

数 値 的 相 対 論

柴田 大
(東大総合文化)

内 容

1. イントロダクション
2. 数値的相対論において必要な要素
3. 現状:コードはどこまで進んだのか
4. 3D計算の現状
特に、連星中性子星の合体(我々の結果より)
5. 大規模・軸対称数値的相対論(我々の結果より)
6. まとめ
7. 今後の課題と展望

1. イントロダクション: 何故必要か?

(A) 第0イントロダクション

一般相対論的天体

中性子星、ブラックホール、それらの近接連星、宇宙全体のダイナミクスを調べたいのならば、アイシュタイン方程式を解かなくてはならない。

アイシュタイン方程式 = 連立非線形偏微分方程式。

動的解は残念ながら、数值的にしか求めることができない。

数值的相対論

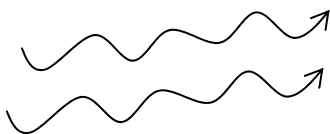
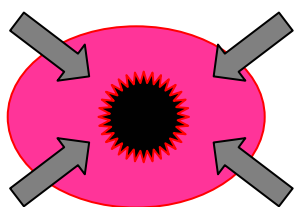
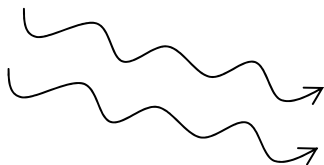
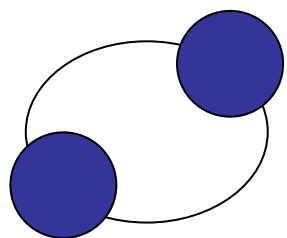
(B) 調べる必要があるほど重要な問題があるのか？ YES

い) 重力波天文学が始まりつつある。

TAMA, LIGO (米), GEO (独・英) が稼動中

さらに次期 LIGO、LCGT

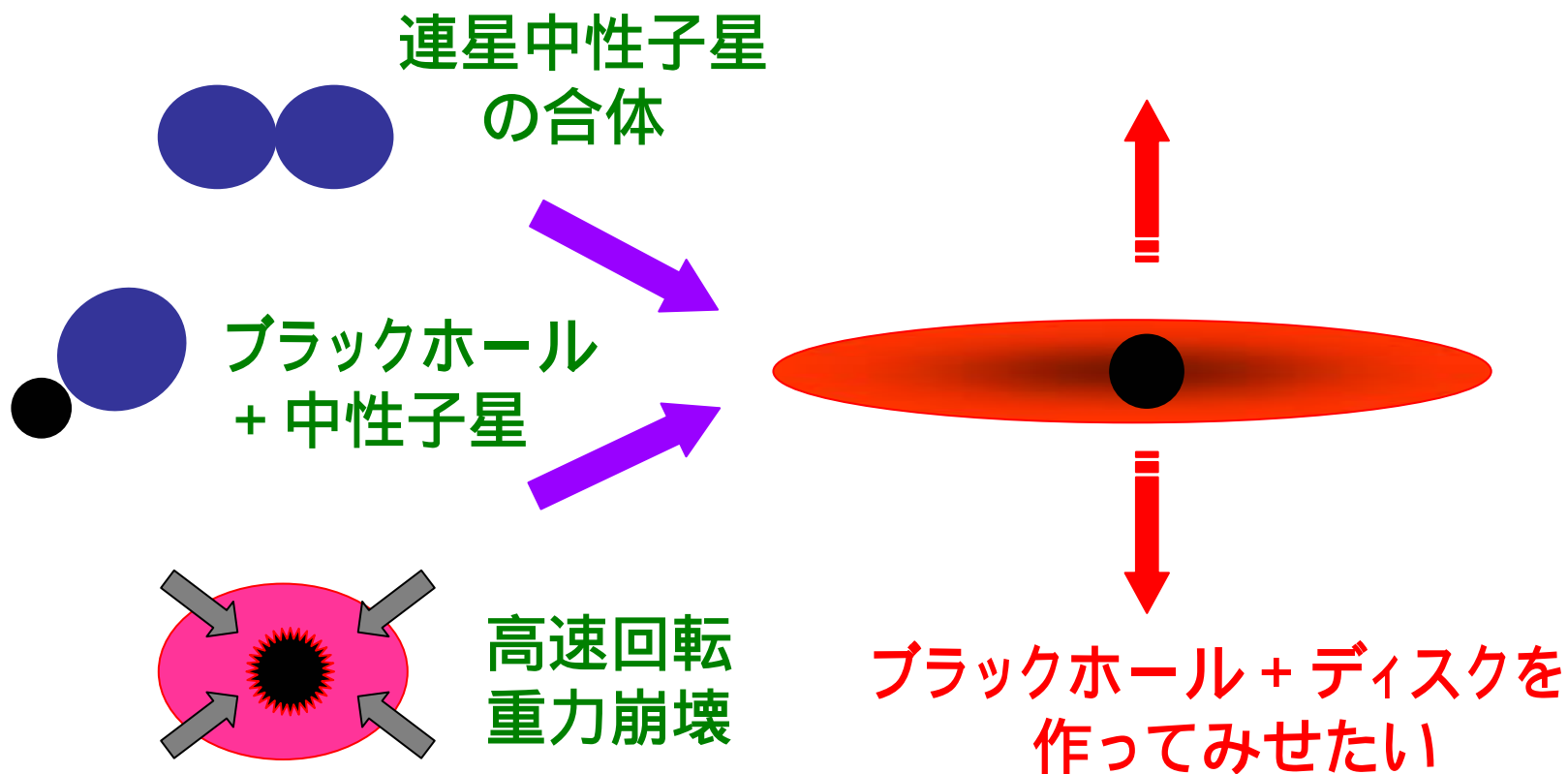
連星の合体や星の重力崩壊により発生する重力波の波形を理論的に予測しなくてはならない



(B) 調べる必要があるほど重要な問題があるのか？ 続き

る) 解明すべき興味深い天体物理的問題がある。

- ブラックホールの形成過程(重力崩壊、対生成不安定)
- ガンマ線バーストの中心エンジン = ブラックホール + ディスク



(B) 調べる必要があるほど重要な問題があるのか？ 続き

(は) 一般相対論的現象は観測するのが難しい

- 現実的に起こっていると予想できるが、観測できない現象を計算機上で明らかにする。
- 現実には起こらないかもしれないが、一般相対論の特色が暴かれうる原理的問題を明らかにする。

実際に過去に、面白い現象を明らかにしてきた。

例1 : Spindle naked singularity

(Nakamura, Shapiro-Teukolsky)

例2 : Critical behavior (Choptuik)

例3 : Toroidal black hole (Shapiro-Teukolsky)

今後も何か面白い発見があるかもしれない

2. 数値的相対論において必要なコード

2-1. 基礎方程式

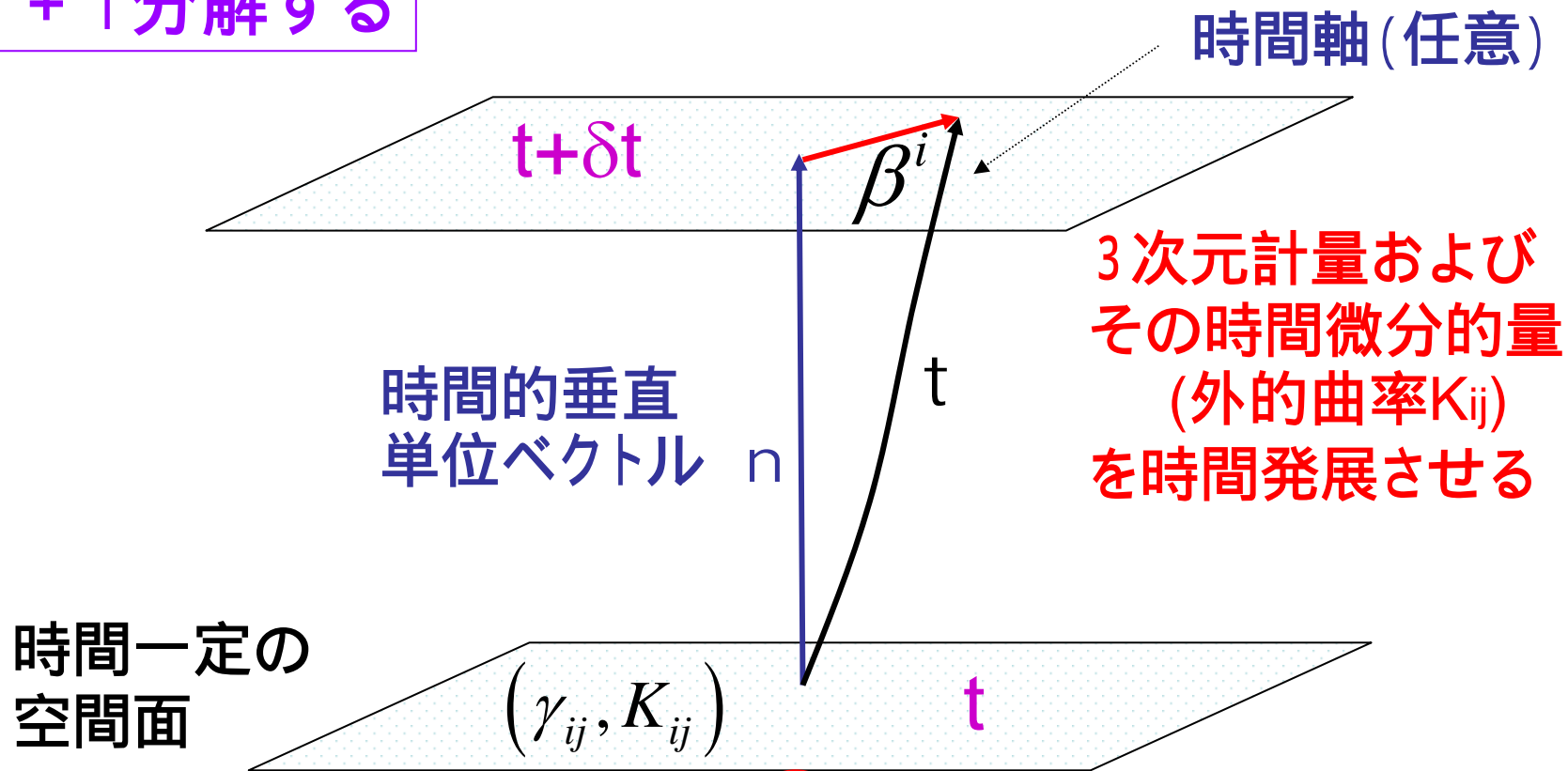
- ・ アインシュタイン方程式
- ・ 相対論的物質場に対する発展方程式:
相対論的流体 (あるいは相対論的粒子、スカラー場)

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= 8\pi \frac{G}{c^4} T_{\mu\nu} \\ \left\{ \begin{aligned} \nabla_{\mu} T_{\nu}^{\mu} &= 0 \\ \nabla_{\mu} (\rho u^{\mu}) &= 0 \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

この連立方程式を如何にして解き、かつ解析するか、
が数値的相対論

動的問題に対するアインシュタイン方程式の解き方

3 + 1 分解する



$$\dot{\gamma}_{ij} = -2\alpha K_{ij} + D_i \beta_j + D_j \beta_i$$

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu$$

アインシュタイン方程式の3+1分解

$$\begin{cases} G_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = 8\pi T_{\mu\nu}n^\mu n^\nu : \text{Hamiltonian constraint} \\ G_{\mu\nu}n^\mu \gamma_k^\nu = 8\pi T_{\mu\nu}n^\mu \gamma_k^\nu : \text{Momentum constraint} \\ G_{\mu\nu}\gamma_i^\mu \gamma_j^\nu = 8\pi T_{\mu\nu}\gamma_i^\mu \gamma_j^\nu : \text{Evolution equation} \end{cases}$$

γ_{ij} : 3-metric, n^μ : timelike normal

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu$$

最初の2つ: 束縛条件... 3次元計量の時間2階微分を含まない
3つ目: 発展方程式... 3次元計量に対する波動方程式

標準的手法: $T = 0$ で束縛方程式を満足するような初期条件を与え、その後は発展方程式を解く。

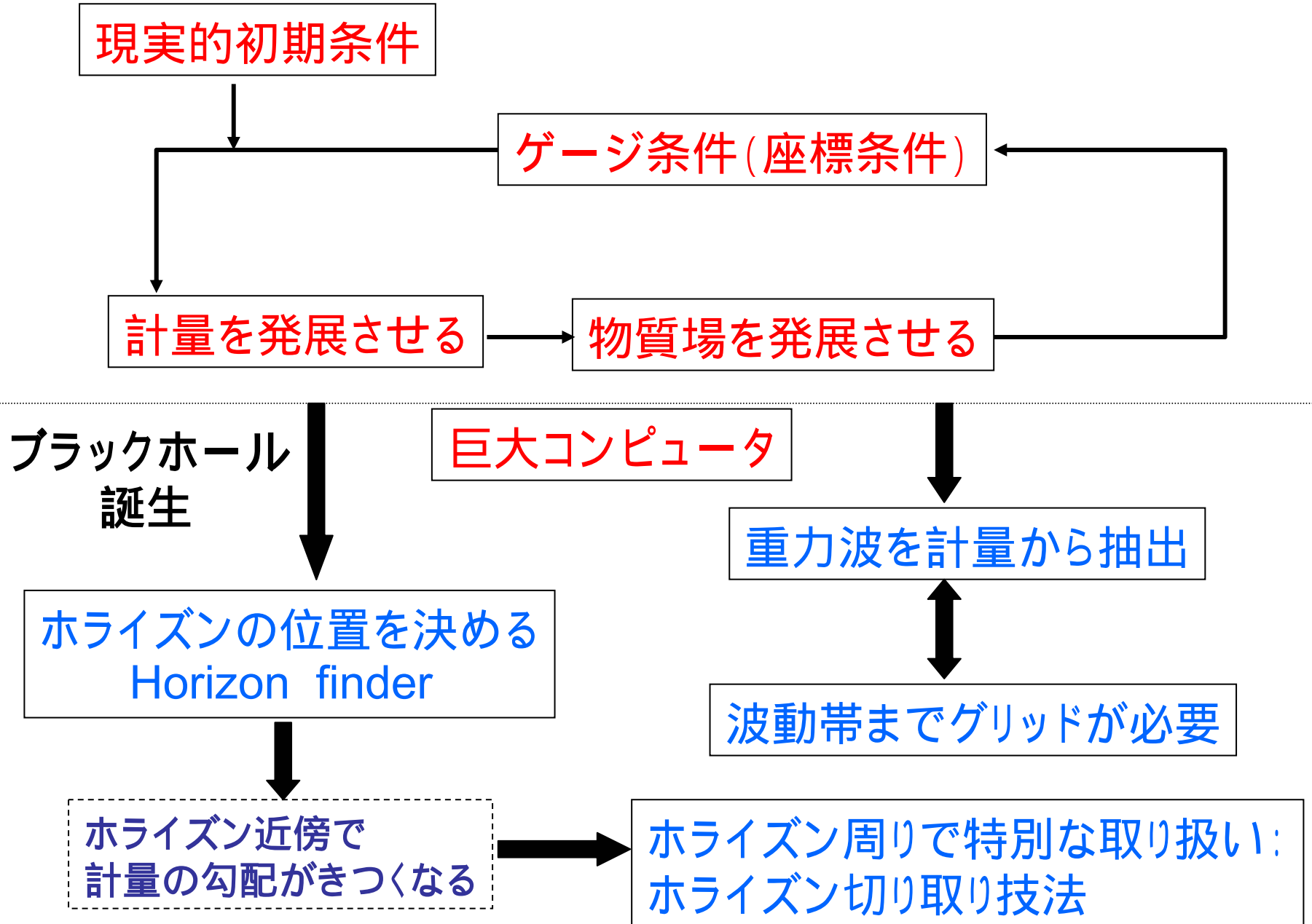
具体的方程式

$$\left. \begin{aligned} R - K_{ij}K^{ij} + K^2 &= 16\pi T_{\mu\nu}n^\mu n^\nu \\ D_i K_j^i - D_j K &= -8\pi T_{\mu\nu}n^\mu \gamma_j^\nu \end{aligned} \right\} \text{Constraints}$$

$$\begin{aligned} \dot{K}_{ij} &= \alpha \left(R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{il}K_j^l \right) - D_i D_j \alpha \\ &\quad + K_{il} D_j \beta^l + K_{jl} D_i \beta^l + \beta^l D_l K_{ij} \\ &\quad - 8\pi \alpha T_{\mu\nu} \left[\gamma_i^\mu \gamma_j^\nu - \frac{1}{2} (\gamma^{\mu\nu} - n^\mu n^\nu) \gamma_{ij} \right] \end{aligned}$$

発展方程式

数値的相対論におけるフローチャート



数値的相対論を行うにあたって必要な要素

1. Einstein's evolution equations solver
2. GR Hydrodynamic equations solver
3. Appropriate gauge conditions (coordinate conditions)
4. Realistic initial conditions
5. Gravitational wave extraction techniques 9.
6. Apparent horizon (hopefully Event horizon) finder
7. Special techniques for handling BHs / Excision
8. Micro physics (EOS, neutrino processes, B-field ...)
9. Powerful supercomputers

3 . 現状 : どこまで進んだのか ?

3-1. アインシュタイン発展方程式に対する定式化

Standard 3+1(ADM) : Evolve (γ_{ij}, K_{ij})
(3metric & extrinsic curvature)
12 hyperbolic equations

(Arnold, Deser, Misner 1962; York 1979)

通常は、constraint を解かずに、発展方程式だけを使って系を進化させる

➡ **線形重力波を発展させても不安定**
(発散する非物理的モードが存在するため)

Constraint violation instability

理由：線形重力波の解析

Linearized Einstein eqs. with $\alpha=1$ & $\beta^i = 0$

$$\text{Evolution eq. : } \ddot{h}_{ij} = \Delta h_{ij} - h_{ik,kj} - h_{jk,ki} + h_{kk,ij}$$

$$\text{Constraint : } \Delta h_{ii} - h_{ik,ki} = 0$$

$$\text{ : } \dot{h}_{ij,i} - \dot{h}_{ii,j} = 0$$

Decomposition:

$$h_{ij} = A\delta_{ij} + C_{,ij} + 2B_{(i,j)} + h_{ij}^{\text{TT}}$$

A, C : scalar, B_i : vector, h_{ij}^{TT} : tensor

$$B_{i,i} = 0, \quad h_{ij,j}^{\text{TT}} = h_{ii}^{\text{TT}} = 0$$

$$\Rightarrow h_{ii} = 3A + \Delta C, \quad h_{ij,j} = A_{,i} + \Delta(C_{,i} + B_i)$$

解析解

$$\text{Constraints : } \Delta A = 0, \quad \partial_t (-2A_{,i} + \Delta B_i) = 0$$

$$\Rightarrow A = 0 \quad \& \quad B_i = 0 \quad (\text{if } B_i = 0 \text{ initially}) \Rightarrow C = 0$$

一方

$$\text{Evolution eqs. : } \ddot{h}_{ij}^{\text{TT}} = \Delta h_{ij}^{\text{TT}}, \quad \ddot{B}_{(i,j)} = 0,$$

$$\ddot{A} = \Delta A, \quad \ddot{C} = A$$

Equations for h_{ij}^{TT} : Wave eqs., but others are not.

If $A \neq 0$ initially,
$$A = \sum_{l,m} Y_{lm} \frac{\ddot{f}_{lm}(r-t) + \ddot{g}(r+t)}{r}$$

Constraint violation

$$\Rightarrow C = \sum_{lm} Y_{lm} \frac{f(r-t) + g(r+t)}{r} + C_1 t + C_2$$

Cは発散していく

Constraint violation instability

- New formulations for Einstein's evolution eqs :

- (i) BSSN formalism

Nakamura (87), Shibata-Nakamura (95), Baumgarte-Shapiro (99).....

Choose variables:

$$\phi \equiv \frac{1}{12} \ln(\det(\gamma))$$

$$\tilde{\gamma}_{ij} \equiv e^{-4\phi} \gamma_{ij}$$

$$K \equiv K^k_k$$

$$\tilde{A}_{ij} \equiv e^{-4\phi} \left(K_{ij} - \frac{1}{3} \gamma_{ij} K \right)$$

$$F_i \equiv \delta^{jk} \partial_j \tilde{\gamma}_{ik}$$

17 components



The Important step

Rewrite ADM equations using

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{constraint equations} \\ \det(\tilde{\gamma}_{ij}) = 1 \end{array} \right\}$$



Unconstrained
free evolution

Stable numerical simulation

(So far no problem in the
absence of black holes)

具体的には、17成分に対する方程式

$$\tilde{\gamma}_{ij} \equiv \psi^{-4} \gamma_{ij}, \quad \psi \equiv e^\phi \equiv \det(\gamma_{ij})^{1/12}, \quad \tilde{A}_{ij} \equiv \psi^{-4} \left(K_{ij} - \frac{1}{3} \gamma_{ij} K \right), \quad F_i \equiv \tilde{\gamma}_{ij,j}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\partial_t - \beta^l \partial_l) \tilde{\gamma}_{ij} = -2\alpha \tilde{A}_{ij} + \tilde{\gamma}_{il} \beta^l_{,j} + \tilde{\gamma}_{jl} \beta^l_{,i} - \frac{2}{3} \tilde{\gamma}_{ij} \beta^l_{,l} \\ (\partial_t - \beta^l \partial_l) \phi = \frac{1}{6} (-\alpha K + \beta^l_{,l}) \\ (\partial_t - \beta^l \partial_l) \tilde{A}_{ij} = \alpha e^{-4\phi} \left(R_{ij} - \frac{1}{3} \gamma_{ij} R \right) - e^{-4\phi} \left(D_i D_j \alpha - \frac{1}{3} \gamma_{ij} \Delta \alpha \right) \\ \quad + \alpha \left(K \tilde{A}_{ij} - 2 \tilde{A}_{il} \tilde{A}_j^l \right) + \tilde{A}_{il} \partial_j \beta^l + \tilde{A}_{jl} \partial_i \beta^l - \frac{2}{3} \beta^l_{,l} \tilde{A}_{ij} \\ \quad - 8\pi\alpha e^{-4\phi} T_{\mu\nu} \left[\gamma_i^\mu \gamma_j^\nu - \frac{1}{3} \gamma^{\mu\nu} \gamma_{ij} \right] \\ (\partial_t - \beta^l \partial_l) K = \alpha \left(\tilde{A}_{ij} \tilde{A}^{ij} + \frac{1}{3} K^2 \right) - \Delta \alpha + 4\pi\alpha T_{\mu\nu} (n^\mu n^\nu + \gamma^{\mu\nu}) \\ (\partial_t - \beta^l \partial_l) F_i = \dots \quad (\text{Equivalent to Momentum constr.}) \end{array} \right.$$

- New formulations for Einstein's evolution eqs :

(ii) Hyperbolic formulations

Bona-Masso (92) many references

Kidder-Scheel-Teukolsky (KST) (01)

$$\partial_t g^{ij} + \partial_k Q^{kij} = \underline{F^{ij}(g, Q, \dots)}$$

No derivatives

~ 40成分

BH近傍に境界条件をつける際に強力であろう。

— 1BHでは成功を収めている。

— 2BHでは未だに数10度しか公転しない。

プラスアルファが必要かも (Teukolsky いわく)

3-2. 相対論的流体の解法

(古) Wilson流の昔からある方法(人工粘性を付加。)

- ・比較的簡単にコードが作成可能。
- ・星の周りに大気を置く必要なし。
- ・強い衝撃波が発生しなければ、まあよろしいかも。
(例: 連星中性子星の合体、中性子星の振動)

しかし、強い衝撃波が発生する問題に対しては疑問。

(星の重力崩壊、超新星爆発)

常に正しい解を与えるのかも疑問。

(人工粘性は特定の解析解を再現するための
現象論的項だから)

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_i v^j + P \gamma_i^j)}{\partial x^j} = \underline{[Viscous \ term]_i} + \dots$$

相対論的流体の解法：つづき

(新) 特性曲線に沿って解く (例; ロー法)

Valencia (スぺ), Munchen (独) で近年研究されてきた。

最近では、我々も含めた多くのグループに採用されている。

長所

- 1 重力崩壊など、衝撃波が本質的になる場合に強力。
- 2 どんな問題でも正しい解を与えると、信頼できる。
(人工粘性のような怪しげな項を足さないから)

現状でベストの選択であろう

H R S C スキームでの定式化

$$T_{\mu\nu} = (\rho + \rho\varepsilon + P)u^\mu u^\nu + P g_{\mu\nu}$$

赤線の部分で
特性曲線が決まる。

$$\nabla_\mu (\rho u^\mu) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho_*}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_* v^i)}{\partial x^i} = 0$$

$$n^\nu \nabla_\mu T_\nu^\mu = 0 \Rightarrow \frac{\partial (\rho_* \hat{e})}{\partial t} + \frac{\partial [\rho_* \hat{e} v^i + P \sqrt{\gamma} (v^i + \beta^i)]}{\partial x^i}$$

$$= \alpha \sqrt{\gamma} P K + \frac{\rho_*}{h u^t} K^{ij} \bar{u}_i \bar{u}_j - \rho_* \gamma^{ij} \bar{u}_i D_j \alpha$$

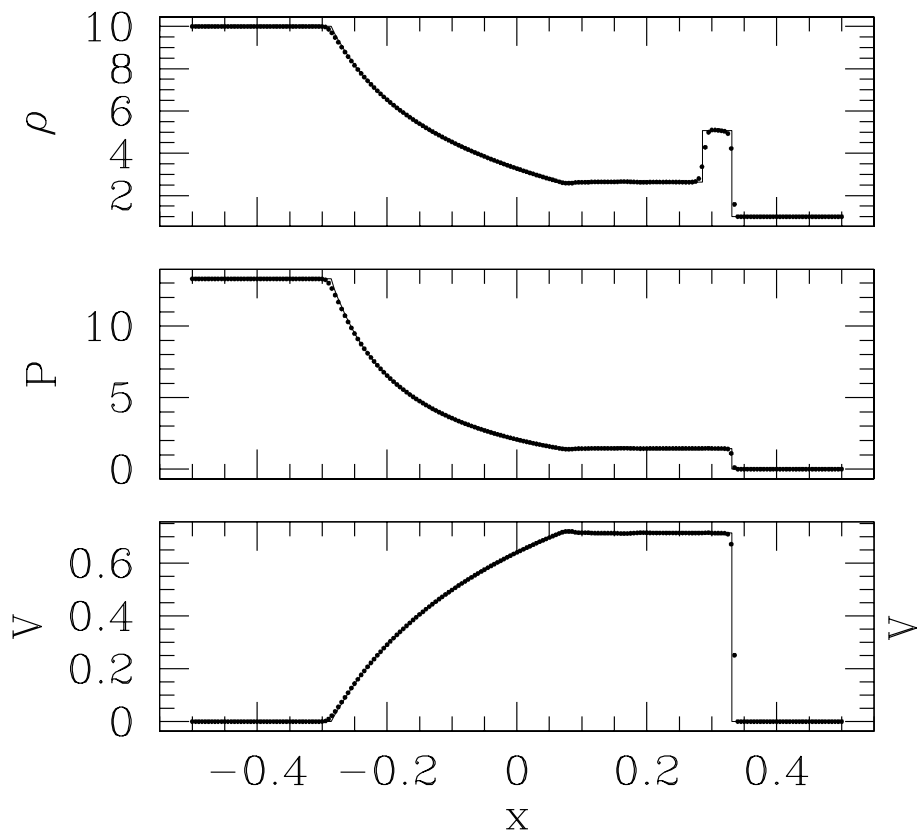
$$\gamma_i^\nu \nabla_\mu T_\nu^\mu = 0 \Rightarrow \frac{\partial (\rho_* \bar{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_* \bar{u}_i v^j + P \alpha \sqrt{\gamma} \delta_i^j)}{\partial x^j}$$

$$= P \frac{\partial (\alpha \sqrt{\gamma})}{\partial x^i} - \rho_* \left[\alpha u^t h \frac{\partial \alpha}{\partial x^i} - \bar{u}_j \frac{\partial \beta^j}{\partial x^i} + \frac{\bar{u}_k \bar{u}_l}{2 h u^t} \frac{\partial \gamma^{kl}}{\partial x^i} \right]$$

$$\rho_* = \rho \alpha u^t \sqrt{\gamma}, \quad v^i = \frac{u^i}{u^t}, \quad \bar{u}_i = h u_i, \quad h = 1 + \varepsilon + \frac{P}{\rho}, \quad e_* = h \alpha u^t - \frac{P}{\rho \alpha u^t}$$

特殊相対論における標準的テスト (この計算例では3次Roe法もどきを使用)

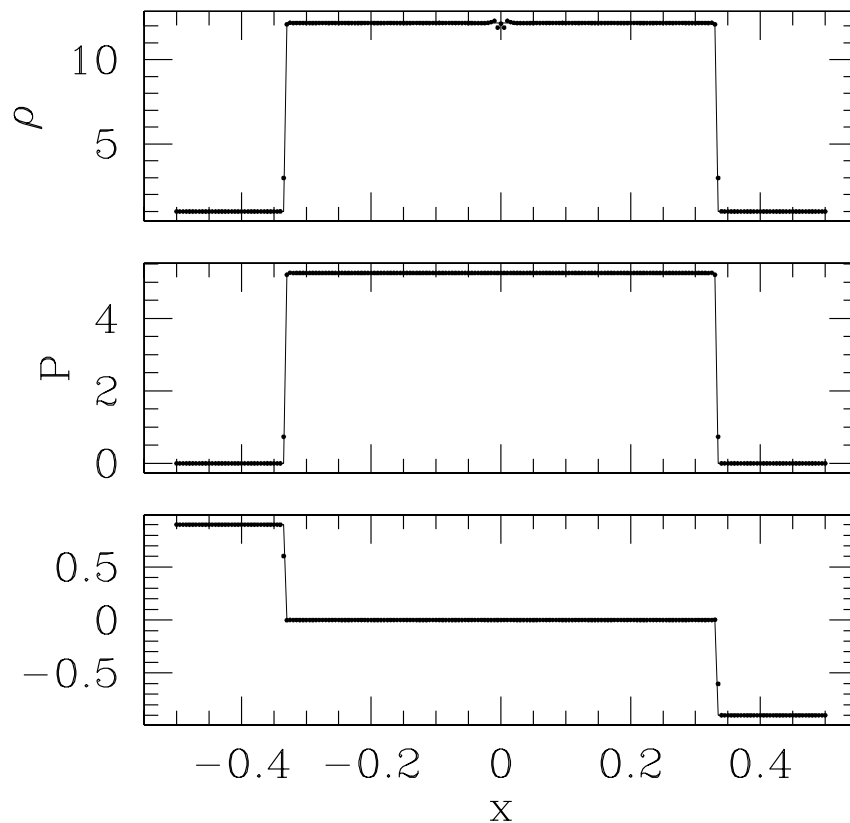
Riemann Shock Tube



$N = 400, \Gamma = 5/3$

200点だけプロット

Wall Shock



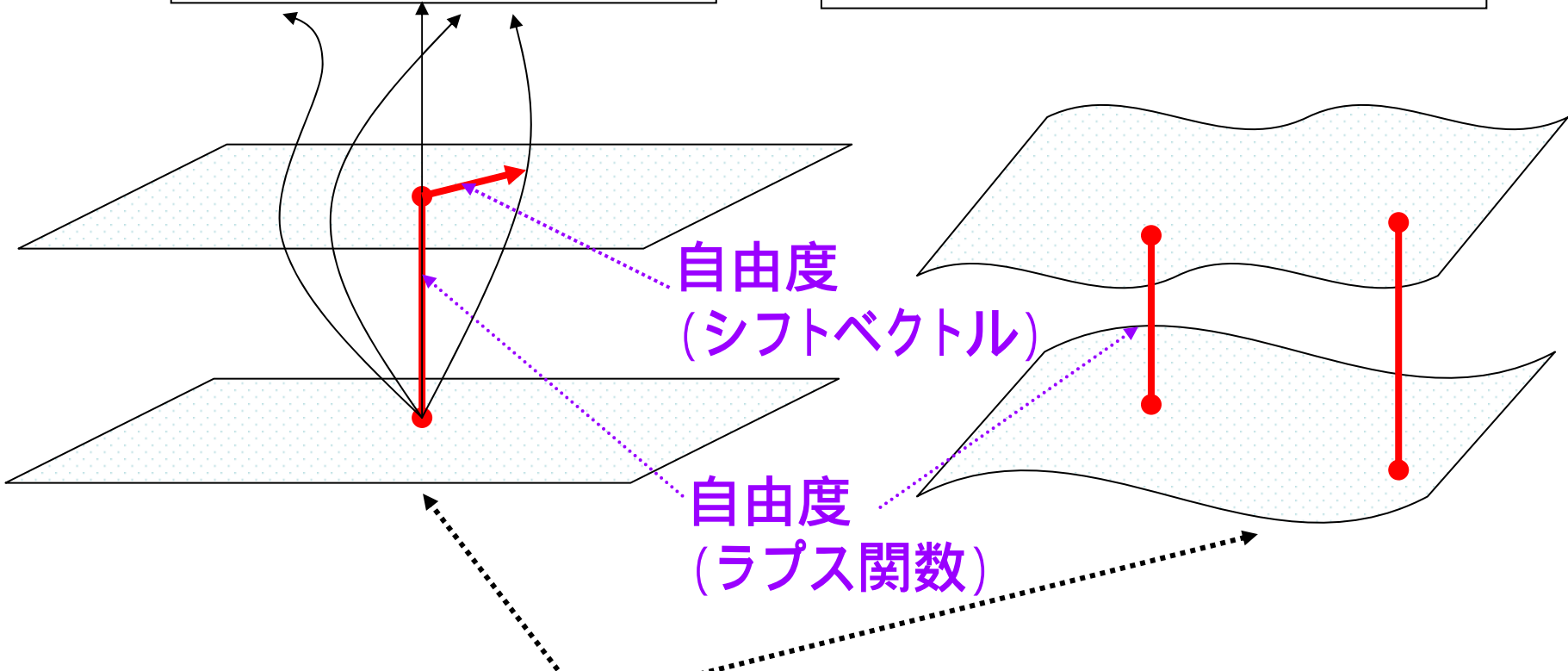
$V = 0.9.$

$N = 400, \Gamma = 4/3$

3-3. ゲージ条件 (座標条件)

どのように時間方向を選んでも構わない。

垂線からのずれの自由度
= シフトベクトルの自由度

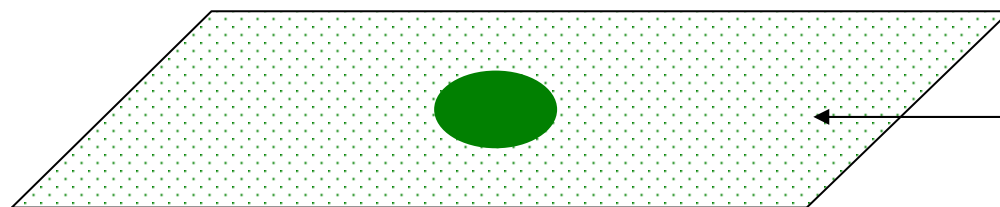
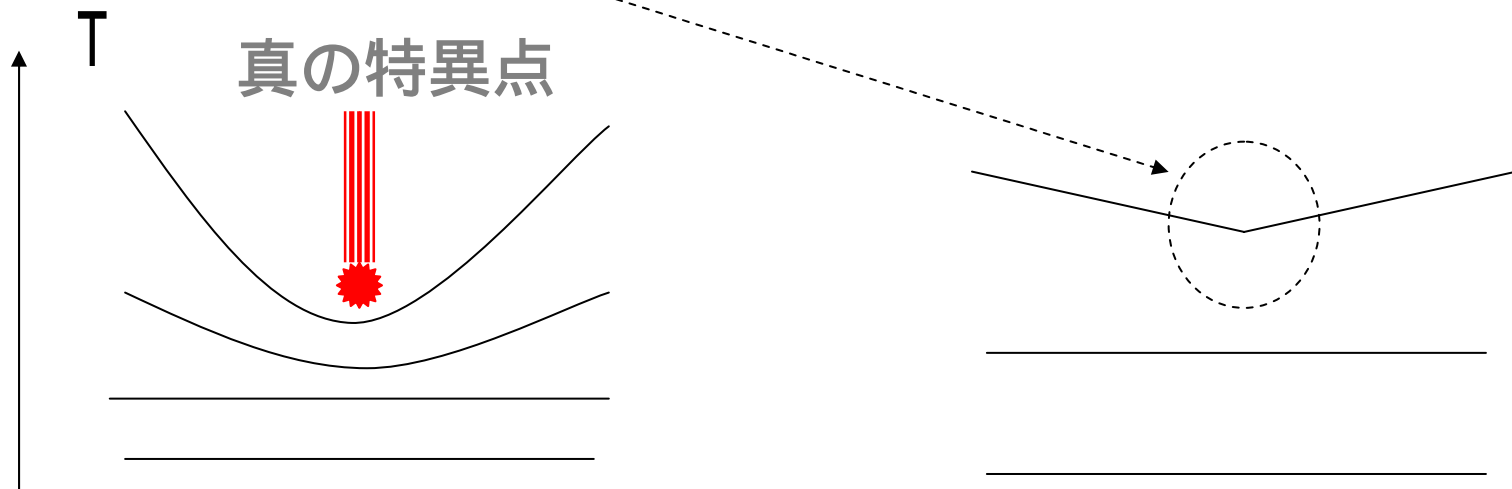


どのように時間一定の空間面を選んでも構わない。

垂線の距離の自由度
= ラプス関数の自由度

Slice : 要求される性質

- ブラックホール形成時に**特異点**を避ける
- 定常な時空は定常に見えるようにスライスする
- **座標特異点**を避ける



定常ならば
計量は不変
になるべし。

しばしば採用されるスライス

1. Maximal slice : ラプスに対する楕円型の方程式に帰着

$$K = 0 = \dot{K} \Rightarrow \Delta\alpha = \alpha S \left[\gamma_{ij}, K_{ij}, T_{\mu\nu} \right]$$

- 解くのに時間がかかる。
- 境界条件が必要。ブラックホール切り取り技法の際??

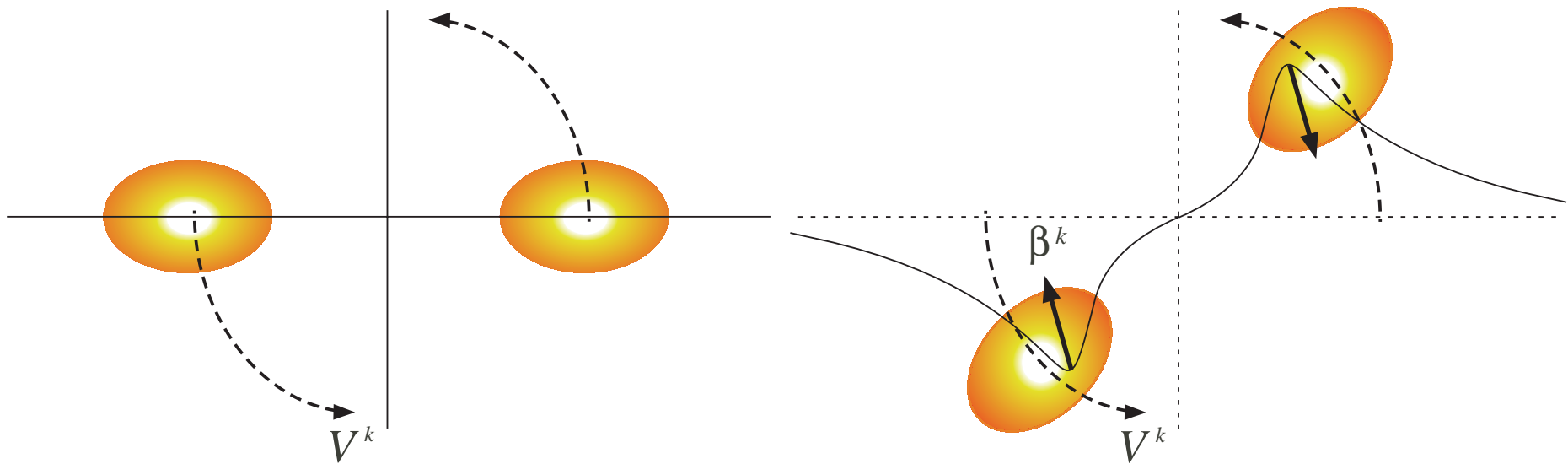
2. Hyperbolic slice, dynamical lapse

$$\dot{\alpha} = -\alpha K \quad \text{or} \quad \dot{\alpha} - \beta^i \alpha_{,i} = -\alpha K$$

(\neq Harmonic slice, $\dot{\alpha} - \beta^i \alpha_{,i} = -\alpha^2 K$)

経験的にうまくいく場合が多い。
初期のラプスの選び方にもよる

Spatial gauge : 要求される性質



Frame dragging \longrightarrow 座標が捻じれる。

座標変換自由度(シフトベクトル)で捻じれを抑える。

しばしば採用される空間的ゲージ

1. Minimal distortion gauge (Smarr-York, 1978) :

Minimize global distortion defined as

$$I = \int dV (\partial_t \tilde{\gamma}_{ij})(\partial_t \tilde{\gamma}_{kl}) \tilde{\gamma}^{ik} \tilde{\gamma}^{jl} \gamma^{1/2}$$

$$\frac{\partial I}{\partial \beta^k} = 0 \Rightarrow \underline{\tilde{D}^k (\gamma^{1/2} \partial_t \tilde{\gamma}_{ik})} = 0$$

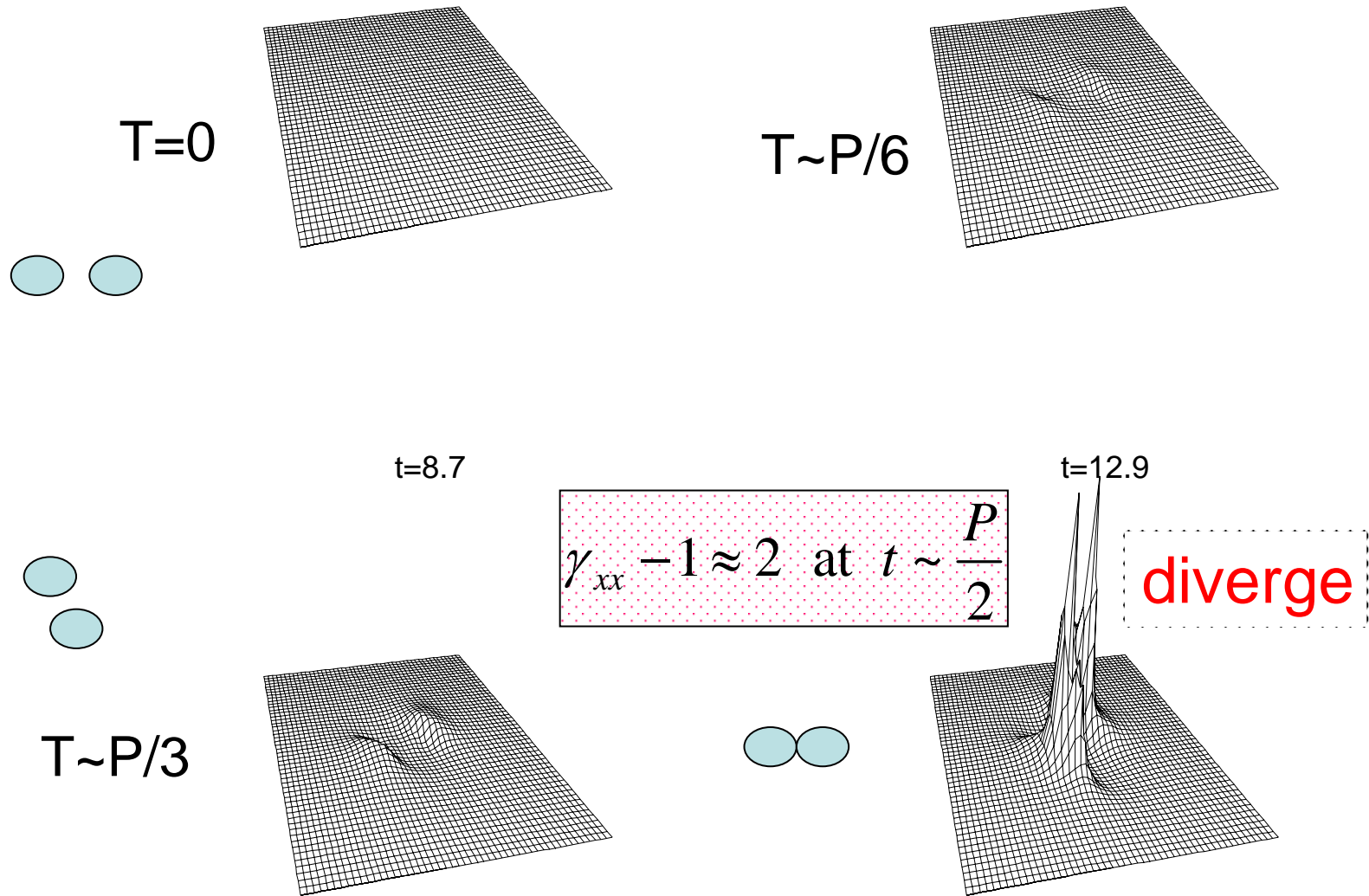
$$\Rightarrow \tilde{\gamma}_{jk} \tilde{\Delta} \beta^k + \frac{1}{3} \tilde{D}_j \tilde{D}_k \beta^k + \tilde{R}_{jk} \beta^k$$

$$+ \tilde{\gamma}_{jl} \tilde{D}_k \ln \gamma^{1/2} \left(\tilde{D}^k \beta^l + \tilde{D}^l \beta^k - \frac{2}{3} \tilde{\gamma}^{kl} \tilde{D}_m \beta^m \right) = S_j$$

Alternative choice : $I = \int dV (\partial_t \tilde{\gamma}_{ij})(\partial_t \tilde{\gamma}_{kl}) \tilde{\gamma}^{ik} \tilde{\gamma}^{jl}$

$$\frac{\partial I}{\partial \beta^k} = 0 \Rightarrow \underline{\tilde{D}^k (\partial_t \tilde{\gamma}_{ij})} = 0 \Rightarrow \tilde{\gamma}_{jk} \tilde{\Delta} \beta^k + \frac{1}{3} \tilde{D}_j \tilde{D}_k \beta^k + \tilde{R}_{jk} \beta^k = \bar{S}_j$$

赤道面上での3次元計量のある成分(γ_{xx})の 時間発展 : zero shift vector



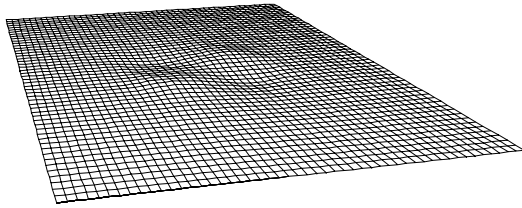
座標ゆがみが単調に積もる.

Minimal distortion gauge (もどき) の場合

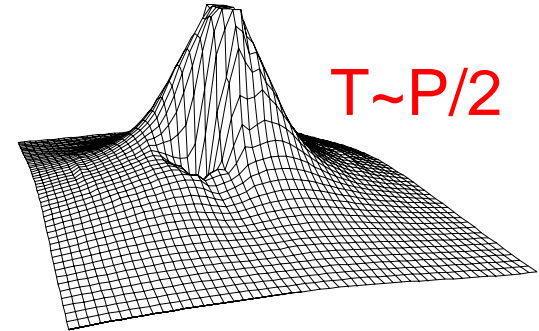
t=4.7

t=12.5

T~0



T~P/2

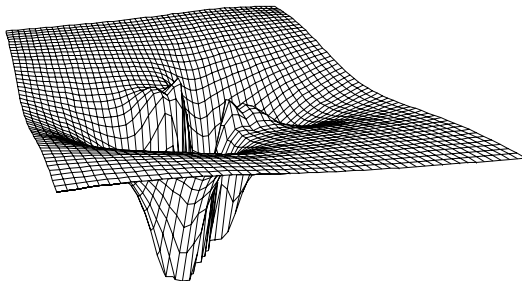


T~0

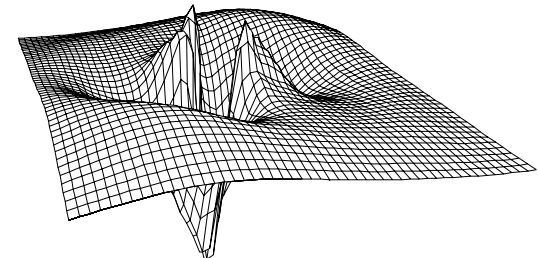
Metric (γ_{xx}) は単調に振動

$$|\gamma_{xx} - 1| < 0.1 \text{ at } t \sim P$$

T~3P/4 t=19.4



t=26.9



MD gauge \leftrightarrow 物理的には申し分ない

しかし、数値計算の観点からすると、優れていない

なぜならば、ベクトル楕円型方程式を解くことは、
計算コストが大きすぎるから。

最近はあまり使われていない。

New trend

Dynamical gauge condition

楕円型

$$\text{MD gauge : } \Delta\beta^k + \frac{1}{3}D^k D_j \beta^j = S^k$$



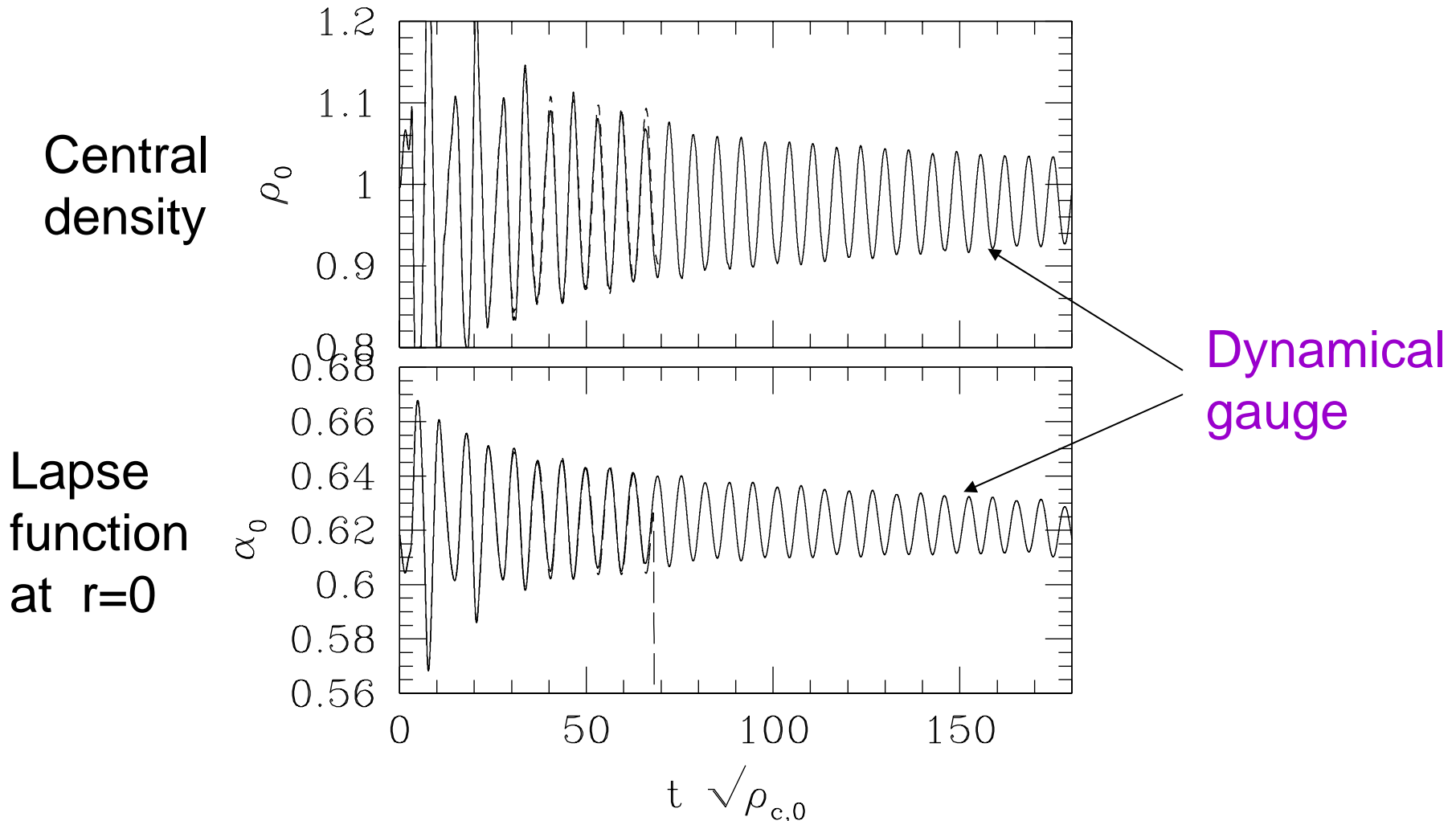
双曲型

Schematic form :

$$\ddot{\beta}^l \approx \Delta\beta^l + \frac{1}{3}D^l D_j \beta^j - S^l$$

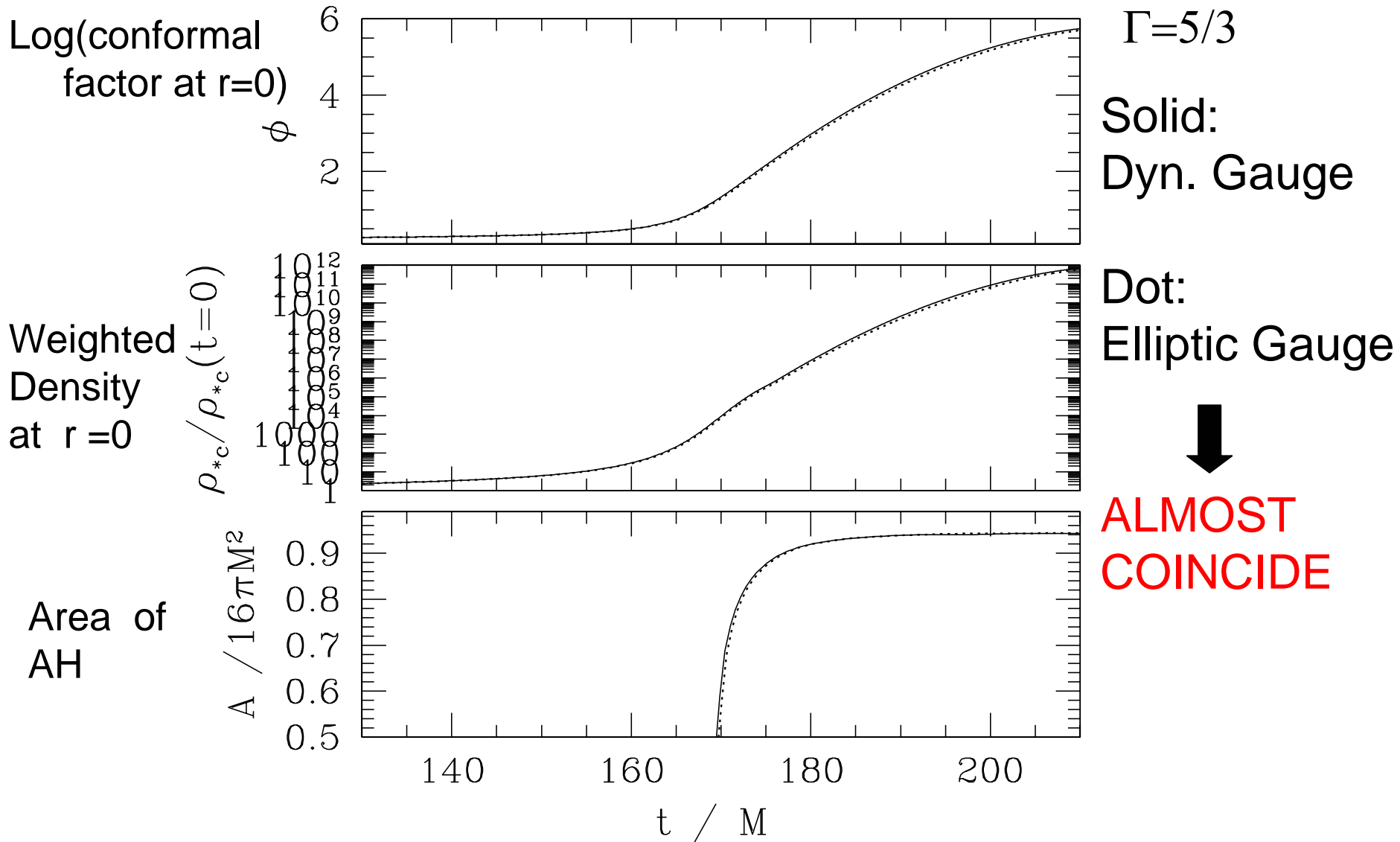
- 計算時間の大幅な節約
- 初期にMDゲージを満たしかつ、定常に近い時空であれば、MDゲージと類似解のはず
- 本当にそうか？ 数値実験 YES

Evolution of compact, rapidly rotating & oscillating NS in a dynamical gauge



Stable evolution for > 30 oscillation (\sim rotation) periods.

Collapse of a rotating NS to BH



3-4. 初期条件の与え方

3-4-1: 任意の初期条件の場合

束縛条件さえ満足させればよい

York の手法 (基礎方程式が楕円型方程式へ帰着)

$$\gamma_{ij} = \psi^4 \tilde{\gamma}_{ij} : \tilde{\gamma}_{ij} = \text{conformal metric (given)}$$

$$K_{ij} = \psi^{-2} \left(\tilde{D}_i W_j + \tilde{D}_j W_i - \frac{2}{3} \tilde{\gamma}_{ij} \tilde{D}_k W^k \right) + K_{ij}^{\text{TT}} + \frac{1}{3} \gamma_{ij} K$$

$$K_{ij}^{\text{TT}}, K : \text{given. } D^i K_{ij}^{\text{TT}} = 0 = \gamma^{ij} K_{ij}^{\text{TT}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{\Delta} \psi = \frac{1}{8} \tilde{R} \psi - 2\pi T_{\mu\nu} n^\mu n^\nu \psi^5 - \frac{1}{8} \psi^5 (K_{ij} K^{ij} - K^2) \\ \tilde{D}_i \tilde{D}^i W_j + \frac{1}{3} \tilde{D}_j \tilde{D}_k W^k + \tilde{R}_{jk} W^k - \frac{2}{3} \psi^6 \tilde{D}_j K = -8\pi \psi^6 T_{\mu\nu} n^\mu \gamma_j^\nu \end{cases}$$

いまなら、比較的容易に解くこと可能

3-4-2. 現実的初期条件の与え方について

1: 相対論的回転星:

重力崩壊前の大質量星の核、中性子星に対して必要

任意の回転則に対して、平衡形状を求めること可能。

(1989年小松-江里口-蜂巢以降確立)

解くべき方程式: 計量に対する4つの楕円型方程式
+ 運動方程式の第一積分

振動を与える・圧力を抜くなどの摂動が加わった場合
束縛方程式を摂動状態に対して解き直す。

2: 連星の場合 (重力波放射の時間スケール > 周期)

$$\frac{t_{\text{coalesce}}}{P_{\text{orbit}}} \approx 1.1 \left(\frac{r}{6M} \right)^{5/2} \left(\frac{M}{4\mu} \right)$$

M : Total mass

μ : Reduced mass

r : Orbital separation

準平衡形状を $r \sim 10M$ 辺りに用意するのが現実的。

では、準平衡形状とは？

一般相対論における準平衡形状

- 回転系で見て、系はほぼ定常
helical Killing vector (HKV) の存在を仮定する
- 流体の方程式: HKVが存在し、かつ流体の流れが一様回転か渦度ゼロのときには、積分可能
(回転星の場合と類似)
- アインシュタイン方程式 + HKV
定在波が存在してしまう
漸近平坦にならない

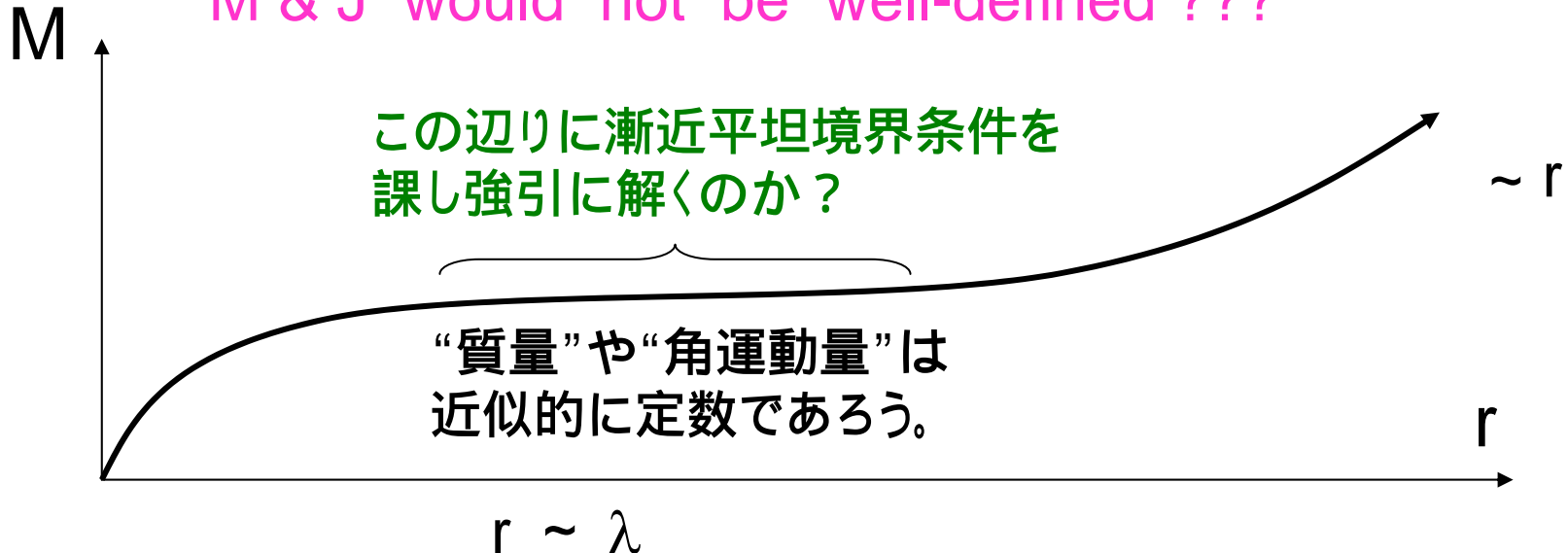
純粋にHKVの存在を仮定した場合

$$L_{\xi} g_{\mu\nu} = 0, \quad \xi^{\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{\mu} + \Omega \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^{\mu} : \text{HKV}$$

$$\text{Einstein eqs.} \Rightarrow \square g_{\mu\nu} = S[g_{\mu\nu}, T_{\mu\nu}]$$

RHS=Not compact= $O(r^{-2})$

M & J would not be well-defined ???



これまで頻繁に用いられてきた定式: Conformal flatness形式: 重力波なし

$$ds^2 = -(\alpha^2 - \beta^k \beta_k) dt^2 + 2\beta_k dx^k dt + \underbrace{\psi^4 \delta_{ij}} dx^i dx^j$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta(\alpha\psi) = \dots & : \dot{K} = 0 \\ \Delta\psi = \dots & : \text{Hamiltonian constr. } \mathbf{5 \text{ elliptic PDEs}} \\ \Delta\beta^k + \frac{1}{3}\partial^k \partial_j \beta^j = \dots & : \text{Momentum constr.} + \partial_t \tilde{\gamma}_{ij} = 0 \end{array} \right.$$

$$K = 0, \quad \tilde{A}_{ij} \equiv \psi^{-4} \left(K_{ij} - \frac{1}{3} \gamma_{ij} K \right) = \delta_{jk} \partial_i \beta^k + \delta_{ik} \partial_j \beta^k - \frac{2}{3} \delta_{ij} \partial_k \beta^k$$

$$\tilde{\gamma}_{ij} \equiv \psi^{-4} \gamma_{ij} = \delta_{ij}$$

連星の定性的性質をみるには、よいと考えられる。

しかし、定量的にどの程度正しいかについては分かっていない

$$\because \tilde{\gamma}_{ij} - \delta_{ij} = O(v^4) \sim 0.01 - 0.1 \text{ for } v^2 \sim 0.1 - 0.2$$

Waveless approximation

$$\tilde{\gamma}_{ij} \neq \delta_{ij}, \text{ but } \partial_t \tilde{\gamma}_{ij} \approx 0$$

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{\gamma}_{ij} &\sim \Omega \tilde{\gamma}_{ij} \\ &\sim \tilde{\gamma}_{ij} / \lambda \\ &\ll \partial_k \tilde{\gamma}_{ij} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tilde{A}_{ij} = \tilde{\gamma}_{jk} \tilde{\nabla}_i \beta^k + \tilde{\gamma}_{ik} \tilde{\nabla}_j \beta^k - \frac{2}{3} \tilde{\gamma}_{ij} \tilde{\nabla}_k \beta^k$$

$$L_\xi \tilde{A}_{ij} = 0; \quad \xi = \text{HKV}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta(\alpha\psi) = \dots \\ \Delta\psi = \dots \\ \Delta\beta^k + \frac{1}{3} \nabla^k \nabla_j \beta^j = \dots \\ \Delta\tilde{\gamma}_{ij} = \dots \end{array} \right.$$

RHS=

Compact sources

$[O(r^{-n})]$, $n=3$ or 4

Similar to Isenberg (1980)

ただし、第一法則 $dM = \Omega dJ$ やビリアル関係式が満足するように上手に定式化は必要(瓜生、柴田、フリードマン、準備中)

連星中性子星の現実的初期条件

$T_{GW} > P \Rightarrow$ Quasi-equilibrium state

$T_{Vis} > T_{GW} \Rightarrow$ Vorticity conserves

$P \sim 2\text{msec} \ll$ Typical spin of neutron stars



Velocity field of neutron stars \approx Irrotational

現実的初期条件 = 渦度ゼロの平衡形状

Conformal flatness 形式においては、
瓜生君やMeudonグループが計算法確立
瓜生君が新しい定式化で計算中

連星BHの現実的初期条件

Conformal flatness 形式においては、Meudonグループが一様回転BH連星に対して計算。ただし、ブラックホールが存在する場合、定式化に問題がある(ホライズンで正則にならない)

BH-NSの現実的初期条件

計算例なし: Meudonグループが着手。
ただし上記と同じ問題あり。

BH連星に対しては、新しい定式化が必要不可欠

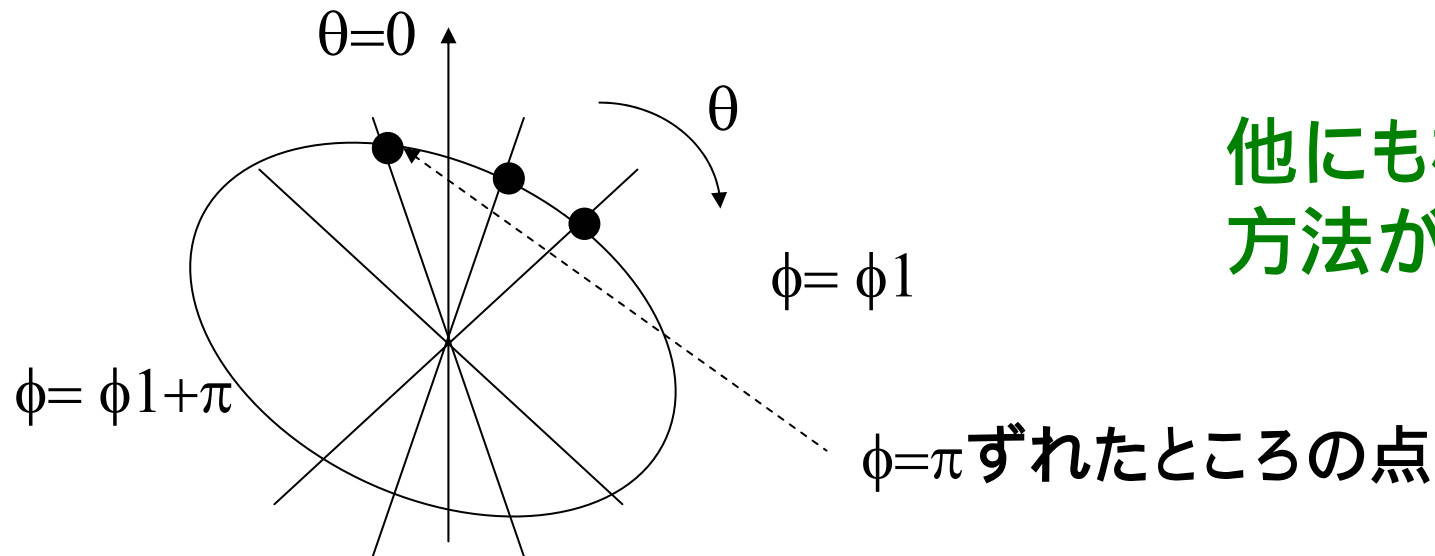
3-6. Apparent horizon finder

面を決める = $r(\theta, \phi)$ に対する楕円型の方程式に帰着

$$\Delta_2 r(\theta, \phi) = S \left[r, \theta, \phi, g_{\mu\nu}, K_{\mu\nu} \right]$$

昔: 軸上での境界条件が分からないので、どう解いていいかわからない??

現在: そんなことはない。簡単に解ける (一例、柴田-瓜生)。
(境界条件不要)



他にも様々な方法がある。

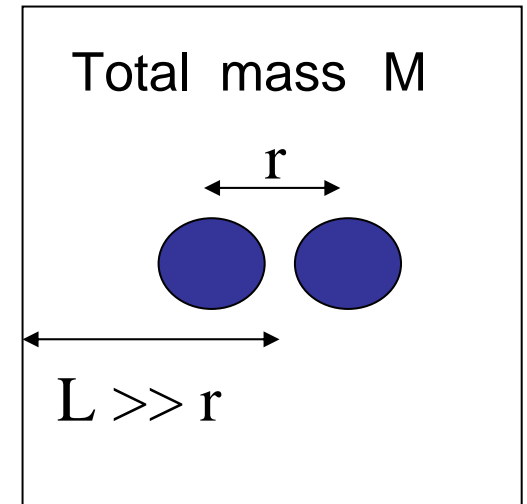
3-9. 計算機資源と重力波の抽出

重力波を精度よく抽出するために
必要となる最小限度のグリッド

$$\lambda_{GW} \leq \lambda_{ISCO} \approx 58 \left(\frac{GM}{c^2} \right) \left(\frac{rc^2}{7GM} \right)^{3/2}$$

Require $L \geq \lambda_{GW}$ & $\Delta x \leq 0.2 \left(\frac{GM}{c^2} \right)$

$$\Rightarrow \frac{L}{\Delta x} \geq 290 \left(\frac{rc^2}{7GM} \right)^{3/2} \quad \& \quad N \geq 580 \left(\frac{rc^2}{7GM} \right)^{3/2} = 1000 \left(\frac{rc^2}{10GM} \right)^{3/2}$$



Minimum grid number required (in uniform grid):
~ 600 * 600 * 300 (equatorial symmetry is assumed)
⇒ Memory required ~ 200 GBytes (~200 variables)

最近のスパコンのパワー

FUJITSU FACOM VPP5000 at NAOJ

- Vector-Parallel Machine (60 vector PEs)
- Maximum memory → 0.96TBytes
- Maximum speed → 0.58TFlops
- Our typical run with 32PEs

Typical current
memory & speed

633 * 633 * 317 grid points = 240 Gbytes memory
(in my code)

About 20,000 time steps ~ 100 CPU hours /model

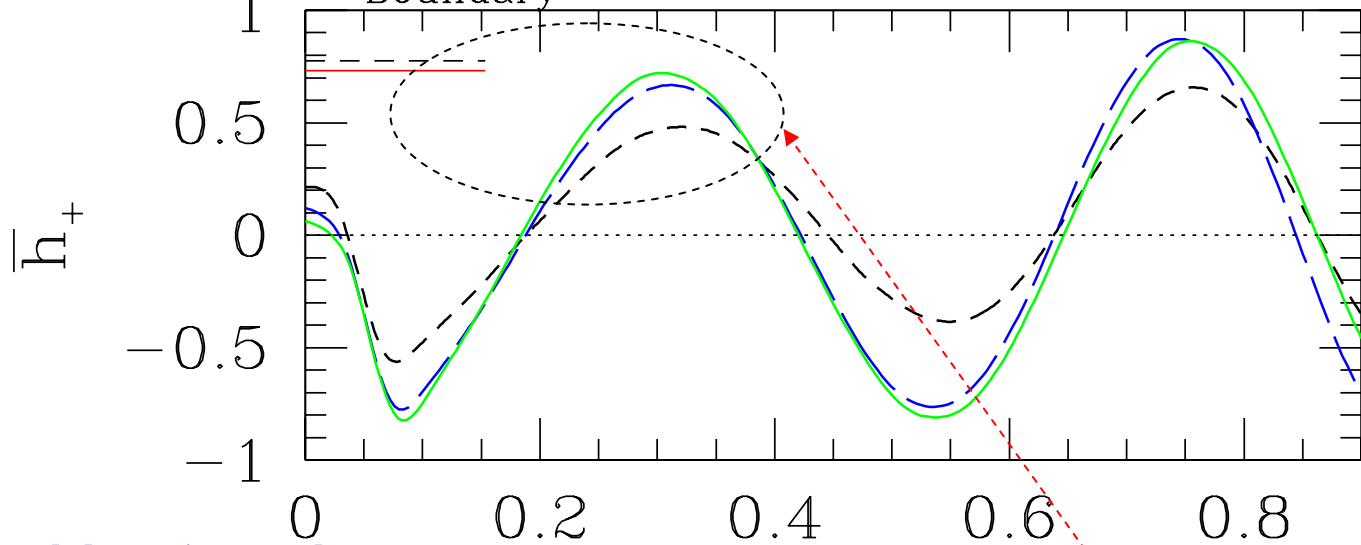
必要最小限度のグリッドは取ることができる

しかし、あと1桁上のメモリーとスピードが望まれる:

例、地球シミュレーター ~ 10TBytes, ~ 40TFlops.

たぶん数年後には、この程度が標準的になるであろう。

$L_{\text{Boundary}}/\lambda = 0.79$ vs 0.63 vs 0.36



$M/R = 0.16$ case
($R \sim 13\text{km}$ for $M=1.4$)

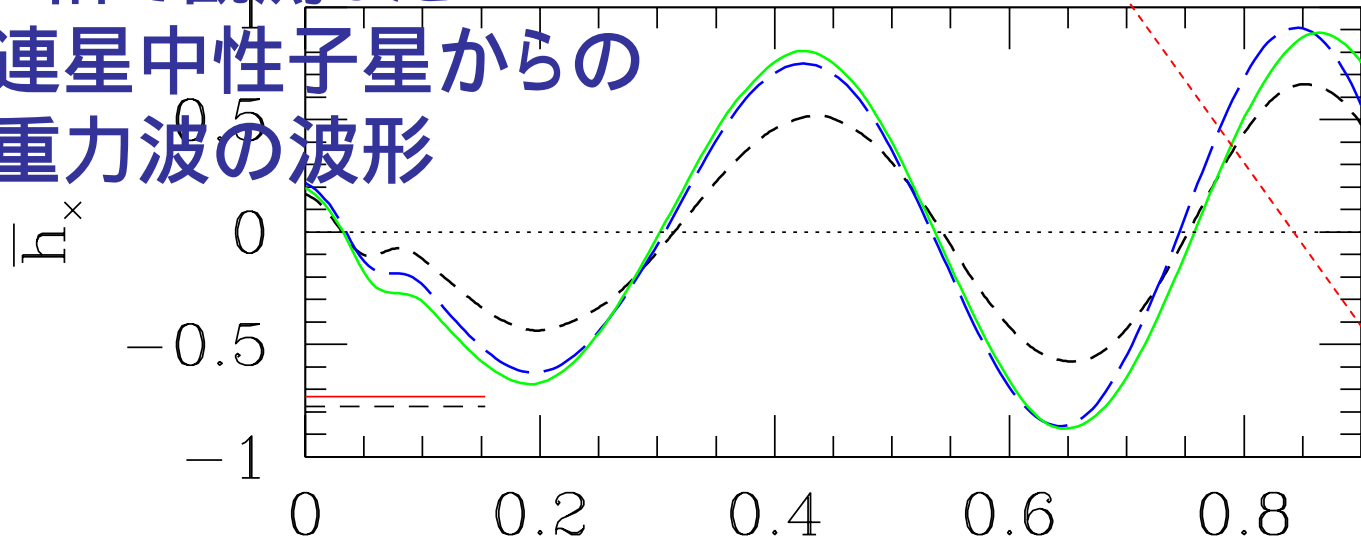
Green:
 $633 * 633 * 317$

Blue:
 $505 * 505 * 253$

Dotted Curves:
 $293 * 293 * 147$

Red : 2.5PN amp.

Z軸で観測した
連星中性子星からの
重力波の波形



Time $(t - z_{\text{obs}}) / P_{t=0}$

まあまあの収束
PN計算とも一致

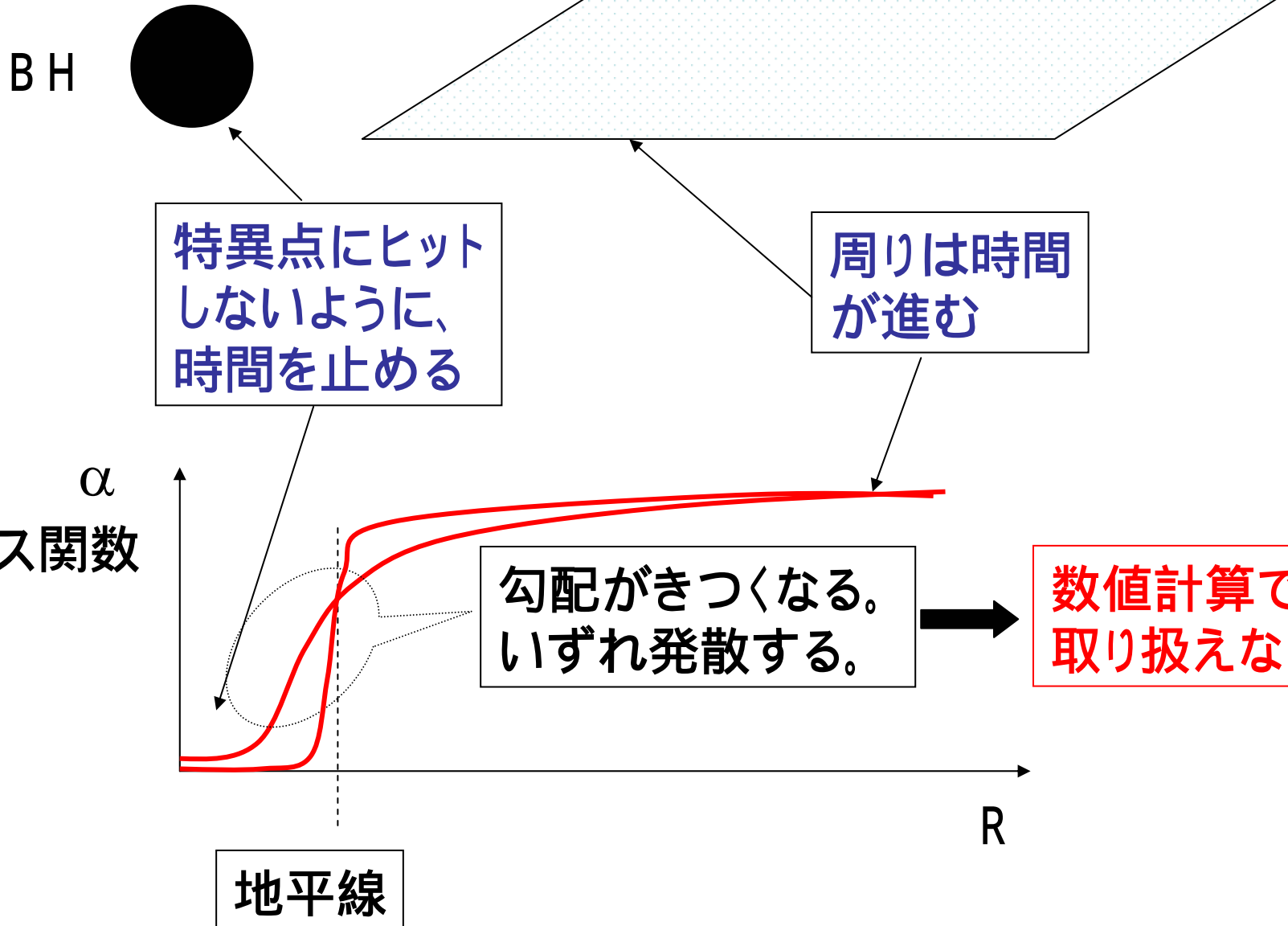
コードの完成状況

1. Einstein's evolution equations solver OK
2. GR Hydrodynamic equations solver OK
3. Appropriate gauge conditions OK
4. Realistic initial conditions ~OK
5. Gravitational wave extraction ~OK
6. Apparent horizon finder OK
7. Special techniques for handling BHs / Excision !!
8. Micro physics (EOS, neutrino processes, B-field ...)
9. Powerful supercomputers ~OK

Little effort

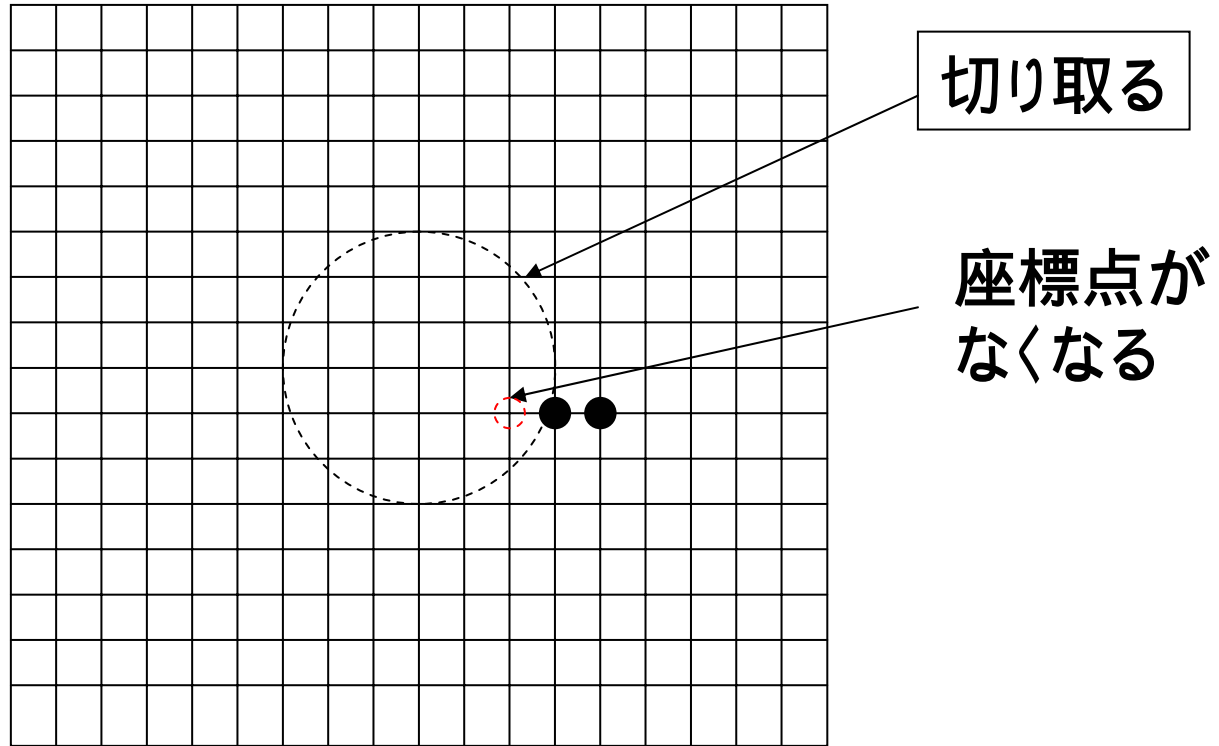


未解決問題: ブラックホールの取り扱い



解決法 (Unruh)

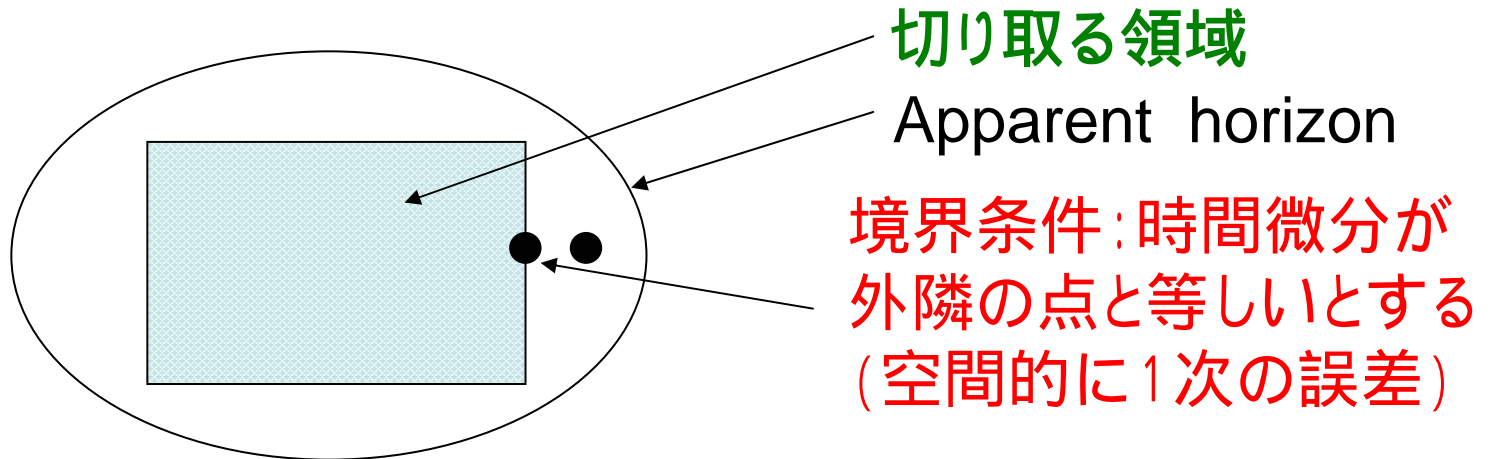
地平線の内側を切り取ってしまえ。



境界条件は？ 安定な数値計算のための定式化や差分法は？

Excision の流派

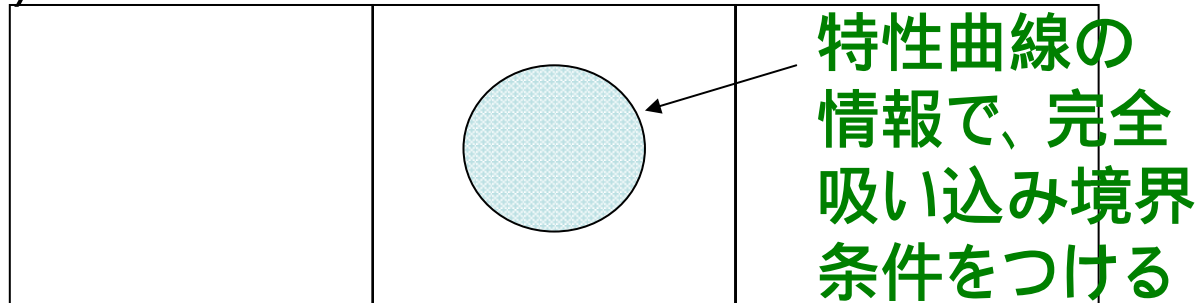
1. BSSNを使う一派の方法 (ポツダム、レイジアナ、イリノイ、私)
物理的かどうか定かではない方法



2. 双曲形式を使う一派の方法 (コーネル)

Multi domain spectral method + hyperbolic formula

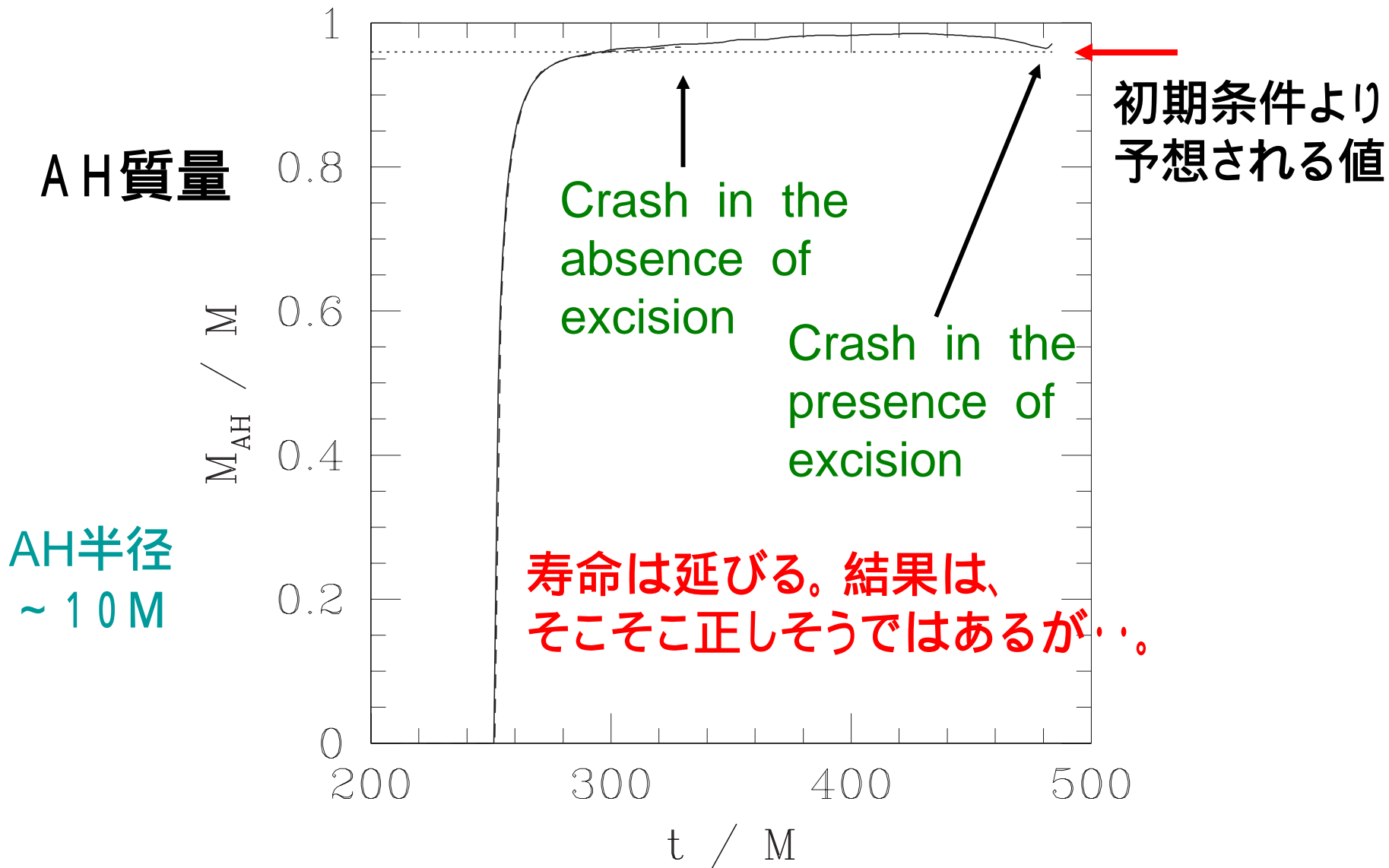
(物理的)



Excisionの現状

- 1BHの場合はどちらもうまくいく。
- 2BHの場合はどちらも長時間はもたない。
- 2BHの場合のように、AHが動くと不安定化し易らしい。
 - 2BHの場合、回転系に乗ったほうが長持ちする。
- 1BH + GWなどでもうまくいく(1の場合)。
- 流体の重力崩壊でもそこそこうまくいく(1の場合)。
ただし、本当に正しい答えを与えているのかよくわからない。
- 1の場合、Excisionをするにしても、空間精度1次なので、大量のメッシュが必要かも

Excision を用いた回転重力崩壊の計算 (柴田、未発表)



コードチェックについて

- 既知の解析解との比較

- ・ 特殊相対論流体:

- リーマンショックチューブ問題、壁衝撃波問題。

- ・ 一般相対論 (例: S 9 9、Fontら 0 2)

- 線形重力波 (Teukolsky wave)。

- 球対称ダストの重力崩壊。

- 安定な球対称星を長時間安定に保つ。

- 球対称星の既知の固有振動 (球対称、非球対称)。

- 安定な回転星を長時間安定に保つ。

- 不安定な星の重力崩壊。

- + 形成するブラックホールの質量のチェック。

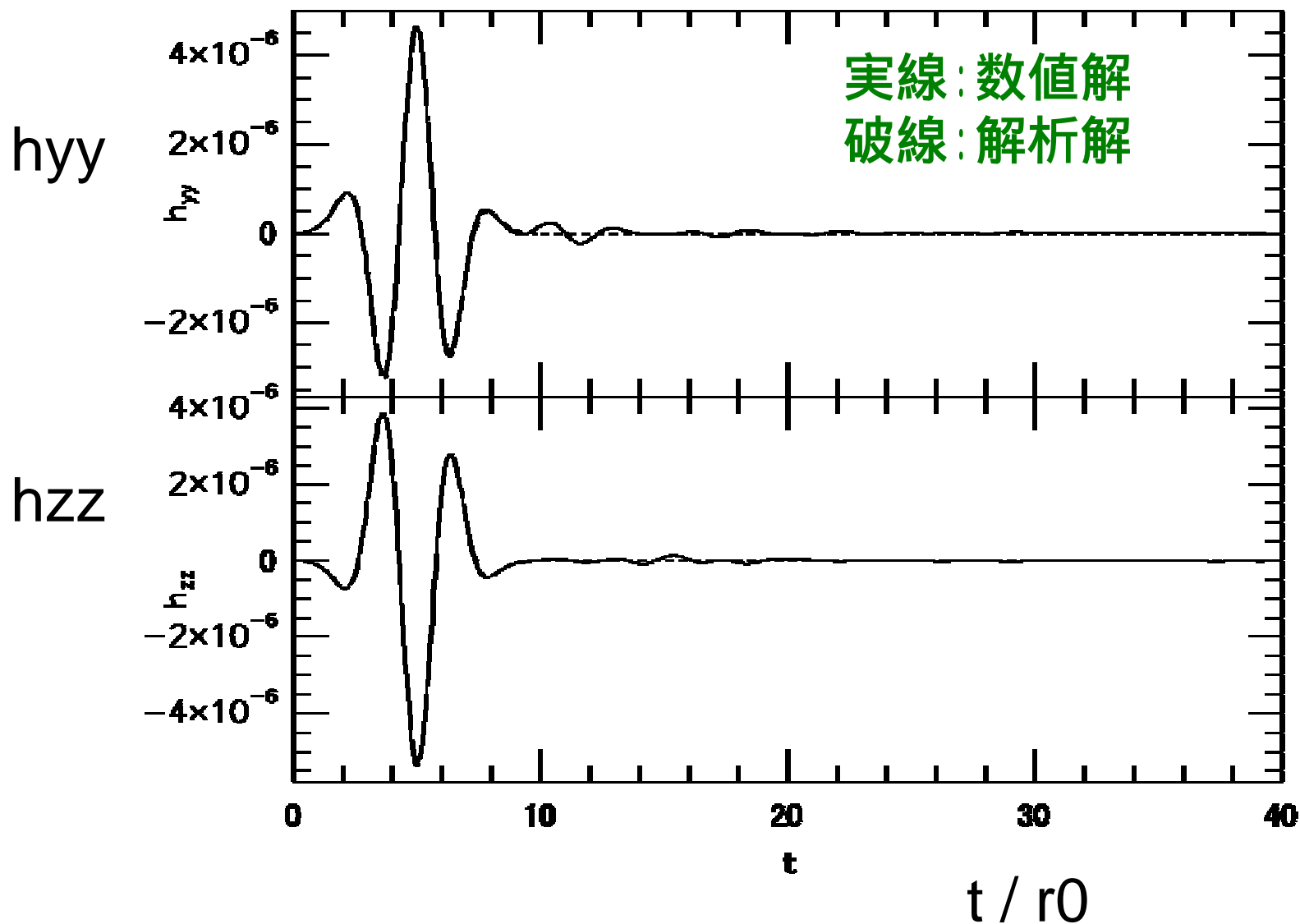
- 定常ブラックホールを長時間安定に保つ

これらのチェックをしていないコードはもはや信用されない

- 収束性のテスト: 2次のコードなら、誤差も2次で収束。

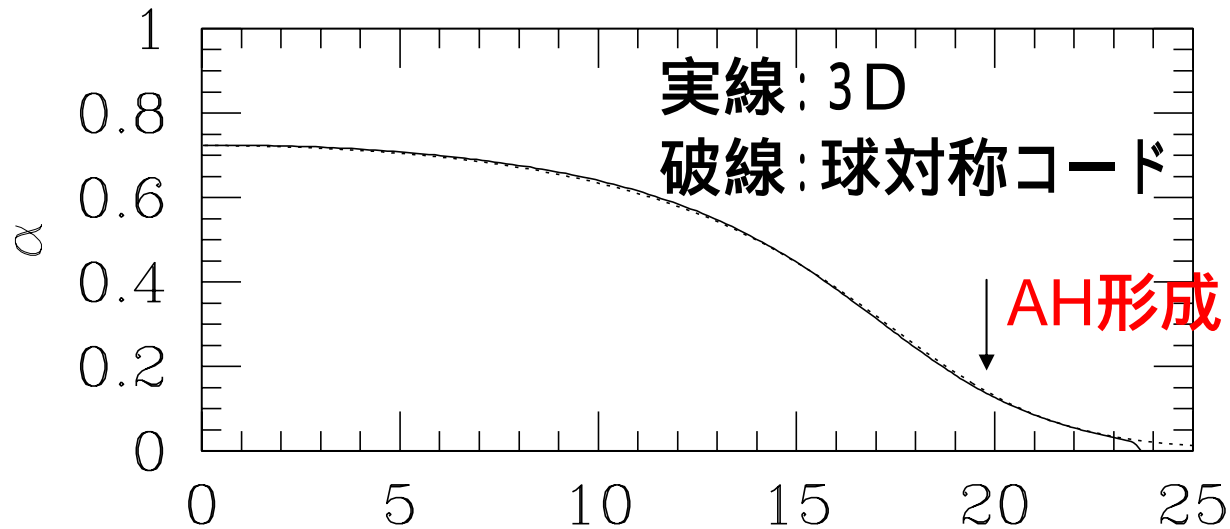
- (ただし、衝撃波が存在すると精度が落ちる)

線形重力波 (柴田 9 9、第一象限 5×10^3 メッシュ)

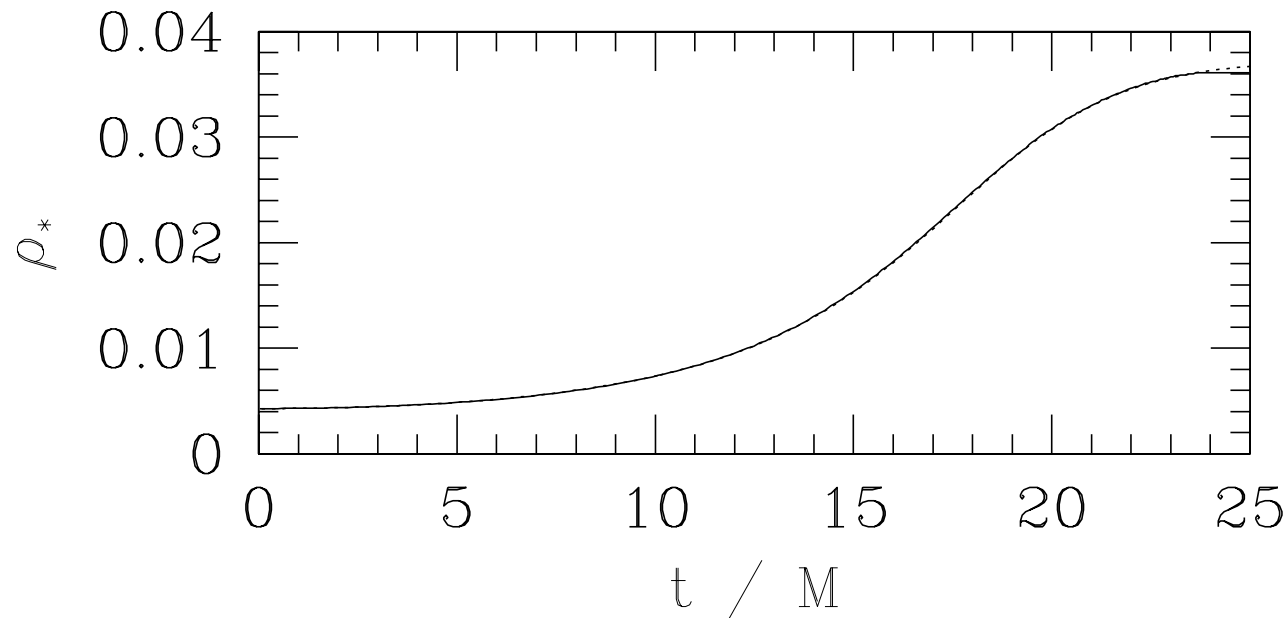


球対称ダストの重力崩壊 (柴田 99, 100^3)

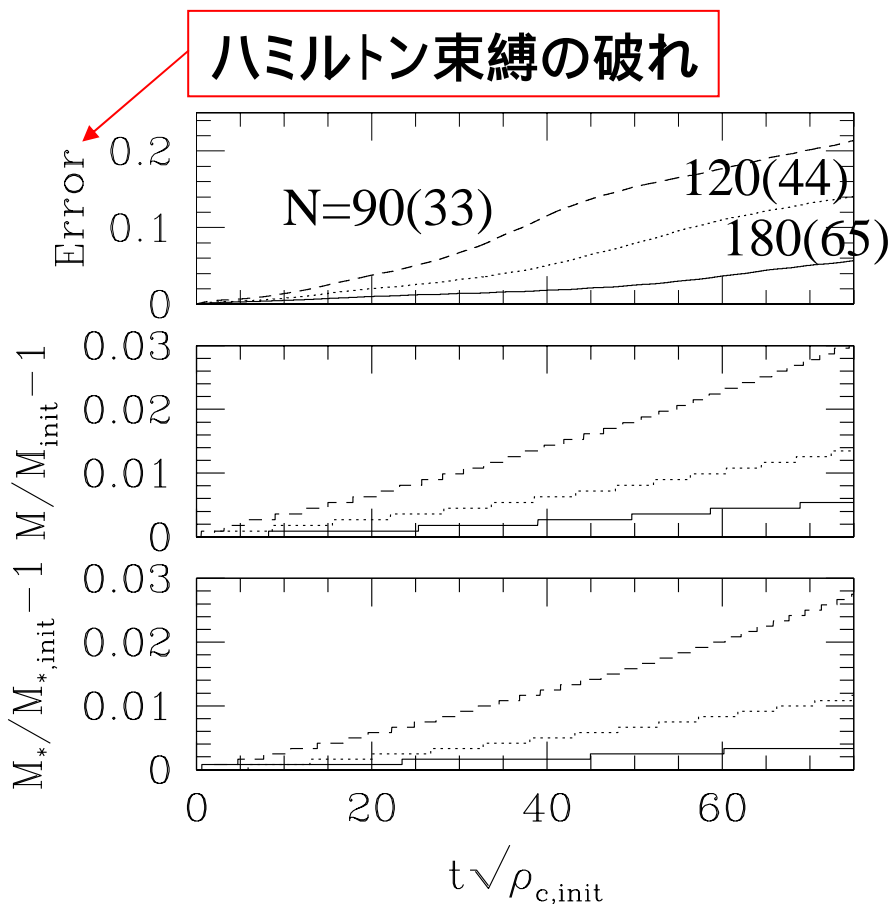
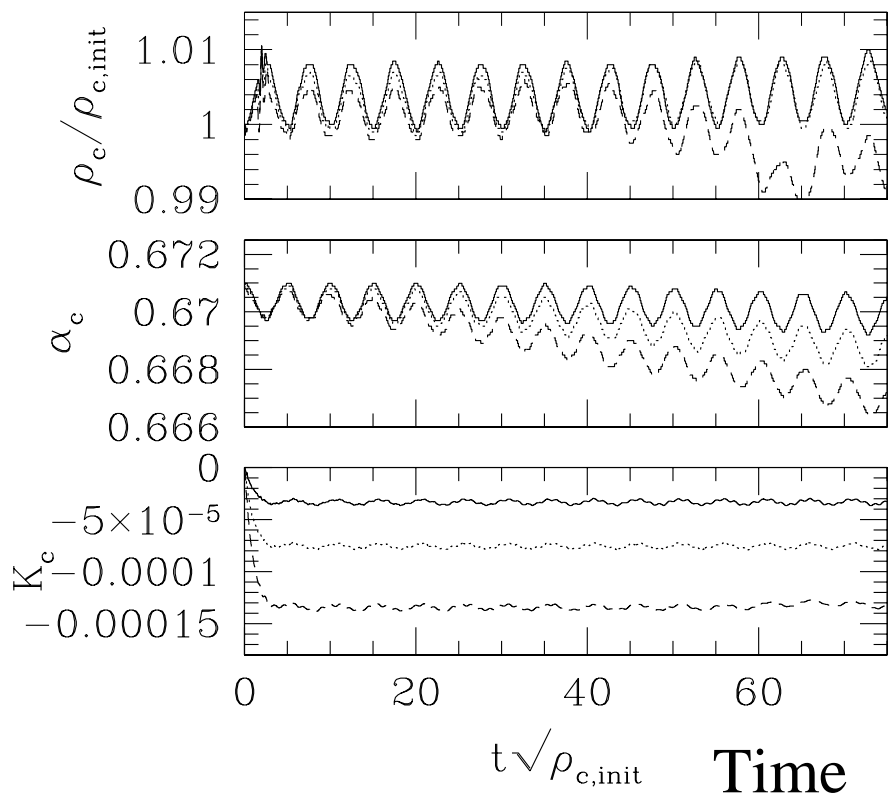
ラプス



中心
密度



振動する球対称中性子星の進化(軸対称計算)



EOS: $P = (\Gamma - 1)\rho\varepsilon$ with $\Gamma = 2$.

$M = 1.4M(\text{solar})$, $R = 14\text{km}$

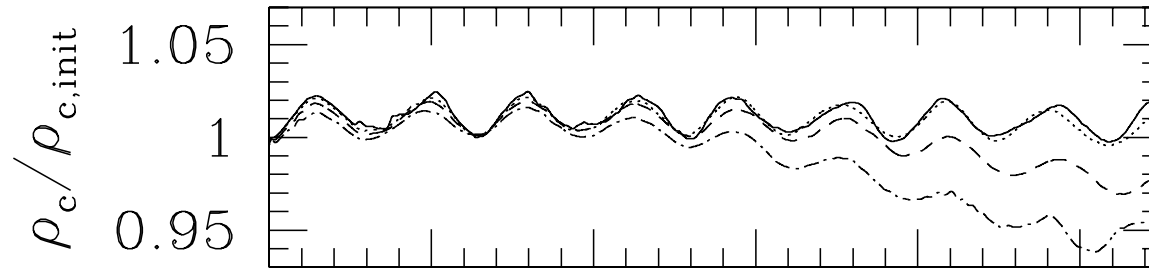
$(N+1, N+1)$ grid ; $N = 90, 120, 180$

NS is covered by 33, 44, 65 points.

シミュレーションの寿命
~ 30振動周期

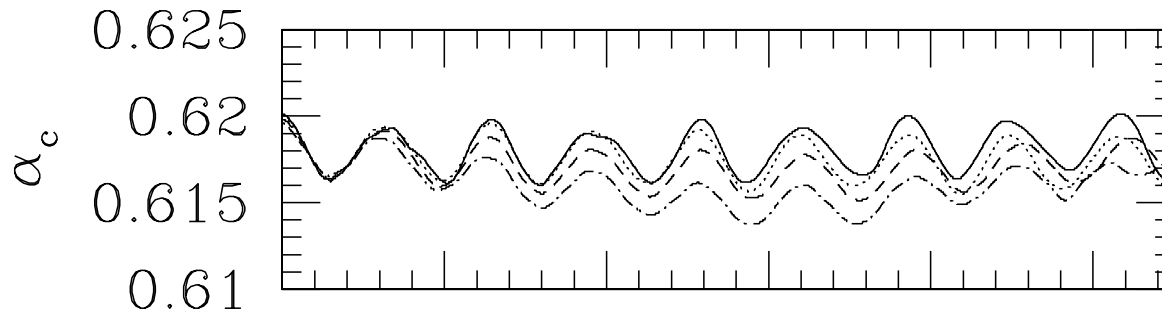
高速剛体回転する中性子星の進化

Density
at $r = 0$



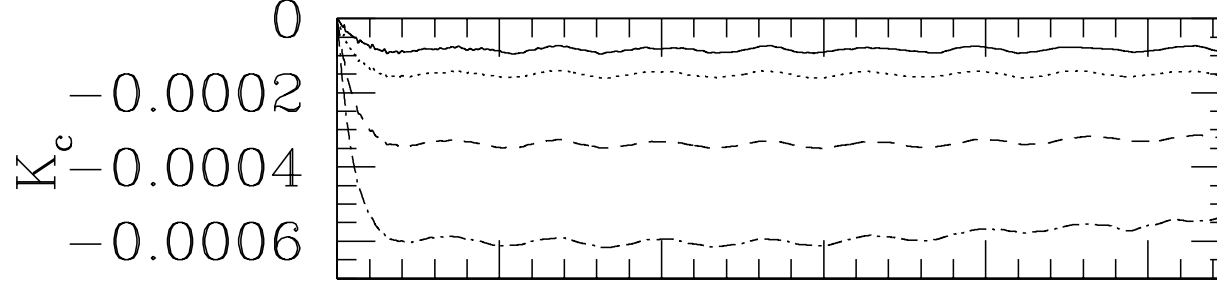
$N=240$ (80)
 180 (60)
 120 (40)
 90 (30)

Lapse
at $r = 0$



~ 10 oscillations

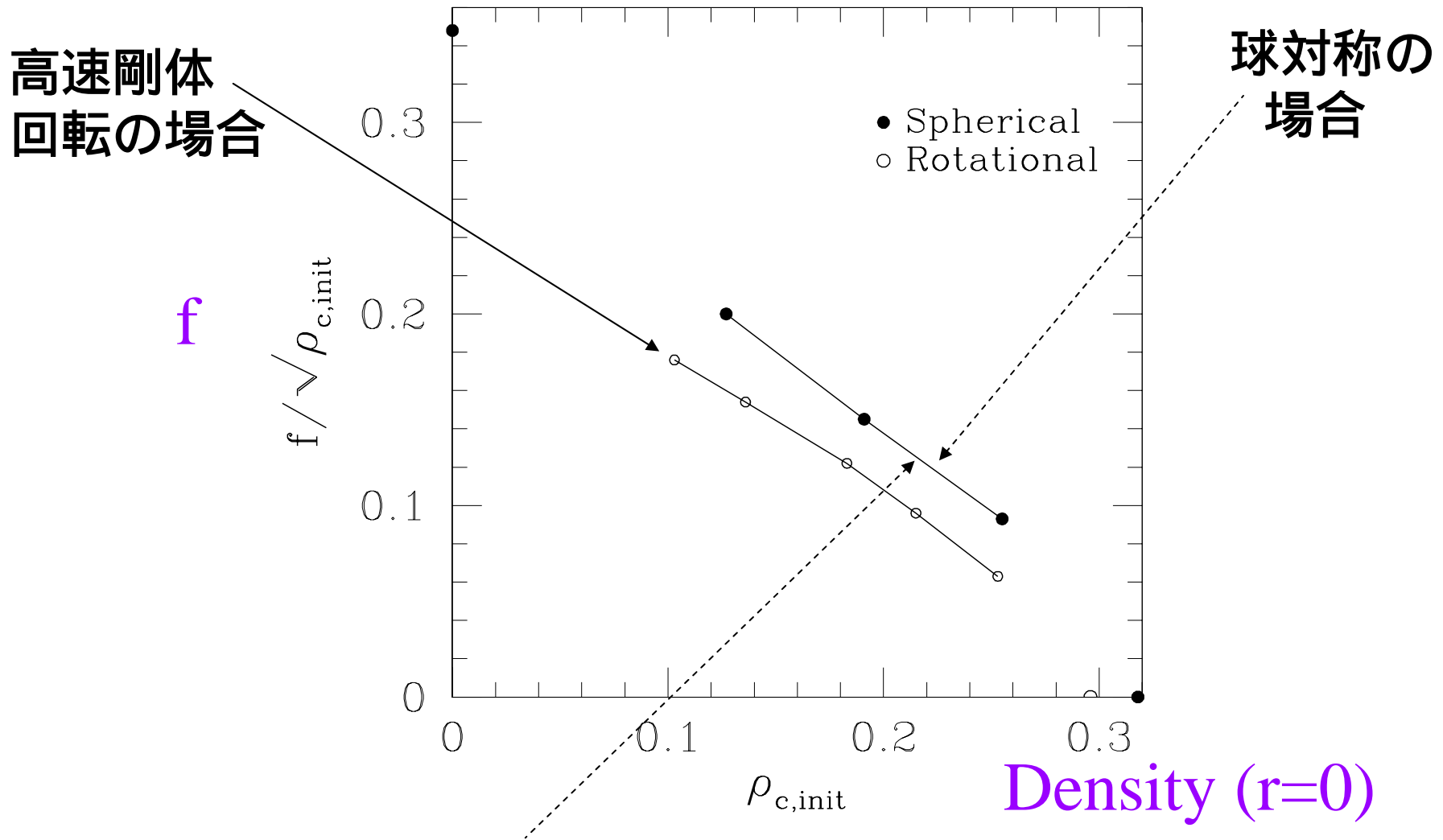
K



0 10 20 30 40 50
 $t\sqrt{\rho_{c,init}}$ Time

$M = 91\%$ of maximum mass

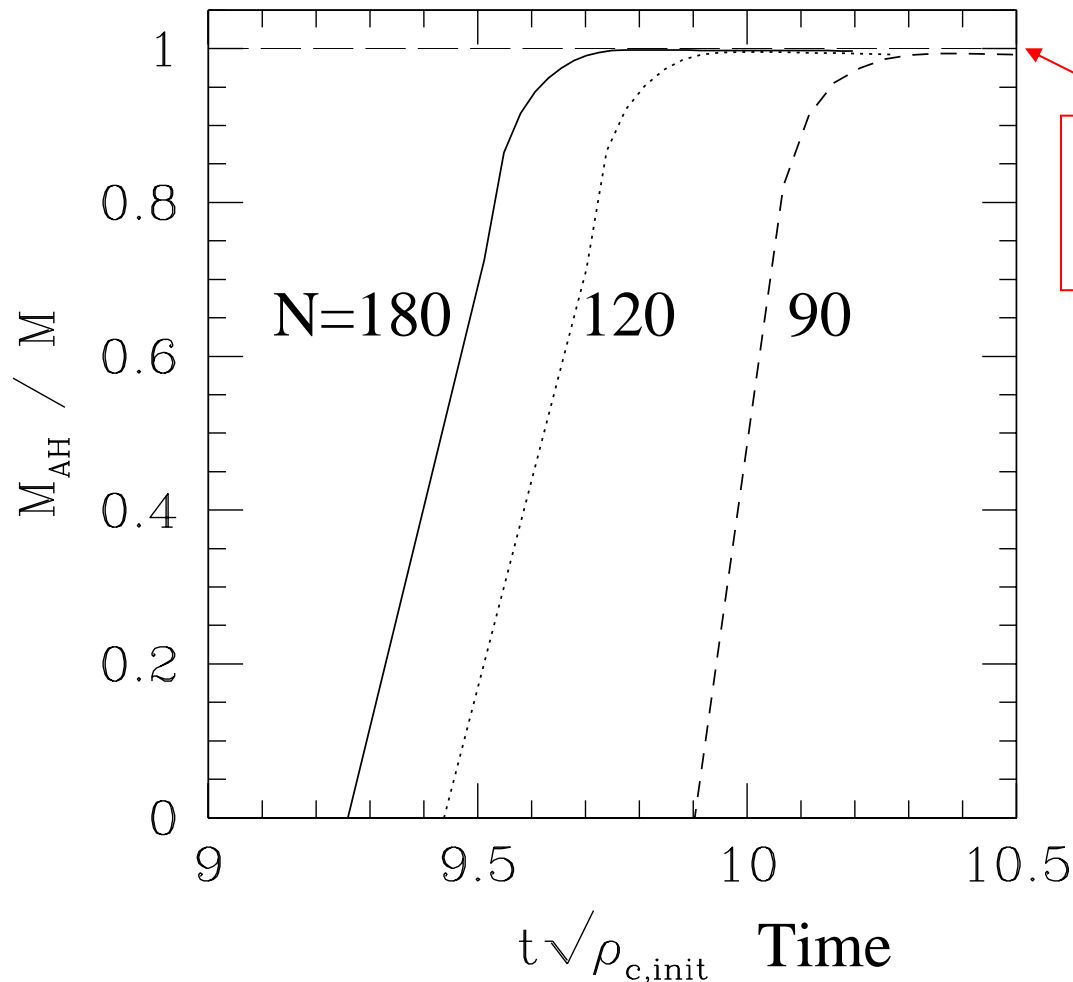
動径振動の固有振動数



チャンドラの公式(' 6 4)で計算した結果と一致

不安定な球対称中性子星の ブラックホールへの重力崩壊

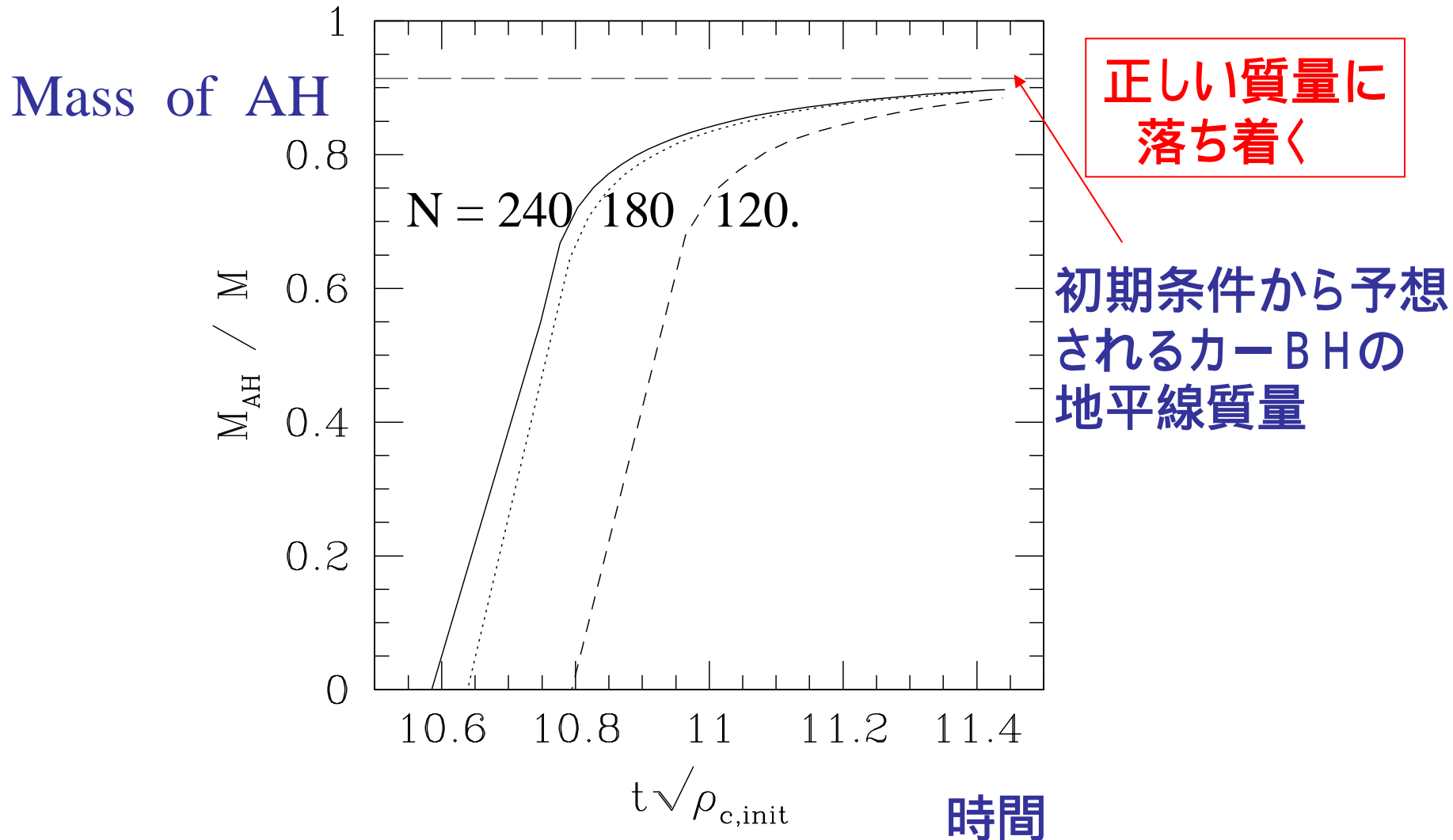
Mass of Apparent horizon in units of ADM mass



正しい質量に
落ち着く

NS is initially covered by $N/2$ points

不安定な中性子星のブラックホールへの 重力崩壊 (カーパラメータ $a = 0.56$)



4. 3D計算の現状： 実行すべきターゲット

連星ブラックホールの合体

連星中性子星の合体

ブラックホール-中性子星連星の合体

高速回転星の重力崩壊

(II型超新星、対生成不安定)

回転中性子星の非軸対象不安定性

クォーク星への相転移

降着不安定重力崩壊 ブラックホール

などなど

4 1 . 連星ブラックホール合体のシミュレーション の現状(我々の仕事でない)

大まかに2方向あり: ゆっくり進展はしている

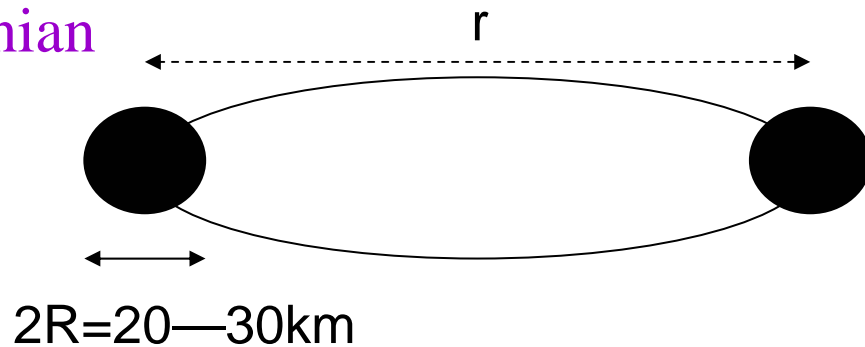
- 1: BSSN形式による追求 (Penn, Potsdam)
- 2: 双曲形式 + マルチドメインスペクトル法による追求 (Cornel-Caltech)
- 1 → Puncture, Meudon, PN-Punctureの初期条件を用いる
Excision を用いる
回転系に乗れば、1周くらいはシミュレーション継続
- 2 → 初期条件は不明 やはり回転系に乗る
現状では数十度しか周らない
理由は地平面近傍のconstraint の破れか? 境界条件が重要?

4 2. BBH以外でこれまでに行われた科学的GRシミュレーション

- 連星中性子星の合体(柴田-瓜生 99 ~、Miller 02 ~、Illinois 03 ~)
- 臨界安定中性子星のブラックホールへの崩壊 (Shibata et al. 00, Font et al. 02, Shibata 03)
- 高速差動回転中性子星の非軸対称不安定(Shibata et al. 00)
- 中性子星の振動モードの解析 (Shibata 99, Shibata-Sekiguchi 03, Font et al. 02)
- 超巨大星の超巨大ブラックホールへの重力崩壊 (Shibata-Shapiro 02、軸対称計算)
- 中性子星への星の重力崩壊と重力波 (Seibel et al. 03, Shibata-Sekiguchi 04、軸対称)
- ブラックホールへの星の重力崩壊 (Sekiguchi-Shibata 04)

連星中性子星の合体： 最後の三分間

Post-Newtonian



Inspiral

$f \sim 10 \rightarrow \sim 500$ Hz

$r \sim 700 \rightarrow \sim 40$ km

Post-Newtonian
+ point particle

$r \gg R, T_{gw} \gg P$

Intermediate

$f \sim$ several 100 Hz

$r \sim 3R \sim 30-45$ km

Quasi-equilibrium

$T_{gw} \gg P$

Merger

$f > 1$ kHz

$r < 30$ km

Numerical Relativity

我々の
研究
領域
最後の
10ミリ秒

● BH or NS

我々の最近の仕事： Our latest implementation

1. GR : BSSN (modified)

(latest version = Shibata et al. PRD68, 084020, 2003)

2. Gauge : Maximal slicing ($K = 0$) + Dynamical gauge

3. Hydro : High-resolution shock-capturing scheme

(Roe-type method with 3rd-order PPM interpolation)

4. Initial condition = Conformal flatness approximation

5. Typical grid size : $633 * 633 * 317$

(~ 240 GByte memory, ~ 100 CPU hour)

Using FACOM-VPP5000 @NAOJ

(Max size so far $761*761*381$)

6. EOS : $P = (\Gamma - 1)\rho\varepsilon$

Latest results for merger of 2NS

EOS: Initial; $P = K \rho^\Gamma$, $\Gamma = 2$; $K = 1.535e5$ cgs

During the evolution: $P = (\Gamma - 1)\rho\varepsilon$

$M = 1.40 M_{\text{solar}} \rightarrow R = 14.8$ km

$1.60 M_{\text{solar}} \rightarrow R = 13.3$ km

(Maximum mass for the spherical case = $1.68 M_{\text{solar}}$)

I here show animations for merger of 2NS

(a) $1.40 - 1.40 M_{\text{solar}}$,

(b) $1.33 - 1.46 M_{\text{solar}}$,

(c) $1.52 - 1.52 M_{\text{solar}}$,

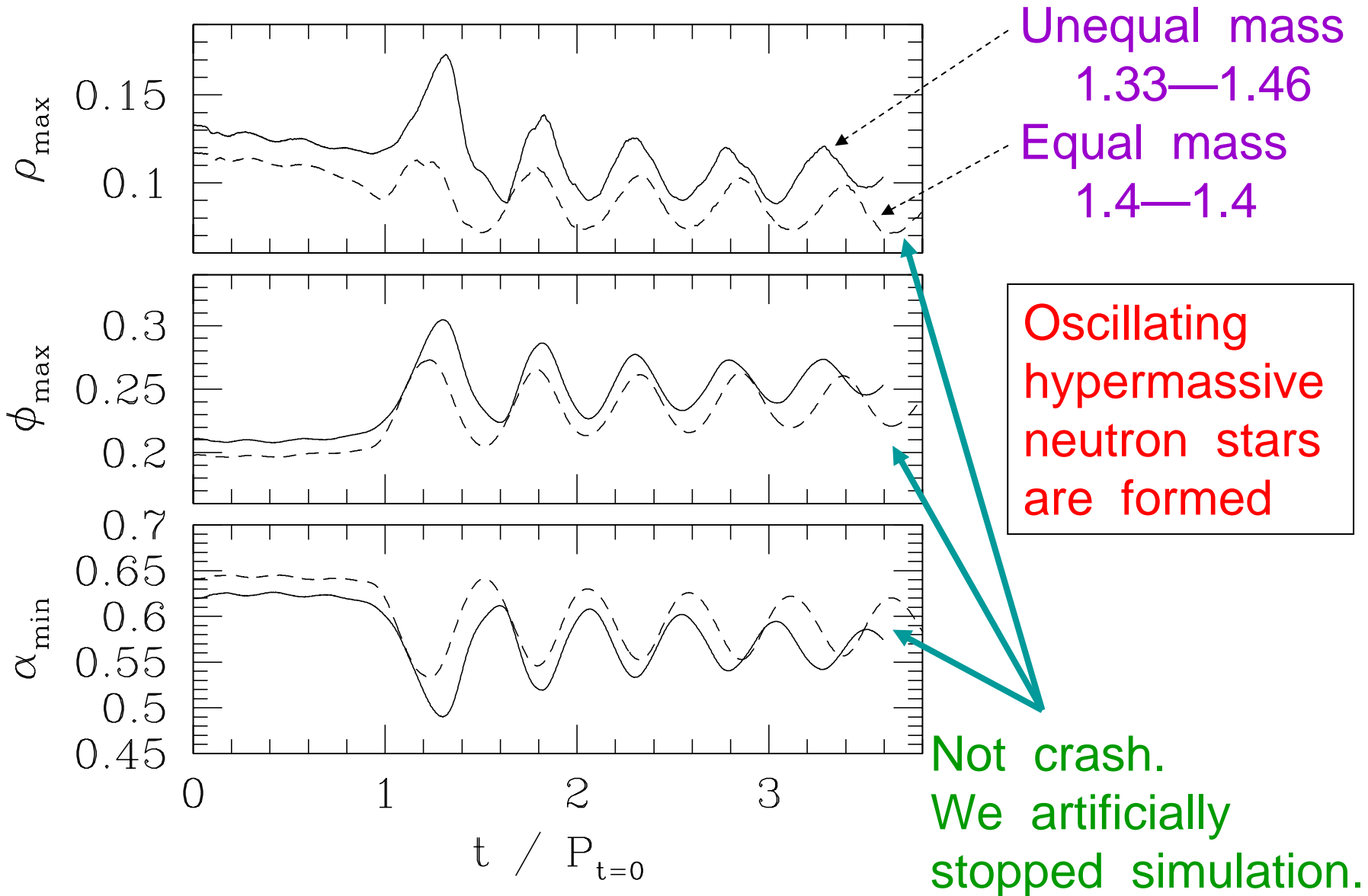
(d) $1.40 - 1.60 M_{\text{solar}}$

(See, Shibata et al. PRD 68, 084020, 2003)

Typical grid size : $633 * 633 * 317$

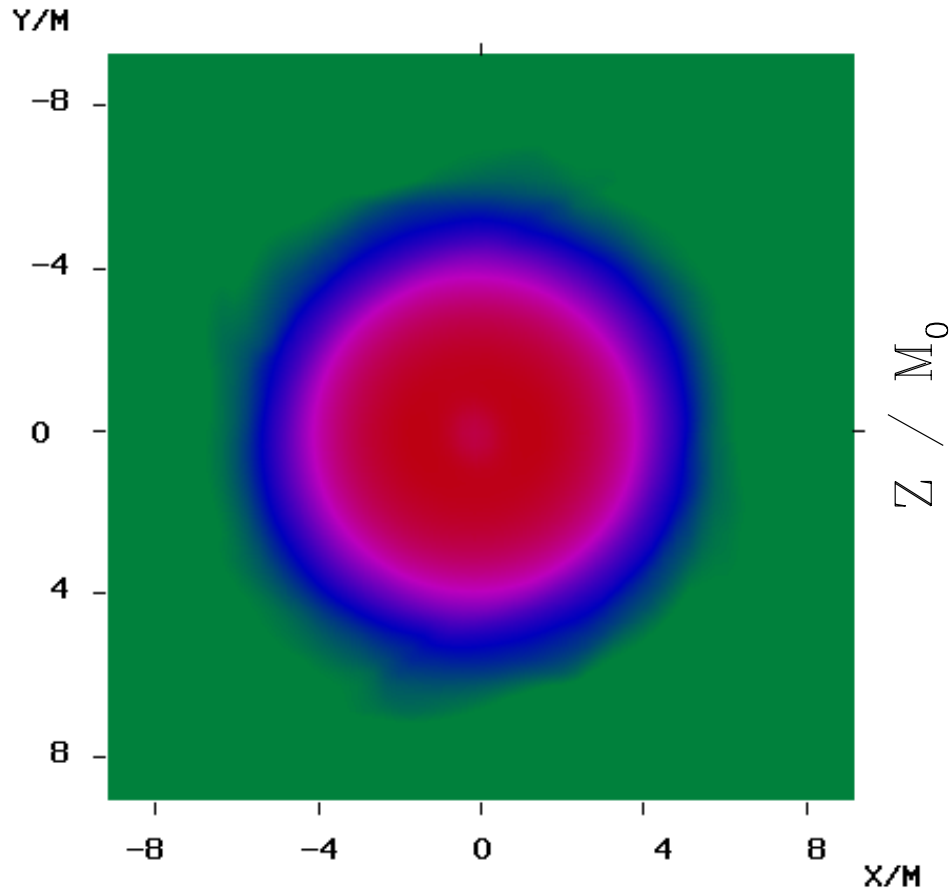
(max we have taken, $761 * 761 * 381$)

Evolution of maximum density in NS formation

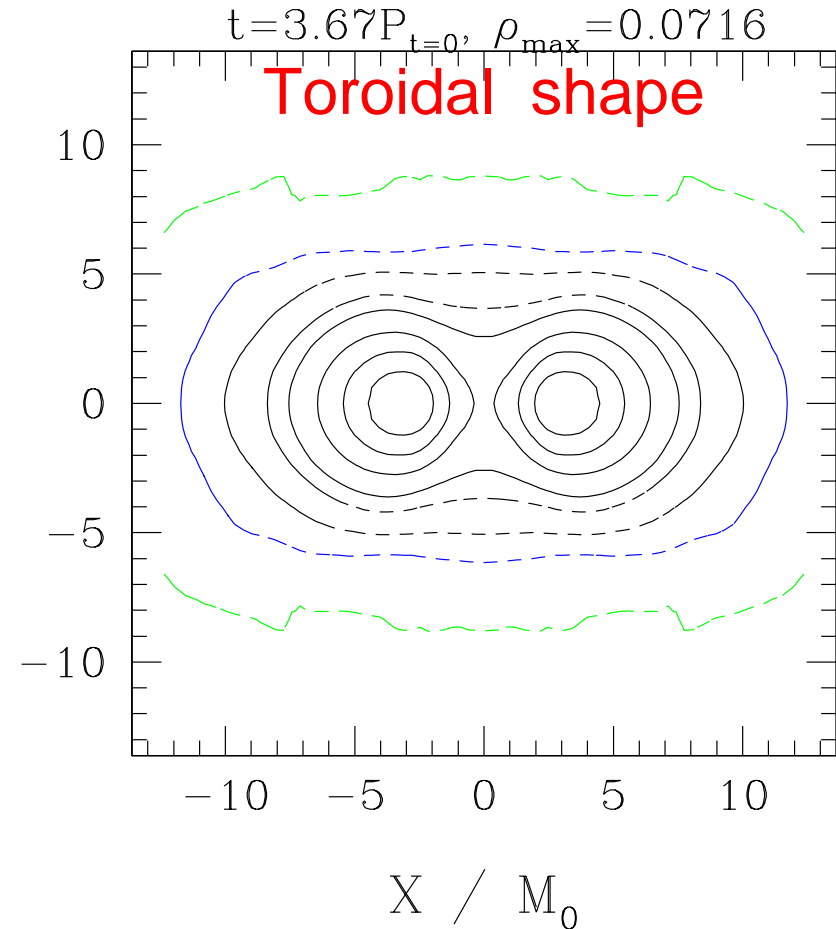


1.4 – 1.4 M_{solar} case : final snapshot

Massive toroidal neutron star is formed
(slightly elliptical)



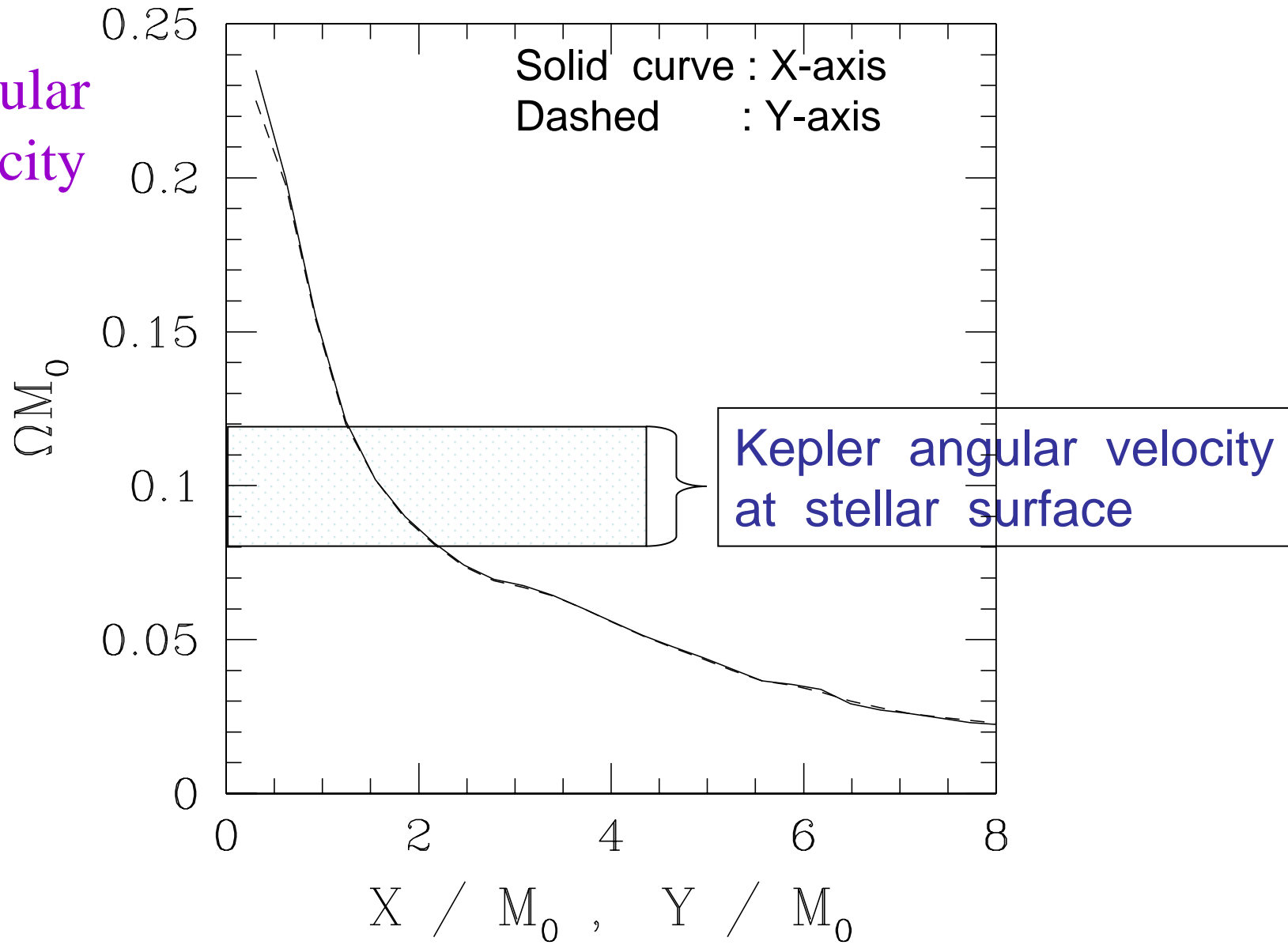
X – Y contour plot



X – Z contour plot

Formed Massive toroidal NS is differentially and rapidly rotating

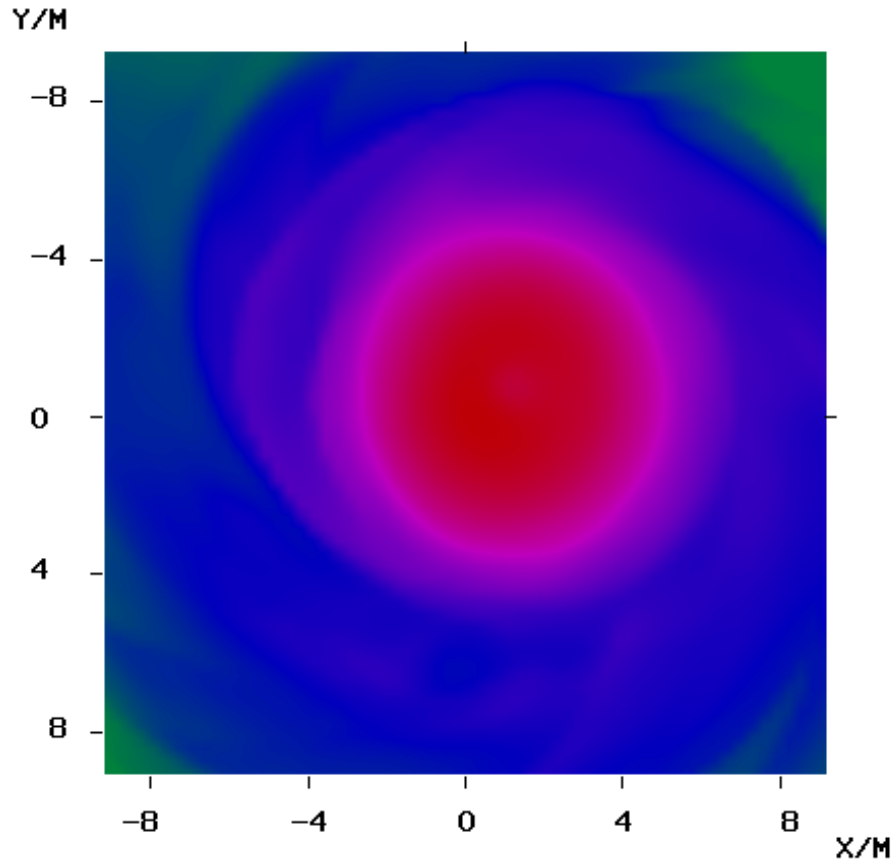
Angular velocity



Comparison between equal and unequal mass mergers

1.33—1.46:

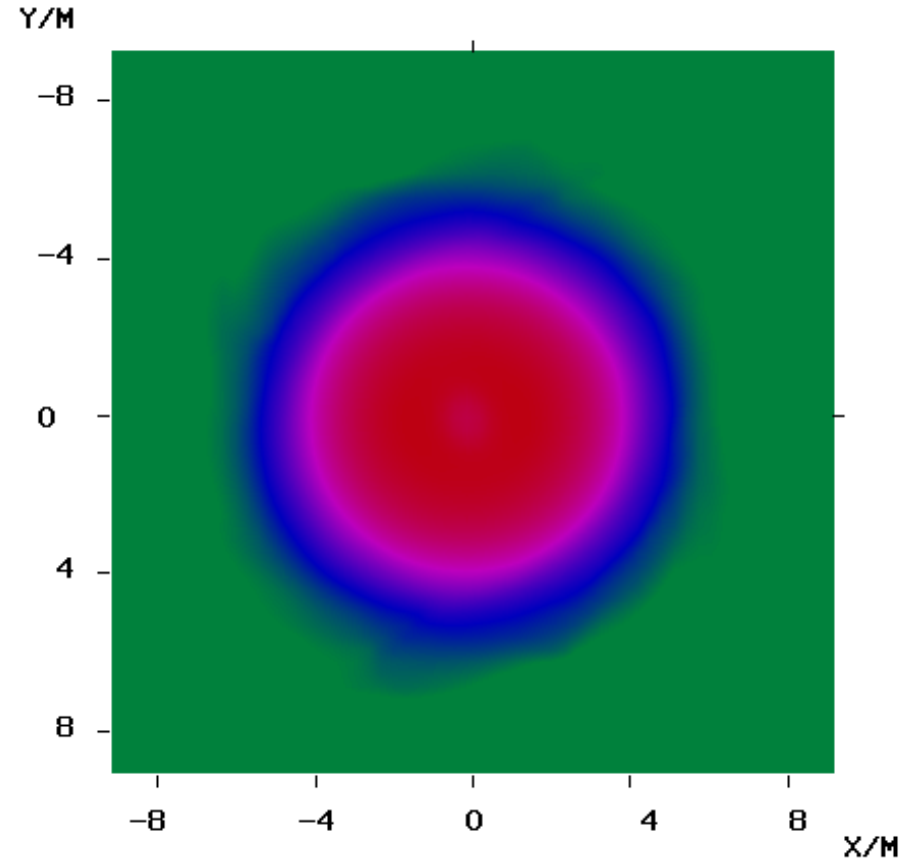
Massive NS + disk



Unequal-mass case
Mass ratio ~ 0.901

1.4—1.4:

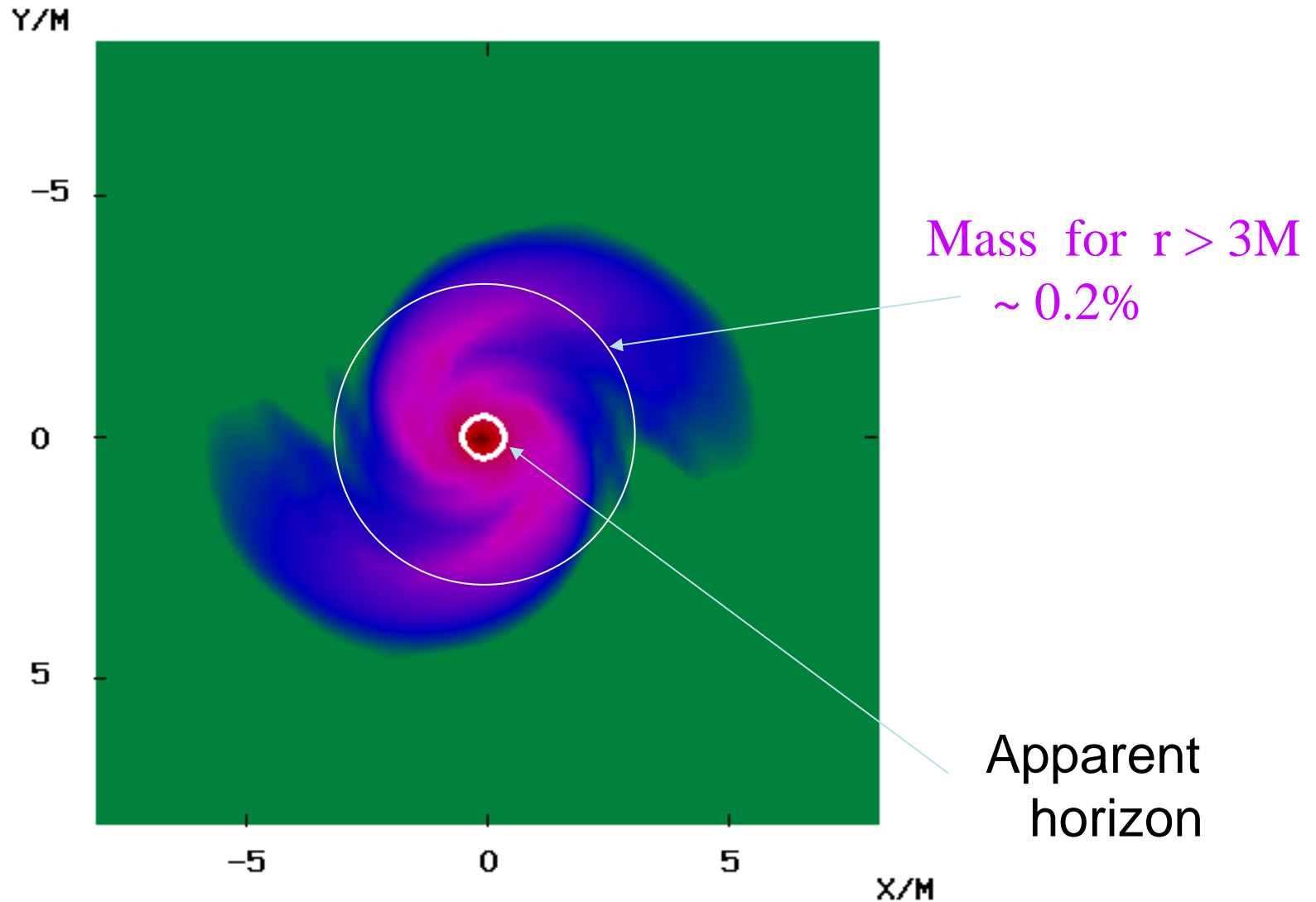
Massive NS



Equal-mass case

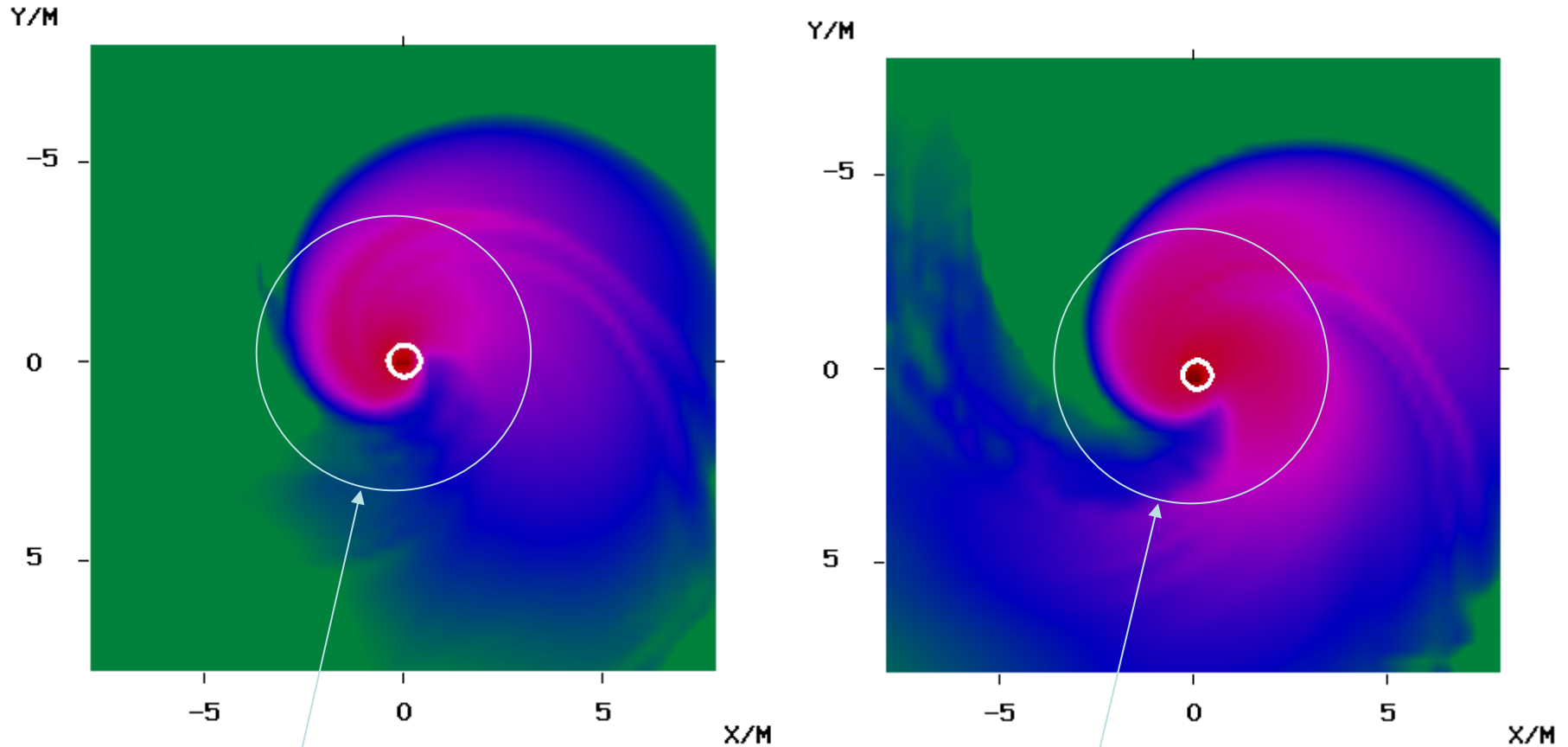
Black hole formation case: 1.52—1.52

Equal-mass case



Disk mass for unequal-mass merger

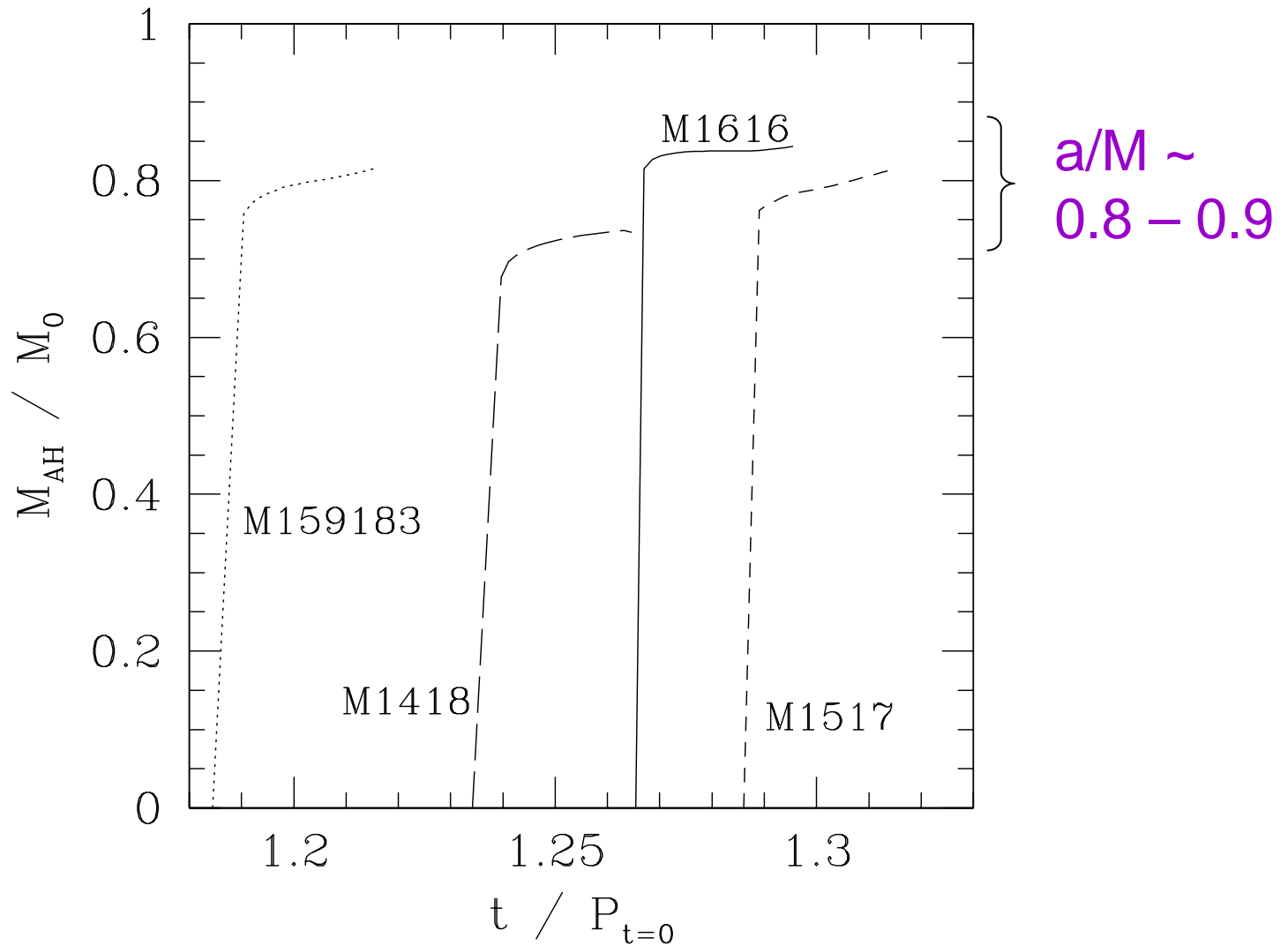
1.45—1.55, Mass ratio 0.925 1.4—1.6, Mass ratio 0.855



Mass for $r > 3M$
~ 2%

Mass for $r > 3M$
~ 4%

Evolution of apparent horizon mass



Products of mergers with $\Gamma=2$

1. Equal – mass cases

- Low mass cases

Hypermassive neutron stars
of nonaxisymmetric & quasiradial oscillations.

- High mass cases

Direct formation of Black holes
with very small disk mass

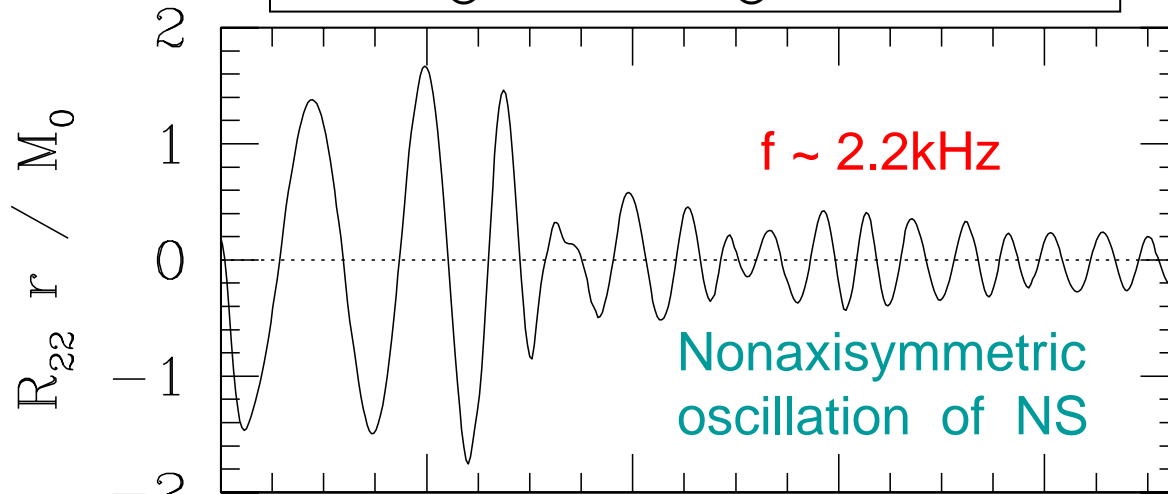
2. Unequal – mass cases (mass ratio ~ 0.9)

- Disks of mass \sim several percents of total mass
→ BH(NS) + Disk

Gravitational waves for NS formation

$1.4M_{\odot} - 1.4M_{\odot}, R = 15\text{km}$

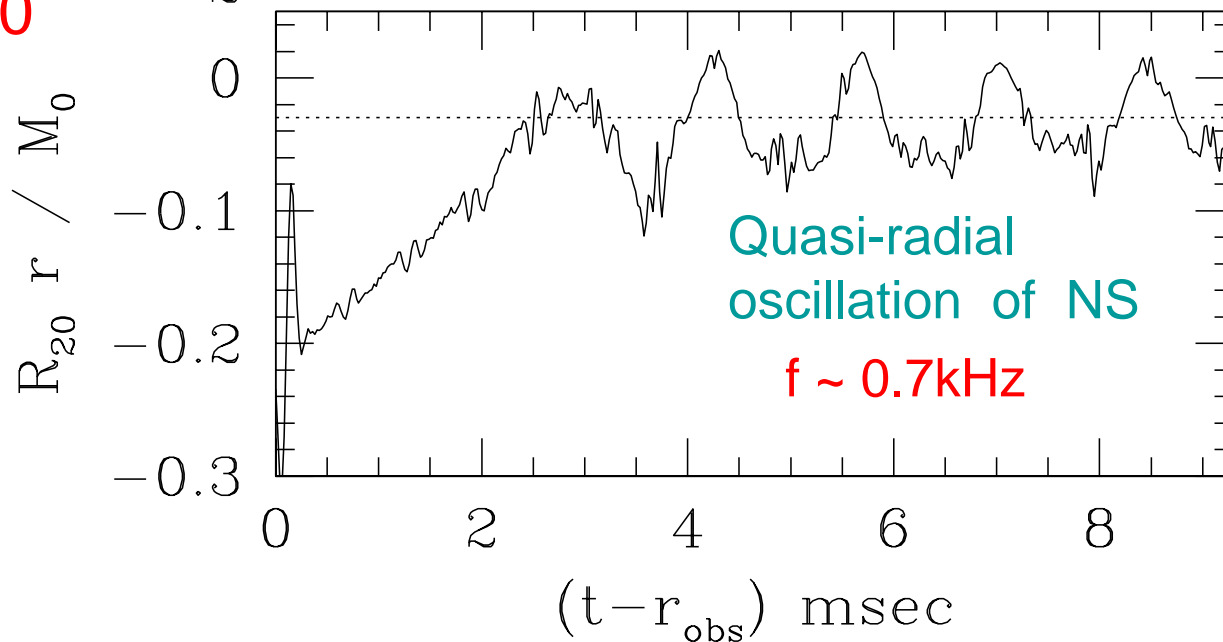
$l=m=2$
mode



$f \sim 2.2\text{kHz}$

Nonaxisymmetric
oscillation of NS

$l=2, m=0$
mode



$f \sim 0.7\text{kHz}$

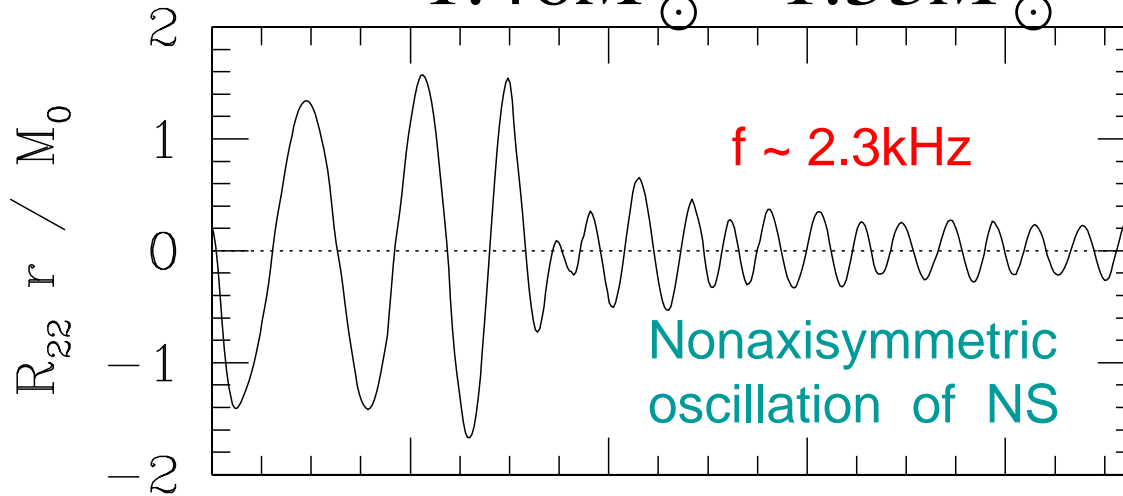
Quasi-radial
oscillation of NS

Stationary
quadrupole

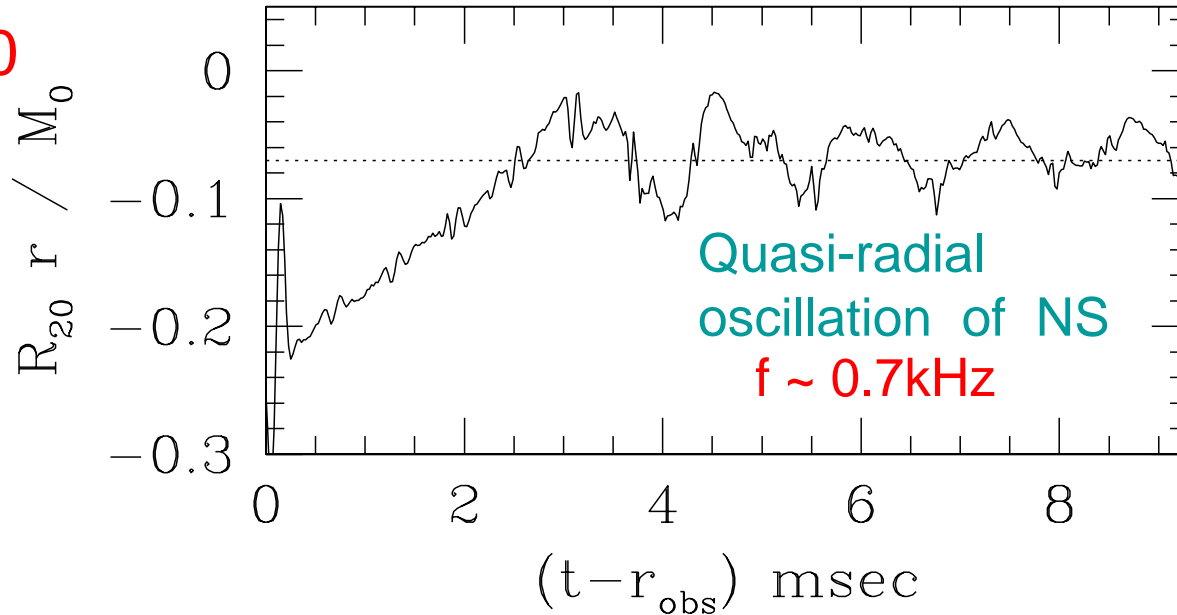
Gravitational waves from unequal-mass merger to NS formation

$1.46M_{\odot} - 1.33M_{\odot}$

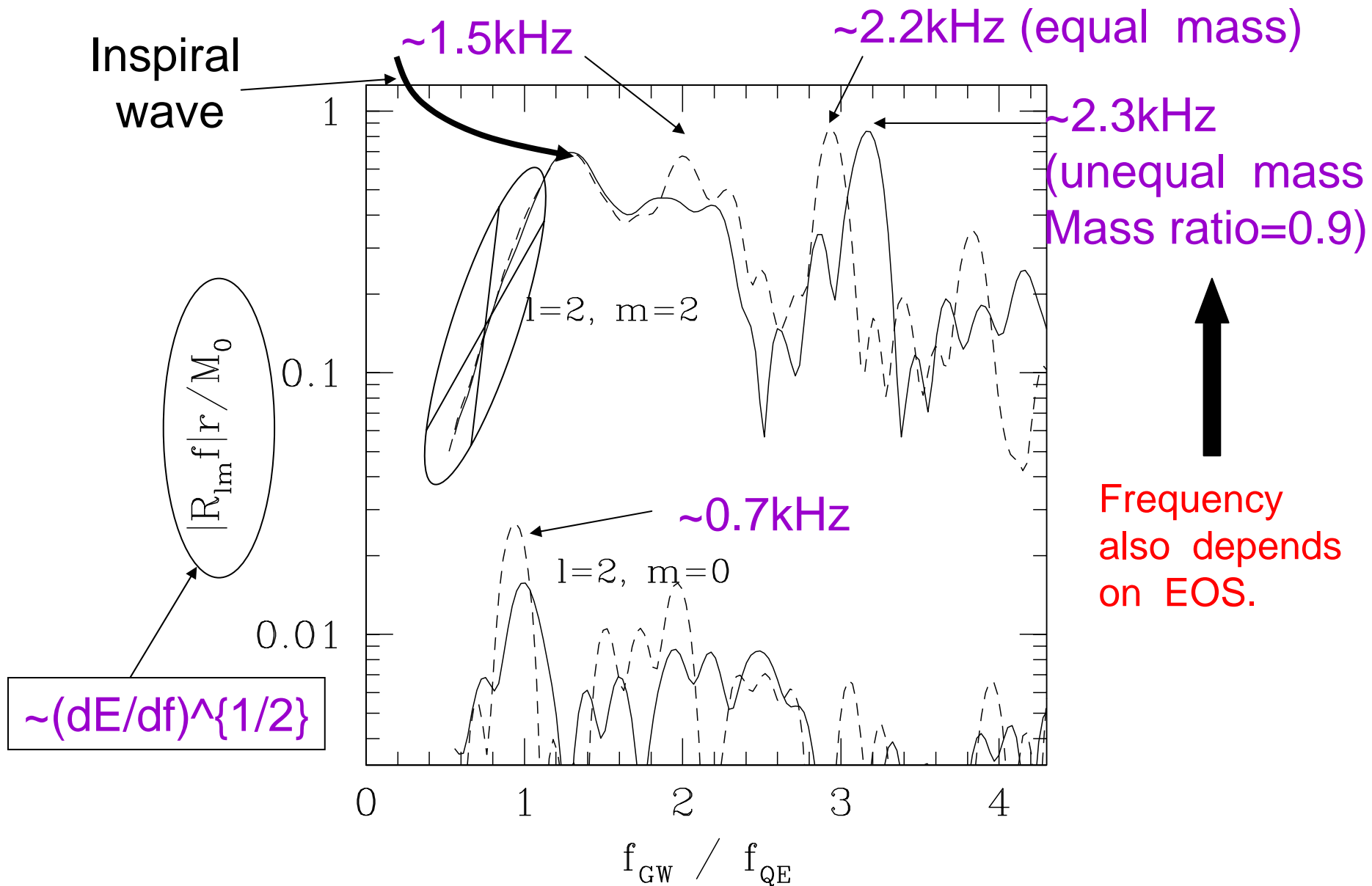
$l=m=2$
mode



$l=2, m=0$
mode

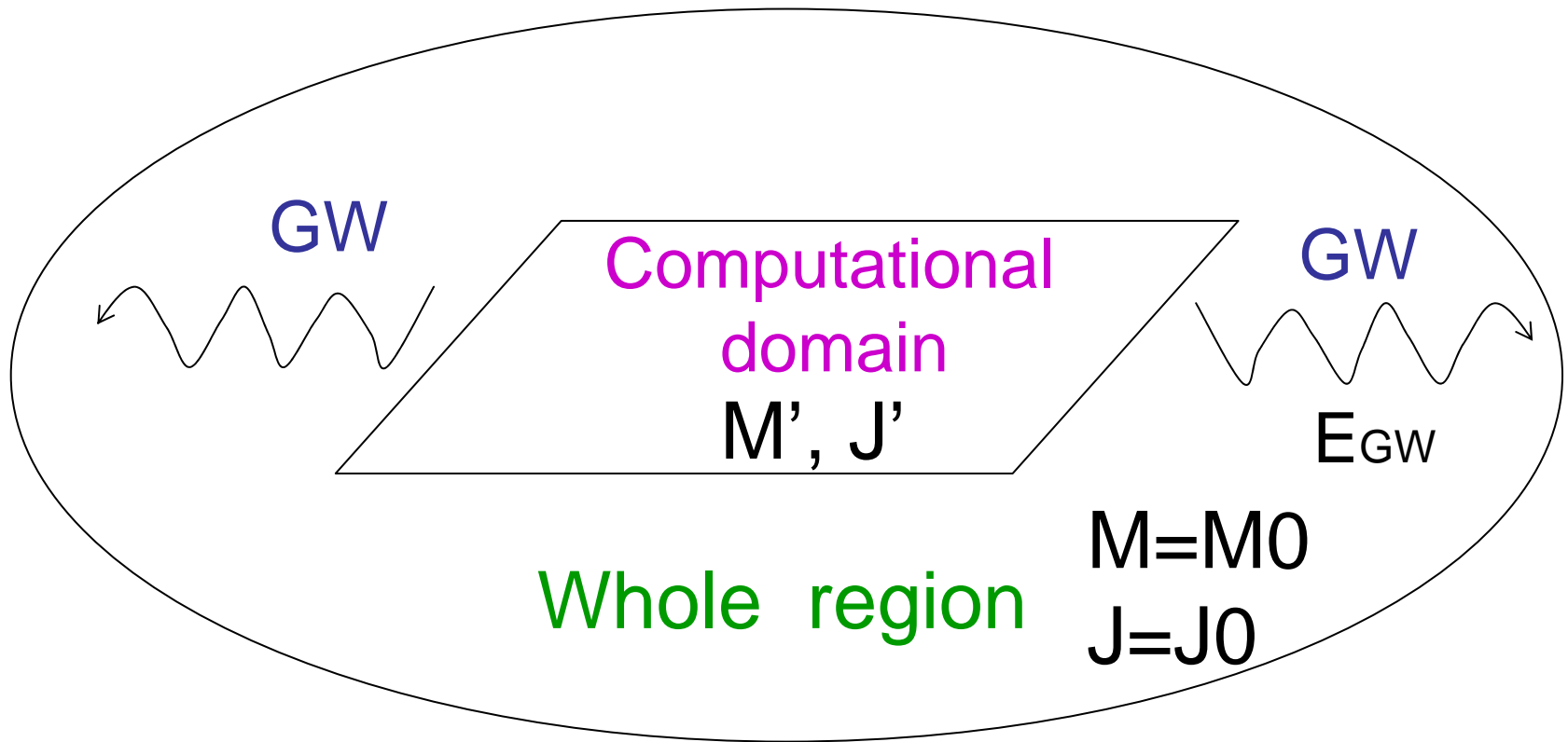


Fourier spectrum in NS formation



Computation of mass and angular momentum

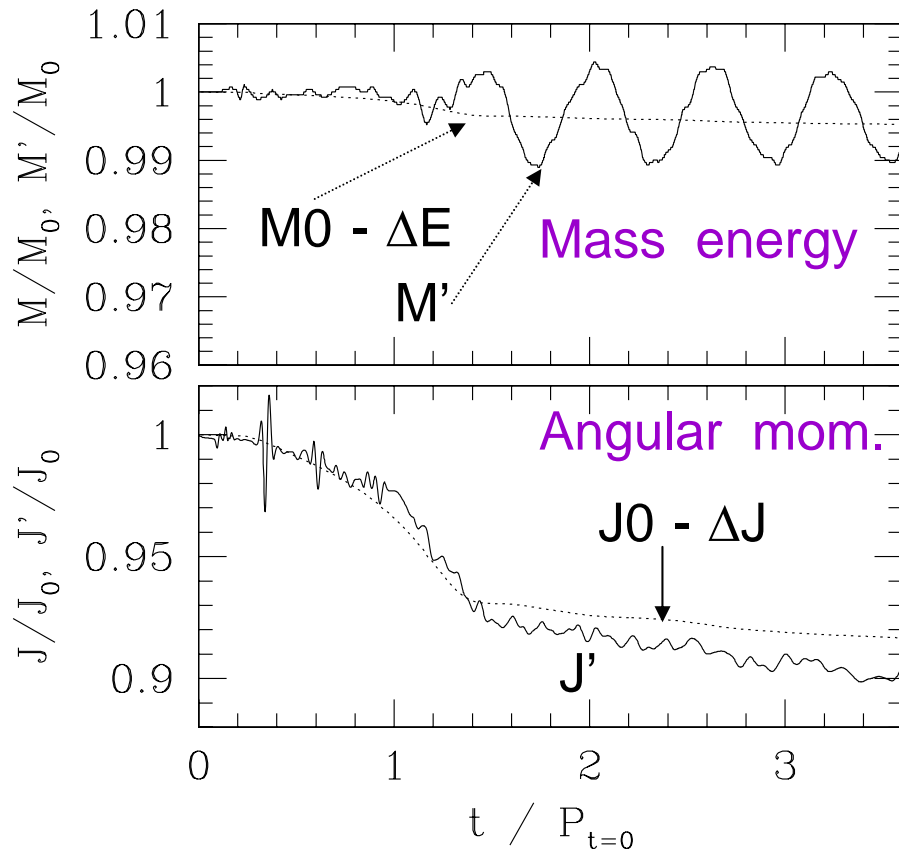
Check of the conservation



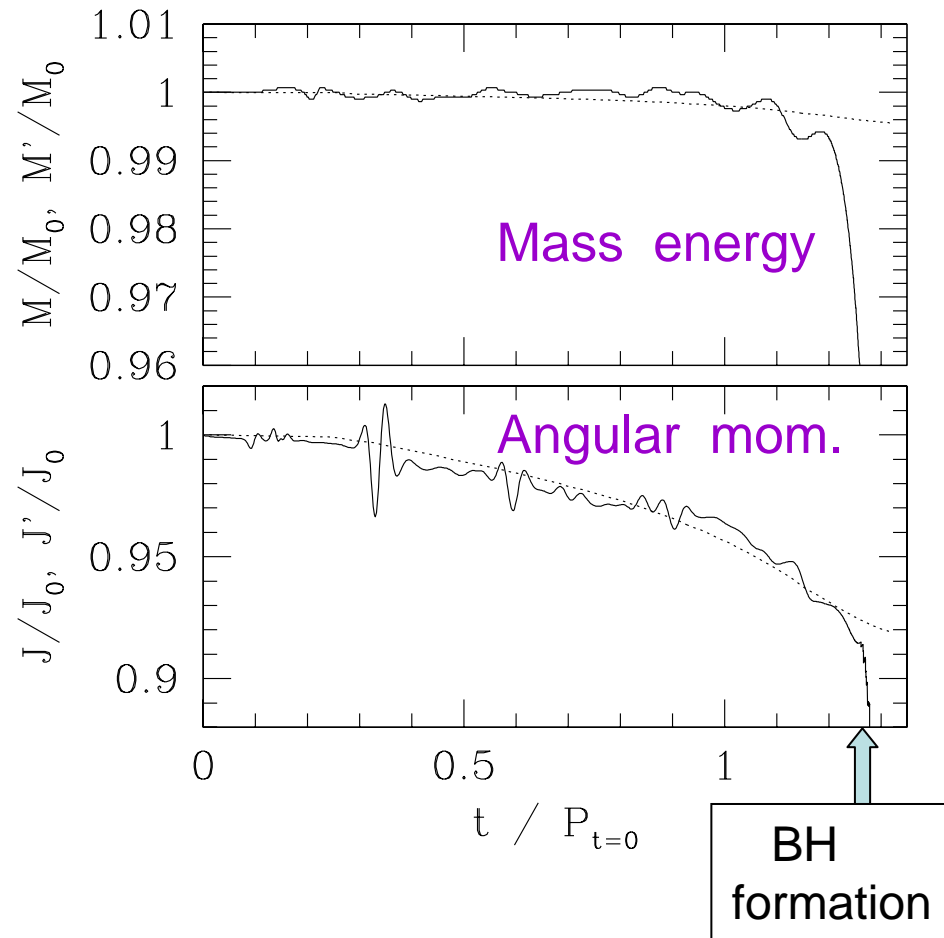
$M_0 - E_{GW} = M'$ & $J_0 - J_{GW} = J'$
should be satisfied

Radiation reaction : OK within $\sim 1\%$

NS formation: equal mass



BH formation: unequal mass



Solid curves : computed from data sets in finite domain.
Dotted curves: computed from fluxes of gravitational waves

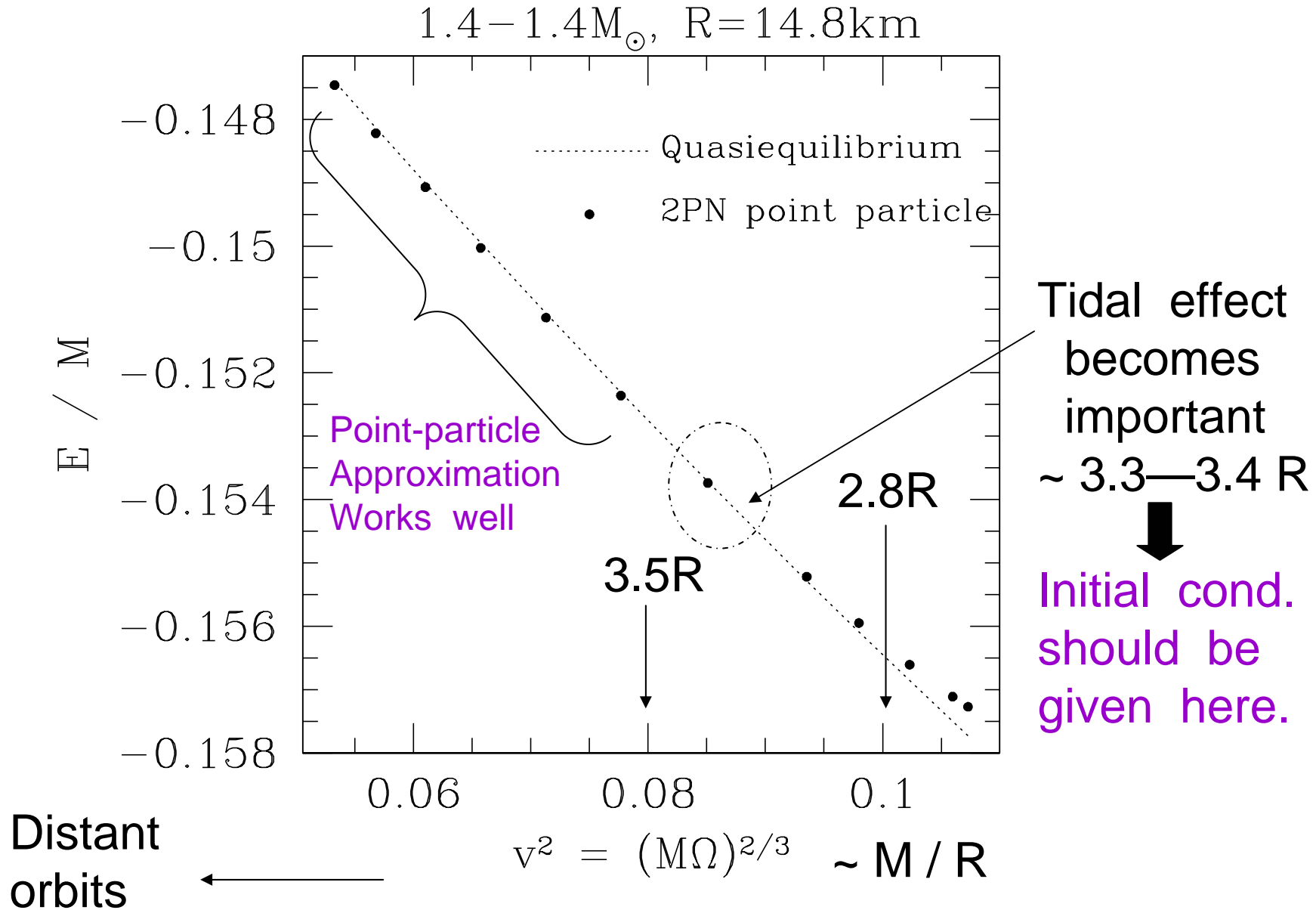
初期条件に関する課題

これまでのシミュレーションで、軌道半径は星の半径を R として、 $3R$ 以下。

これで、PN波形とマッチできるか？

NO

Energy curve of circular orbits



Issues for computational resources

Match to PN/Point particle waveforms

- Tidal effect is important for $r < 3.5R \sim 9\text{--}12M$
- Emission time scale should be $> \sim 5 P$ for quasiequilibrium

$$\left. \begin{aligned} \frac{t_{\text{coalesce}}}{P_{\text{orbit}}} &\approx 4.4 \left(\frac{r}{3.5R} \right)^{5/2} \left(\frac{R}{12.4\text{km}} \right)^{5/2} \left(\frac{M}{2.8M_{\odot}} \right)^{-5/2} \left(\frac{M}{4\mu} \right) \\ \left| \frac{v_r}{v_{\phi}} \right| &\approx 9 \times 10^{-3} \left(\frac{3.5R}{r} \right)^{5/2} \left(\frac{12.4\text{km}}{R} \right)^{5/2} \left(\frac{M}{2.8M_{\odot}} \right)^{5/2} \left(\frac{4\mu}{M} \right) \\ f &\approx 680\text{Hz} \left(\frac{3.5R}{r} \right)^{3/2} \left(\frac{12.4\text{km}}{R} \right)^{3/2} \left(\frac{M}{2.8M_{\odot}} \right)^{1/2} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{準平衡形状の} \\ \text{仮定はOK} \\ \\ r \sim 3.5 M \text{程度} \\ \text{に初期条件を} \\ \text{置くべき。} \end{array}$$

$$\Rightarrow \lambda \approx 440\text{km}, \quad \Delta x < 0.5\text{km}, \quad L > \lambda \Rightarrow N = 2 \frac{L}{\Delta x} > 1700 ! \quad \blacktriangleright \sim 5\text{TBytes}$$

Very large computational domain is necessary

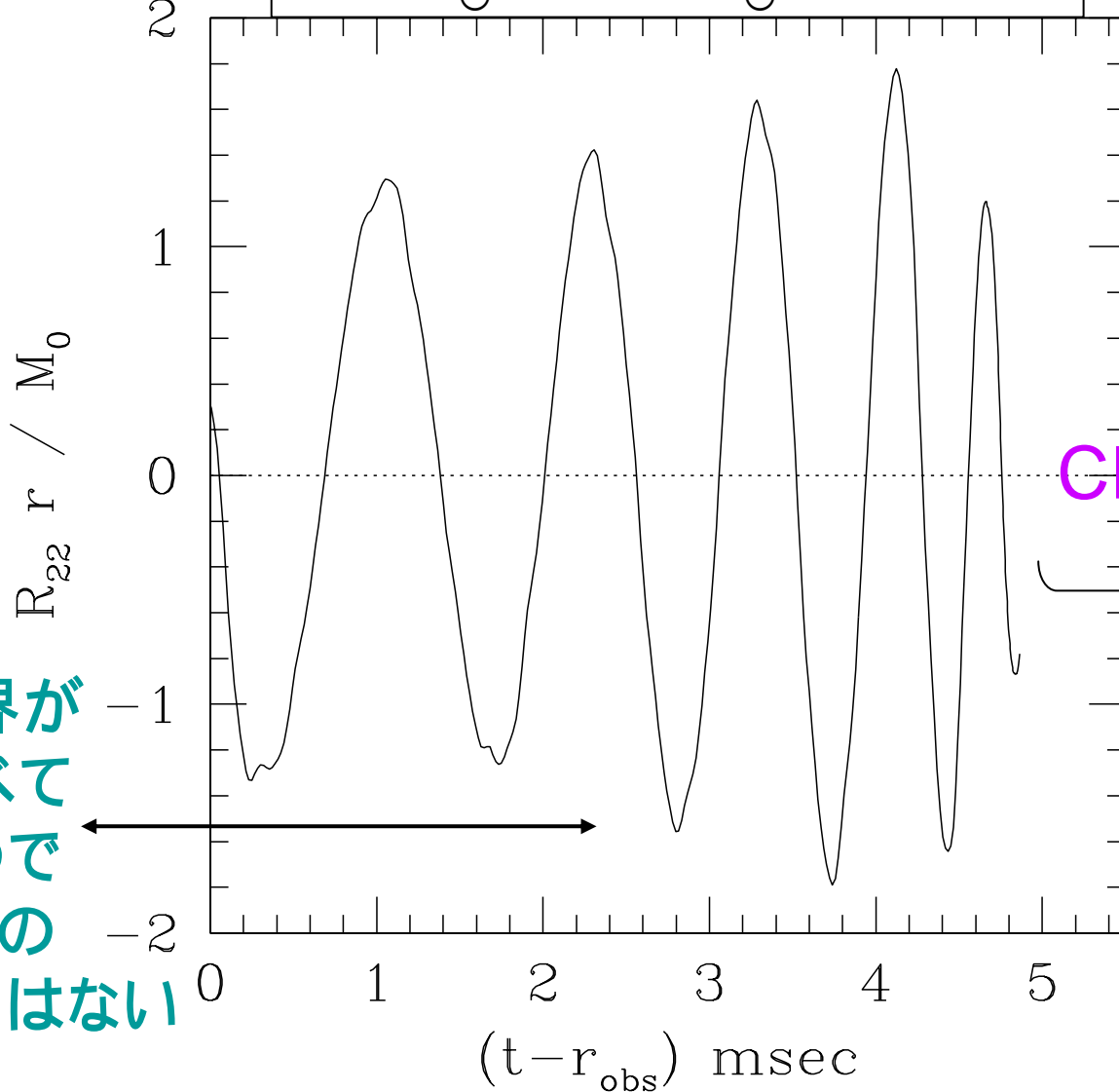
→ Hyper-Computers or Adaptive (or fixed) mesh refinement

Gravitational waves in BH formation from $r \sim 3.4M$

$1.52M_{\odot} - 1.52M_{\odot}, R = 14\text{km}$

$(x, y, z) = 700*700*350$

$l=m=2$
mode

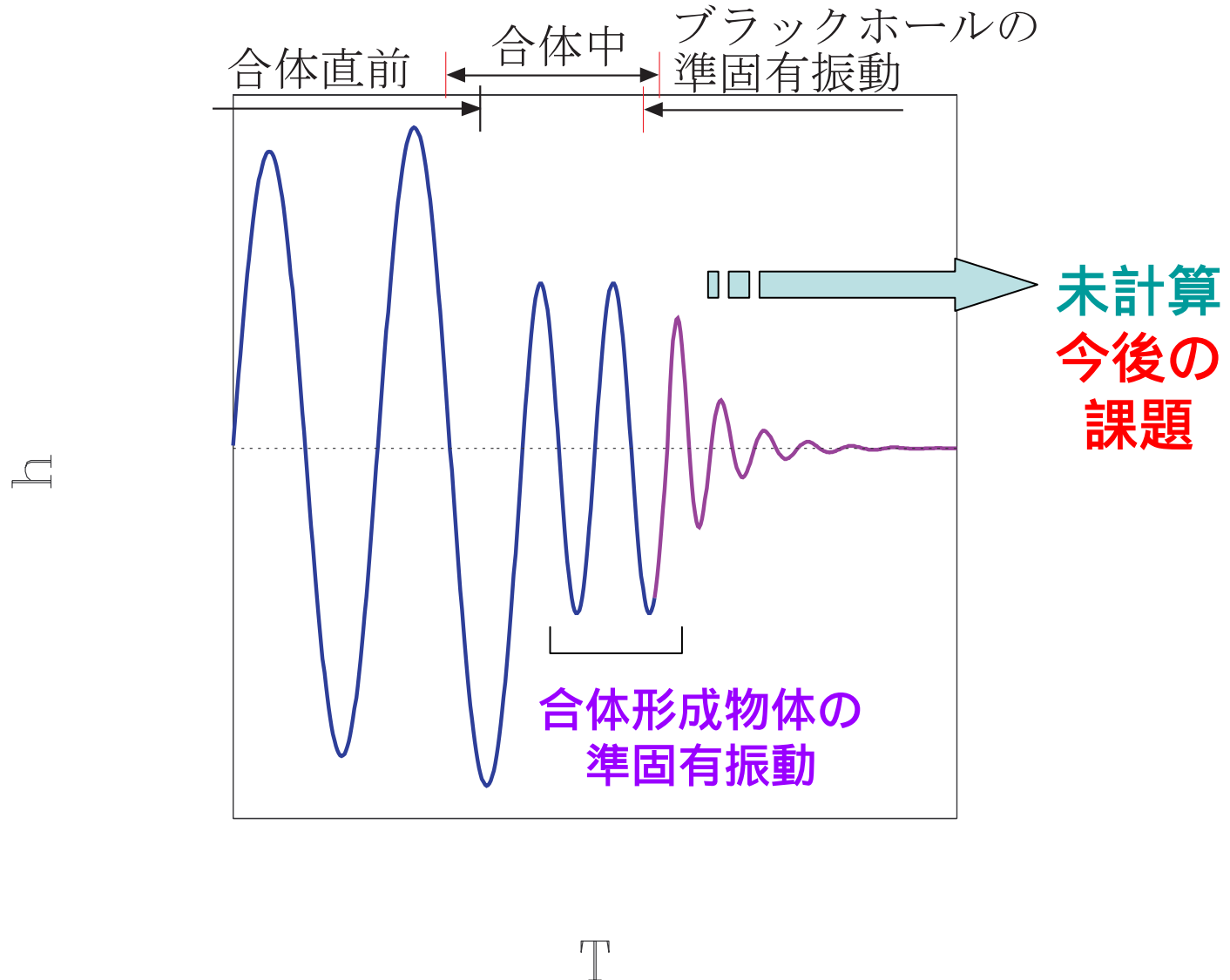


CRASH

BH QNM
Ringing
 $f \sim 6\text{--}7\text{kHz}$

初期は境界が
波長に比べて
近過ぎるので
あまり精度の
よい波形ではない

ブラックホールが速やかに形成する場合の 予想重力波波形



5 . 大規模・軸対称数値的相対論

何故今、軸対称に回帰?

- ポツダムของกลุ่มによって、安定に長時間シミュレーションするための、**新しい技法**が考案された
- アダプティブメッシュ法のような特殊な方法に頼らなくても、現状のコンピュータパワーならば、**1000²**のメッシュは簡単に取ることが出来る。
- 3D計算の前に様々なテストが**安価**で可能。
- **重力崩壊によるブラックホールの形成**、など解決されていない重要な問題が多く残されている。
- **原理的問題にも容易にアタック可能。**

計算に要するメモリー

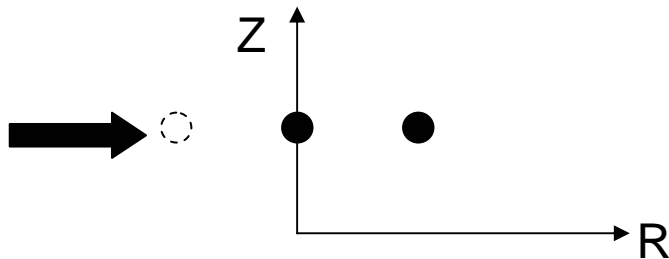
- ・GR code : 変数の数、約200 - 250

$$\begin{aligned} \text{Memory} &= 2\text{GBytes} \left(\frac{N_{\text{var}}}{250} \right) \left(\frac{N}{1000} \right)^2 \\ &= 100\text{GBytes} \left(\frac{N_{\text{var}}}{250} \right) \left(\frac{N}{5000} \right)^2 \end{aligned}$$

- ・性能の良いパソコンなら $N = 1000$ も十分に可能
~100万円のマシンなら、8GB程度つめる
 $N = 2000$ も最近では可能。

何が難しかったのか？

- 軸対称であれば、普通は極座標か円筒座標を使う。
- ⇒ **これらは座標特異点を持つ。**
- ⇒ No negative r , R , θ
- ⇒ 差分を局所的に変える必要あり
- ⇒ 数値不安定化し易い



さらに、正則性を保つための工夫も必要。
完全な正則性を数値的に課すのは難しい
不安定化し易い。

正則性問題

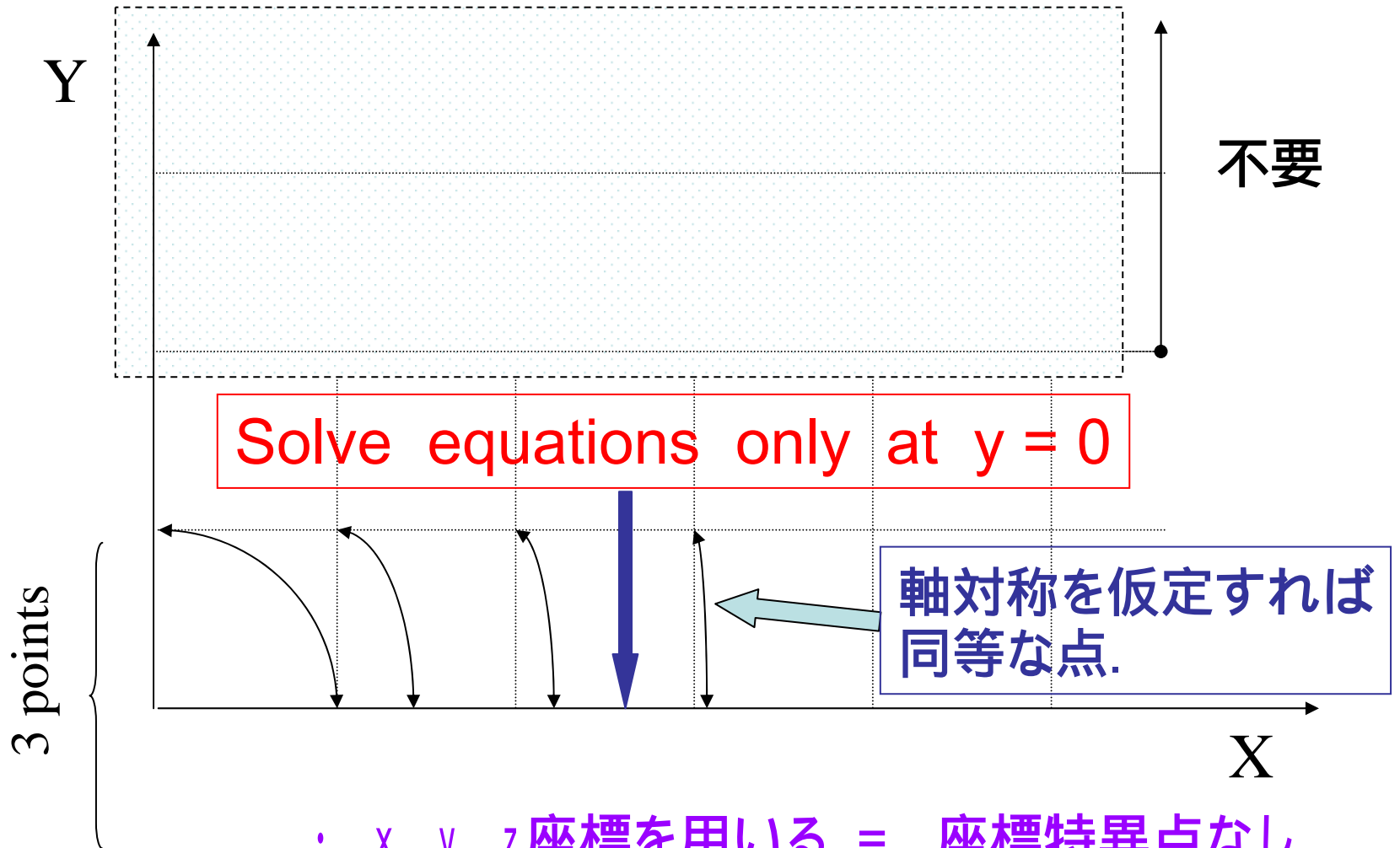
$$\text{Axisymmetry} \Rightarrow L_{\xi} \gamma_{ij} = 0 : \xi^i = \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^i$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{RR} = f_3 + f_1 R^2 \\ \gamma_{\varphi\varphi} = R^2 (f_3 - f_1 R^2) \\ \gamma_{R\varphi} = R^3 f_2 \\ \gamma_{Rz} = R f_4 \\ \gamma_{\varphi z} = R f_5 \\ \gamma_{zz} = f_6 \end{array} \right\} f_i = f(x, y, z) : \text{Regular func.}$$

$$\text{e.g., } \frac{1}{R^2} \left(\gamma_{RR} - \frac{\gamma_{\varphi\varphi}}{R^2} \right) \text{ should be regular}$$

特殊な取り扱いが必要。数値不安定性が頻繁に発生

Cartoon法のレビュー



- ・ x 、 y 、 z 座標を用いる = 座標特異点なし
- ・ 軸対称境界条件を $y = +, -\Delta y$ にて付加
- ・ Total grid number = $N * 3 * N$ for (x, y, z)

5.1 . 我々の計算例：回転星の重力崩壊

- Parametric EOS (Following Mueller, Dimmelmeier, ...)

$$P = P_{\text{Polytrope}} + P_{\text{Thermal}}$$

$$P_{\text{Thermal}} = (\Gamma_{\text{Thermal}} - 1) \rho \varepsilon_{\text{Thermal}}$$

$$P_{\text{Polytrope}} = \left\{ \begin{array}{ll} K_1 \rho^{\Gamma_1} & \rho \leq \rho_{\text{Nuc}} \\ K_2 \rho^{\Gamma_2} & \rho \geq \rho_{\text{Nuc}} \end{array} \right\}$$

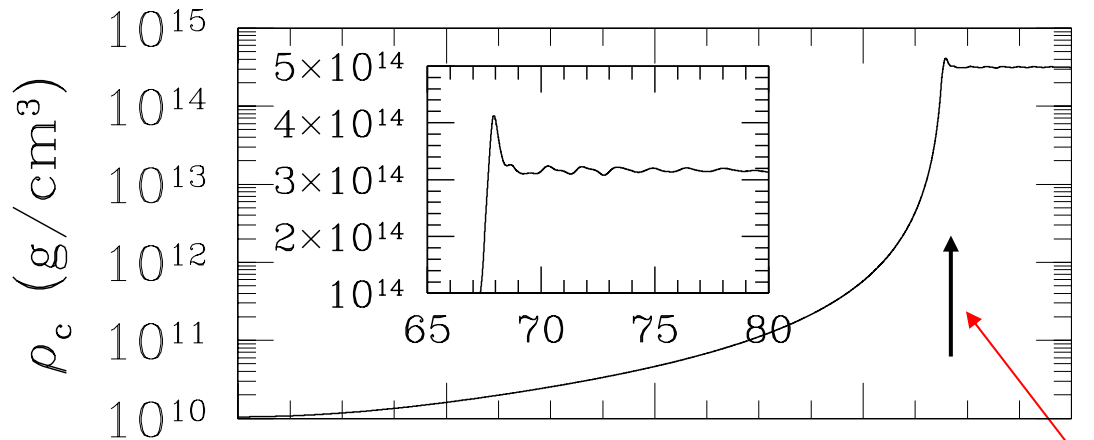
$$\varepsilon_{\text{Thermal}} = \varepsilon - \varepsilon_{\text{Polytrope}}$$

$$\Gamma_1 \sim \frac{4}{3} \quad \Gamma_2 \geq 2 \quad \Gamma_{\text{Thermal}} = 1.5$$

$\Gamma = 4/3$ & $\rho \sim 1.e10$ g/cc の回転平衡形状を初期条件

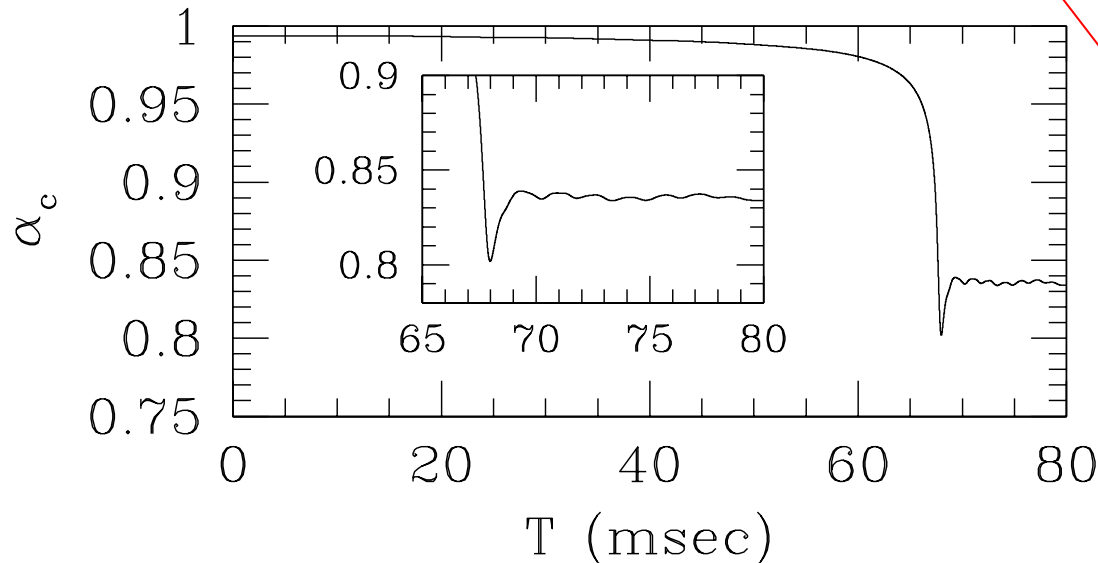
Collapse from a rigidly rotating initial condition with central density $\sim 1e10$ g/cc

Density
at $r = 0$



At $t = 0$,
 $T/W = 9.e-3$
 $\rho(r=0) = 1.e10$
 $M = 1.49$ Solar
 $J/M^2 = 1.14$

Lapse
at $r = 0$

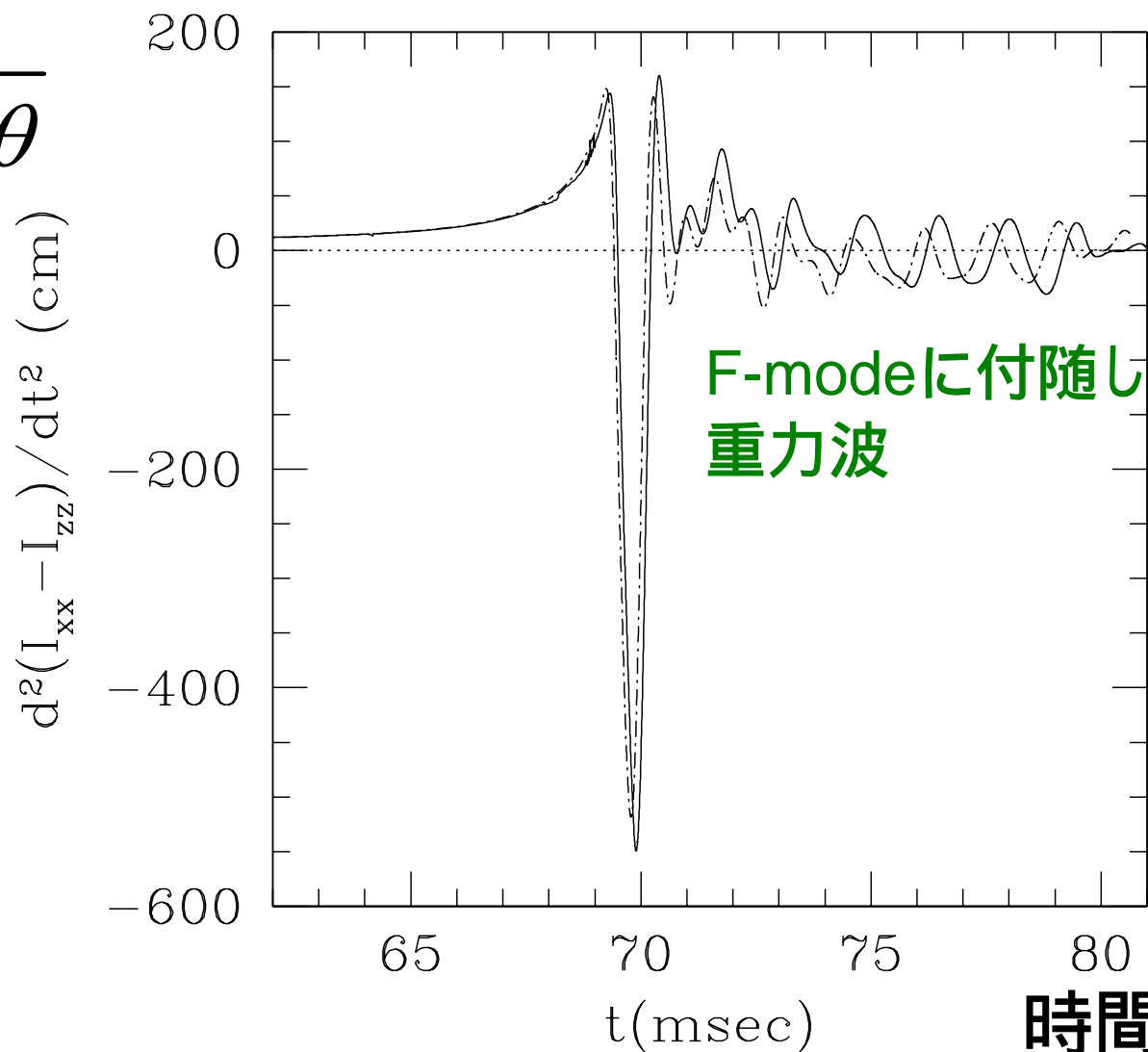


Animation
is started here.

Qualitatively the same as Type I of Dimmelmeier et al (02).

重力波の波形(quadrupole formula)

$$\frac{h_+}{\sin^2 \theta}$$



特徴的周波数 ~ 数100 Hz

詳細は関口のポスター

5.2 . 現実的ブラックホール形成問題

- 30 100太陽質量の星の重力崩壊時の鉄の核の質量：
2 ~ 3.5太陽質量 (梅田・野本、2003)
 - 回転する重い星の核の重力崩壊を考える
 - 回転遅い ほぼ球対称のブラックホール
 - 回転速い 高速回転ブラックホール??
高速回転大質量中性子星??
- ブラックホールが形成される場合、
大きなディスク?? GRBの中心源??

目的

- I 重力崩壊によって、ブラックホールの形成される条件、
および形成の様子を明らかにする
- II ブラックホールが形成される場合に関しては、その周りに
どのようなディスクが形成されるのかについても調べる

問題設定

- 完全に一般相対論的シミュレーションを実行
- 現実的初期条件 ($\Gamma = 4/3$ 平衡形状)、
初期中心密度は100億 g/ccに固定、剛体回転を仮定
- パラメトリックな(比較的現実的な)状態方程式を採用

$$P = P_{\text{Polytrope}} + P_{\text{Thermal}}$$

$$P_{\text{Thermal}} = (\Gamma_{\text{Thermal}} - 1) \rho \varepsilon_{\text{Thermal}}$$

$$P_{\text{Polytrope}} = \begin{cases} K_1 \rho^{\Gamma_1} & \rho \leq \rho_{\text{Nuc}} \\ K_2 \rho^{\Gamma_2} & \rho \geq \rho_{\text{Nuc}} \end{cases}$$

佐藤勝さん達や
Muellerらが
過去に用いた

$$\varepsilon_{\text{Thermal}} = \varepsilon - \varepsilon_{\text{Polytrope}}$$

$$\Gamma_1 \approx 1.3 \quad \Gamma_2 = 2.25 - 2.5 \quad \Gamma_{\text{Thermal}} \approx 1.3$$

$$K_1 = 5 \times 10^{14} \text{ cgs}, \quad K_1 \rho_{\text{nuc}}^{\Gamma_1} = K_2 \rho_{\text{nuc}}^{\Gamma_2}$$

$$M_{\text{max}}(J=0) \approx 1.6 M_{\odot} \quad (\text{for cold EOS})$$

現段階の具体的目的

- いくつかの状態方程式パラメータセットおよび角運動量に対して、ブラックホール形成の基準をまずは定性的に明らかにする。

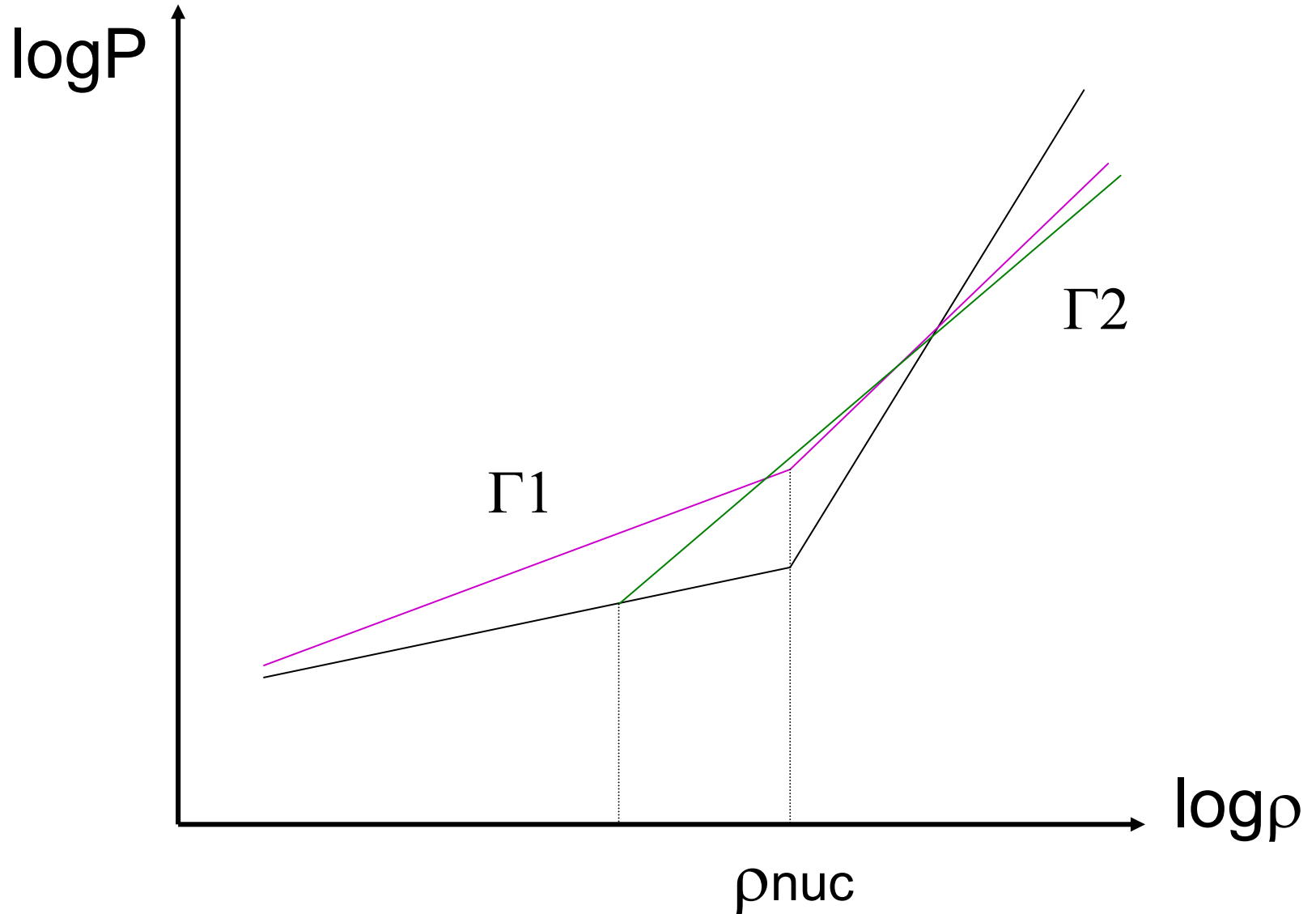
ブラックホール形成の状態方程式・角運動量依存性を明らかにする。

— 具体的パラメータ —

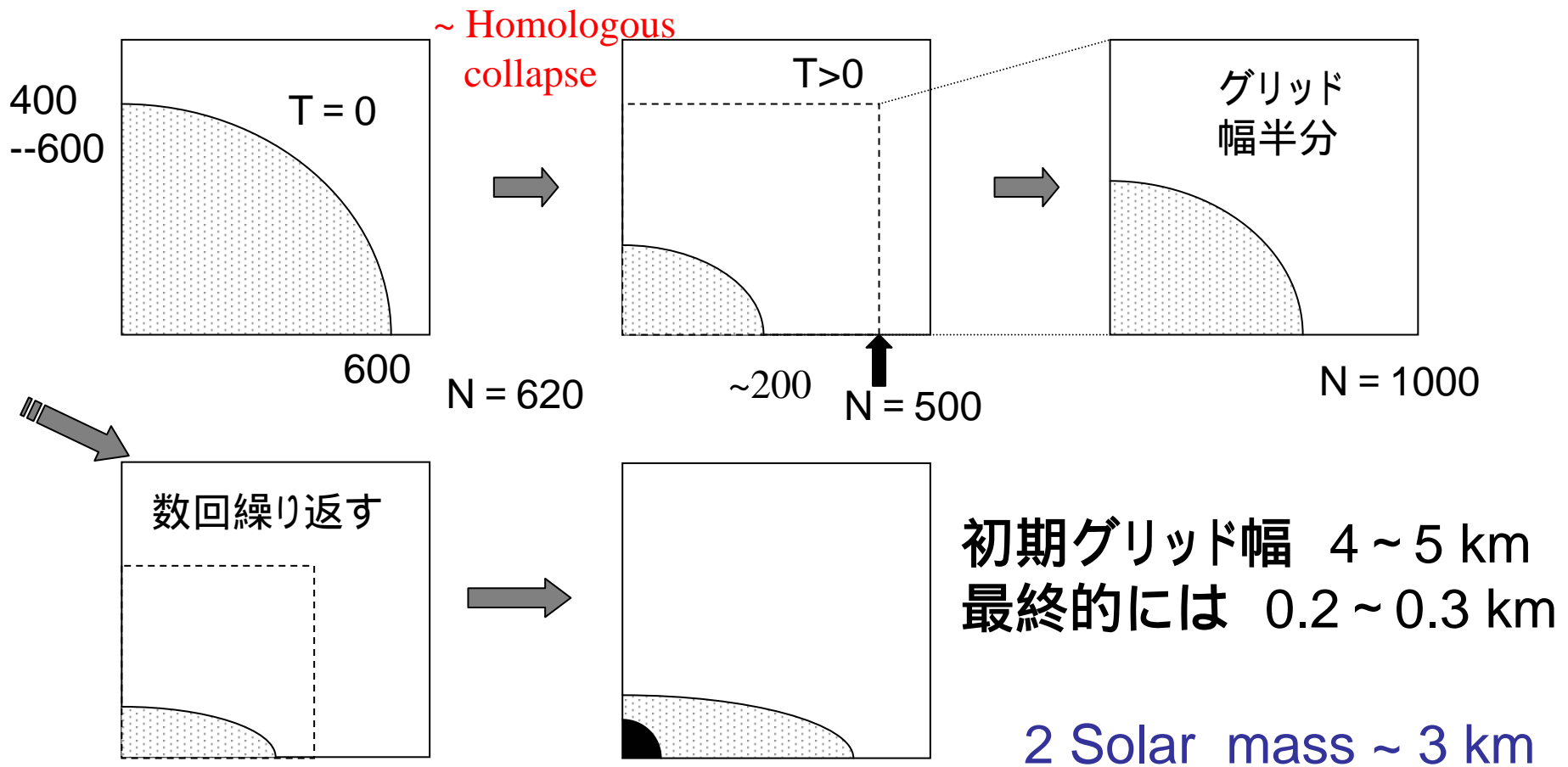
$$\begin{aligned} (\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_{\text{th}}, \rho_{\text{nuc}}) &= (1.3, 2.5, 1.3, 2 \times 10^{14} \text{ g/cc}) \\ &= (1.32, 2.25, 1.32, 2 \times 10^{14} \text{ g/cc}) \\ &= (1.3, 2.22, 1.3, 1 \times 10^{14} \text{ g/cc}) \end{aligned}$$

For any model, $M_{\text{max}}(J = 0) \approx 1.6M_{\odot}$

状態方程式のモデルのイメージ



戦略(~3000km 1km)



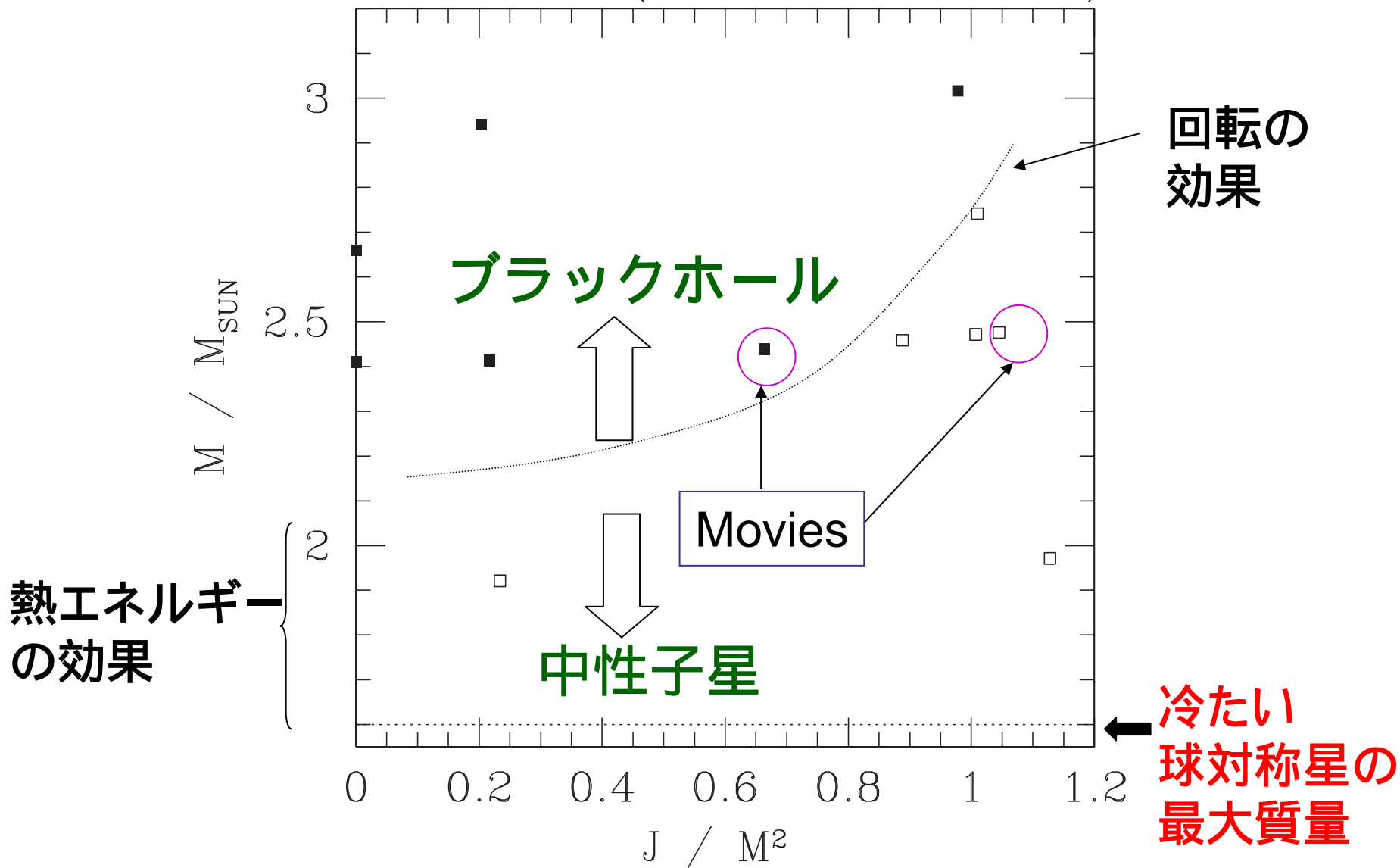
メッシュを増やしながら

グリッド幅を半分に: $N=620 \rightarrow 1020 \rightarrow 1700 \rightarrow 2500 \rightarrow 2500$

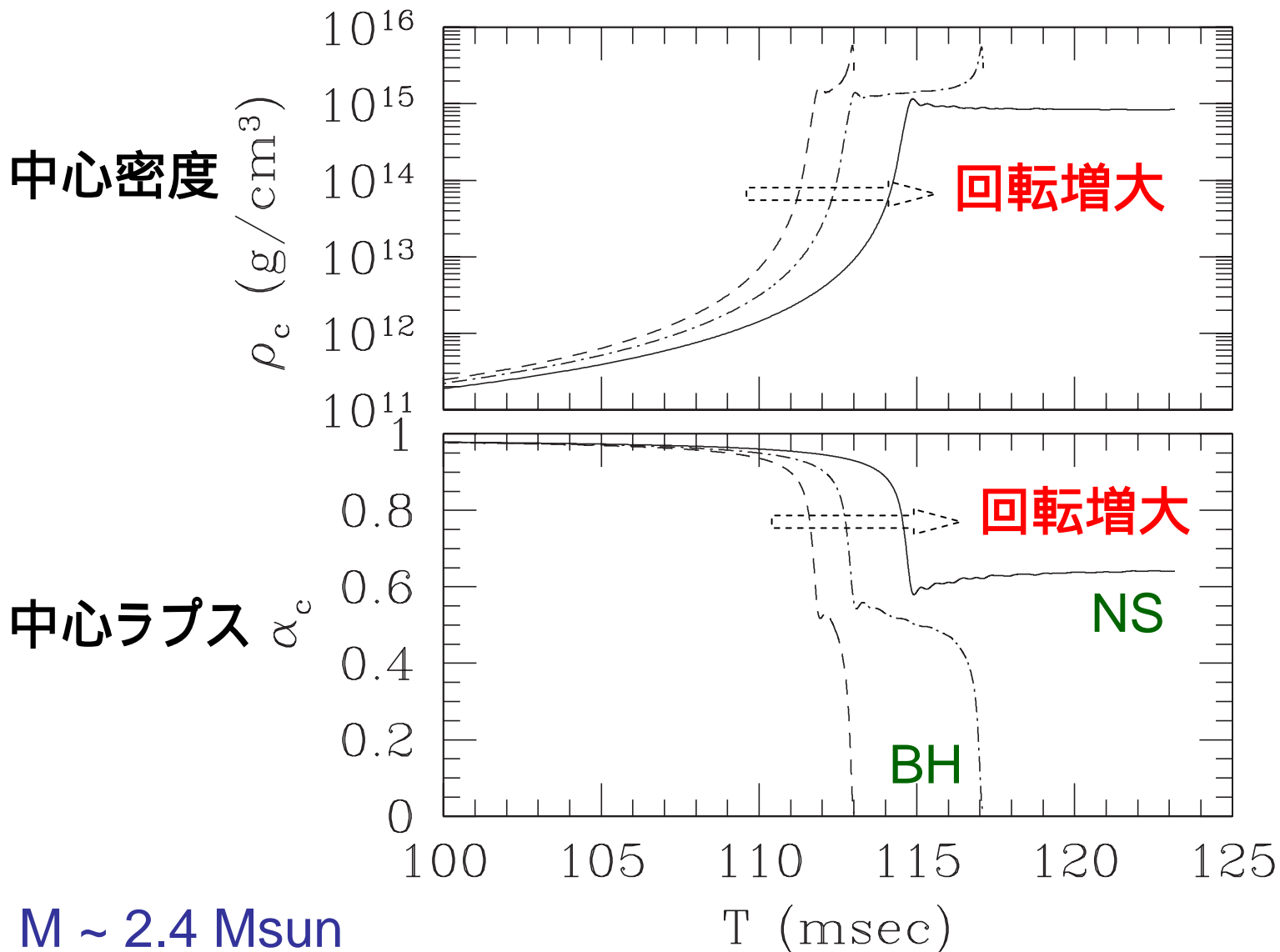
領域外になって捨て去るバリオン質量は高々数%

結果 (途中報告)

$$(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_{\text{th}}, \rho_{\text{nuc}}) = (1.3, 2.5, 1.3, 2 \times 10^{14} \text{ g/cc})$$



中心密度とラプスの変化



5.3 . 重力崩壊における無次元角運動量 パラメータ $q=J/M^2$ とブラックホール形成

- 過去の回転重力崩壊に関する軸対称数値計算：
中村(1981)、Stark & Piran (1985)、Shapiro-
Teukolsky(1994)、柴田(2000)など

主要な結論：

$q \sim 1$ がブラックホール形成を決定する良い閾値

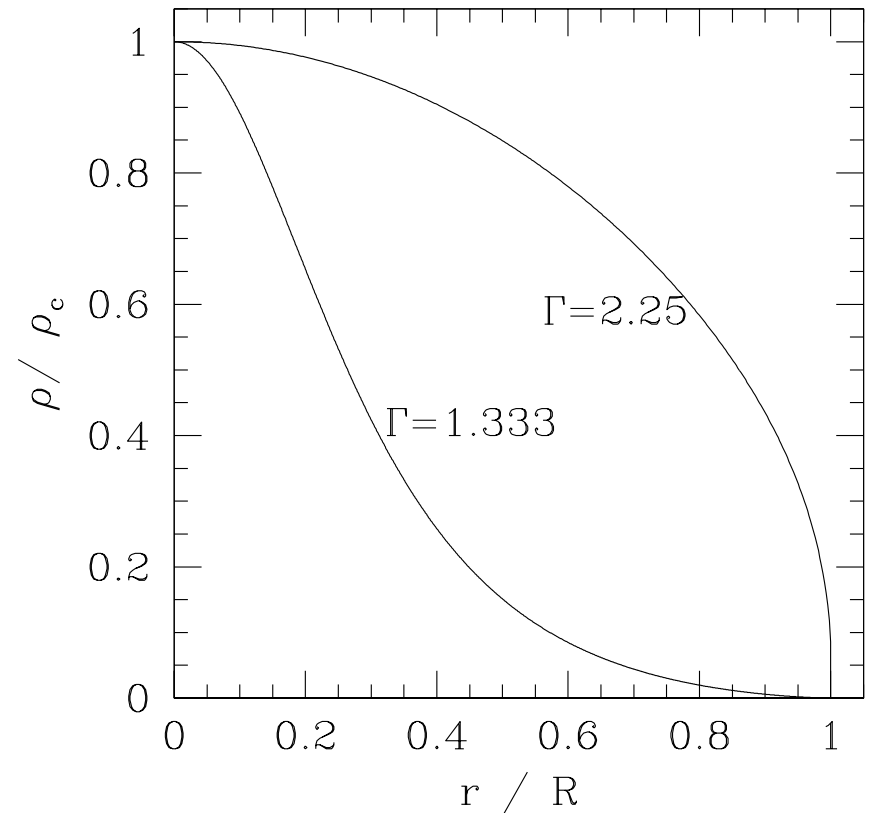
$q > 1$ のProgenitor → 遠心力が強いせいでブラック
ホールは形成されない

これは本当なのか？

物事そう単純でないはず

- 状態方程式が硬いときの平衡形状
 - 密度分布は一様に近い
- 状態方程式が柔らかいとき
 - 密度は中心集中型
- 回転則が一様の場合
 - 外に行くほど高速度回転
- 差動回転の度合いが大きい場合
 - 内側の方が高速度回転

球対称ポリトロープの場合



Specific angular momentumを用いた考察

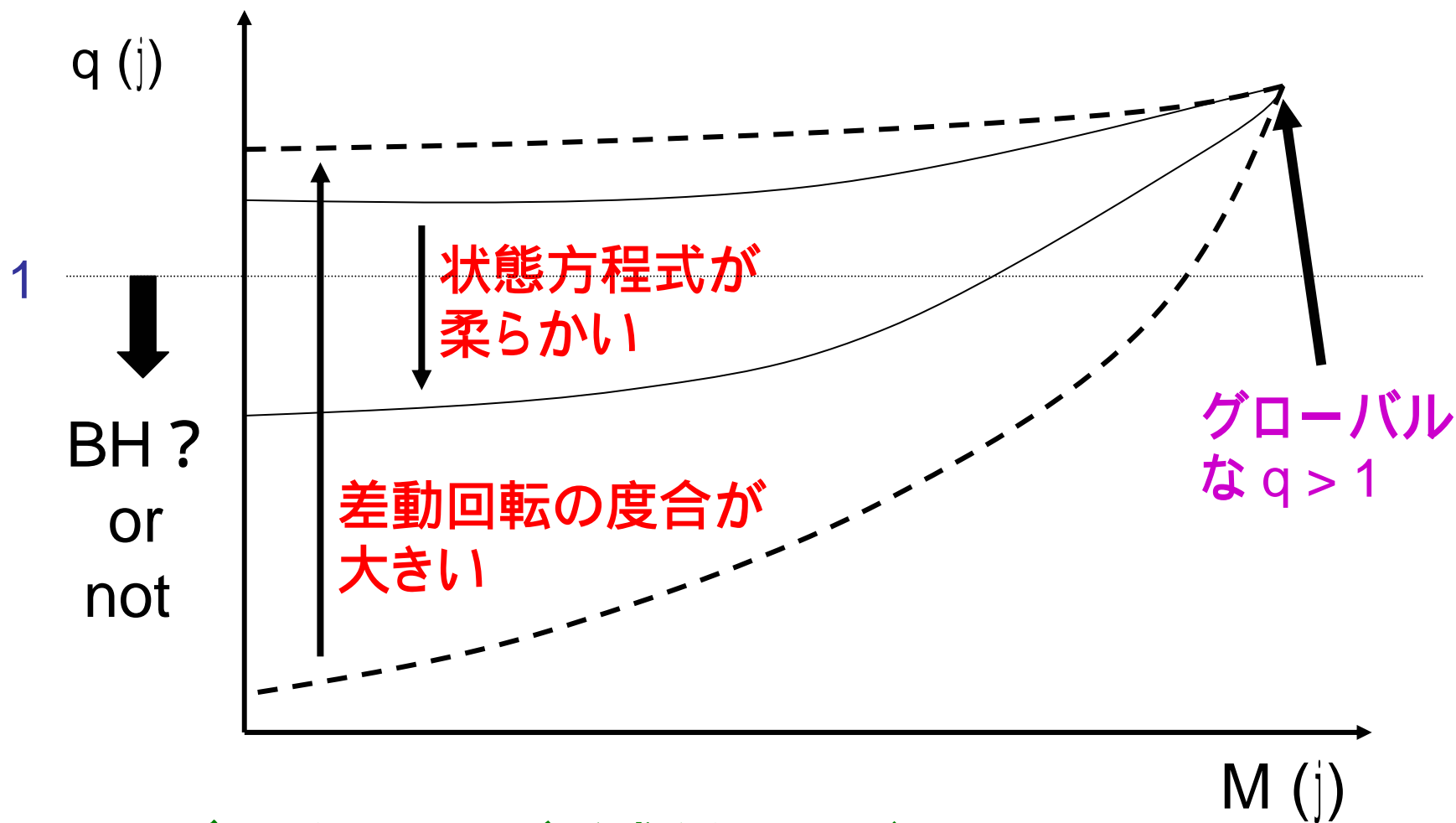
$$q(j) \equiv \frac{J(j)}{M_*(j)^2}$$

$$M_*(j) = \int_{j>j'} \rho \alpha u^t \sqrt{\gamma} dV' \quad : \text{静止質量}(j > j')$$

$$J(j) = \int_{j>j'} \rho \alpha u^t \sqrt{\gamma} \cdot h u_\phi dV' \quad : \text{角運動量}(j > j')$$

軸対称の系でかつ、粘性ゼロであれば、
上の量はすべて保存関数

無次元角運動量パラメータの質量スペクトル



ブラックホールが形成されるかどうかは、
中心付近の“ q ”の値で決まるはずである

前図からの予想

- ブラックホールの形成条件は、中心付近の” q ”で決まるはずである。
- しかしながら、状態方程式が硬かったり、差動回転の度合いが大きいと、中心付近とグローバルな値が偶然一致したものになってしまう。

過去の研究はこのことを見落として、誤った解釈をしていないか??



トイモデルを用いた
数値シミュレーション

問題設定

- 比較的柔らかい状態方程式を持った、臨界安定な球対称星を置く ($\Gamma=1.5$)
- 圧力を抜く (90%程度)
- 回転を加える (さまざまな回転則)

シミュレーション開始

結果

$$q(j=0) \geq q_{\text{crit}} \sim 1 \quad \& \quad q(\text{total}) > 1$$

\Rightarrow No Black hole

$$q(j=0) < q_{\text{crit}} \sim 1 \quad \& \quad q(\text{total}) > 1$$

\Rightarrow Black hole formation for $\frac{\Delta P}{P} \sim 1$

結論はグローバルな q の値によらない。
(詳細は、関口-柴田 2004、
& 関口のポスター)

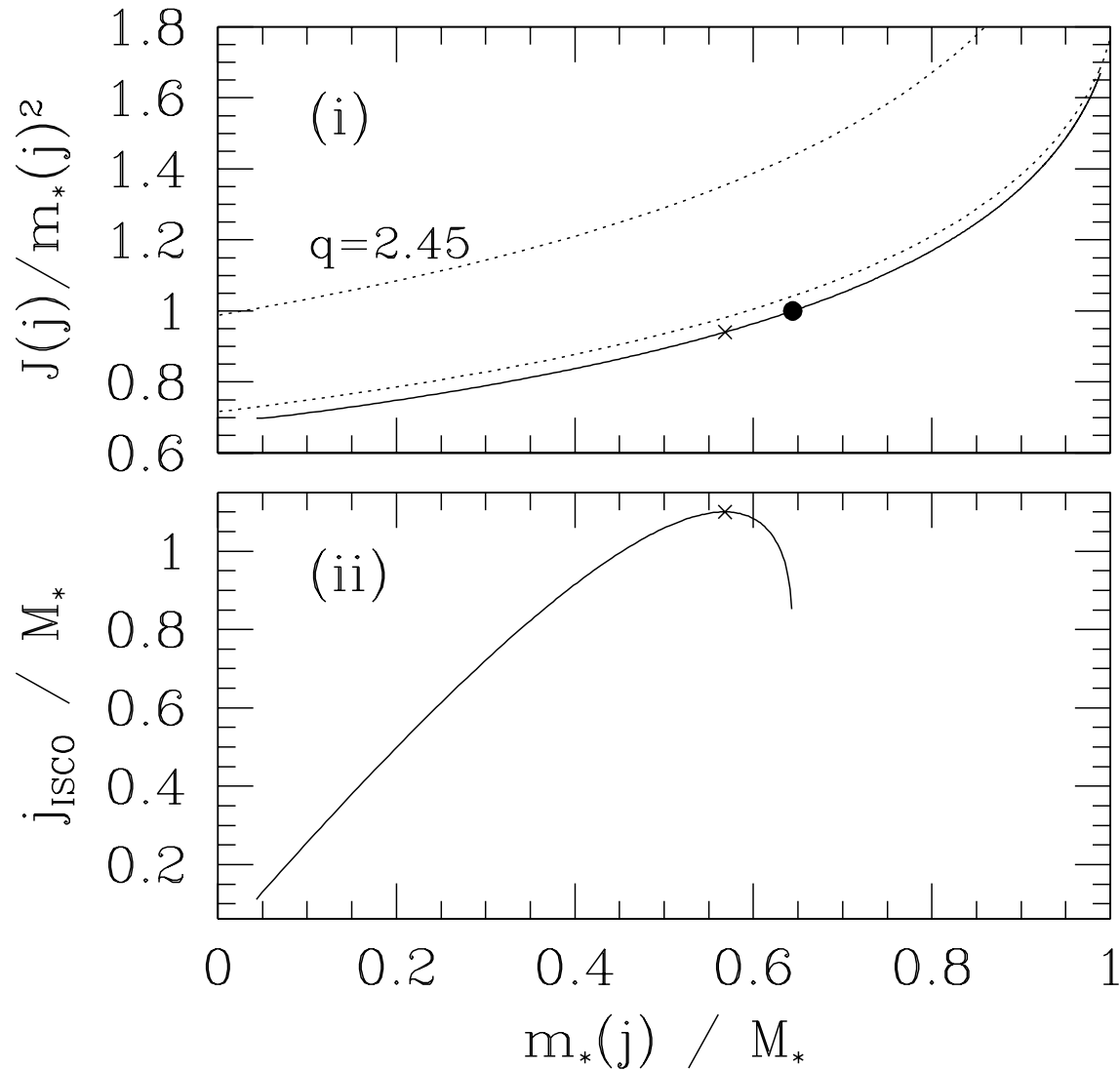
応用範囲：現実的回転重力崩壊

- 現実的ブラックホール形成の原始星
 1. $M \sim 10 - 100$ 太陽質量の星
 2. $M > 300$ 太陽質量の第一世代星
- 現実的回転重力崩壊の初期条件
 - $\Gamma \sim 4/3$ の回転(準)平衡形状
 - $R/M > 1000$; 広がった星

大きいダイナミカルレンジ

チャレンジングな問題

=1.329 : q=1.77、コンパクトさ $\sim 6 \cdot 10^{-4}$ の臨界安定な星



6. まとめ

- ・ 一般相対論的シミュレーションはもはや実行可能である。
科学的結果 - 例えば連星中性子星の合体後に誕生する天体や重力波の波形 - を得ることができる。
 - ・ 今後の問題
 - ・ コンピュータの性能に限界があるので、3Dで十分な精度の計算は未だに難しい。(精度倍にはパワー8倍要)
AMR / FMRなどの技術開発が必要かも。
2 ~ 3年待てば、計算パワー10倍程度は期待できる。
 - ・ ブラックホール形成後のシミュレーションの継続。
Excision の確立。
 - ・ 大規模な軸対称数値的相対論が可能になった。
ターゲットは以下のような現実的問題の計算：
 - 星の重力崩壊によるブラックホール、中性子星の形成
 - 中性子星のアクリション起源の重力崩壊
 - 中性子星の相転移、など
- 原理的問題(何かありますか?)

7. 課題、展望

- ブラックホール切り取り技法の確立
 - 優れた定式化を追求すべきか？
 - ある程度適当な境界条件でごまかすか？
もう少し詳しいテスト計算問題などを考える必要あり
- 素過程を組み入れたシミュレーション
 - 超新星シミュレーションから学ぶ
 - GRMHDは可能か？
- 高精度化：
 - アインシュタイン方程式を解くのに擬スペクトル法を採用すべきか？
 - 階層格子法を採用すべきか？
- 連星の初期条件の完全に一般相対論化。特にブラックホール連星に対して。

コード開発の一般的ステップと現状

- 1: Make a code which runs anyhow stably (do not care accuracy)
- 2: Improve the code which can provide a **qualitatively correct result**; care accuracy somewhat (say we admit an error of ~10%)
- 3: Improve the code gradually getting **qualitatively new results** which can be obtained only by an improved code
- ★ 4: Goal: Make a code which provides a **quantitatively accurate result**.



We are here.

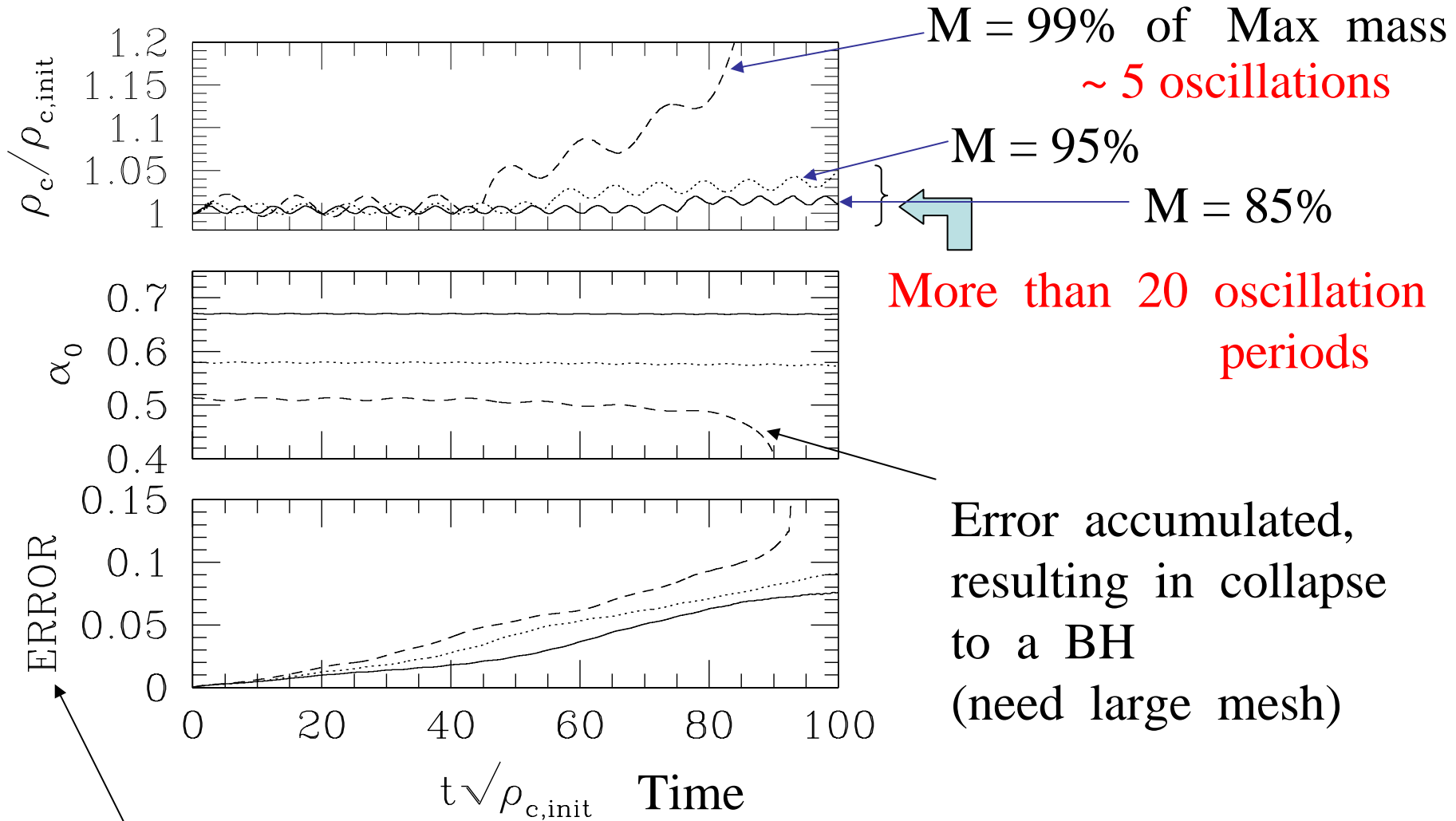
Similar to construction of detectors in some sense

Animations

<http://esa.c.u-tokyo.ac.jp/~shibata/anim.html>

Highly GR Spherical Stars

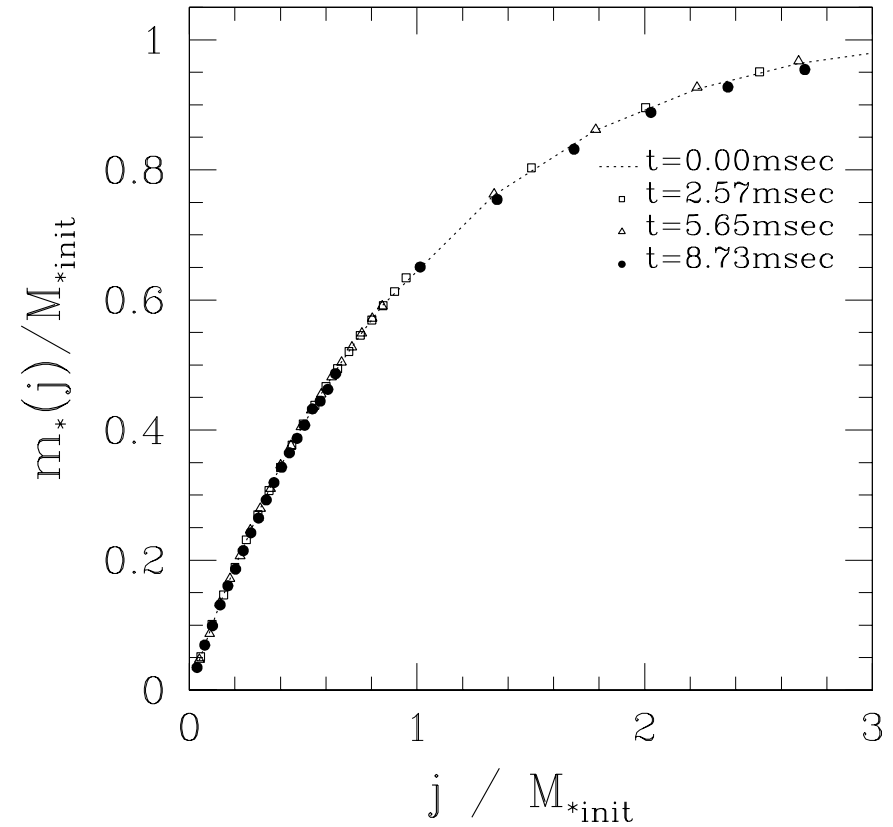
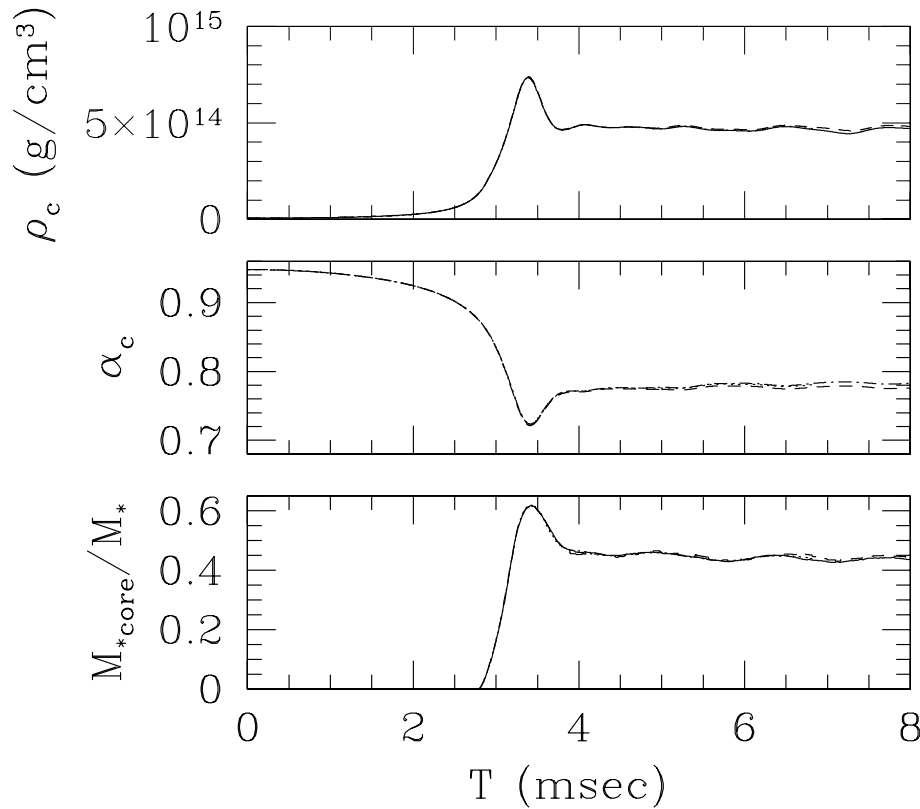
$M = 85, 95, 99\%$ of Maximum mass.



Averaged violation
of Hamiltonian constraint

$N = 180$
(~ 60 to cover NS)

Conservation of specific angular momentum in a test simulation



Stellar core collapse from $\rho(r=0) = 6.e12$.

2D hydro equations

$$\partial_t \rho_* + \partial_A (\rho_* v^A) = -\frac{\rho_* v^x}{x}, \quad A = x, z$$

$$\partial_t (\rho_* \hat{u}_y) + \partial_A (\rho_* \hat{u}_y v^A) = -\frac{2\rho_* \hat{u}_y v^x}{x}$$

$$\partial_t (\rho_* \hat{u}_B) + \partial_A (\rho_* \hat{u}_B v^A + P \alpha e^{6\phi} \delta_B^A) = -\frac{\rho_* \hat{u}_B v^x}{x} + \frac{\rho_* \hat{u}_y v^y}{x} \delta_{Bx} + P \partial_B (\alpha e^{6\phi}) - \rho_* F_B [g_{\mu\nu}]$$

$$\partial_t (\rho_* \bar{e}) + \partial_A (\rho_* \bar{e} v^A + P e^{6\phi} (v^A + \beta^A)) = -\frac{\rho_* \bar{e} v^x + P e^{6\phi} (v^x + \beta^x)}{x} + F [g_{\mu\nu}]$$

where

$$\rho_* = \rho \alpha e^{6\phi}, \quad v^i = \frac{u^i}{u^t}, \quad \hat{u}_i = h u_i, \quad \bar{e} = h w - \frac{P}{\rho w}, \quad w = \alpha u^t, \quad h = 1 + \varepsilon + \frac{P}{\rho}$$

重い中性子星の運命

- GW Luminosity $\frac{dE}{dt} \approx 10^{-6} \left(\frac{c^5}{G} \right)$
- Potential energy $W \sim \frac{GM^2}{2R} = 0.1Mc^2 \left(\frac{5GM}{Rc^2} \right)$
- Kinetic energy $T \sim (0.1-0.2)W \sim 10^{-2} Mc^2 \left(\frac{5GM}{Rc^2} \right)$

M : Mass, R : Typical radius of massive NS

$$\Rightarrow \text{GW emission timescale} \sim \frac{T}{dE/dt} \sim 10^{-1} \left(\frac{M}{3M_{\odot}} \right) \left(\frac{5GM}{Rc^2} \right) \text{ Sec}$$

重力波放出後に角運動量を失い、重力崩壊