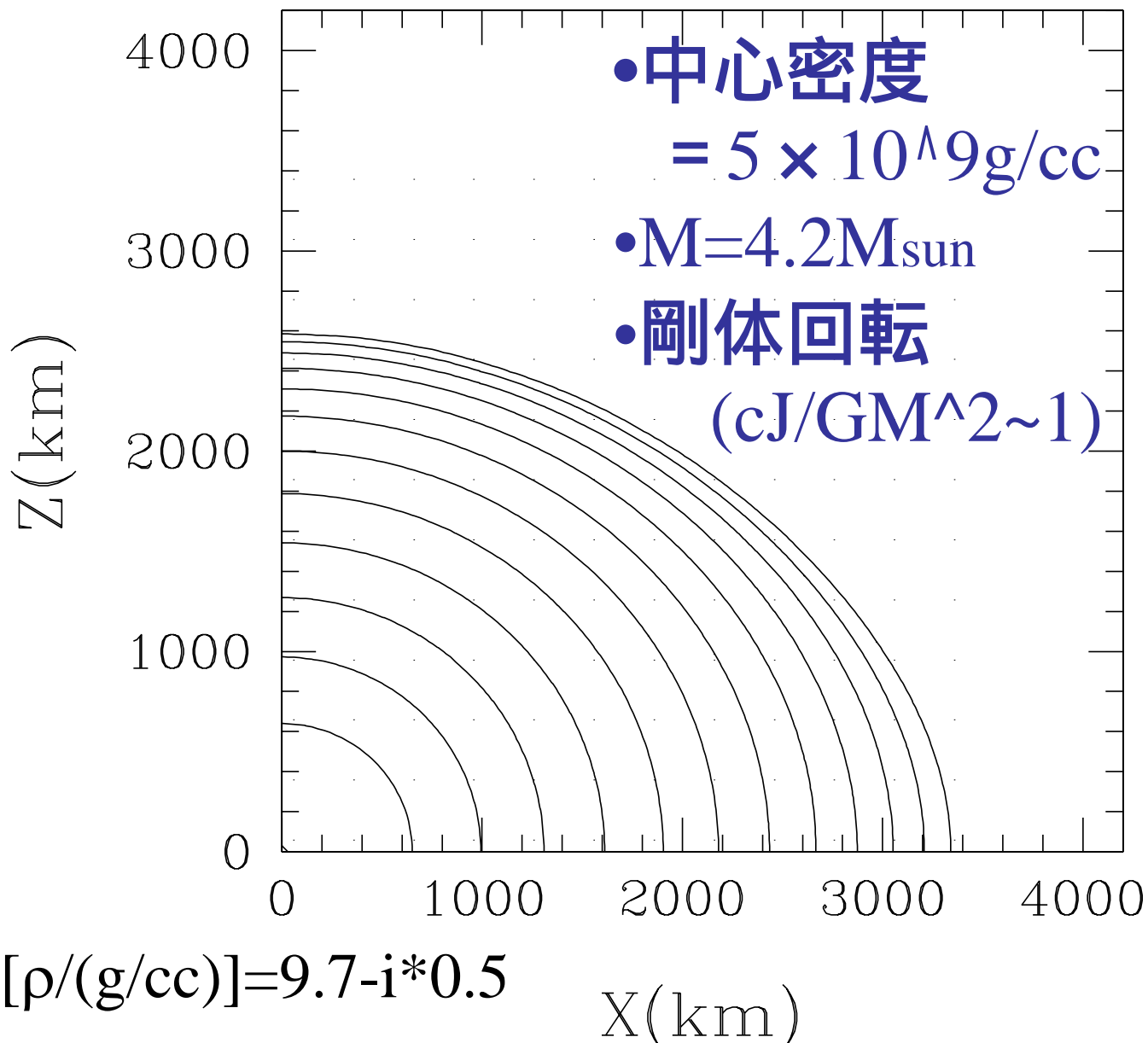


(4) Collapsar (大質量星の核のBH  
への直接重力崩壊) : 継続時間の長い  
ガンマ線バーストの発生源?

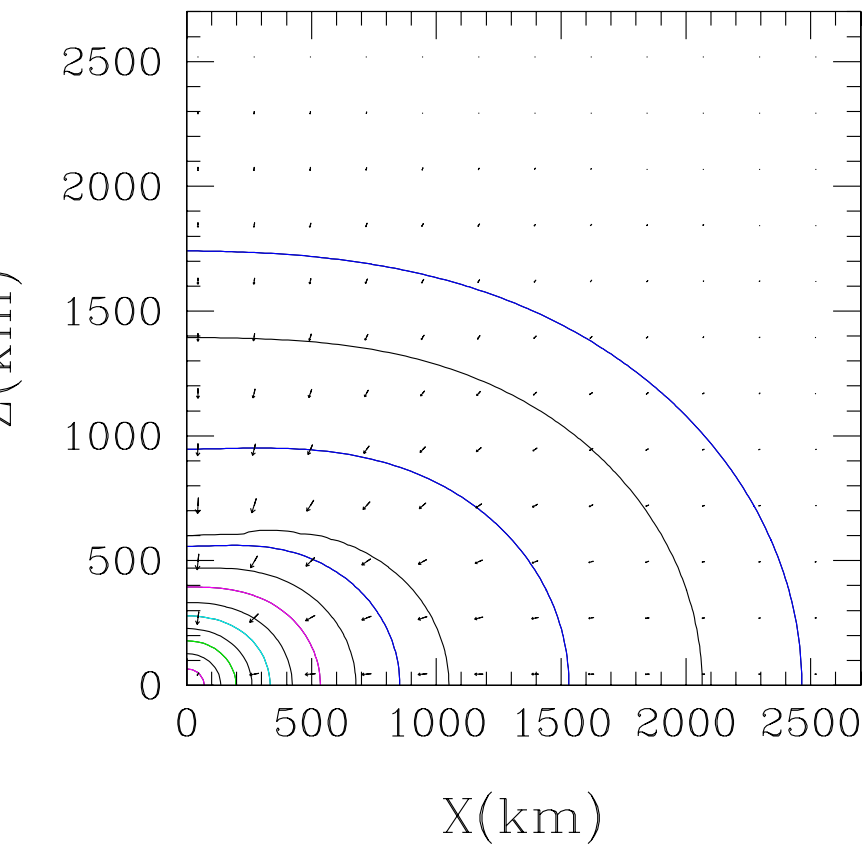


中心はブラックボックス??

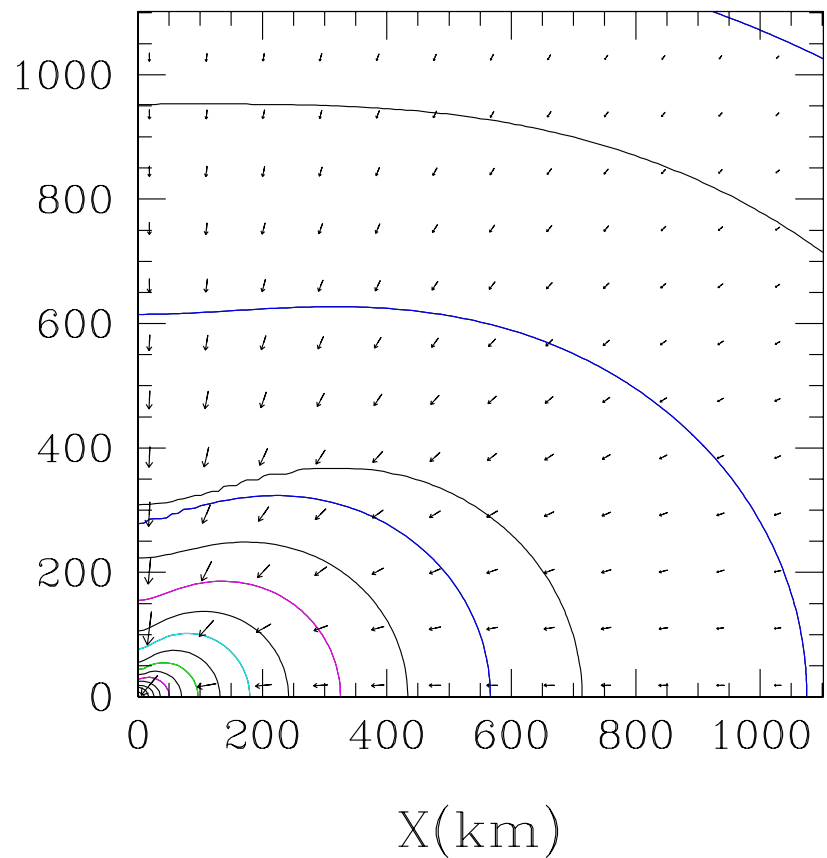
# 初期密度プロファイル



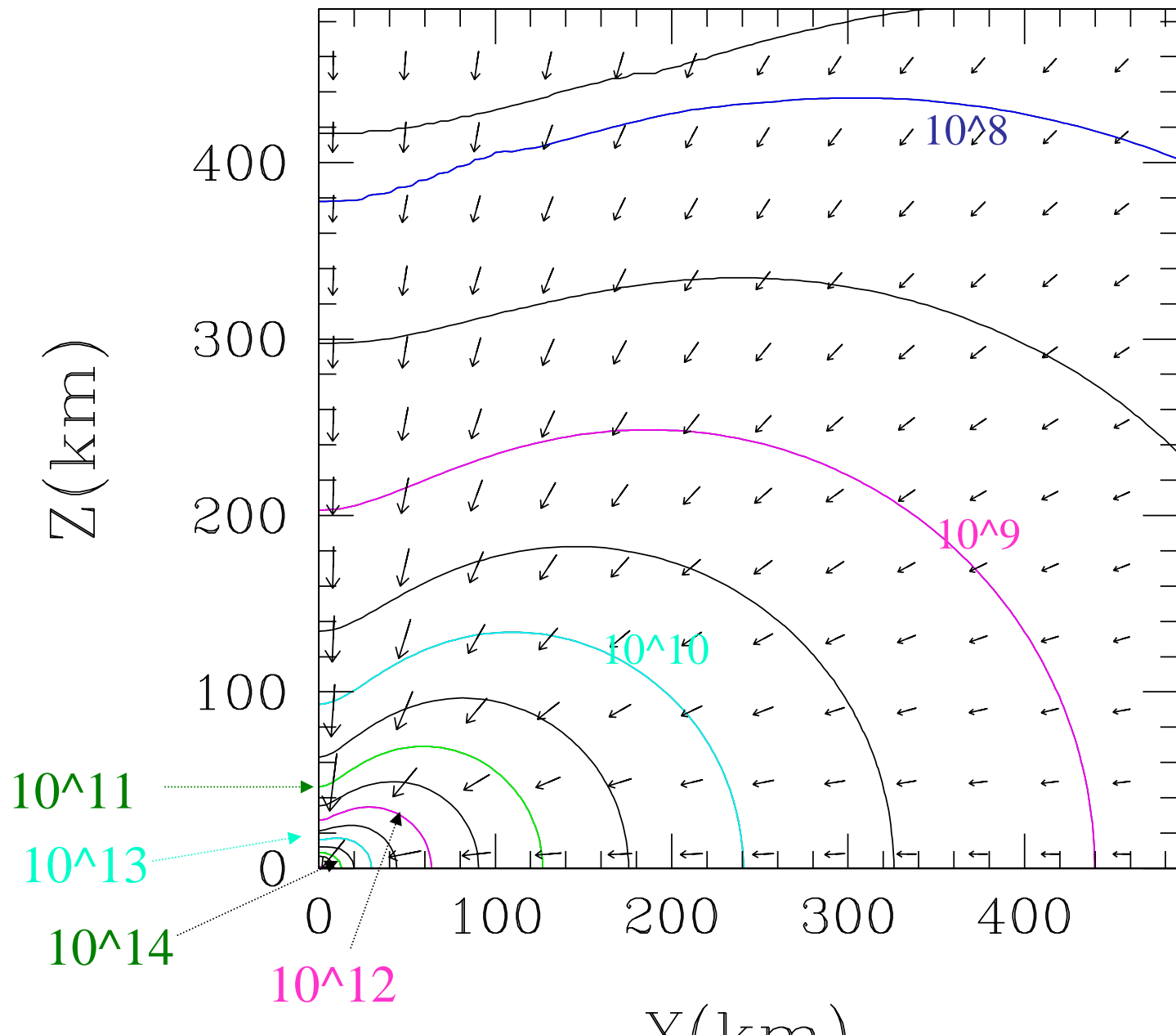
# 272.2ミリ秒後



# 275.6ミリ秒後



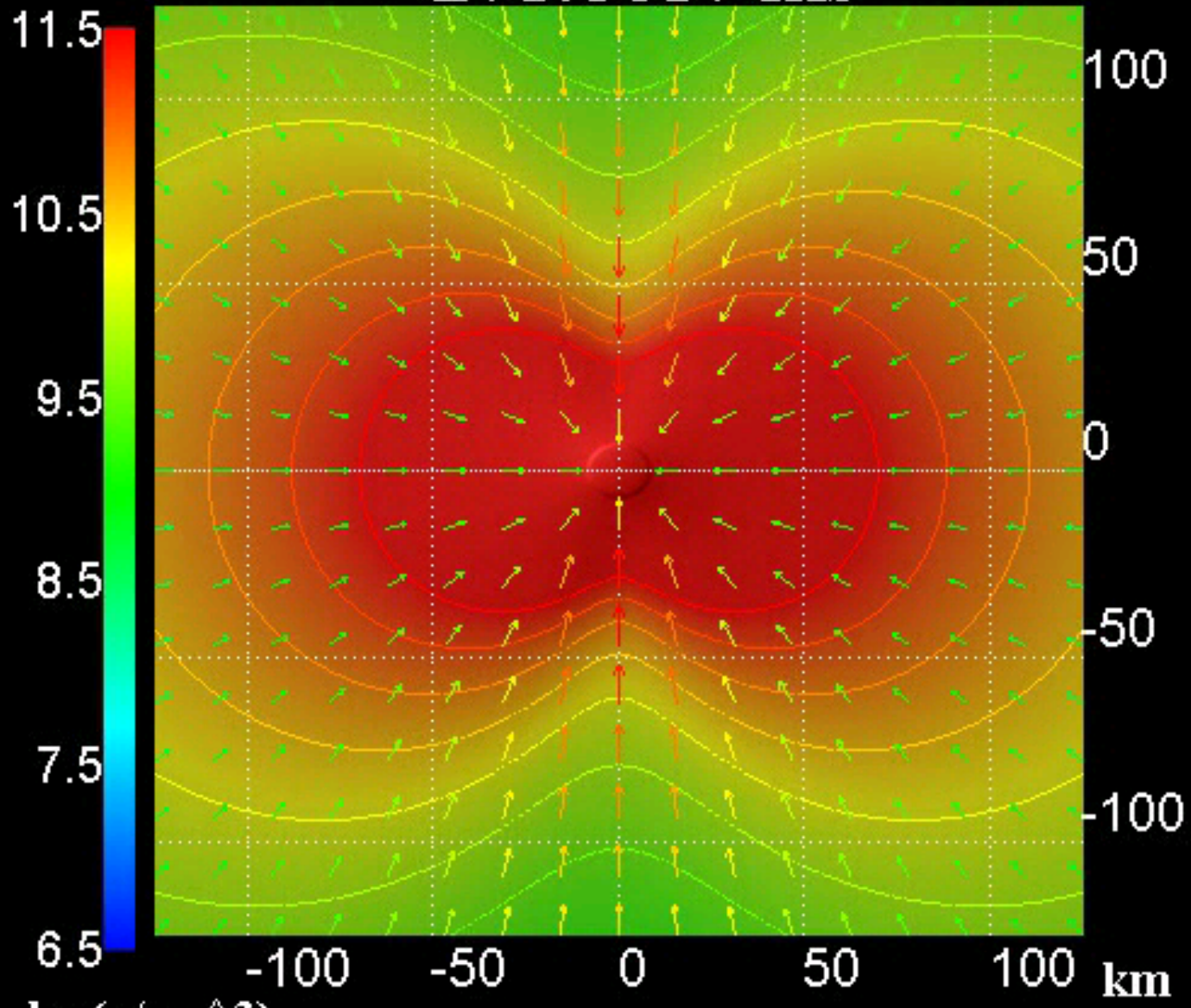
275.87ミリ秒後: animation start



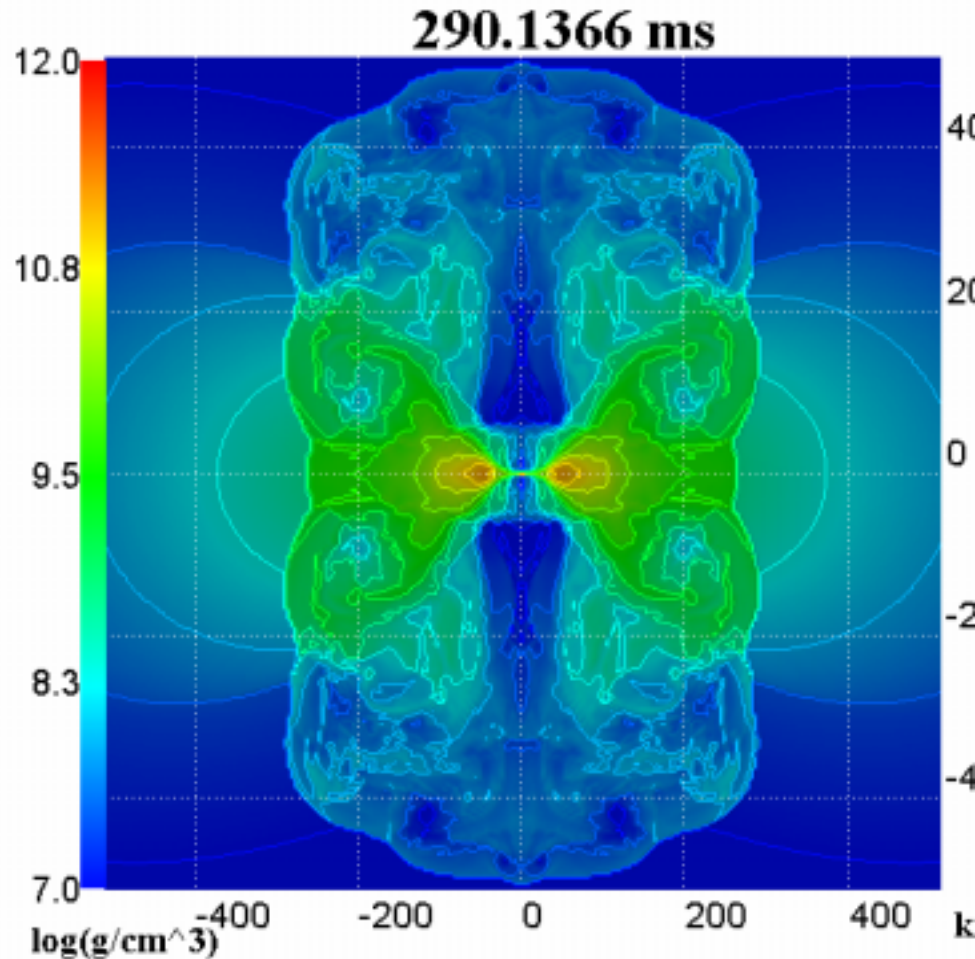
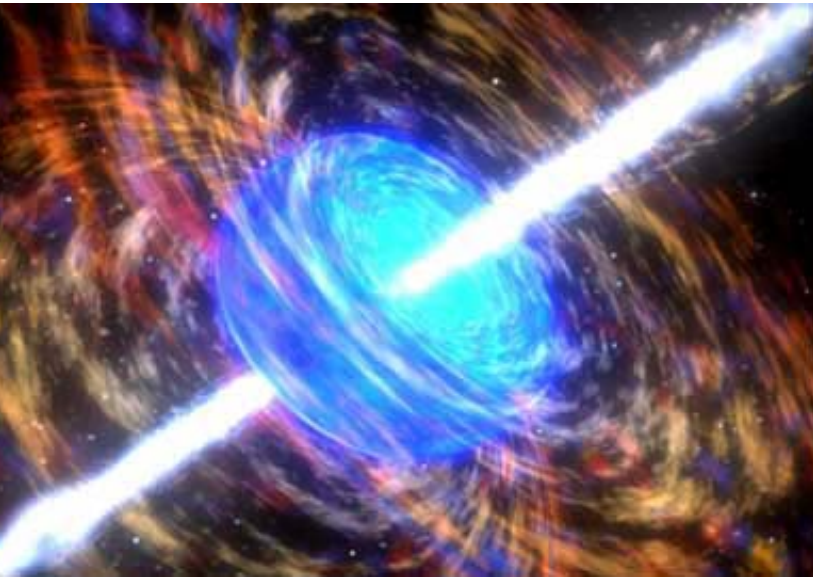


# 密度

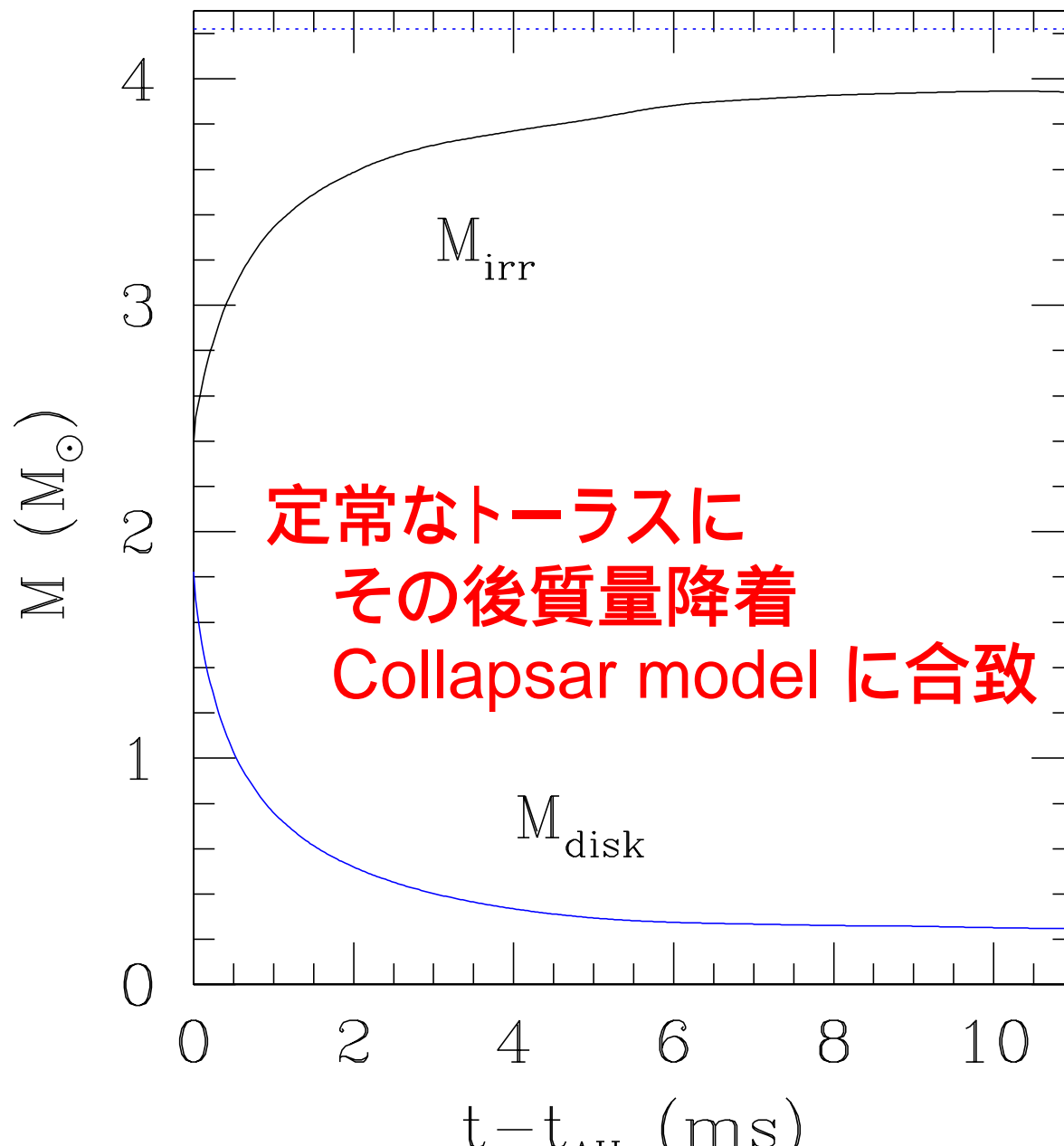
275.8657 ms



# 創造図でなくシミュレーションでGRB の本体が大雑把に描ける



# ブラックホールの質量とディスク質量



# 5 まとめ

- 過去10年の努力が実って、最近急速な進展：  
連星ブラックホールの合体や連星中性子星の合体が計算可能に  
重力波テンプレートの作成へ
- 一般相対論的MHD計算も実行可能  
GRBの具体的モデルの構築が可能  
ただし今後、物理素過程(輻射など)をより詳細に

# 今後の展開

- 正確な重力波テンプレートの作成およびガンマ線バーストの発生源の理解のため、より強力なコンピュータによる、より物理的かつ正確なシミュレーションを。
- 連星の合体は必要最小限度の精度(あるいはそれ以下)でしか計算が出来ていない。
- テンプレートの作成にはパラメータサーベイが必要だが、現状では年間数例のみ計算可能で難しい。
- 京速コンピュータの使用が望まれる。