

修士論文

「ADHM 構成法及び Seiberg-Witten Prepotential の求値法」

名古屋大学多元数理科学研究科 藤井 篤之
m02020e@math.nagoya-u.ac.jp

平成 16 年 6 月 8 日

概要

ADHM (Atiyah-Drinfeld-Hitchin-Manin) 構成とは、4 次元ゲージ理論のインスタントンのモジュライ空間と ADHM データのモジュライ空間と呼ばれる多様体との 1 対 1 の対応を与える構成法であり、もとはツイスター理論から派生した理論である。ここで ADHM データのモジュライ空間とは、ある 4 つの複素行列からなるベクトル空間に ADHM 方程式と呼ばれる拘束条件を入れ、リー群の作用で割ったものである。(この行列のサイズや ADHM 方程式及びリー群は、考えているゲージ群やインスタントンの条件による。)ここではゲージ群が $SU(N)$ の時に限定し、具体的な対応を与える。(ツイスター理論にはふれない。)この ADHM モジュライ空間にはトーラス $T^2 \times T^{N-1}$ の作用が定義できる。その固定点での接空間におけるトーラス作用の固有値を考えることで、 $\mathcal{N} = 2$ の超対称性をもつ \mathbb{R}^4 上の物理的な作用を決める Seiberg-Witten prepotential のインスタントン展開係数が、ヤング図形を用いて組み合わせ論的に決定できる。そのアルゴリズムを紹介する。

目次

1	Introduction	3
2	ADHM 構成法	5
2.1	インスタントンのモジュライ空間	5
2.2	ADHM データのモジュライ空間	9
2.3	ADHM 構成法	11
2.4	ADHM 構成の計算	14
2.5	ADHM 構成の例	15
3	Seiberg-Witten Prepotential の ADHM データを用いた求値法	18
3.1	同変コホモロジー	18
3.2	Seiberg-Witten Prepotential と Nekrasov の分配関数	20
3.3	変形した BRST 変換の零点とヤング図形	22
3.4	分配関数の計算	26
3.5	簡単な例	30

1 Introduction

ADHM (Atiyah-Drinfeld-Hitchin-Manin) 構成法 [1] とはツイスター理論の派生であり、4次元空間上のインスタントンからなるモジュライ空間と、ADHM データと呼ばれる行列からなる集合に ADHM 方程式

$$\begin{aligned}\mu_{\mathbb{R}}(B_1, B_2, I, J) &:= \frac{i}{2}([B_1, B_1^\dagger] + [B_2, B_2^\dagger] + II^\dagger - J^\dagger J) = 0 \\ \mu_{\mathbb{C}}(B_1, B_2, I, J) &:= [B_1, B_2] + IJ = 0\end{aligned}$$

とよばれる拘束条件を導入し、群の作用で割ることで得るモジュライ空間が 1 対 1 の対応がとることができる、インスタントンを求める上での非常に強力な構成法である。

第 1 章で少し触れるように、Nahm 変換 [2] と呼ばれる、トーラスにおけるゲージ群が $SU(N)$ の k インスタントンのモジュライ空間と、その双対トーラスにおけるゲージ群が $SU(k)$ の N インスタントンのモジュライ空間が 1 対 1 の対応がつくという双対性がある。ADHM 構成法は、そのトーラス半径を無限大にしたものと見ることが出来る。この Nahm 変換は代数幾何で言う Fourier-Mukai 変換であり、超弦理論で言う T-duality と対応していることから、D-brane 力学をはじめとする超弦理論への応用も期待されている。

さらに、ADHM データのモジュライ空間には様々な見方がある。その中の一つが [10] にあるように、ADHM データに対する拘束条件を変えることで、非可換空間上でのインスタントンとの対応や、Donaldson による層のモジュライ空間との対応が見て取れる。また、ADHM データのモジュライ空間をハイパーケーラー商と捉えたり、ヒルベルトスキームと関連して考えたりすることも出来る。(このことは結果のみ 2.5 節にて紹介)

第 1 章では、この ADHM 構成法を特にインスタントンを構成する強力な手法であることを念頭に置いて紹介していく。

この論文の次の話題は、ここ 10 年での高エネルギー物理学における重要な話題である Seiberg-Witten prepotential である。4次元空間上の $\mathcal{N} = 2$ の超対称性をもつ $SU(N)$ ゲージ理論を考えると、低エネルギーでは対称性の破れが起こり $U(1)^{N-1}$ 理論が出現する。この低エネルギーでの理論を記述するために、Seiberg と Witten が提案したのが Seiberg-Witten prepotential \mathcal{F} である。この prepotential を用いることで、場での作用が記述でき、 $U(1)^{N-1}$ 理論を完全に記述できる。しかも、この Seiberg-Witten prepotential は超弦理論だけでなく場の理論においても自然に現れ、AdS/CFT 双対性とも深く関わる。

しかし、この Seiberg-Witten prepotential は、そもそも物理的な理論に依存していることから数学には完全になっておらず、数学的な意味合いもはっきりしていなかった。従来から、Seiberg-Witten 曲線と呼ばれる楕円曲線の族を考えることで、幾何的に計算する方法は知られていた。しかし、ADHM データのモジュライ空間上におけるトーラス作用の同変コホモロジーによって、数学的に厳密に定義

される Nekrasov の分配関数 [3] と、Seiberg-Witten prepotential の関係を示す予想が証明された。(Nekrasov-Okounkov と Nakajima-Yoshioka がそれぞれ独立に証明。) この Nekrasov の分配関数を求めることで、Seiberg-Witten prepotential の理解が深まることが予想される。そこで、第 2 章では Nekrasov の分配関数を定義し、計算法を紹介したい。この論文の代数幾何的な内容は主に [4] にある。

筆者の勉強不足と物理学者の論文 [5] [6] をベースに勉強したこともあり、幾何的に深く富んだ部分を上手く取り入れられなかった。また、組み合わせ論的な方法に帰着させるプロセスに興味があったこともあるが、アルゴリズムの紹介に陥ってしまったことが残念である。

2 ADHM 構成法

ADHM 構成法 (原論文は [1]) とは、インスタントンのモジュライ空間と 1 対 1 対応をなす、行列によるモジュライ空間を考えることで、インスタントンを構成するというある種のアルゴリズムである。ここでは [7] にしたがって $SU(N)$ に限定して、Nahm 変換との対応がよく見える形で ADHM データを定義し、ADHM データからインスタントンを具体的に抽出する方法を紹介する。

2.1 インスタントンのモジュライ空間

ここではインスタントンのモジュライ空間について一般的な議論を行う。 X をコンパクトな 4 次元多様体、 E を構造群 (これをゲージ群という。) を G とするランク N のベクトル束とする。このとき、 E 上の接続の空間 \mathcal{A} はアファイン空間となる。ここで、次の Yang-Mills 汎関数を考えたい。

Definition 2.1. E 上の接続 ∇ に付随する曲率 F に対して、 E のファイバーでの正規直交基底 B_1, \dots, B_r および、 T^*X の正規直交枠 $\theta_1, \dots, \theta_4$ を用いて F を局所的に

$$F = \frac{1}{2} \sum F_{\alpha\beta}^i \theta^\alpha \wedge \theta^\beta \otimes B_i$$

と表したとき、Yang-Mills 汎関数を次で定義する。

$$J(\nabla) := \frac{1}{2} \int_X \sum_{i,\alpha,\beta} |F_{\alpha\beta}^i|^2 * 1$$

ここで、 $*$ はホッジ作用素であり、 $*1$ は X の体積要素である。

この Yang-Mills 汎関数の変分問題を考えたい。ここで、ホッジ作用素 $*$ に対して、二次形式が $*\phi = \phi$ となる自己双対 (Self-Dual) なものと、 $*\phi = -\phi$ となる反自己双対 (Anti-Self-Dual) なものに直和分解できることから、曲率形式を SD 部分 F_+ と ASD 部分 F_- に分解する。また、 X 上のリーマン計量と E のファイバーでの不変内積についての F のノルムを $\sum_{i,\alpha,\beta} |F_{\alpha\beta}^i|^2 =: |F|^2$ とすれば、SD 部分と ASD 部分は直交することから、 $|F|^2 = |F_+|^2 + |F_-|^2$ となる。よって、一般に 2 次形式 ϕ は

$$\begin{aligned} \phi \wedge *\phi &= (|\phi_+|^2 + |\phi_-|^2) * 1 \\ \phi \wedge \phi &= (|\phi_+|^2 - |\phi_-|^2) * 1 \end{aligned}$$

となることを用いて Yang-Mills 汎関数は、

$$J(\nabla) = \frac{1}{2} \int_X \langle F \wedge *F \rangle = \frac{1}{2} \int_X (|F_+|^2 + |F_-|^2) * 1$$

と表すことが出来る。さらに

$$c(E, metric) := \int_X \langle F \wedge F \rangle = \int_X (|F_+|^2 - |F_-|^2) * 1$$

とおけば、これは接続 ∇ に依存しない数となり、構造群 G が $U(N)$ のときは $2\pi^2(c_1(E)^2 - 2c_2(E))$ 、 $SU(N)$ のときは $-4\pi^2c_2(E)$ (この時、 $|c_2(E)|$ をインスタントン数と呼んだり、物理ではトポロジカルチャージと呼ぶ。)、 $O(N)$ の時は $4\pi^2p_1(E)$ となる。ここで、 $c_i(E)$ はチャーン類を X 上積分したもの、 $p_i(E)$ はポントリャーギン類を X 上積分したものである。この $c(E, metric)$ を用いれば、

$$J(\nabla) = \frac{1}{2}c(E, metric) + \int_X |F_-|^2 * 1$$

または

$$J(\nabla) = -\frac{1}{2}c(E, metric) + \int_X |F_+|^2 * 1$$

と書ける。よって、

$$J(\nabla) \geq \frac{1}{2}|c(E, metric)|$$

となり、以下が分かる。

Proposition 2.2. Yang-Mills 汎関数は接続が $SD (F_- = 0)$ または $ASD (F_+ = 0)$ のとき最小値を取り、その値は $|c(E, metric)|$ となる。

この、Yang-Mills 汎関数の最小値を与えるような接続のことをインスタントンという。

次に、接続の空間 \mathcal{A} にゲージ変換を導入したい。

Definition 2.3. ベクトル束 E のゲージ変換群 $\mathcal{G}(E)$ とは、 E 上の C^∞ 級微分同相写像

$$\mathcal{G}(E) \ni \phi : E \longrightarrow E$$

で、ファイバー E_x 上ベクトル空間の同型写像となるもののなす群である。また、 E に計量が入っている場合は、その計量を保つような変換のみを考える。

当然これは底空間 X 上に恒等変換を引き起こす。このゲージ変換を接続の空間 \mathcal{C} に引き戻して作用させる。このとき、 ϕ は接続 ∇ に $\phi^*\nabla = \phi^{-1} \circ \nabla \circ \phi$ で作用し、接続形式 A に対しては $\phi^*A = \phi^{-1}A\phi + \phi^{-1}d\phi$ で作用することから、Yang-Mills 汎関数を計算すれば $J(\nabla) = J(\phi^*\nabla)$ となる。よって、接続の空間 \mathcal{A} をゲージ群の作用で割った商空間 \mathcal{A}/\mathcal{G} を考えれば、Yang-Mills 汎関数はこの商空間上の関数と思える。そこで、インスタントンのモジュライ空間を以下で定義する。

Definition 2.4. SD 接続の空間 \mathcal{A}_+ 及び ASD 接続の空間 \mathcal{A}_- はそれぞれゲージ変換で不変であり、

$$\mathcal{M}_{+,N}^{inst} := \mathcal{A}_+ / \mathcal{G}$$

$$\mathcal{M}_{-,N}^{inst} := \mathcal{A}_- / \mathcal{G}$$

をそれぞれ SD 接続、 ASD 接続のモジュライ空間と呼ぶ。

モジュライ空間の次元については以下の定理が知られている。([8] の 6 章 4 節など)

Theorem 2.5. コンパクト 4 次元多様体 X が SD (*resp.* ASD) (つまり、ワイル曲率テンソルが SD (*resp.* ASD)) で、ゲージ群 G が半単純リー群。そのリー環を \mathfrak{g} とする。このとき $p_1(P \times_{Ad} \mathfrak{g})$ を主 G 束 P の随伴束の第 1 ポントリヤーギン類を積分したもの、 χ を X のオイラー数、 τ を X の符号数とすれば、 SD 接続 (*resp.* ASD 接続) のモジュライ空間 $\mathcal{M}_{+,N}^{inst}$ (*resp.* $\mathcal{M}_{-,N}^{inst}$) は次元を

$$p_1(P \times_{Ad} \mathfrak{g}) - \frac{1}{2}(\chi - \tau) \dim G$$

resp.

$$p_1(P \times_{Ad} \mathfrak{g}) - \frac{1}{2}(\chi + \tau) \dim G$$

とする多様体となる。

証明はまず、Atiyah-Singer の指数定理と消滅定理を用いて、接空間の次元を計算する。次に、倉西の方法を Banach 空間での逆写像・陰関数の定理に応用して、局所モジュライ空間を得る。最後に、局所モジュライ空間が全モジュライ空間の局所座標系を与え、全モジュライ空間がハウスドルフ多様体であることを示すことできる。

ここで、底空間 X を \mathbb{R}^4 、ゲージ群 G を $SU(N)$ に限定し、 ASD 接続について考える。(一般に ADHM 構成法は、 G が古典群の時に考えることが出来る。) このとき、ディラック作用素 \mathcal{D}_x とその共役 $\overline{\mathcal{D}}_x$ を次で定義する。

$$\mathcal{D}_x := \sum_{\mu=1}^4 e^\mu \otimes \nabla_\mu = \sum_{\mu=1}^4 e^\mu \otimes (\partial_\mu + A_\mu), \quad \overline{\mathcal{D}}_x := \sum_{\mu=1}^4 \bar{e}^\mu \otimes \nabla_\mu$$

ここで、 ∇ は接続、 A はその接続形式、 e^μ は σ_i , $i = 1, 2, 3$ を Pauli 行列として、

$$e_1 := -i\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 := -i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e_3 := -i\sigma_3 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad e_4 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

で定まる四元数 \mathbb{H} の 2 次元表現行列であり、クリフォード代数の表現とも言える。共役については四元数としての共役であり、

$$\bar{e}_\mu := -e_\mu (\mu = 1, 2, 3), \bar{e}_4 := e_4$$

となっている。このとき、次の命題が成り立つ。

Proposition 2.6. 接続 ∇ が ASD 接続であるための必要十分条件は、ディラック作用素 D の 2 乗 $\bar{D}D$ が Pauli 行列と可換であることである。

Proof. 't Hooft のイェータ・シンボル $\eta_{\mu\nu}^{i(\pm)} := \sum_i \eta_{\mu\nu}^{i(\pm)} \sigma_i$ を

$$\eta_{\mu\nu}^{i(\pm)} := \text{sign}(i\mu\nu 4) \pm \delta_{i\mu} \delta_{\nu 4} \mp \delta_{i\nu} \delta_{\mu 4}$$

で導入すれば、

$$\bar{e}_\mu e_\nu = \delta_{\mu\nu} + i\eta_{\mu\nu}^+, e_\mu \bar{e}_\nu = \delta_{\mu\nu} + i\eta_{\mu\nu}^-$$

となり、これは μ, ν について反対称かつ自己双対

$$\eta_{\mu\nu}^{i(\pm)} = -\eta_{\nu\mu}^{i(\pm)}, \eta_{\mu\nu}^{i(\pm)} = \pm * \eta_{\mu\nu}^{i(\pm)}$$

である。ここで、 $\bar{D}D$ を展開すれば

$$\begin{aligned} \bar{D}D &= \sum_{\mu=1}^4 \bar{e}^\mu \otimes \nabla_\mu \sum_{\nu=1}^4 e^\nu \otimes \nabla_\nu \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \Delta + \frac{i}{2} \sum_{\mu\nu} \eta_{\mu\nu}^{(+)} \otimes F_{\mu\nu} \end{aligned}$$

となる。ここで、 Δ は接続 ∇ のラプラシアンであり、リヒロネウィッツの公式からもこの展開は得られる。(今は \mathbb{R}^4 を考えているので、底空間のスカラー曲率は 0。) よって、 $\bar{D}D$ が Pauli 行列と可換になるためには展開した第 2 項 $\frac{i}{2} \sum_{\mu\nu} \eta_{\mu\nu}^{(+)} \otimes F_{\mu\nu}$ が 0 になることが必要十分条件であることが分かる。今、 $\eta_{\mu\nu}^{(+)}$ が SD であることを用いれば $F_{\mu\nu} = - * F_{\mu\nu}$ が導かれる。□

この命題から、ディラック作用素の 2 乗が Pauli 行列と可換なときに Yang-Mills 汎関数が最小値を取ることが分かる。いま \mathbb{R}^4 はノンコンパクトであるため、ASD 接続のモジュライ空間 $\mathcal{M}_{-,N}^{inst}$ が有限次元かつ、インスタントン数 $|c_2(E)|$ が有限な整数値になるために、接続形式 (ゲージ場) は無限遠で自明なものに収束 ($A \approx g^{-1}dg, \exists g \in SU(N)$) するものに限定する必要がある。これは、 \mathbb{R}^4 の 1 点コンパクト化 S^4 でのゲージ理論を考えているのと同じである。また、無限遠でのゲージ場の枠を固定したものを枠つきモジュライ空間 (framed moduli space) という。

さらに、ラプラシアン Δ が可逆となる。つまり、グリーン関数 $G(x, y)$ が存在し、 $\Delta_x G(x, y) = -\delta(x - y) G(x, y) \approx \mathcal{O}(r^{-2})$ となる。ここで、 $G = SU(N)$ でインスタントン数が k の ASD モジュライ空間を $\mathcal{M}_{-,N,k}^{inst}$ とすれば

$$\dim \mathcal{M}_{-,N,k}^{inst} = \begin{cases} 4Nk - N^2 + 1 & N \leq 2k \\ 4k^2 + 1 & N > 2k \end{cases}$$

となる。また、棒つきモジュライ空間の時は無限遠でのゲージ変換の分がなくなり、完全に S^4 でのインスタントンと考えるので次元は N と k の大きさにかかわらず $4Nk$ となる。単純に考えても無限次元でのゲージ変換 $SU(N)$ の次元を引いて $4Nk - N^2 + 1 + (N^2 - 1) = 4Nk$ となりつじつまが合う。このことは、このモジュライ空間がハイパーケーラー商と見なされる点からも重要である。ただし、これらはゲージ変換群 $\mathcal{G}(E)$ が自由に作用していない限り特異点を持つ。

2.2 ADHM データのモジュライ空間

ここでは、まず ADHM データという行列の空間を定義し、それらに拘束条件を入れることで前節で定義したインスタントンのモジュライ空間と 1 対 1 の対応がとれるようなモジュライ空間を構成する。インスタントンのモジュライ空間との対応に注目して、ADHM データのモジュライ空間を定義していきたい。

Definition 2.7. V を k 次元複素ベクトル空間、 W を N 次元複素ベクトル空間とする。このとき

$$\mathbb{M} := \{B_1, B_2, I, J | B_1, B_2 \in \text{Hom}(V, V), I \in \text{Hom}(W, V), J \in \text{Hom}(V, W)\}$$

を ADHM データという。

この ADHM データの元を行列と見なし、 $(N + 2k) \times 2k$ 複素行列

$$D := \begin{pmatrix} -I^\dagger & -J \\ B_2^\dagger & -B_1 \\ B_1^\dagger & B_2 \end{pmatrix}$$

を ADHM データと呼ぶこともある。この行列を用いて、0 次元ディラック作用素（これを 0 次元ディラック作用素と呼ぶのは、以下の理由からである。双対な 2 つのトーラス T^4, \hat{T}^4 において、 $X = T^4, G = U(N), c_2 = k$ インスタントンのモジュライ空間と、 $X = \hat{T}^4, G = U(k), c_2 = N$ インスタントンのモジュライ空間が 1 対 1 に対応する Nahm 変換（Fourier-Mukai 変換）[2] では、それぞれのトーラスでのディラック作用素の零モードを用いて対応を作る。ADHM 構成はこのトーラスの半径を無限大にする（このとき双対トーラスは半径が 0 になる。）ことで、

あたかも \mathbb{R}^4 と点での Nahm 変換のように捉えられるためである。) \hat{D} を以下の $(N + 2k) \times 2k$ 行列で定義する。

$$\hat{D}(x) := \begin{pmatrix} I^\dagger & J \\ (x^4 - ix^3)E_k - B_2^\dagger & -((x^2 + ix^1)E_k - B_1) \\ (x^2 - ix^1)E_k - B_1^\dagger & (x^4 + ix^3)E_k - B_2 \end{pmatrix}$$

ここで、 E_k は k 次単位行列である。インスタントンのモジュライ空間についての議論と同様に、0 次元ディラック作用素 \hat{D} に 2 乗 $\hat{D}^\dagger \hat{D}$ が Pauri 行列と可換であるという条件を付加すると、次の ADHM 方程式が必要十分条件として導かれる。

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbb{R}}(B_1, B_2, I, J) &:= \frac{i}{2}([B_1, B_1^\dagger] + [B_2, B_2^\dagger] + II^\dagger - J^\dagger J) = 0 \\ \mu_{\mathbb{C}}(B_1, B_2, I, J) &:= [B_1, B_2] + IJ = 0 \end{aligned}$$

このとき、 $\hat{D}^\dagger \hat{D}$ の逆行列を $f(x) \approx \mathcal{O}(r^2)$ とおく。次に ADHM データのゲージ変換を以下で定義する。

Definition 2.8 (ADHM データのゲージ変換). $(B_1, B_2, I, J) \in \mathbb{M}$ に対して、 $U(V) \times SU(W)$ による作用

$$\begin{aligned} B_\alpha &\mapsto R^\dagger B_\alpha R \quad (\alpha = 1, 2), \quad I \mapsto R^\dagger I Q^\dagger, \quad J \mapsto Q J R \\ R &\in U(V)(= U(k)), \quad Q \in SU(W)(= SU(N)) \end{aligned}$$

を ADHM データのゲージ変換といい、このゲージ変換で移り合うものをゲージ同値という。

また、枠付きモジュライ空間を考えると、インスタントンの無限遠でのゲージ変換に対応する $SU(W)$ の作用を自明なものに限定し、 $U(V)$ の作用のみを考える。

Proposition 2.9. ADHM データのモジュライ空間 $\mathcal{M}_{k,N}^{ADHM}$ を

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{k,N}^{ADHM} &:= \mu_{\mathbb{R}}^{-1}(0) \cap \mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0) / U(V) \times SU(W) \\ &= \left\{ (B_1, B_2, I, J) \in \mathbb{M} \left| \begin{array}{l} \mu_{\mathbb{R}}(B_1, B_2, I, J) = 0 \\ \mu_{\mathbb{C}}(B_1, B_2, I, J) = 0 \end{array} \right. \right\} / U(k) \times SU(N) \end{aligned}$$

で定義したとき、

$$\dim \mathcal{M}_{N,k}^{ADHM} = \begin{cases} 4Nk - N^2 + 1 & N \leq 2k \\ 4k^2 + 1 & N > 2k \end{cases}$$

となる。

Proof. まず、各 ADHM データを複素行列と考えれば B_α で $2k^2 \times 2$ 次元、 I, J で $2Nk \times 2$ 次元あり、ここから ADHM 方程式を各行列成分の連立方程式と思えば $\mu_{\mathbb{R}}$ は実なので k^2 個、 $\mu_{\mathbb{C}}$ は複素なので $2k^2$ 個の拘束条件があるので、併せて次元が $3k^2$ 下がる。さらにゲージ変換で $U(k)$ の分 k^2 と $SU(N)$ の分 $N^2 - 1$ の次元が下がり

$$4k^2 + 4Nk - 3k^2 - (N^2 - 1) - k^2 = 4Nk - N^2 + 1$$

となる。また、 $N > 2k$ の場合は $U(k)$ の変換と $SU(N)$ の変換が独立に扱えなくなるため $U(N - 2k)$ の分の自由度が増え $4k^2 + 1$ となる。

枠付きモジュライ空間について考えるときは、 $SU(N)$ の変換の分がなくなるので、 k や N の大きさに関係なく $4Nk$ となる。 \square

この命題から、とりあえず次元に関しては2つのモジュライ空間が一致していることが分かる。

2.3 ADHM 構成法

Theorem 2.10 (Atiyah , Hitchin , Drinfeld , Manin).

$$\mathcal{M}_{-,N,k}^{inst} \xleftrightarrow{1:1} \mathcal{M}_{k,N}^{ADHM}$$

これが ADHM 構成法の主張である。この節では、ADHM データから具体的にインスタントンを得るアルゴリズムを紹介したい。きちんとした証明（逆の操作や一意性、完全性）については [7] を見ていただきたい。簡単のため $N \leq 2k$ に限定する。

Proof. まず、ADHM データからインスタントンを作り、インスタントン数を計算、さらにそのインスタントンが無限遠でピュアゲージになること及び ASD 性を調べる。

今、 $N + 2k$ 次元ベクトル $\mathcal{V}(\mathbf{x})_u$ ($u = 1, \dots, N$) を 0 次元ディラック作用素 \hat{D} によるディラック方程式 $\hat{D}^\dagger \mathcal{V} = 0$ の独立な N 個の解（ディラックゼロモード）とし、 $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ をそれを並べて出来る行列とする。一意なものにするために規格化条件

$$\mathcal{V}(\mathbf{x})^\dagger \mathcal{V}(\mathbf{x}) = E_N$$

を入れる。 E_N は N 次元単位行列である。また、 $\hat{D}^\dagger \hat{D}$ の逆行列を f として

$$P := \mathcal{V}(\mathbf{x}) \mathcal{V}(\mathbf{x})^\dagger = E_{N+2k} - \hat{D} f \hat{D}^\dagger$$

が成り立つ。

ここで、底空間 \mathbb{R}^4 上に自明なランク $N + 2k$ の複素ベクトル束 $\hat{E} = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{C}^{N+2k}$ を導入する。この \hat{E} の部分ベクトル束 $E \rightarrow \mathbb{R}^4$ を、ファイバー $E_{\mathbf{x}}$ が $\mathcal{V}(\mathbf{x})_u$ ($u =$

$1, \dots, N$) で張られる N 次元ベクトル空間となるように定める。このとき、 $\mathcal{V}(\mathbf{x})_u$ の定め方よりこれはゲージ群が $SU(N)$ のベクトル束となり、この上の共変微分 ∇ を \hat{E} 上の外微分 \hat{d} に対して

$$\nabla := P\hat{d}$$

で定める。 \hat{E} の切断 $s(\mathbf{x}) \in \Gamma(\hat{E})$ を E 上に制限し、枠 $\mathcal{V}(\mathbf{x})_u$ で展開したものを $\sum_u \mathcal{V}(\mathbf{x})_u s(\mathbf{x})_u$ に、この共変微分 ∇ を作用させると、

$$\begin{aligned} \nabla\left(\sum_u \mathcal{V}(\mathbf{x})_u s(\mathbf{x})_u\right) &= P\hat{d} \\ &= \mathcal{V}(\mathbf{x})\mathcal{V}(\mathbf{x})^\dagger\left(\sum_u \mathcal{V}(\mathbf{x})_u(\hat{d}s(\mathbf{x})_u) + (\hat{d}\mathcal{V}(\mathbf{x})_u)s(\mathbf{x})_u\right) \\ &= \sum_{u,v} \mathcal{V}(\mathbf{x})_v(\delta_{uv}\hat{d} + (\mathcal{V}(\mathbf{x})^\dagger_v \hat{d}\mathcal{V}(\mathbf{x})_u))s_u \end{aligned}$$

となることから、自然な形で接続形式 A が

$$A := \{\mathcal{V}(\mathbf{x})^\dagger_v d\mathcal{V}(\mathbf{x})_u\}_{uv} = \mathcal{V}(\mathbf{x})^\dagger d\mathcal{V}(\mathbf{x})$$

と定まる。これから、この接続形式がインスタントン数 k の ASD 接続となり、無限遠でピュアゲージになることを示す。ASD 性については次の計算からわかる。

$$\begin{aligned} F &= dA + A \wedge A \\ &= d(\mathcal{V}^\dagger d\mathcal{V}) + (\mathcal{V}^\dagger d\mathcal{V}) \wedge (\mathcal{V}^\dagger d\mathcal{V}) \\ &= d\mathcal{V}^\dagger \wedge d\mathcal{V} + \mathcal{V}^\dagger d\mathcal{V} \wedge \mathcal{V}^\dagger d\mathcal{V} \end{aligned}$$

ここで、 $d(\mathcal{V}^\dagger \mathcal{V}) = dE_N = 0$ より $\mathcal{V}^\dagger d\mathcal{V} = -d\mathcal{V}^\dagger \mathcal{V}$ 。よって、

$$\begin{aligned} F &= d\mathcal{V}^\dagger \wedge d\mathcal{V} - d\mathcal{V}^\dagger \mathcal{V} \wedge \mathcal{V}^\dagger d\mathcal{V} \\ &= d\mathcal{V}^\dagger (E_N - \mathcal{V}\mathcal{V}^\dagger) \wedge d\mathcal{V} \\ &= d\mathcal{V}^\dagger (E_N - P) \wedge d\mathcal{V} \\ &= d\mathcal{V}^\dagger \hat{D} f \hat{D}^\dagger \wedge d\mathcal{V} \end{aligned}$$

となり、 $\hat{D}^\dagger \mathcal{V} = 0$, $\mathcal{V}^\dagger \hat{D} = 0$ より、 $\hat{D}^\dagger d\mathcal{V} = -(d\hat{D}^\dagger)\mathcal{V}$, $d\mathcal{V}^\dagger \hat{D} = -\mathcal{V}^\dagger (d\hat{D})$ となることから

$$F = \mathcal{V}^\dagger (d\hat{D}) f \wedge (d\hat{D}^\dagger) \mathcal{V}$$

がわかる。 $d\hat{D}$ 及び $d\hat{D}^\dagger$ を具体的に計算することで、

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

と \mathcal{V} を $N \times N$ 行列 u と $2k \times N$ 行列 v で表すと、

$$F = \sum_{\alpha, \beta} i v^\dagger f \eta_{\alpha\beta}^{(-)} v dx^\alpha \wedge dx^\beta$$

となる。今、 $\eta_{\mu\nu}^{(-)}$ が ASD なので F は ASD となることがわかる。

次にインスタントン数を計算したい。今この状況の下、[9] により

$$\sum_{i,\alpha,\beta} F_{\alpha\beta}^i * F_{\alpha\beta}^i = \sum_{\mu} \partial_{\mu} \partial^{\mu} \sum_{\nu} \partial_{\nu} \partial^{\nu} \log \det f$$

となる。インスタントン数の計算は、 $f \approx |x|^{-2}$ より $\mathbb{R}^4 = S^3 \times \mathbb{R}_{>0}$ とみなし、ストークスの定理を用いれば、 S^3 の面積要素を $d\Omega_x$ として

$$\begin{aligned} c_2(E) &:= -\frac{1}{16\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \sum_{i,\alpha,\beta} F_{\alpha\beta}^i * F_{\alpha\beta}^i \\ &= -\frac{1}{16\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \sum_{\mu} \partial_{\mu} \partial^{\mu} \sum_{\nu} \partial_{\nu} \partial^{\nu} \log \det f \\ &= -\frac{1}{16\pi^2} \int_{S^3} \sum_{\mu} dS_x^{\mu} \partial_{\mu} \sum_{\nu} \partial_{\nu} \partial^{\nu} \text{Tr} \log f \\ &= -\frac{8}{16\pi^2} \int_{S^3} d\Omega_x \text{Tr} E_k = -k \end{aligned}$$

となり、インスタントン数は k である。さらに、0次元ディラック方程式 $\hat{D}^{\dagger} \mathcal{V} = 0$ 及び規格化条件から無限遠 $|x| \rightarrow \infty$ で $u \rightarrow g \in SU(N)$ かつ、 $v \rightarrow 0$ であることがわかり、このことから $A \approx g^{-1} dg$ となり無限遠でピュアゲージとなっていることが示される。

また、 $\overline{D}D$ のグリーン関数は

$$G(x, y) = \frac{\mathcal{V}(x)^{\dagger} \mathcal{V}(y)}{4\pi^2 |x - y|^2}$$

と求められる。

逆にインスタントンから ADHM データを抽出するときは、同様に 4次元のディラック方程式

$$\overline{D}\phi = 0$$

の解を

$$\int d^4x \phi^{\dagger} \phi = E_k$$

で規格化すれば、これは独立な k 個の解を持ち、それを並べたものを ϕ と置き直せば $2N \times k$ 行列とみなすことができ、完全性条件

$$\phi(x) \phi^{\dagger}(y) = \delta(x - y) + DG(x, y) \overleftarrow{D}$$

をみtas。この ϕ を用いて次のように ADHM データを定める。まず ϕ を $N \times k$ 行列 ϕ_1, ϕ_2 を用いて

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

と表した時、 $\tilde{\phi} := (\phi_2 \quad -\phi_1)$ とする。このとき、

$$\begin{aligned} B_1 &:= \int d^4x \phi^\dagger(x_2 + ix_1) \phi \\ B_2 &:= \int d^4x \phi^\dagger(x_4 + ix_3) \phi \\ \tilde{\phi} &\approx -\frac{g^\dagger(I^\dagger J)\mathbf{x}^\dagger}{\pi|\mathbf{x}|^4} + \mathcal{O}(r^{-4}) \end{aligned}$$

となるように ADHM データ B_1, B_2, I, J を定めれば、これらは ADHM 方程式を満たす。ここで、 $g \in SU(N)$ は無限遠でのゲージ変換 $A \approx g^\dagger dg$ を決める元である。また、ADHM データから出発して、この方法でインスタントンを作り、そのインスタントンからまた ADHM データを作ると、元の ADHM データにたどり着く。逆に「インスタントン \rightarrow ADHM \rightarrow インスタントン」としても元のインスタントンにたどり着くことから、一意性及び完全性が示され、インスタントンのモジュライ空間と ADHM のモジュライ空間が 1 対 1 に対応していることが証明される。□

2.4 ADHM 構成の計算

この構成法を用いて、簡単な例を計算したい。ゲージ群が $SU(2)$ で、インスタントン数 1 のモジュライ空間は BPST 解とよばれ、ADHM 構成による次元の求め方より $\dim \mathcal{M}_{2,1}^{BRST} = 5$ であることがわかる。(枠付きモジュライ空間については 8) まず、ADHM データは B_1, B_2 とも 1×1 複素行列、つまり単なる \mathbb{C} の元となる。 I, J はそれぞれ $1 \times 2, 2 \times 1$ 複素行列であるが、 B_1, B_2 が可換なため、ADHM 方程式は

$$\begin{cases} II^\dagger - J^\dagger J = 0 \\ IJ = 0 \end{cases}$$

となる。解の一つを固定して

$$I = (\rho, 0), \quad J^\dagger = (0, \rho) \quad \rho \in \mathbb{R}$$

とすれば、0 次元ディラック作用素は

$$\hat{D}(x) := \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \\ (x^4 - ix^3) - \bar{B}_2 & -((x^2 + ix^1) - B_1) \\ (x^2 - ix^1) - \bar{B}_1 & (x^4 + ix^3) - B_2 \end{pmatrix}$$

となるので、ディラック方程式 $\hat{D}^\dagger V = 0$ は

$$\begin{pmatrix} \rho & 0 & x^4 + ix^3 - B_2 & x^2 + ix^1 - B_1 \\ 0 & \rho & -(x^2 - ix^1 - \bar{B}_1) & x^4 - ix^3 - \bar{B}_2 \end{pmatrix} V = 0$$

となり、規格化条件 $V^\dagger V = 0$ も考慮すれば解は

$$V = \frac{1}{\sqrt{\phi}} \begin{pmatrix} (x^4 - ix^3) - \bar{B}_2 & -((x^2 + ix^1) - B_1) \\ (x^2 - ix^1) - \bar{B}_1 & (x^4 + ix^3) - B_2 \\ -\rho & 0 \\ 0 & -\rho \end{pmatrix}$$

とすればよい。ここで、 ϕ は $\phi := \sum |x^\mu|^2 + \rho^2$ として決まる、規格化のための関数である。そこで、このディラック零モードを用いてインスタントン $A := V^\dagger dV$ を計算すれば、 $B_1 = b_2 + ib_1$, $B_2 = b_4 + ib_3$ として

$$A = \sum_\nu \frac{\sum_\mu i(x_\mu - b_\mu) \eta_{\nu\mu}^{(-)}}{\sum_\sigma |x_\sigma - b_\sigma|^2 + \rho^2} dx^\nu$$

となるのがわかる。そこで、曲率を計算すれば

$$F_{\mu\nu} = \frac{2i\rho^2}{(\sum_\sigma |x_\sigma - b_\sigma|^2 + \rho^2)^2} \eta_{\mu\nu}^{(-)}$$

となり ASD となるのがわかる。また、この式の形から ρ つまり I, J がインスタントンのサイズ (ソリトンとしての) B_1, B_2 が場所を表していることがわかる。そこで、 ρ を 0 に極限をとれば、対応するインスタントンは特異なものになり、このインスタントンはモジュライ空間の特異点に対応する。

2.5 ADHM 構成の例

この節ではゲージ群が $SU(N)$ でインスタントン数が k の、 \mathbb{R}^4 (ただし、無限遠でピュアゲージ $A \approx g^{-1}dg$ となるもの) に限定し、 S^4 上のものと思う。) 上のインスタントンのモジュライ空間を変えることで、対応する ADHM モジュライ空間がどのように変わるかを、いくつかの例 [10] で紹介する。

1. 1つ目はここまで議論してきたもので、単純に ASD 接続からなる空間をゲージ変換で割った商空間 $\mathcal{M}_{-,N,k}^{inst}$ が ADHM モジュライ空間

$$\mathcal{M}_{k,N}^{ADHM} := \mu_{\mathbb{R}}^{-1}(0) \cap \mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0) / SU(W) \times U(V)$$

と対応が付き、これは特異点を持つ多様体となり次元は前節のとおりである。

2. このモジュライ空間の無限遠でのグローバルなゲージ変換の分を固定したインスタントンのモジュライ空間、つまり枠付き (framed) モジュライ空間 $\mathcal{M}_0(N, k)$ は、ADHM データのゲージ変換を

$$B_\alpha \mapsto R^\dagger B_\alpha R (\alpha = 1, 2), I \mapsto R^\dagger I, J \mapsto JR \quad R \in U(V) (= U(k))$$

とした枠付き ADHM モジュライ空間

$$\mathcal{M}_0^{ADHM}(N, k) := \mu_{\mathbb{R}}^{-1}(0) \cap \mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0) / U(V)$$

と同相で、次元は $4Nk$ となりハイパーケーラー商になる。また、ADHM データに対する $GL(V)$ の作用を

$$B_\alpha \mapsto F^\dagger B_\alpha F \ (\alpha = 1, 2), \ I \mapsto F^\dagger I, \ J \mapsto JF \quad F \in GL(V)$$

とすれば、 $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)$ の幾何学的不変式論による商空間 (つまり $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)$ での閉 $GL(V)$ 軌道)

$$\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0) // GL(V)$$

は Kempf と Ness による定理から $\mu_{\mathbb{R}}^{-1}(0)/U(V) \cong \{\text{ADHM データの } GL(V) \text{ 閉軌道}\}$ となるので、

Proposition 2.11.

$$\mathcal{M}_0^{ADHM}(N, k) = \mu_{\mathbb{R}}^{-1}(0) \cap \mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)/U(V) \cong \mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0) // GL(V)$$

がいえる。

3 . ここまでの例では、特異なインスタントも含むようなモジュライ空間を考えてきたが、 $\mathcal{M}_0(N, k)$ のうち非特異なものにのみ制限したモジュライ空間 $\mathcal{M}_0^{reg}(N, k)$ は、 $\mathcal{M}_0^{ADHM}(N, k) \supset \{[M] \in \mathcal{M}_0^{ADHM}(N, k) \mid \phi \cdot M = M \ (\phi \in U(V)) \Rightarrow \phi = e\}$ と対応がつく。ここで e は $U(V)$ の単位元であり、これは安定化群が自明なものをあつめてきた部分集合ということになる。

4 . これに対して、

$$\mathcal{M}_\zeta^{ADHM}(N, k) := \mu_{\mathbb{R}}^{-1}(\zeta) \cap \mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)/U(V) \quad , \zeta \neq 0$$

は非特異なハイパーケーラー多様体で、Nekrasov と Schwarz により、非可換空間上のインスタントのモジュライ空間 $\mathcal{M}_\zeta(N, k)$ と一致する事がわかっている。 ζ は非可換定数に対応する。ここで ADHM データの安定性条件を次で定義する。

Definition 2.12. ADHM データ $[B_1, B_2, I, J]$ に対して、 $B_\alpha(S) \subset S$ ($\alpha = 1, 2$) かつ $\text{Im} I \subset S$ となるような 真部分空間 $S \subset V$, $S \neq V$ が存在しないとき、 $[B_1, B_2, I, J]$ は安定であるという。

このとき、 $\mathcal{M}^{ADHM}(N, k) := \{M \in \mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0) \mid M \text{ は安定}\} / GL(V)$ とすると、

$$\mathcal{M}^{ADHM}(N, k) \cong \mathcal{M}_\zeta^{ADHM}(N, k)$$

となる。また、写像 $\pi : \mathcal{M}_\zeta(N, k) \longrightarrow \mathcal{M}_0(N, k)$ が自然に存在し、特異点解消になっている。さらに、[10] の Theorem 2.1 より E を \mathbb{P}^2 上の $\text{rank } E = N$, $c_2(E) = k$ で l_∞ の近傍で局所自明なトーシオンフリーな層とし、 Φ を無限遠での枠 $\Phi : E|_{l_\infty} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{l_\infty}^{\oplus N}$ とするとき、 $\mathcal{M}(N, k) := \{(E, \Phi)\} / \text{isomorphism}$ とすれば、

$$\mathcal{M}(N, k) \cong \mathcal{M}^{ADHM}(N, k)$$

がわかる。 $\mathcal{M}(N, k)$ の局所自明な層をなす開集合は Donaldson により、 $\mathcal{M}_0^{reg}(N, k)$ と一致することがわかっている。

次の章において重要な役割を果たすのは $\mathcal{M}^{ADHM}(N, k) \cong \mathcal{M}_\zeta^{ADHM}(N, k)$ であり、これらが $N = 1$ のときは対応するインスタントンというのは存在しないが、 \mathbb{C}^2 の k 点でのヒルベルトスキーム $(\mathbb{C}^2)^{[k]}$ と見ることができ、さらに $J = 0$ となることも分かっている。

3 Seiberg-Witten PrepotentialのADHMデータを用いた求値法

ここでは超対称性が $\mathcal{N} = 2$ で、ゲージ群が $SU(N)$ という状況の下での Seiberg-Witten prepotential を計算したい。Seiberg-Witten prepotential とは場の作用を決定する物理学上重要な関数であり、AdS/CFT 相対性に関係し超弦理論と共形場の理論とをむすぶものである。[11] によって、Seiberg-Witten prepotential はゲージ群が $SU(2)$ のとき Higgs 場 Ψ の関数として、以下のように表される。

$$\mathcal{F}(\Psi) = \frac{i}{2\pi} \Psi^2 \log \frac{2\Psi^2}{e^3 \Lambda^2} - \frac{i}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_k \left(\frac{\Lambda}{\Psi} \right)^{4k} \Psi^2$$

ここで、 Λ と e は物理的な定数である。

この展開の中で現れる \mathcal{F}_k はインスタントン数 k のインスタントンの寄与であり、これを求めるのがこの章の目的である。

3.1 同変コホモロジー

今、求めたい \mathcal{F}_k は同変形式の積分を用いて表されるため、ここでは同変コホモロジーについて述べたい。そこで、 G をリー群、 \mathfrak{g} をそのリー環、 X を G が作用している n 次元多様体とする。

$\xi \in \mathfrak{g}$ に対し ξ^* を ξ に属する基本ベクトル場とすれば、これは定義より X の 1 パラメータ変換群 $e^{t\xi}$ で生成される。

ここで、多項式写像 $\alpha : \mathfrak{g} \rightarrow \Omega(X)$ に対して G の作用を

$$(g \cdot \alpha)(\xi) := g^*(\alpha(Ad_{g^{-1}}\xi)) \quad g \in G$$

と定める。ここで、 $Ad_{g^{-1}}$ は随伴作用である。このとき、 $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]$ を \mathfrak{g} 上の \mathbb{C} 値多項式環として、 α を $\mathbb{C}[\mathfrak{g}] \otimes \Omega(X)$ の元とみなし、 G 同変形式を以下で定める。

Definition 3.1. $\alpha \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}] \otimes \Omega(X)$ が G の作用で不変、つまり

$$g \cdot \alpha = \alpha \quad \forall g \in G$$

となるとき G 同変形式とよぶ。

次に同変形式の次数を以下で定義する。

Definition 3.2. 多項式写像 $\alpha : \mathfrak{g} \rightarrow \Omega(X)$ を $\mathbb{C}[\mathfrak{g}] \otimes \Omega(X)$ の元と見たとき、次数を同次な元 $P \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}], \beta \in \Omega$ に対して

$$\deg(P \otimes \beta) := 2 \deg(P) + \deg(\beta)$$

で定義する。

この同変形式に対して同変微分 \mathcal{D} を、ベクトル場 ξ^* の内部積を ι_{ξ^*} として

$$(\mathcal{D}\alpha)(\xi) := d(\alpha(\xi)) - \iota_{\xi^*}\alpha(\xi) \quad \xi \in \mathfrak{g}$$

で定めれば、 \mathcal{D} は同変形式の意味での次数を 1 つ上げる。

さらに次の命題が成り立つ。

Proposition 3.3. α を G 同変形式とすると、 $\mathcal{D}^2\alpha = 0$

Proof. $d^2 = 0$ かつ $\iota_{\xi^*}^2 = 0$ より、

$$(\mathcal{D}^2\alpha)(\xi) = -(d\iota_{\xi^*} + \iota_{\xi^*}d)\alpha(\xi)$$

となる。カルタンのホモトピー公式から右辺はリー微分となり、 α は G 同変であることから

$$-\mathcal{L}_{\xi^*}\alpha(\xi) = 0$$

となる。 □

よって、 G 同変形式と同変微分及び、Definition 5.2. で定めた同変形式の次数は微分複体を定める。

Definition 3.4. G 同変な $\mathbb{C}[\mathfrak{g}] \otimes \Omega(X)$ の元、同変微分 \mathcal{D} 及び $\deg(P \otimes \beta) = 2\deg(P) + \deg(\beta)$ $P \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}], \beta \in \Omega(X)$ で定まる微分複体のコホモロジーを X 上の G 同変コホモロジーという。

この同変形式に対して次の定理 [12] が知られている。

Theorem 3.5. $\alpha \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}] \otimes \Omega(X)$ と、 $\xi \in \mathfrak{g}$ に対して、 $\alpha_i(\xi) \in \Omega^i(X)$ を $\alpha(\xi) \in \Omega(X)$ の微分形式の意味での i 次成分とすると α が同変閉形式 (つまり、 $G \cdot \alpha = \alpha, \mathcal{D}\alpha = 0$) ならば、 $\alpha_n(\xi)$ は集合 $X_0 := \{x \in X | \xi_x^* = 0\}$ の外で完全形式となる。

よって、積分は境界および X_0 上の積分に帰着される。

ここで、 $x_0 \in X_0$ に対して $\mathcal{L}_{x_0} : T_{x_0}X_0 \rightarrow T_{x_0}X_0$ を $v \in T_{x_0}X_0$ に対して $\mathcal{L}_{x_0}(v) := [\xi^*, v]$ で定義する。

ξ^* を局所的に ξ^α を \mathfrak{g} のある基底についての ξ の成分としたとき、関数 T_α^i を用いて

$$\xi^* = \sum_{\alpha} \sum_i \xi^\alpha T_\alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

とあらわす。このとき $\xi^\alpha T_\alpha^i(x_0) = 0$ となることから、 $v = \sum_i v^i \partial / \partial x^i$ として

$$\mathcal{L}_{x_0}(v) := [\xi^*, v] = - \sum_{\alpha} \sum_{i,j} \xi^\alpha v^i \left(\frac{\partial T_\alpha^j}{\partial x^i} \right)_{x_0} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

と具体的に書き下せ、Hessian のようなものになっていることがわかる。この $\mathcal{L}_{\mathfrak{g}}$ を用いて Theorem 5.5. を応用して、以下の局所化公式 [12] を得る。

Theorem 3.6. X をコンパクトな n 次元多様体、 G をコンパクトなリー群、 α を G 同変な閉形式とする。このとき、 $\xi \in \mathfrak{g}$ に対し ξ^* が孤立零点のみを持つならば、

$$\int_X \alpha(\xi) = (-2\pi)^{\frac{n}{2}} \sum_{\mathbf{x}_0} \frac{\alpha_0(\xi)(\mathbf{x}_0)}{\det^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}\mathbf{x}_0}$$

となる。ここで、 $\alpha_0(\xi)$ は $\alpha(\xi)$ の 0 次成分。

3.2 Seiberg-Witten Prepotential と Nekrasov の分配関数

Seiberg-Witten prepotential の係数 \mathcal{F}_k を同変形式を用いて、計算できるかたちで表したい。ここで、前章で紹介した ADHM データを用いる。この ADHM データ $\mathbb{M} := (B_1, B_2, I, J)$ は、非可換空間上のインスタントのモジュライ空間との対応が得られる ADHM 方程式（前章第 5 節で 4 番目の例）

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbb{R}}(B_1, B_2, I, J) &:= \frac{i}{2}([B_1, B_1^\dagger] + [B_2, B_2^\dagger] + II^\dagger - J^\dagger J) = \zeta \\ \mu_{\mathbb{C}}(B_1, B_2, I, J) &:= [B_1, B_2] + IJ = 0 \end{aligned}$$

を満たしているとする。このとき、ADHM モジュライ空間 $\mathcal{M}_\zeta^{ADHM}(N, k)$ はなめらかなハイパーケーラー多様体となる。

そこで、 k 次反エルミート行列 M に対し自己共役な作用素 \mathbb{L} を \mathbb{M} を用いて

$$\mathbb{L} \cdot M := \{II^\dagger + J^\dagger J, M\} + \sum_{l=1,2} ([B_l, [B_l^\dagger, M]] + [B_l^\dagger, [B_l, M]])$$

と定めれば可逆な作用素となる。さらに ADHM データの空間上の 1 次微分形式

$$\mathbb{X} := \sum_{i=1,2} [B_i^\dagger, dB_i] + J^\dagger dJ - dII^\dagger - h.c.$$

に対して $Y := \mathbb{L}^{-1}\mathbb{X}$ とする。この Y を用いて $U(k)$ 共変微分

$$D_Y(\mathbb{M}) := (dB_1, dB_2, dI, dJ) + ([Y, B_1], [Y, B_2], YI, -JY)$$

を定義する。行列 B_1, B_2, I, J によるユークリッド空間に自然に入るケーラー計量

$$g(d\mathbb{M}^\dagger, d\mathbb{M}) := \text{tr} \left(\sum_{l=1,2} dB_l^\dagger dB_l + dI^\dagger dI + dJdJ^\dagger \right)$$

を用いて、この共変微分により ADHM モジュライ空間上にケーラー計量を

$$\tilde{g}(d\mathbb{M}^\dagger, d\mathbb{M}) := g(D_Y \mathbb{M}^\dagger, D_Y \mathbb{M})$$

と導入できる。

低エネルギーの状態では対称性の破れがおこり、ゲージ群 $SU(N)$ がカルタン部分群である T^{N-1} となる。モジュライ空間への T^{N-1} の作用を無限小変換

$$\delta B_i \sim 0, \delta I \sim -Iv, \delta J \sim vJ \quad v = \text{diag}(a_1, \dots, a_N), \sum a_i = 0$$

で定義し、これを BRST 変換とよぶ。この作用による T^{N-1} 同変微分を \mathcal{D}_{BRST} とし、同変 1 次形式を

$$\omega := \text{Re}(D_Y I \bar{v} I^\dagger + J^\dagger v D_Y J)$$

と定義する。このとき、 ω は計量 \tilde{g} について BRST 変換の双対 (つまり、BRST 変換の定めるベクトル場を ψ とすれば $\omega = \text{Re} \tilde{g}(\psi^\dagger, d\mathbb{M})$ となる。) となっている。このとき、Seiberg-Witten prepotential の係数 \mathcal{F}_k は

$$\mathcal{F}_k \cong \int_{\overline{\mathcal{M}}_\zeta^{ADHM}(N,k)} e^{-\mathcal{D}_{BRST}\omega}$$

と表されることが分かっている。ここで、 $\overline{\mathcal{M}}_\zeta^{ADHM}(N,k)$ は中心座標を原点に固定した非特異な k インスタントンによるモジュライ空間である。

Proposition 3.7. \mathcal{F}_k は非可換定数 ζ によらない。

Proof. $t \in \mathbb{R}_{>0}$ に対して

$$\mathcal{F}_k(t) := \int_{\overline{\mathcal{M}}_\zeta^{ADHM}(N,k)} e^{-\frac{1}{t}\mathcal{D}_{BRST}\omega}$$

を考えれば、

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}_k(t) = \frac{1}{t^2} \int_{\overline{\mathcal{M}}_\zeta^{ADHM}(N,k)} (\mathcal{D}_{BRST}\omega) e^{-\frac{1}{t}\mathcal{D}_{BRST}\omega}$$

となり、ライプニッツ公式から $\mathcal{D}_{BRST}e^{-\frac{1}{t}\mathcal{D}_{BRST}\omega} = 0$ より

$$(\mathcal{D}_{BRST}\omega)e^{-\frac{1}{t}\mathcal{D}_{BRST}\omega} = \mathcal{D}_{BRST}(\omega e^{-\frac{1}{t}\mathcal{D}_{BRST}\omega})$$

となるが、積分は次元次数の項しか寄与しないので、 \mathcal{D}_{BRST} のうち縮約のかかっている項は無視してよく、

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}_k(t) = \frac{1}{t^2} \int_{\overline{\mathcal{M}}_\zeta^{ADHM}(N,k)} d(\omega e^{-\frac{1}{t}\mathcal{D}_{BRST}\omega})$$

となる。これはストークスの定理から境界での積分に帰着するが、今境界は存在しないので

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}_k(t) = 0$$

となる。よって、 t によらないことがわかり ζ の変化を t の変化で吸収することができる。 \square

しかし、この BRST 変換の零点集合は孤立点にならず、局所化公式をうまくと用いることが出来ない。

そこで孤立零点を持たせるためにさらに $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in T^2$ の作用を導入し、BRST 変換を次のものに置き換える。

$$\delta B_i \sim \varepsilon_i B_i, \delta I \sim -Iv, \delta J \sim (v + \varepsilon)J$$

ここで、 $\varepsilon := \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ であり、 $t_i := e^{\varepsilon_i} \in T$, $t_v := \text{diag}(e^{a_1}, \dots, e^{a_n}) \in T^{N-1}$ とすれば、

$$B_i \mapsto t_i B_i, I \mapsto It_v, J \mapsto t_1 t_2 t_v^{-1} J$$

ともあわせる。

Definition 3.8. この変形した BRST 変換 $\tilde{\psi}$ を用いて \mathcal{F}_k の時と同様に同変形式及び同変微分を定義し、それらを $\tilde{\omega} := \text{Re}\tilde{g}(\tilde{\psi}^\dagger, d\mathbb{M})$, \mathcal{D}_{BRST^*} とする。そこで、 k インスタントンについての展開係数を

$$Z_k(v, \varepsilon_1, \varepsilon_2) := \int_{\mathcal{M}_\zeta^{ADHM}(N, k)} e^{-\mathcal{D}_{BRST^*} \tilde{\omega}}$$

とする母関数

$$Z(q, v, \varepsilon_1, \varepsilon_2) := 1 + \sum_{k=1}^{\infty} Z_k(v, \varepsilon_1, \varepsilon_2) q^k$$

を Nekrasov の分配関数と呼ぶ。

この Nekrasov の分配関数を求めることができれば、[3] により次の方法で \mathcal{F}_k を求めることが出来る。

Proposition 3.9. Nekrasov の分配関数 $Z(q, v, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ に対して、関数 $\mathcal{F}(q, v, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ を

$$\mathcal{F}(q, v, \varepsilon_1, \varepsilon_2) := \varepsilon_1 \varepsilon_2 \log Z(q, v, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

で定めれば、 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ の周りで解析的である。このとき、 \mathcal{F}_k は $\mathcal{F}(q, v, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ の $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ でのテーラー展開の係数である。

よって、分配関数の k インスタントンについての展開係数 Z_k を求めることが重要となる。

3.3 変形した BRST 変換の零点とヤング図形

今、 $T^2 \times T^{N-1}$ による作用の ADHM モジュライ空間上での固定点は、変換したものがゲージ同値でなくてはならない。そこで、 $\lambda : T^2 \times T^{N-1} \rightarrow U(V)$ を用いて変形した BRST 変換の固定点条件は

$$(t_1 B_1, t_2 B_2, It_v, t_1 t_2 t_v^{-1} J) = (\lambda(t)^{-1} B_1 \lambda(t), \lambda(t)^{-1} B_2 \lambda(t), \lambda(t)^{-1} I, J \lambda(t))$$

と表すことが出来る。この条件を用いて、 W 及び V を次のように固有空間分解する。

$$W_\lambda := \{w \in W | t_v^{-1}w = e^{-a_\lambda}w\}$$

$$V_\lambda(k, l) := \{v \in V | \lambda(t) \cdot v = t_1^k t_2^l e^{-a_\lambda}v\}$$

このとき、以下の命題が成り立つ。

Proposition 3.10. 固定点条件を満たす B_1, B_2, I, J は以下の写像を定める。

$$B_1 : V_\lambda(k, l) \longrightarrow V_\lambda(k-1, l)$$

$$B_2 : V_\lambda(k, l) \longrightarrow V_\lambda(k, l-1)$$

$$I : W_\lambda \longrightarrow V_\lambda(0, 0)$$

$$J : V_\lambda(k, l) \longrightarrow W_\lambda$$

Proof. 今、 $v \in V_\lambda(k, l)$ とする。このとき、 $\lambda(t)B_1v$ は固定点条件から $t_1^{-1}B_1\lambda(t)v$ となるので、定義より $t_1^{k-1}t_2^l e^{-a_\lambda}B_1v$ となり $B_1v \in V_\lambda(k-1, l)$ が言える。 B_2 についても同様である。

次に $w \in W_\lambda$ とすれば、同様に

$$\begin{aligned} \lambda(t)Iw &= It_v^{-1}w \\ &= Ie^{-a_\lambda}w \\ &= e^{-a_\lambda}Iw \end{aligned}$$

となり $Iw \in V_\lambda(0, 0)$ がわかる。

最後に $v \in V_\lambda(k, l)$ としたとき定義より

$$\lambda(t)v = t_1^k t_2^l e^{-a_\lambda}v$$

であるが、この両辺に左から J をかければ固定点条件より

$$t_1 t_2 t_v^{-1} Jv = t_1^k t_2^l e^{-a_\lambda} Jv$$

となる。よって、 $k=1, l=1$ のときは $Jv \in W_\lambda$ であり、その他の場合は $J=0$ となることが分かる。□

この命題から、 W_λ と $V_\lambda := \bigoplus_{k,l} V_\lambda(k, l)$ に制限した ADHM データ $B_{1\lambda}, B_{2\lambda}, I_\lambda, J_\lambda$ は ADHM 方程式をみたし、 $\dim W_\lambda = 1$ より $k_\lambda := \dim V_\lambda$ とすれば $\mathcal{M}_\zeta^{ADHM}(1, k_\lambda)$ の元とみなせる。各 λ に対して \mathbb{C}^2 の k 点でのヒルベルトスキーム $(\mathbb{C}^2)^{[k]}$ における議論 [10] を用い、 $J_\lambda = 0$ となることから ADHM 方程式 $\mu_{\mathbb{C}}(B_1, B_2, I, J) = 0$ は $[B_1, B_2] = 0$ となり、次の可換な図式を考えることが出来る。

$$\begin{array}{ccccc} & & \uparrow & & \uparrow \\ \longrightarrow & V_\lambda(k, l-1) & \xrightarrow{B_1} & V_\lambda(k-1, l-1) & \longrightarrow \\ & \uparrow B_2 & & \uparrow B_2 & \\ \longrightarrow & V_\lambda(k, l) & \xrightarrow{B_1} & V_\lambda(k-1, l) & \longrightarrow \\ & \uparrow & & \uparrow & \end{array}$$

この図式の各ベクトル空間 V_λ は、

「 $B_\alpha(S) \subset S$ ($\alpha = 1, 2$) かつ $\text{Im } I \subset S$ となるような 真部分空間 $S \subset V$, $S \neq V$ が存在しない」

という安定性条件から $B_{1\lambda}^p B_{2\lambda}^q i(1)$ ($p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) によって張られていることが分かり、以下の命題が導かれる。

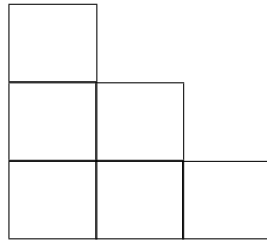
Proposition 3.11. $V(k, l)$ からなる複体に関して以下が成り立つ

- (1) $k > 0, l > 0$ ならば $V_\lambda(k, l) = 0$
- (2) 任意の $k, l \in \mathbb{Z}$ に対して $\dim V_\lambda(k, l) \leq 1$
- (3) $k \leq 0, l \leq 0$ の時、 $\dim V_\lambda(k, l) \geq \dim V_\lambda(k, l-1), \dim V_\lambda(k, l) \geq \dim V_\lambda(k-1, l)$
- (4) 零でないベクトル空間の間の写像は零写像でない。

この命題から各図式は k_λ 個の 1 次元ベクトル空間からなる、上や右に行くほど並んでいるベクトル空間が減っていくような図式となることから、 k_λ 個の箱からなるヤング図形と見ることが出来る。例えば

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & & & \\
 & & \uparrow & & & & \\
 0 & \longrightarrow & V_\lambda(0, -2) & \longrightarrow & 0 & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 0 & \longrightarrow & V_\lambda(0, -1) & \longrightarrow & V_\lambda(-1, -1) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & V_\lambda(0, 0) & \longrightarrow & V_\lambda(-1, 0) & \longrightarrow & V_\lambda(-2, 0) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

となる図式であれば、



に対応する。

よって、以上より変形した BRST 変換の ADHM モジュライ空間での固定点は、 k_λ 箱 ($\sum_{\lambda=1}^N k_\lambda = k = \text{インスタントン数}$) からなる N 個のヤング図形の族 $\{Y_\lambda\}$ で分類される。

今、ADHM データ B_1, B_2, I, J がヤング図形の族 $\{Y_\lambda\}$ で決められた固定点の時、ゲージ群 $U(k)$ は T^k に破れ

$$\lambda(t) = \text{diag}(e^{\Phi_1}, \dots, e^{\Phi_k})$$

と $\Phi_I \in T$, $I = 1, \dots, k$ を定めれば固定点条件は

$$\begin{cases} (\Phi_I - \Phi_J + \varepsilon_l) B_{IJ}^l = 0 \\ (\Phi_I - a_\lambda) I_{I\lambda} = 0 \\ (-\Phi_I + a_\lambda + \varepsilon) J_{\lambda I} = 0 \end{cases}$$

となる。

ここで、ヤング図形の箱を以下のように番号付けする。 Y_λ の左下の角の箱を 1 番目とし、順に右に一つずつ増やしていき、右端まで来たら一つ上の行の左端を次の番号とする。このとき、 I_λ 番目の箱の行と列を (下から 1 行、2 行 \dots 。左から 1 列、2 列 \dots 。と数える。) i_{I_λ} 行 j_{I_λ} 列とし、 Y_λ の i_λ 行に入っている箱の個数を ν_{i_λ} 、 j_λ 列に入っている箱の個数を ν'_{j_λ} で定める。

Proposition 3.12. Φ, B_1, B_2, I, J を以下で定める。

(1) Φ は以下の式

$$\Phi_{\sum_{i=1}^{\lambda-1} k_i + I_\lambda} = a_\lambda - (j_{I_\lambda} - 1)\varepsilon_1 - (i_{I_\lambda} - 1)\varepsilon_2$$

を満たす。

(2) B_1 の mn 成分 B_{mn}^1 は Y_1 から数えはじめて m 番目の箱の左に n 番目の箱があるとき以外は 0

(3) B_2 の mn 成分 B_{mn}^2 は Y_1 から数えはじめて m 番目の箱の下に n 番目の箱があるとき以外は 0

(4) I の λI 成分 $I_{\lambda I}$ は Y_1 から数えはじめて I 番目の箱が、 Y_λ の 1 番目の箱になるとき以外は 0

(5) J は恒に 0

このとき Φ, B_1, B_2, I, J は固定点条件の解

Proof. まず $(\Phi_I - \Phi_J + \varepsilon_l) B_{IJ}^l = 0$ を示す。

Y_1 から数え初めて、 I 番目と J 番目の箱が同じヤング図形 Y_λ に入っていないときは、(2)、(3) のルールより明らかに $B_{IJ}^l = 0$ となる。

よって、 I 番目と J 番目の箱が共に Y_λ に入っているとする。今、

$$\begin{aligned} & \Phi_{I_\lambda} - \Phi_{J_\lambda} + \varepsilon_1 \\ &= a_\lambda - (j_{I_\lambda} - 1)\varepsilon_1 - (i_{I_\lambda} - 1)\varepsilon_2 - a_\lambda + (j_{J_\lambda} - 1)\varepsilon_1 + (i_{J_\lambda} - 1)\varepsilon_2 + \varepsilon_1 \\ &= -(j_{I_\lambda} - j_{J_\lambda} - 1)\varepsilon_1 - (i_{I_\lambda} - i_{J_\lambda})\varepsilon_2 \end{aligned}$$

と計算でき、 $B_{IJ}^1 \neq 0$ のとき (2) のルールより、

$$\begin{cases} i_{I_\lambda} = i_{J_\lambda} \\ j_{I_\lambda} = j_{J_\lambda} + 1 \end{cases}$$

となるので $\Phi_{I_\lambda} - \Phi_{J_\lambda} + \varepsilon_1 = 0$ がわかる。

同様に

$$\Phi_{I_\lambda} - \Phi_{J_\lambda} + \varepsilon_2 = -(j_{I_\lambda} - j_{J_\lambda})\varepsilon_1 - (i_{I_\lambda} - i_{J_\lambda} - 1)\varepsilon_2$$

であり、(3) のルールから $B_{IJ}^1 \neq 0$ のとき、

$$\begin{cases} i_{I_\lambda} = i_{J_\lambda} + 1 \\ j_{I_\lambda} = j_{J_\lambda} \end{cases}$$

となるので $\Phi_{I_\lambda} - \Phi_{J_\lambda} + \varepsilon_2 = 0$ がわかる。

次に $(\Phi_I - a_\lambda)I_{I_\lambda} = 0$ を示す。

Y_1 から数えはじめて I 番目の箱が、 Y_λ に入らないときは $I_{I_\lambda} = 0$ となるので、 I 番目の箱は Y_λ に入っているとす。このとき、

$$\begin{aligned} \Phi_I - a_\lambda &= a_\lambda - (j_{I_\lambda} - 1)\varepsilon_1 - (i_{I_\lambda} - 1)\varepsilon_2 - a_\lambda \\ &= -(j_{I_\lambda} - 1)\varepsilon_1 - (i_{I_\lambda} - 1)\varepsilon_2 \end{aligned}$$

と計算でき、 $I_{I_\lambda} \neq 0$ のとき (4) のルールから $i_{I_\lambda} = j_{I_\lambda} = 1$ となるので、 $\Phi_I - a_\lambda = 0$ がわかる。

(5) のルールより $(-\Phi_I + a_\lambda + \varepsilon)J_{\lambda I} = 0$ は明らかなので、(1) から (5) で定めた Φ, B_1, B_2, I, J が固定点条件の解となることが分かる。□

さらに ADHM 方程式を用いて ADHM モジュライ空間上の固定点が導き出される。

3.4 分配関数の計算

ここまでの節で Nekrasov の分配関数を求めるために、変形した BRST 変換の固定点を求めてきた。その固定点を x_0 をする。固定点では BRST 変換の寄与がなくなることから $\mathcal{D}_{BRST^*} = d$ となり、 $e^{-\mathcal{D}_{BRST^*}\tilde{\omega}}$ の展開において 0 次の項である 1 のみが微分形式の意味で 0 次の項となる。そこで、同変コホモロジーの節で出てきた局所化公式を用いれば

$$Z_k = \sum_{x_0} \frac{1}{\det \mathcal{L}_{x_0}}$$

となる。(分母の $1/2$ 乗がなくなるのは、Theorem 5.6 では実で考えていたものだが、ここでは複素として考えているため。) \mathcal{L}_{x_0} の ADHM モジュライ空間上の x_0 における接空間 $T_{x_0}\mathcal{M}_\zeta^{ADHM}(N, k)$ での作用を考え、そこでの指標から固有値を得ることで行列式を計算したい。

ここで、 Q を T^2 の 2 次元表現空間として以下の複体を考える。

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Hom}(V, Q \otimes V) & & \\ & & \oplus & & \\ \text{Hom}(V, V) & \xrightarrow{a} & \text{Hom}(W, V) & \xrightarrow{b} & \text{Hom}(V, V) \otimes \wedge^2 Q \\ & & \oplus & & \\ & & \text{Hom}(V, \wedge^2 Q \otimes W) & & \end{array}$$

ここで、写像 a, b はそれぞれ

$$a(\xi) := \begin{pmatrix} \xi B_1 - B_1 \xi \\ \xi B_2 - B_2 \xi \\ \xi I \\ 0 \end{pmatrix}, b \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ i \\ j \end{pmatrix} = [B_1, C_1] + [C_1, B_2] + Ij$$

で表される。このとき、 a は $GL(V)$ によるゲージ変換の固定点での無限小変換、 b は $\mu_{\mathbb{C}}$ の無限小変換であり、

$$\mathcal{M}^{ADHM}(N, k) \cong \mathcal{M}_{\zeta}^{ADHM}(N, k)$$

を思い出せば $\text{Ker } b / \text{Im } a$ が $T_{x_0} \mathcal{M}_{\zeta}^{ADHM}(N, k)$ となる。

さらに、固定点で V, W は $T^2 \times T^{N-1}$ の表現空間となり、その指標計算をすれば求めたい $\det \mathcal{L}_{x_0}$ が求まる。今、

$$\begin{aligned} & T_{x_0} \mathcal{M}_{\zeta}^{ADHM}(N, k) \\ &= \text{Hom}(V, V) \otimes (Q - \wedge^2 Q - 1) + \text{Hom}(W, V) + \text{Hom}(V, W) \otimes \wedge^2 Q \\ &= V^* \otimes V \otimes (Q - \wedge^2 Q - 1) + W^* \otimes V + V^* \otimes W \otimes \wedge^2 Q \end{aligned}$$

であり、前節でのヤング図形の議論から

$$V = \sum_{\lambda=1}^N \sum_{j_{\lambda}=1}^{\nu_{1\lambda}} \sum_{i_{\lambda}=1}^{\nu'_{j_{\lambda}}} T_1^{-j_{\lambda}+1} T_2^{-i_{\lambda}+1} T_{a_{\lambda}}$$

$$W = \sum_{\lambda=1}^N T_{a_{\lambda}}$$

$$Q = T_1 + T_2, \wedge^2 Q = T_1 T_2$$

となる。ここで、 T_l は ε_l の生成作用素、 $T_{a_{\lambda}}$ は a_{λ} の生成作用素である。

Proposition 3.13. 2つのヤング図形 $Y_{\lambda}, Y_{\tilde{\lambda}}$ に対して、 $h(s), v(s)$ $s \in Y_{\lambda}$ を

$$h(s) := \nu_{i_{\lambda}} - j_{\lambda} \quad v(s) := \tilde{\nu}'_{j_{\lambda}} - i_{\lambda}$$

で定義するとき、

$$T_{x_0} \mathcal{M}_\zeta^{ADHM}(N, k) = \sum_{\lambda, \bar{\lambda}=1}^N \sum_{s \in Y_\lambda} (T_{a_{\lambda\bar{\lambda}}} T_1^{-h(s)} T_2^{v(s)+1} + T_{a_{\bar{\lambda}\lambda}} T_1^{h(s)+1} T_2^{-v(s)})$$

となる。

ここで、 $a_{\lambda\bar{\lambda}} := a_\lambda - a_{\bar{\lambda}}$ であり、 i_λ, j_λ は s の Y_λ での行と列を表し、 $\tilde{\nu}'_{j_\lambda}$ は $Y_{\bar{\lambda}}$ における j_λ 列目の箱の数である。ただし、 $Y_{\bar{\lambda}}$ の j_λ 列目に箱がない場合は $\tilde{\nu}'_{j_\lambda} = 0$ とする。

Proof. まず $V^* \otimes V \otimes (Q - \wedge^2 Q - 1)$ を計算する。各ベクトル空間の $T^2 \times T^{N-1}$ による展開から、

$$\begin{aligned} & V^* \otimes V \otimes (Q - \wedge^2 Q - 1) \\ &= \sum_{\lambda=1}^N \sum_{i_\lambda=1}^{\nu_{i_\lambda}} \sum_{j_\lambda}^{\nu_{j_\lambda}} T_1^{j_\lambda-1} T_2^{i_\lambda} T_{a_\lambda}^{-1} \sum_{\bar{\lambda}=1}^N \sum_{j_{\bar{\lambda}}=1}^{\nu_{j_{\bar{\lambda}}}} \sum_{i_{\bar{\lambda}}=1}^{\nu'_{j_{\bar{\lambda}}}} T_1^{-j_{\bar{\lambda}}+1} T_2^{-i_{\bar{\lambda}}} T_{a_{\bar{\lambda}}} (T_1 - 1)(1 - T_2) \\ &= \sum_{\lambda, \bar{\lambda}=1}^N T_{a_{\bar{\lambda}\lambda}} \sum_{i_\lambda=1}^{\nu_{i_\lambda}} \sum_{j_\lambda}^{\nu_{j_\lambda}} T_1^{j_\lambda-1} T_2^{i_\lambda} \sum_{j_{\bar{\lambda}}=1}^{\nu_{j_{\bar{\lambda}}}} T_1^{-j_{\bar{\lambda}}+1} (T_1 - 1) (T_2^{\nu'_{j_{\bar{\lambda}}}+1} - T_2) \\ &= \sum_{\lambda, \bar{\lambda}=1}^N T_{a_{\bar{\lambda}\lambda}} \sum_{i_\lambda=1}^{\nu_{i_\lambda}} \sum_{j_{\bar{\lambda}}=1}^{\nu_{j_{\bar{\lambda}}}} T_1^{j_{\bar{\lambda}}} \left\{ \sum_{j_\lambda}^{\nu_{j_\lambda}} (T_1^{j_\lambda+1} - T_1^{j_\lambda}) \right\} (T_2^{i_\lambda - \nu'_{j_{\bar{\lambda}}}} - T_2^{i_\lambda}) \\ &= \sum_{\lambda, \bar{\lambda}=1}^N T_{a_{\bar{\lambda}\lambda}} \sum_{i_\lambda=1}^{\nu_{i_\lambda}} \sum_{j_{\bar{\lambda}}=1}^{\nu_{j_{\bar{\lambda}}}} (T_1^{-j_{\bar{\lambda}} + \nu_{i_\lambda} + 1} - T_1^{-j_{\bar{\lambda}} + 1}) (T_2^{i_\lambda - \nu'_{j_{\bar{\lambda}}}} - T_2^{i_\lambda}) \\ &= \sum_{\lambda, \bar{\lambda}=1}^N T_{a_{\bar{\lambda}\lambda}} \sum_{i_\lambda=1}^{\nu_{i_\lambda}} \sum_{j_{\bar{\lambda}}=1}^{\nu_{j_{\bar{\lambda}}}} \left\{ (T_1^{-j_{\bar{\lambda}} + \nu_{i_\lambda} + 1} T_2^{i_\lambda - \nu'_{j_{\bar{\lambda}}}} + T_1^{-j_{\bar{\lambda}} + 1} T_2^{i_\lambda}) \right. \\ &\quad \left. - T_1^{-j_{\bar{\lambda}} + 1} (T_2^{i_\lambda - \nu'_{j_{\bar{\lambda}}}} - T_2^{i_\lambda}) - (T_1^{-j_{\bar{\lambda}} + \nu_{i_\lambda} + 1} - T_1^{-j_{\bar{\lambda}} + 1}) T_2^{i_\lambda} \right\} \end{aligned}$$

がわかるが、

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda, \bar{\lambda}=1}^N T_{a_{\bar{\lambda}\lambda}} \sum_{i_\lambda=1}^{\nu_{i_\lambda}} \sum_{j_{\bar{\lambda}}=1}^{\nu_{j_{\bar{\lambda}}}} T_1^{-j_{\bar{\lambda}}+1} (T_2^{i_\lambda - \nu'_{j_{\bar{\lambda}}}} - T_2^{i_\lambda}) \\ &= \sum_{\lambda, \bar{\lambda}=1}^N T_{a_{\bar{\lambda}\lambda}} \sum_{j_{\bar{\lambda}}=1}^{\nu_{j_{\bar{\lambda}}}} T_1^{-j_{\bar{\lambda}}+1} \sum_{i_\lambda=1}^{\nu'_{j_{\bar{\lambda}}}} (T_2^{-i_\lambda+1} - T_2^{\nu'_{1_\lambda} - i_\lambda + 1}) \\ &= W^* \otimes V - \sum_{\lambda, \bar{\lambda}=1}^N T_{a_{\bar{\lambda}\lambda}} \sum_{j_{\bar{\lambda}}=1}^{\nu_{j_{\bar{\lambda}}}} \sum_{i_\lambda=1}^{\nu'_{j_{\bar{\lambda}}}} T_1^{-j_{\bar{\lambda}}+1} T_2^{\nu'_{1_\lambda} - i_\lambda + 1} \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda, \tilde{\lambda}=1}^N T_{a_{\tilde{\lambda}\lambda}} \sum_{i_\lambda=1}^{\nu_{1\lambda}} \sum_{j_{\tilde{\lambda}}=1}^{\nu_{1\tilde{\lambda}}} (T_1^{-j_{\tilde{\lambda}}+\nu_{i_\lambda}+1} - T_1^{-j_{\tilde{\lambda}}+1}) T_2^{i_\lambda} \\ &= V^* \otimes W \otimes \wedge^2 Q - \sum_{j_{\tilde{\lambda}}=1}^{\nu_{1\tilde{\lambda}}} \sum_{i_\lambda=1}^{\nu'_{j_{\tilde{\lambda}}}} T_1^{-\nu_{1\tilde{\lambda}}+j_{\tilde{\lambda}}} T_2^{i_\lambda} \end{aligned}$$

となることから、

$$\begin{aligned} R &:= V^* \otimes V \otimes (Q - \wedge^2 Q - 1) + W^* \otimes V + V^* \otimes W \otimes \wedge^2 Q \\ &= \sum_{\lambda, \tilde{\lambda}=1}^N T_{a_{\tilde{\lambda}\lambda}} \left\{ \sum_{i_\lambda=1}^{\nu_{1\lambda}} \sum_{j_{\tilde{\lambda}}=1}^{\nu_{1\tilde{\lambda}}} (T_1^{-j_{\tilde{\lambda}}+\nu_{i_\lambda}+1} T_2^{i_\lambda-\nu'_{j_{\tilde{\lambda}}}} + T_1^{-j_{\tilde{\lambda}}+1} T_2^{i_\lambda}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j_{\tilde{\lambda}}=1}^{\nu_{1\tilde{\lambda}}} \sum_{i_\lambda=1}^{\nu'_{j_{\tilde{\lambda}}}} (T_1^{-j_{\tilde{\lambda}}+1} T_2^{\nu'_{i_\lambda}-i_\lambda+1} + T_1^{-\nu_{1\tilde{\lambda}}+j_{\tilde{\lambda}}} T_2^{i_\lambda}) \right\} \end{aligned}$$

と計算できる。ここで、 T_1 の次数が正の部分を R_+ 、零または負の部分を R_- とする。このとき、 $R = R_+ + R_-$ であり、 $m_{i_\lambda} := \min(\nu_{1\tilde{\lambda}}, \nu_{i_\lambda})$ として

$$\begin{aligned} R_+ &= \sum_{\lambda, \tilde{\lambda}=1}^N T_{a_{\tilde{\lambda}\lambda}} \sum_{i_\lambda=1}^{\nu_{1\lambda}} \sum_{j_{\tilde{\lambda}}=1}^{m_{i_\lambda}} T_1^{-j_{\tilde{\lambda}}+\nu_{i_\lambda}+1} T_2^{i_\lambda-\nu'_{j_{\tilde{\lambda}}}} \\ &= \sum_{\lambda, \tilde{\lambda}=1}^N \sum_{s \in Y_\lambda} T_{a_{\tilde{\lambda}\lambda}} T_1^{h(s)+1} T_2^{-v(s)} \end{aligned}$$

となる。また、ここまでと同様の計算を λ と $\tilde{\lambda}$ を入れ替え、ヤング図形にそつての足し上げの方向を変えることで

$$\begin{aligned} R &= \sum_{\lambda, \tilde{\lambda}=1}^N T_{a_{\lambda\tilde{\lambda}}} \left\{ \sum_{i_\lambda=1}^{\nu_{1\lambda}} \sum_{j_{\tilde{\lambda}}=1}^{\nu_{1\tilde{\lambda}}} (T_1^{j_{\tilde{\lambda}}-\nu_{i_\lambda}} T_2^{-i_\lambda+\nu'_{j_{\tilde{\lambda}}}+1} + T_1^{j_{\tilde{\lambda}}+1} T_2^{-i_\lambda}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j_{\tilde{\lambda}}=1}^{\nu_{1\tilde{\lambda}}} \sum_{i_\lambda=1}^{\nu'_{j_{\tilde{\lambda}}}} (T_1^{\nu_{1\tilde{\lambda}}-j_{\tilde{\lambda}}+1} T_2^{-i_\lambda+1} + T_1^{j_{\tilde{\lambda}}} T_2^{-\nu'_{i_\lambda}+i_\lambda}) \right\} \end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned} R_- &= \sum_{\lambda, \tilde{\lambda}=1}^N T_{a_{\lambda\tilde{\lambda}}} \sum_{i_\lambda=1}^{\nu_{1\lambda}} \sum_{j_{\tilde{\lambda}}=1}^{m_{i_\lambda}} T_1^{j_{\tilde{\lambda}}-\nu_{i_\lambda}} T_2^{-i_\lambda+\nu'_{j_{\tilde{\lambda}}}+1} \\ &= \sum_{\lambda, \tilde{\lambda}=1}^N \sum_{s \in Y_\lambda} T_{a_{\lambda\tilde{\lambda}}} T_1^{-h(s)} T_2^{v(s)+1} \end{aligned}$$

がわかる。 □

この命題から、 $\det \mathcal{L}_{x_0}$ は対数をとることで計算され、以下の定理が成り立つ。
[6]

Theorem 3.14. *Nekrasov* の分配関数 Z_k は $E(s) := a_{\lambda\tilde{\lambda}} - \varepsilon_1 h(s) + \varepsilon_2(v(s) + 1)$ を用いて

$$Z_k(v, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \sum_{\{Y_\lambda\}} \prod_{\lambda\tilde{\lambda}}^N \prod_{s \in Y_\lambda} \frac{1}{E(s)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - E(s))}$$

と表される。

この定理によって、ヤング図形という(次数が高いときは計算が面倒だが)単純な組み合わせ論的な計算で分配関数が得られる事が分かり、ひいては今まで Seiberg-Witten 曲線による代数幾何的な方法からしか得られなかった Seiberg-Witten pre-potential が得られる。

3.5 簡単な例

ここでは、 $N = 2$ 、 $k = 1$ というもっとも簡単な例について計算したい。このとき、取りうるヤング図形の組は (1). $Y_1 = \square, Y_2 = \emptyset$ か (2). $Y_1 = \emptyset, Y_2 = \square$ である。

そこでまず (1) の場合を考えると、 Y_1 の中にしか s は入らないので、 $E(s)$ の計算は $\lambda = \tilde{\lambda} = 1$ のとき、 $h(s) = 0, v(s) = 0$ より

$$E(s) = a_{11} + \varepsilon_2 = \varepsilon_2$$

であり、 $\lambda = 1, \tilde{\lambda} = 2$ のときは $h(s) = 0, v(s) = -1$ より

$$E(s) = a_{12}$$

となる。ここで、(1) と (2) を変えると 1 と 2 が入れ替わるだけなので、

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{1}{\varepsilon_2(\varepsilon - \varepsilon_2)} \frac{1}{a_{12}(\varepsilon - a_{12})} + \frac{1}{\varepsilon_1(\varepsilon - \varepsilon_1)} \frac{1}{a_{21}(\varepsilon - a_{21})} \\ &= \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 (a_{12}(\varepsilon - a_{12}))} + \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 (a_{21}(\varepsilon - a_{21}))} \\ &= \frac{2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 (\varepsilon^2 - a_{12}^2)} \end{aligned}$$

と求めることが出来る。この場合、 $\mathcal{F}_1 = 1/2$ となる。

N や k の大きい時も、対象なヤング図形同士の $E(s)$ は ε_α や a_λ について対称性があり、計算を減らすことができる。

謝辞

まず、学部4年生の時から幾何に疎い私のセミナーにお付き合い下さり、今日まで丁寧にご指導して下さいました菅野浩明先生に大いに感謝の意を表明したい。

博士前期課程2年のアドバイザーであり、少人数セミナーにおいてご指導して下さいました服部哲弥先生にも併せて感謝の意を表明したい。

最後に、多元数理に来て頂いた際に質問に答えて下さった浜中真志氏、少人数セミナーで共に議論した伊藤俊成君、萩原浩平君、大谷重人君、及び幾何学に関して多くのアドバイスを頂いた、三鍋聡司君と野原雄一氏にも感謝の意を表明する。

参考文献

- [1] M.F.Atiyha, N.J.Hitchin, V.G.Drinfeld and Y.I.Manin; Construction of instantons; Phys. Lett. 65A (1978), 185-187.
- [2] C.Bartocci and M.Jardim; A Nahm transform for instantons over ALE spaces; "Clifford Algebras: Applications to Mathematics, Physics, and Engineering"; R. Ablamowicz, ed., Progress in Mathematical Physics vol.34, Birkhauser, Boston (2004), 155-166.
- [3] N.Nekrasov; Sieberg-Witten Prepotential from Instanton Counting; hep-th/0206161.
- [4] H.Nakajima and K.Yoshida; INSTANTON COUNTING ON BLOWUP, I; arXiv:math.AG/0306198.
- [5] R.Flume and R.Poghossian; An Algorithm for the Microscopic Evaluation of the Coefficients of the Seiberg-Witten Prepotential; arXiv:hep-th/0208176.
- [6] U.Bruzzo, F.Fucito, J.F.Morales and A.Tanzini; Multi-Instanton Calculus and Equivariant Cohomology; arXiv:hep-th/0211108.
- [7] 浜中真志; ADHM/Nahm 構成法とその双対性; <http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/hamanaka/> .
- [8] 小林昭七; 接続の微分幾何とゲージ理論; 裳華房, 1989.
- [9] H.Osborn; Nucl. Phys. B 159 (1979) 497
- [10] H.Nakajima; Lectures on Hilbert Schemes of Points on Surfaces; AMS University LECTURE Series Vol.18 1999.
- [11] N.Seiberg and E.Witten; Electric-magnetic duality, monopole condensation, and confinement in N=2 supersymmetric Yang-Mills theory; arXiv:hep-th/9407087
- [12] N.Berline, E.Getzler and M.Vergne; Heat Kernels and Operators; Berlin Germany: Springer (1996).
- [13] R.Flume, R.Poghossian and H.Storch; The coefficients of Seiberg-Witten Prepotential as intersection numbers (?)*; arXiv:hep-th/0110240.