ORBIFOLD COMPACTIFICATION OF STRING THEORY AND LOW ENERGY EFFECTIVE THEORY

学籍番号　1929　京都大学素粒子論研究室　桧垣徹太郎

概 要

超弦理論は現在の所、重力の量子論を唯一無矛盾に含む、統一理論の候補である。しかし、摂動論的に安定な真空は無限に縮退していて、どのような真空（4 次元模型）が実現されるのか、といった物理的な指導原理は現在のところ不明のままである。それゆえ、現実的な模型探索へのアプローチとして、摂動論的超弦理論の現象論的側面が研究されている。

そして、摂動論的な弦理論の性質だけでなく、摂動論の延長として、非摂動論的な性質も発見された。例えば、TypeIIA、TypeIIB、$SO(32)$ TypeI、$SO(32)$ Heterotic、$E_8 \times E_8$ Heterotic の 5 つの理論を結び付ける string duality の発見、さらには open string の両端を固定している D-brane の発見もある。また、string duality の発見に伴い、超弦理論の強結合極限として M 理論が提唱された。M 理論は超弦理論の 1 つの一面とも、全ての無矛盾な超弦理論を含んだ統一的な理論とも考えられている。しかしその全貌は明らかになっていない。その後、その M 理論と現象論の繋がりも研究され始めた。一方、D-brane の発見は、超弦理論を様々な点で一層進歩させた。現象論的な部分としても、D-brane は大いに研究、活用され、弦理論から現実的な模型を出すことが、更に熱心に研究されるようにもなった。このような新たな理論的枠組みの現象論的性質を解析し、それ以前の模型と比較することは重要である。

本論文では、摂動論的（$E_8 \times E_8$） Heterotic string 理論と、Type IIB orientifold 理論の、現象論的性質についてレビューを行う。特に、これら超弦理論を元にした、4 次元の低エネルギー $N = 1$ supersymmetry（SUSY）有効理論においては、どのような Kähler potential、gauge kinetic function、摂動論的 superpotential（Yukawa coupling）が出てくるのか結果をまとめた。

また、moduli 場（dilaton 場を含む）の真空期待値の決定（安定化）についても、特に述べておいた。これらの場の真空期待値は次の 2 つの点で重要である。

- これらの場の期待値は、現実的な gauge coupling、Yukawa coupling の値や、超弦理論の compact 化の scale を決める。特に、D-brane を使った模型では、これらの場の期待値の決定は重要である。
- これらの場の安定化は、SUSY breaking とも関係がある。

しかし、これらの場は、SUSY があると（低エネルギー有効理論としても）摂動論的には superpotential を持ち得ず、安定化が困難である。そこで、今までも様々な試みがされてきが、安定化はするものの欲しい値は出ていない。それゆえ、dilaton 場や moduli 場の安定化について、新たな試みを行うことにする。本論文では、$E_8 \times E_8$ Heterotic string 理論に加え、Type IIB orientifold 理論についても安定化について調べた。特に後者の方は twisted moduli 場が大きな役割を果たしている。

目 次

1 Introduction

超弦理論は重力の量子論を無矛盾に含む、統一理論の候補とされている。それゆえ、超弦理論は多くの人々に興味を持たれ、盛んに研究されてきた。また、超弦理論は 10 次元の時空で無矛盾に定義されており、現実的に観測されている 4 次元時空を導き出すには、時空を余計な 6 次元分 compact 化しなければならない。しかし、時空を 4 次元に compact 化した際、摂動論的に安定な真空が無数に出てきてしまう。現在もこの事は問題で、どのような真空が本当の超弦理論の真空か分かっていない。現実的な 4 次元超弦理論模型の実現のための、物理的な指導原理は不明のままである。そこで現在も、現実的な模型探索のため、超弦理論を現象論に応用する試みがなされている。確かに、摂動論的に扱っていると、安定な 4 次元の真空は無数に出てくる。しかし、超弦理論を現象論に応用し、現実的な実験結果と比べれば、無数の真空の中から数少ない幾らかの模型が選ばれるはずである。

まず 1980 年代は、超弦理論の摂動論的性質の多くが解明された。現象論的な立場からは、摂動論的 Heterotic string 理論の性質がよく研究された。その理由は、まず、 Heterotic string 理論は、閉弦だけの理論で、$SO(32)$TypeI に比べて簡単な事がまず挙げられる。そして、Hetrerotic string 理論が巨大な（$E_8 \times E_8$ or $SO(32)$）gauge 群を持っており、この gauge 群の中に標準模型の gauge 群（$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$）が含まれていると思われるからである。特に、$E_8 \times E_8$ Heterotic string 理論は、その E_8 の部分群に $E_6, SO(10), SU(5)$ を含み、特に、E_6 大統一理論（GUT）との関係から一層盛んに研究されるようになった。特にそこでは、4 次元理論への compact 化の方法も盛んに研究された。また、ところで、標準模型には hierarchy 問題がある。それを解消する 1 つの自然な方法は、（場の理論で記述可能な）低エネルギーで、supersymmmetry（SUSY）がある事である。特に、標準模型のような chiral な理論を作ろうとすれば、SUSY の数は 4 次元で $N = 1$ でなければならない。そこで、4 次元で $N = 1$ SUSY を残す観点からも compact 化は研究された。例えば、orbifold compact 化や、Calabi-Yau compact 化が研究された。（また、その他にも世界面上の自由なフェルミオンを用いた fermionic construction[1]、そして $N = 2$, 2 次元共形場の理論（CFT）を用いた Gepner model[2] がある。）特に、摂動論的 Heterotic string 理論の orbifold compact 化は、模型を作るのが他に比べて簡単で、現象論的に最も盛んに研究された。それは、orbifold は固定点を除き、至るところで平坦だからである。更にそれだけではなく、orbifold の計量も 6 次元トーラスと同じに書けるので、簡単に弦の運動方程式を解けるからである。また、orbifold は Calabi-Yau 多様体と全く無関係なものではなく、ある極限で orbifold が Calabi-Yau 多様体に一致することが知られている。よって、Calabi-Yau compact 化の本質をつかむ上でも、orbifold compact 化は重要であると思われる。

そして、1990 年代になると、摂動論の延長としての非摂動論的性質も発見された。例えば、TypeI 理論（TypeIIA、 TypeIIB orientifold 理論）の D-brane の発見がそれである。D-brane は、開弦の両端をある方向に固定している物体である。また、その D-brane 上の低エネルギー有効理論は、Yang-Mills 理論になる事が知られている。さらに、同じ種類の D-brane がたくさん重なれば重なるほど、D-brane 上で大きな gauge 群が存在するようになる。するとそれまで TypeIIA、 TypeIIB、 TypeI 理論には登場し得なかった巨大な gauge 群が存在するようになり、D-brane の研究が盛んにされるようになった。また、超弦理論の摂動論によらない構成的定式

化として、行列模型も提唱された。これは今も多いに研究されており、発展が待ち望まれる。そして、これまでに分かっている 5 つの理論が、すべて string duality によってつながることも発見された。そう考えると、無矛盾な超弦理論を非摂動効果もいれて、1 つにまとめるような、統一的な理論が存在すると考える事もできる。それが M 理論である。（無論これは 1 つの見方で、単に超弦理論の 1 つの側面と見ることもできる。）M 理論は、超弦理論の強結合極限として提唱された。超弦理論は、10 次元で無矛盾に定義された理論であるが、11 次元で定義された理論だと考えられている。そして、その低エネルギー有効理論は、11 次元 $N=1$ supergravity（SUGRA）だと考えられている。しかし、その全貌は明らかにはなっていない。

これらの発見により、現在では D-brane を使った現象論が盛んに研究されるようになった。また、11 次元 $N=1$ SUGRA を元にした、4 次元有効理論も盛んに研究されるようになった。そして、TypeI 理論、M 理論自体の解析だけではなく、string duality の存在から、これまでに研究された Heterotic string との関係も研究されるようになった。これらのように、様々な模型と比較する事は、超弦理論の真の現実的な 4 次元模型を探す上で重要である。

本論文では、主に、盛んに研究された $E_8 \times E_8$ Heterotic string 理論の orbifold compact と、それに付随した現象論的レビューを行う。更に、TypeIIB orientifold 模型がが Heterotic string 理論と異なる部分を、簡単にレビューする。

section2 では、non-cpmpact な $E_8 \times E_8$ Heterotic string 理論の説明を行う。

そして section3 では、6 次元トーラス上に compact 化した Heterotic string 理論の説明と、その問題点について説明する。

section4 では、4 次元に orbifold compact 化した $E_8 \times E_8$ Heterotic tring 理論の説明と、その低エネルギー有効理論の説明を行う。特に、$N=1$ SUSY の低エネルギー有効理論で、どのような Kähler potential、gauge kinetic function、摂動論的 superpotential（Yukawa coupling）が出てくるのか結果をまとめた。特に、現実的な gauge coupling や、compact 化の scale を決める上で重要な、dilaton 場を含む moduli 場の安定化についても述べておいた。そして、これらの場の安定化は SUSY breaking とも関連しており、重要である。しかし、摂動論的にはこれらの場は superpotential を持たず、安定化が困難である。それゆえ、現象論的に無矛盾な、現実的に欲しい模型（数値）は出来上がっていない。以上の理由により、安定化について、TypeIIB orientifold 模型と並べて、再考することにする。

そして、section5 では TypeIIB orientifold 模型についても簡単に結果だけ述べておいた。特にここでは、dilaton 場を含む moduli 場の安定化についても、新しい試みを考えた。またここでは、twisted moduli と呼ばれる場が、重要な役割を果たす。

そして Appendix では、世界面上のインスタントン解から出る、古典作用の計算を載せておいた。そしてまた、moduli 場の安定化の際に起こり得る gravity mediation を用いた SUSY breaking の soft term の一般公式を載せておいた。

2 non-compact $E_8 \times E_8$ Heterotic string 理論

ここでは non-compact な場合の $E_8 \times E_8$ Heterotic string 理論の説明を行う。

2.1 ボゾン弦

まずボゾン弦を説明する。

2.1.1 Polyakov 作用

まず点粒子を元に考える。0 次元の広がりを持った点粒子が時空を伝播すると 1 次元の世界線を描く。D 次元時空で質量 m を持った点粒子の世界線上での作用は、

$$S_{pp} = -m \int d\tau \sqrt{-G_{\mu\nu}(X)\frac{dX^\mu}{d\tau}\frac{dX^\nu}{d\tau}} \qquad \mu、\nu = 0 \sim D-1 \tag{2.1}$$

と書ける。

ここで、τ は世界線上での固有時間であり、$G_{\mu\nu}(X)$ は D 次元の本当の時空の背景計量である。また、$X^\mu(\tau)$ は時空間における点粒子の座標であり、時空間に世界線がどのように埋め込まれているかを指定する。つまり、世界線における τ という位置が、時空間で見ると X^μ に対応しているという意味である。更に、この作用は点粒子の作る世界線の長さを与えており、これに対する変分原理は、世界線を最小の長さにする運動を求めることを意味する。

今度は（ボゾン）弦について考える。

1 次元的な広がりを持った紐が時空を伝播すると、2 次元の世界面を作る。閉弦ならチューブのようになり、開弦なら平面のようになる。点粒子の作用を拡張した、D 次元時空における紐の世界面上での作用は、

$$S_{NG} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int dt d\sigma \sqrt{-\mathrm{det} G_{\mu\nu}(X)\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu} \qquad \mu、\nu = 0 \sim D-1 \qquad a、b = 0、1 \tag{2.2}$$

で与えられる。この作用は南部・後藤作用と呼ばれている。

ここで t、σ は世界面上での時間的そして空間的座標である。例えばこの時、閉弦の場合は

$$-\infty < t < \infty \qquad 0 \le \sigma \le \pi \tag{2.3}$$

と取れる。また点粒子の時と同様に $G_{\mu\nu}(X)$ は D 次元の本当の時空の背景計量である。

$X^\mu(t、\sigma)$ は時空間における紐の上の 1 点 1 点の座標であり、時空間に世界面がどのように埋め込まれているかを指定する。つまり、世界面における $(t、\sigma)$ という位置が、時空間で見ると X^μ に対応しているという意味である。

また、$1/2\pi\alpha'$ は基本弦のテンション（単位長さあたりのエネルギー）で、α' は Regge slope と呼ばれる定数である。

そして、

$$h_{ab} \equiv G_{\mu\nu}(X)\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \tag{2.4}$$

は時空の計量によって世界面上に導入される induced metric である。

そう考えると、この作用は紐の作る世界面の面積を与えており、これに対する変分原理は世界面の面積を最小にする運動を求めることを意味する。

以下簡単のため、D 次元時空の背景の計量を、

$$G_{\mu\nu}(X) = \eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, \underbrace{1, 1 \cdots, 1}_{D-1\ \text{個}}) \tag{2.5}$$

とする。つまり、平坦な時空の周りでの揺らぎを見ることにする。

この時、世界面上に世界面上での計量（補助場）g_{ab} を導入し S_{NG} を、

$$S_{polyakov} = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int dt d\sigma \sqrt{-g} g^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu \qquad g \equiv \mathrm{det} g_{ab} \tag{2.6}$$

と違う形に書くことができる。この作用はポリャコフ作用と呼ばれる。

この形から分かるように、世界面上の場の理論としては、X^μ はスカラー場の性質を持つ。

ここでこの作用が古典論的に等価なことを確かめる。この $S_{polyakov}$ に対し g_{ab} ついて積分（変分）すると、

$$\delta_g S_{polyakov} = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int dt d\sigma \sqrt{-g}\delta g^{ab}[-\frac{1}{2}g_{ab}g_{cd}h^{cd} + h_{ab}] \tag{2.7}$$

となることが分かる。

この時、$\delta_g S_{polyakov} = 0$ が g_{ab} に対する運動方程式で、

$$\delta_g S_{polyakov} = 0 \Rightarrow h_{ab} = \frac{1}{2}g_{ab}g_{cd}h^{cd} \tag{2.8}$$

となる。

この時、式 (2.8) の両辺に対して行列式を取り、さらに平方根を取ると、

$$2\sqrt{-h} = \sqrt{-g}g_{cd}h^{cd} \tag{2.9}$$

となる。（同様に $h \equiv \mathrm{det} h_{ab}$ である）これを式 (2.6) に代入すると、式 (2.2) の S_{NG} が得られる。

これからは、$S_{polyakov}$ を元に考える。その理由は作用に場が二次でのみ入っており経路積分が可能だからである。（しかし、平坦でない時空の場合は作用に $G_{\mu\nu}(X)$ が入り容易ではなくなることに注意しておく。）

2.1.2 世界面上の対称性

まず、この作用には、世界面上での局所座標不変性がある。すなわち、

$$\sigma^a \to \sigma^{a\prime} = \sigma^a + \epsilon^a(t, \sigma) \qquad a = 0, 1 \tag{2.10}$$

に対して場が、

$$\begin{aligned}\delta X^\mu &= -\epsilon^a \partial_a X^\mu \\ \delta g_{ab} &= -g_{cb}\partial_a \epsilon^c - g_{ac}\partial_b \epsilon^c - \epsilon^c \partial_c g_{ab}\end{aligned} \tag{2.11}$$

と変換する。

これによって g_{ab} の自由度を 2 つなくすことができ、

$$g_{ab} = \exp[2\phi(t,\sigma)]\eta_{ab} \qquad \eta_{ab} = \mathrm{diag}(-1,1) \tag{2.12}$$

という gauge（conformal gauge）を取ることができる。

さらにこれだけではなく、局所 scale 不変性（Weyl 不変性）

$$g_{ab}{}' = \exp[2\omega(t,\sigma)]g_{ab} \tag{2.13}$$

が存在する。

これら 2 つの対称性が存在することは「弦理論の物理的な内容は (t,σ) によらない」と言うことを意味する。

よって古典論的には g_{ab} の自由度がなくなり、いつでも世界面上で局所的に平坦な計量

$$g_{ab} = \eta_{ab} \tag{2.14}$$

を取ることができる。

さらに、conformal gauge を取っても計量を変えない conformal 変換がさらにある。（これは後で超弦のところで簡単に話す。）

実は、量子論的にはこれらの対称性に一般的にアノマリーが存在する。しかし、ボゾン弦の理論なら D=26 でアノマリーの無い理論になることが知られている。（ただしタキオンはある）

そうしてこれらの対称性を使い、conformal gauge の時に式 (2.6) の作用を

$$S_{polyakov} = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int dt d\sigma \partial_a X^\mu \partial^a X_\mu \qquad \mu = 0\sim 25 \tag{2.15}$$

と書くことができる。（もちろん gauge 固定に伴うゴーストの寄与があるが、ここでは省く）

添字の上げ下げは η_{ab} で行っている。$\phi(t,\sigma)$ の自由度が無くなるのは、局所 Weyl 不変性のおかげである。

さらに理論を、

$$t = -i\tau \tag{2.16}$$

とユークリッド化し、

$$z = \exp[2(\tau - i\sigma)] \qquad (-\infty < \tau < \infty \qquad 0 \le \sigma \le \pi) \tag{2.17}$$

を使って書くと、

$$S_E = \frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2 z \partial_z X^\mu \partial_{\bar z} X_\mu \qquad \mu = 0\sim 25 \tag{2.18}$$

と書ける。ここで $d^2 z \equiv dz d\bar z$ である。

2.2 超弦理論

ここからは超弦理論の作用を考える。

（Ramond(R)、Neveu-Schwarz(NS) フェルミオンを用いた形式（RNS 形式）を使う）

超弦理論の場合、ボゾン弦と違うのは、

- 世界面上の作用にフェルミオン的自由度があり、世界面上の超対称性変換（SUSY 変換）がある
- D=10 の時にアノマリーが無い、タキオンフリーで無矛盾な理論を作ることができる
- TypeIIA、TypeIIB、$SO(32)$ TypeI、$SO(32)$ Hetero、$E_8 \times E_8$ Hetero の 5 つの無矛盾な理論がある
- 時空間の理論が SUSY を持つ。つまり時空間におけるフェルミオンが出てくる。（ボゾン弦の時はボゾンしか出てこない）

等の点である。

2.2.1 超弦理論の作用（TypeIIA、TypeIIB、$SO(32)$ TypeI）

まず世界面上での Minkowski 的な超重力理論を考える。

その理由は、物理的内容が世界面上での座標によらず、フェルミオン的自由度が無矛盾に入った理論を作りたいからである。

この時、作用は次のものである。

$$\begin{aligned}
&S = S_0 + S_1 + S_2 \\
&S_0 = -1/2\pi \int d^2\sigma (-g)^{1/2} [g^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu + i\bar{\Psi}^\mu \rho^a \partial_a \Psi_\mu] \\
&S_1 = \quad -1/\pi \int d^2\sigma (-g)^{1/2} \bar{\chi}_a \rho^b \rho^a \Psi^\mu \partial_b X_\mu \\
&S_2 = \quad -1/4\pi \int d^2\sigma (-g)^{1/2} \bar{\Psi}^\mu \Psi_\mu \bar{\chi}_a \rho^b \rho^a \chi_b
\end{aligned} \tag{2.19}$$

ただし、$\alpha' = 1/2$ と置いている。

ここで、Ψ^μ は世界面上の Majorana スピノールであり、$\bar{\Psi}^\mu$ は、その Dirac 共役である。

また Majorana-Weyl スピノール ψ^μ_R、ψ^μ_L を使って、

$$\Psi^\mu = (\psi^\mu_R, \psi^\mu_L)^T \tag{2.20}$$

と書ける。

そして、ρ^A は 2 次元のガンマ行列であり、

$$\rho^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \rho^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \{\rho^A, \rho^B\} = 2\eta^{AB}\mathbf{1}_{2\times 2} \tag{2.21}$$

である。ここで、zweivein e_a^A（$g_{ab}=e_a^A e_b^B \eta_{AB}$ を満たす）の逆行列 e_A^a を使い、

$$\rho^a = \rho^A e_A^a \tag{2.22}$$

としてある。

また、χ_a は世界面上での gravitino である。

この作用は、局所一般座標変換対称性に加え、次のような局所 Weyl 変換対称性がある。

$${g_{ab}}' = \exp[2\omega(t,\sigma)]g_{ab} \tag{2.23}$$

$${\chi_a}' = \exp[\frac{1}{2}\omega(t,\sigma)]\chi_a \tag{2.24}$$

$$\Psi^{\mu\prime} = \exp[-\frac{1}{2}\omega(t,\sigma)]\Psi \tag{2.25}$$

そして、次のような局所 SUSY 変換に対して対称性がある。

$$\delta_\xi X^\mu = \bar{\xi}\Psi \tag{2.26}$$

$$\delta_\xi \Psi^\mu = -\rho^a \xi[\partial_a X^\mu - \bar{\Psi}\chi_a] \tag{2.27}$$

$$\delta_\xi \chi_a = \partial_a \xi \tag{2.28}$$

$$\delta_\xi e_a^A = -2i\bar{\xi}\rho^A \chi_a \tag{2.29}$$

また、$\xi(t,\sigma)$ は局所 SUSY 変換のパラメーターであり、世界面上の Majorana スピノールである。

さらに局所 superconformal 変換

$$\delta_\eta \chi_a = i\rho_a \eta(t,\sigma) \tag{2.30}$$

に対しても対称性がある。ここで、$\eta(t,\sigma)$ は世界面上の Majorana スピノールである。

ボゾン弦の時と同様にこの作用を簡単にすることを考える。

まず局所座標変換性を使って、世界面上での計量を conformal gauge に取る。それと同時に変換性 (2.28)、(2.30) を用いて、世界面上の gravitino の自由度を消す。

すると gauge 固定された作用は、（先ほどと同様にユークリッド化して考えると）

$$S_E = \frac{1}{4\pi}\int d^2\omega(\frac{2}{\alpha'}\partial_\omega X^\mu \partial_{\bar{\omega}} X_\mu + \psi_R^\mu \partial_{\bar{\omega}} \psi_{\mu R} + \psi_L^\mu \partial_\omega \psi_{\mu L}) \qquad \mu = 0〜9 \tag{2.31}$$

と書ける。ここで、$\omega = \sigma + i\tau$ ある。ここでは α' を陽に書いた。ただし gauge 固定に伴うゴーストの項は省いている

ここで、ψ_R^μ、ψ_L^μ は（元の Minkowski 的な世界面上での）Majorana-Weyl スピノールで、1 成分のフェルミオン場である。

また、この時、例えば閉弦の場合

$$-\infty < \tau < \infty \qquad 0 \leq \sigma \leq \pi \tag{2.32}$$

である。

この作用から Gliozzi-Scherk-Olive（GSO）射影をすると、TypeIIA、TypeIIB の理論を作ることができる。さらに、TypeIIB 理論に世界面上のパリティ不変性を課すと TypeI の理論を作ることができる。

Heterotic string 理論の場合については後で考える。

2.2.2 境界条件（RNS セクター）

この時、運動方程式は

$$\begin{aligned}\partial_{\bar{\omega}}\partial_{\omega}X^{\mu} &= 0\\ \partial_{\bar{\omega}}\psi^{\mu}_{R} &= 0\\ \partial_{\omega}\psi^{\mu}_{L} &= 0\end{aligned} \tag{2.33}$$

となることが分かる。

つまり運動方程式の解として X^{μ} は、

$$X^{\mu}(\omega,\bar{\omega}) = X^{\mu}_{R}(\omega) + X^{\mu}_{L}(\bar{\omega}) \tag{2.34}$$

の調和関数であることがわかる。

そして、ψ^{μ}_{R}（ψ^{μ}_{L}）は（反）正則な関数であることが分かる。

ここで、時空をコンパクト化していない閉弦の場合の境界条件を考える。

ボゾン的自由度に対して、

$$X^{\mu}(\tau,\sigma+\pi) = X^{\mu}(\tau,\sigma) \tag{2.35}$$

である。

フェルミオン的自由度は、R セクター、NS セクターがある。各々のセクターに対して

$$\begin{aligned}\psi^{\mu}_{R}(\omega+\pi) &= \quad\psi^{\mu}_{R}(\omega) &\qquad \mathrm{R}\\ \psi^{\mu}_{R}(\omega+\pi) &= -\psi^{\mu}_{R}(\omega) &\qquad \mathrm{NS}\end{aligned} \tag{2.36}$$

となる。$\psi^{\mu}_{L}(\bar{\omega})$ も同様である。

閉弦の時には左向きのモード（L）と右向きのモード（R）は独立である。

次に開弦の場合を考える。世界面の領域を、

$$-\infty < \tau < \infty \qquad 0 \leq \sigma \leq \frac{\pi}{2} \tag{2.37}$$

とする。

開弦には境界があるため、作用を変分して運動方程式を出す際に、境界からの表面項が消えるための条件

$$\partial_{\sigma}X^{\mu}(\tau,\sigma) = 0, \qquad \sigma = 0, \frac{\pi}{2} \tag{2.38}$$

を課す。（これを Neumann 条件という）

またフェルミオン的自由度については、

$$\begin{array}{lll} \psi_R^\mu(\sigma,\tau) = \ \ \psi_L^\mu(\sigma,\tau), & \sigma = 0, \pi/2 & \mathrm{R} \\ \psi_R^\mu(\sigma,\tau) = -\psi_L^\mu(\sigma,\tau), & \sigma = 0, \pi/2 & \mathrm{NS} \end{array} \tag{2.39}$$

となる。

これらの条件のため、開弦は左向きのモード（L）と右向きのモード（R）は独立でなくなる。

2.2.3 （超）共形変換

ここからは話を閉弦のみに絞る。

演算子積展開（OPE）

まず、式 (2.31) の作用を、$z = \exp[2(\tau - i\sigma)]$ を使って、

$$S_E = \frac{1}{4\pi}\int d^2z(\frac{2}{\alpha'}\partial_z X^\mu \partial_{\bar{z}} X_\mu + \psi_R^\mu \partial_{\bar{z}} \psi_{\mu R} + \psi_L^\mu \partial_z \psi_{\mu L}) \qquad \mu = 0 \sim 9 \tag{2.40}$$

と書くことができる。

この時、量子化を行う。まず、式 (2.40) の作用を用い、

$$0 = \int [dXd\psi d\bar{\psi}d(\mathrm{ghost})]\frac{\delta}{\delta X^\mu(z,\bar{z})}[\exp(-S_E - S_{ghost})X_\nu(z',\bar{z}')] \tag{2.41}$$

等を計算すれば次の事がわかる。（ψ_R^μ、ψ_L^μ も同様）

$$\begin{aligned} X_\mu(z,\bar{z})X_\nu(0,0) &= \ :X_\mu(z,\bar{z})X_\nu(0,0): -\frac{\alpha'}{2}\eta_{\mu\nu}\ln|z|^2 \\ \psi_{\mu R}(z)\psi_{\mu R}(0) &= \ :\psi_{\mu R}(z)\psi_{\mu R}(0): +\frac{\eta_{\mu\nu}}{z} \\ \psi_{\mu L}(\bar{z})\psi_{\mu L}(0) &= \ :\psi_{\mu L}(\bar{z})\psi_{\mu L}(0): +\frac{\eta_{\mu\nu}}{\bar{z}} \end{aligned} \tag{2.42}$$

これを演算子積展開（OPE）と呼ぶ。

ここで、

$$\begin{aligned} :X_\mu X_\nu(0,0): &= \lim_{z\to 0}[X_\mu(z,\bar{z})X_\nu(0,0) + \frac{\alpha'}{2}\eta_{\mu\nu}\ln|z|^2] \\ :\psi_{\mu R}\psi_{\mu R}(0): &= \lim_{z\to 0}[\psi_{\mu R}(z)\psi_{\mu R}(0) - \frac{\eta_{\mu\nu}}{z}] \\ :\psi_{\mu L}\psi_{\mu L}(0): &= \lim_{\bar{z}\to 0}[\psi_{\mu L}(\bar{z})\psi_{\mu L}(0) - \frac{\eta_{\mu\nu}}{\bar{z}}] \end{aligned} \tag{2.43}$$

である。

これを正規順序積 (confomal normal oderd product）と言い、特異性のないものになっている。

共形変換

この時、この作用が持っている対称性は、

$$z \to f(z), \qquad (\bar{z} \to \bar{f}(\bar{z})) \tag{2.44}$$

に対して不変である。
　これを共形変換という。
　無限小変換

$$f(z) = z + \epsilon(z) \tag{2.45}$$

に対して場は、

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon X_\mu \quad &= -\epsilon(z)\partial X_\mu(z) - \bar{\epsilon}(\bar{z})\bar{\partial}X_\mu(\bar{z}) \\ \delta_\epsilon \psi_{\mu R}(z) &= -\epsilon(z)\partial\psi_{\mu R}(z) - 1/2\psi_{\mu R}(z)\partial\epsilon(z) \\ \delta_\epsilon \psi_{\mu L}(\bar{z}) &= -\bar{\epsilon}(\bar{z})\bar{\partial}\psi_{\mu L}(\bar{z}) - 1/2\psi_{\mu L}(\bar{z})\bar{\partial}\bar{\epsilon}(\bar{z}) \end{aligned} \tag{2.46}$$

と変換する。
　一般に、conformal ウェイト (h,0) を持った primary field $\mathcal{O}(z)$ は

$$\delta_\epsilon \mathcal{O}(z) = -\epsilon(z)\partial\mathcal{O}(z) - h\mathcal{O}(z)\partial\epsilon(z) \tag{2.47}$$

と変換する。
　この変換を生成するカレントは、

$$T_B = -\frac{1}{\alpha'}(\partial X^\mu)^2(z) - \frac{1}{2}\psi_R^\mu \partial\psi_{\mu R}(z) \tag{2.48}$$

である。（反正則側も同様）
　この時、conformal ウェイト (h,0) を持った primaly field $\mathcal{O}(z)$ の OPE は

$$T_B(z)\mathcal{O}(0) \sim \frac{h}{z^2}\mathcal{O}(0) + \frac{1}{z}\partial\mathcal{O}(0) \tag{2.49}$$

である。（実際に X, ψ で確かめると良い。）ここで、$\sim$ は $z \to 0$ での特異部分のみをとる事を表わす。

超共形変換

　更に超共形変換があり、場は次のように変換する。

$$\begin{aligned} \delta_\eta X_\mu \quad &= \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}[\eta(z)\psi_{\mu R}(z) + \eta^*(\bar{z})\psi_{\mu L}(\bar{z})] \\ \delta_\eta \psi_{\mu R}(z) &= -\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\eta(z)\partial X_\mu(z) \\ \delta_\eta \psi_{\mu L}(\bar{z}) &= -\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\eta^*(\bar{z})\bar{\partial}X_\mu(\bar{z}) \end{aligned} \tag{2.50}$$

ここで $\eta(z)$、$\eta^*(\bar{z})$ は世界面上の Majorana-Weyl スピノールで、超共形変換のパラメーターである。

また、この変換を生成するカレントは

$$T_F = i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\psi_R^\mu \partial X_\mu(z) \tag{2.51}$$

である。（反正則側も同様）

ここまで書いた表式はすべて正規順序積を取っていることに注意されたい。

さらに、

$$T_B(z) = \sum_{m\in\mathbf{Z}} L_m z^{-m-2} \tag{2.52}$$

$$T_F(z) = \sum_{r\in\mathbf{Z}+\nu} G_r z^{-r-3/2}, \qquad \nu = 0 \qquad \text{for R}, \qquad \nu = \frac{1}{2} \qquad \text{for NS} \tag{2.53}$$

とそれぞれローラン展開する。

この L_m、G_r を super Virasoro 演算子と呼び、

$$L_m = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{m+1} T_B(z) \tag{2.54}$$

$$G_r = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{r+1/2} T_F(z) \tag{2.55}$$

で与えられる。ここで、周回積分は $z=0$ 周りでとっている。

式 (2.48)、(2.51) の形を思い出し、式 (2.42) と (2.54)、(2.55) を用いると一般的に

$$T_B(z)T_B(0) \sim \frac{c}{2z^4} + \frac{2}{z^2}T_B(0) + \frac{1}{z}\partial T_B(0) \tag{2.56}$$

$$T_B(z)T_F(0) \sim \frac{3}{2z^2}T_F(0) + \frac{1}{z}\partial T_F(0) \tag{2.57}$$

$$T_F(z)T_F(0) \sim \frac{2c}{3z^3} + \frac{2}{z}T_B(0) \tag{2.58}$$

と OPE を書くことができる。

ここで c はセントラルチャージと呼ばれる量で、具体的には $c = 3\mathrm{D}/2$ である。

また、$\sim$ は $z \to 0$ で特異な振る舞いを示すものだけを書いていることを意味する。

すると、L_m、G_r は次の代数を満たすことが分かる。

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n}, + \frac{c}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,o} \tag{2.59}$$

$$\{G_r, G_s\} = 2L_{r+s}, + \frac{c}{12}(4r^2-1)\delta_{r+s,o} \tag{2.60}$$

$$[L_m, G_r] = \frac{m-2r}{2}G_{m+r} \tag{2.61}$$

これらを super Virasoro 代数と呼ぶ。

実は、このセントラルチャージは、世界面上での局所 Weyl 変換のアノマリーの係数になっている。つまり、理論全体（ゴースト含む）で c=0 のときアノマリーフリーで無矛盾な理論となる。

それを見るため、一般的に、D 次元時空で考える。

場 X 1 つで c=1、場 ψ 1 つで $c=\frac{1}{2}$ を持っている。つまり D 次元時空の時 X,ψ 全体で（この場合 L、R とも）$c=3D/2$ を持っている。

また、世界面上の局所座標変換の gauge 固定の際に現れる bc ゴーストは $c=-26$ を持っている。

そして世界面上の局所 SUSY 変換の gauge 固定の際に現れる $\beta\gamma$ ゴーストは c=11 を持っている。

この時、全体のセントラルチャージ数は

$$c=\underbrace{3D/2}_{X^\mu,\psi^\mu}+\underbrace{(-26)}_{bc}+\underbrace{11}_{\beta,\gamma}=\frac{3}{2}(D-10) \tag{2.62}$$

となり、結局 D=10 の時、$c=0$ となる。超弦理論が 10 次元で無矛盾な理論なのはこのためである。

付け加えておくと、ボゾン弦の場合は X、bc だけなので、

$$c=D-26 \tag{2.63}$$

となる。よって D=26 の時、c=0 でアノマリーフリーとなる。

2.3 $E_8\times E_8$ Heterotic string 理論

ここでは $E_8\times E_8$ Heterotic string 理論の説明を行う。

2.3.1 $E_8\times E_8$ Heterotic string 理論

この理論には閉弦のみ存在する。つまり、左向き波と右向き波は独立である。

世界面上に次の場がある。

$$X^\mu(=X_R^\mu(t-\sigma)+X_L^\mu(t+\sigma)) \qquad \psi_R^\mu(t-\sigma) \qquad \mu=0\sim9 \tag{2.64}$$

X^μ は世界面上のスカラー場（時空間でみれば紐の座標に当る）であり、ψ_R^μ は世界面上の Majorana-Weyl フェルミオンである。

そして、$E_8\times E_8$ という gauge 自由度に対応する

$$X_L^I(t+\sigma) \qquad I=1\sim16 \qquad or \qquad \lambda_L^A(t+\sigma) \qquad A=1\sim32 \tag{2.65}$$

という場が更にある。

$X_L^I(t+\sigma)$ は世界面上のスカラー場であり、λ_L^A は世界面上の Majorana-Weyl フェルミオンである。

Heterotic string を構築する際には X_L^I、あるいは λ_L^A どちらか一方のみを使う。

まず λ_L^A を使う場合について考える。

この時、世界面上での（ユークリッド化された）作用は、

$$S = \frac{1}{4\pi}\int d^2z(\frac{2}{\alpha'}\partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu + \psi_R^\mu \bar{\partial}\psi_{\mu R} + \lambda_L^A \partial \lambda_L^A) \tag{2.66}$$

である。

これより、この時の OPE は次のように与えられる。

$$X_\mu(z,\bar{z})X_\nu(0,0) \sim -\frac{\alpha'}{2}\eta_{\mu\nu}\ln|z|^2 \tag{2.67}$$

$$\lambda^A(\bar{z})\lambda^B(0) \sim \frac{\delta^{AB}}{\bar{z}} \tag{2.68}$$

$$\psi_{\mu R}(z)\psi_{\nu R}(0) \sim \frac{\eta_{\mu\nu}}{z} \tag{2.69}$$

そしてこの時、対称性のカレントは、

$$T_B = -\frac{1}{\alpha'}(\partial X^\mu)^2 - \frac{1}{2}\psi_R^\mu \partial \psi_{\mu R} \tag{2.70}$$

$$\tilde{T}_B = -\frac{1}{\alpha'}(\bar{\partial} X^\mu)^2 - \frac{1}{2}\lambda_L^A \bar{\partial}\lambda_L^A \tag{2.71}$$

$$T_F = i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\psi_R^\mu \partial X_\mu \tag{2.72}$$

となる。

つまり右向き波には超共形変換性があるが、左向き波には超共形変換性がない。

この時、右向き波に対するセントラルチャージは、

$$c_R = \underbrace{15}_{X^\mu,\psi^\mu} + \underbrace{(-26)}_{bc} + \underbrace{11}_{\beta,\gamma} = 0 \tag{2.73}$$

となり、また左向き波は超共形変換性がないので、

$$c_L = \underbrace{10}_{X^\mu} + \underbrace{16}_{X^I \text{ or } \lambda^A} + \underbrace{(-26)}_{bc} = 0 \tag{2.74}$$

となって、アノマリーフリーになっている。

2.3.2 境界条件（gauge 自由度部分）

そして境界条件を考える。右向きモードの ψ は前に説明した NS、R に対応する境界条件を置く。つまり右向きモードには NS セクター、R セクターがある。

そして、左向きモードの gauge フェルミオンに対しては境界条件を

$$\lambda^A(\omega+\pi) = \eta\lambda^A(\omega) \;\; A = 1\sim 16, \qquad \eta'\lambda^A(\omega) \;\; A = 17\sim 32 \tag{2.75}$$

と、それぞれ独立に課す。ここで $\eta, \eta' = \pm 1$ である。

つまり左向きモードには gauge フェルミオンに対し (NS, NS')、(NS, R')、$(R, NS')(R, R')$ のセクターがあることになる。

また余談ではあるが、

$$\lambda^A(\omega+\pi) = \pm\lambda^A(\omega), \qquad A = 1\sim 32 \tag{2.76}$$

と境界条件を課すと、$SO(32)$ Heterotic string 理論を作ることができる。

2.3.3 モード展開

話を $E_8 \times E_8$ Heterotic string 理論に戻し、場を次のようにモード展開する。

$$X^\mu(z,\bar{z}) = x^\mu - i\frac{\alpha'}{2}p^\mu \ln|z|^2 + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\left(\frac{\alpha_n^\mu}{n}z^{-n} + \frac{\tilde{\alpha}_n^\mu}{n}\bar{z}^{-n}\right) \tag{2.77}$$

$$\psi_R^\mu(z) = \sum_{r=\mathbf{Z}+\nu}\psi_r^\mu z^{-r-\frac{1}{2}} \tag{2.78}$$

$$\lambda_L^A(\bar{z}) = \sum_{r=\mathbf{Z}+\nu}\lambda_r^A \bar{z}^{-r-\frac{1}{2}} \tag{2.79}$$

ここで、$\mu = 0\sim 9$、$A = 1\sim 32$ であり、x^μ は弦の重心座標である。

また、この non-compact の場合、振動子のゼロモードと重心運動量演算子との関係は、

$$\alpha_0^\mu = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}p_R^\mu \;,\;\; \tilde{\alpha}_0^\mu = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}p_L^\mu \qquad p_R^\mu = p_L^\mu = p^\mu \tag{2.80}$$

である。

そして、これらの振動子は次の代数を満たす。

$$[x^\mu, p^\nu] = i\eta^{\mu\nu}, \qquad [\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = \eta^{\mu\nu}m\delta_{m+n,0}, \qquad [\tilde{\alpha}_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu] = \eta^{\mu\nu}m\delta_{m+n,0} \tag{2.81}$$

$$\{\psi_r^\mu, \psi_s^\nu\} = \eta^{\mu\nu}\delta_{r+s,0}, \qquad \{\lambda_r^A, \lambda_s^B\} = \delta^{AB}\delta_{r+s,0} \tag{2.82}$$

また、モードの真空は

$$\alpha_n^\mu|0\rangle = 0, \qquad (n \geq 0) \tag{2.83}$$

$$\psi_r^\mu|0\rangle_{R,NS} = \lambda_r^A|0\rangle_{R,NS} = 0 \qquad (r > 0) \tag{2.84}$$

と定義される。

そして、super Virasoro 演算子はこれらの振動子を使って

$$L_m = \frac{1}{2}\sum_n : \alpha^\mu_{m-n}\alpha_{\mu n} : + \frac{1}{4}\sum_r (2r-m) : \psi^\mu_{m-r}\psi_{\mu r} : - \delta_{m,0} a \tag{2.85}$$

$$\bar{L}_m = \frac{1}{2}\sum_n : \tilde{\alpha}^\mu_{m-n}\tilde{\alpha}_{\mu n} : + \frac{1}{4}\sum_r (2r-m) : \lambda^A_{m-r}\lambda^A_r : - \delta_{m,0}\tilde{a} \tag{2.86}$$

$$G_r = \sum_n \alpha^\mu_n \psi_{\mu r-n} \tag{2.87}$$

と与えられる。また、:: は振動子に対する（生成消滅）正規順序積を意味する。そして a は切片と呼ばれる定数である。

2.3.4 切片

ここで、a（切片）についてコメントしておく。

一般に場が twist を受けた境界条件、

$$\phi(\omega+\pi) = e^{-2\pi i\theta}\phi(\omega) \tag{2.88}$$

を持っているとき、モード展開は、$n \to n-\theta$ となる。

このとき a に寄与するのは一つの場につき、

$$A = \mp\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbf{Z}}(n-\theta) \tag{2.89}$$

である。ここで $-$ はボゾンの場合、$+$ はフェルミオンの場合である。

これを実際に計算するには

$$\begin{aligned} A &= \mp\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbf{Z}}(n-\theta)\exp[-\epsilon(-g)^{-\frac{1}{4}}l^{-\frac{1}{2}}(n-\theta)] \\ &= \pm[\frac{1}{24} + \frac{1}{4}\theta(\theta-1) - \frac{(-g)^{\frac{1}{2}}l}{2\epsilon^2}] \end{aligned} \tag{2.90}$$

と正則化して計算し、$\epsilon \to 0$ で発散する部分は世界面上の宇宙項に繰り込めば良い。

ここで、正則化因子の l は世界面上での弦の長さ（無次元量）であり、g は世界面上での計量の行列式である。この正則化因子が、σ 方向の座標変換によらないように入れている。

よって結果は、

$$A = \pm[\frac{1}{24} + \frac{1}{4}\theta(\theta-1)] \tag{2.91}$$

となる。

つまり、twist をしていないこの場合は、

$$X : A = \frac{1}{24} \tag{2.92}$$

$$\psi \ \ (\text{or} \ \ \lambda) : A = -\frac{1}{24} \ \ \text{for} \quad \text{R}, \qquad A = \frac{1}{48} \quad \text{for} \quad \text{NS} \tag{2.93}$$

となる。NS の場合は $\theta = \frac{1}{2}$ を入れれば良い。

よって、この場合右向き波に関しては

$$a_{NS} = \frac{1}{24} \times 8 + \frac{1}{48} \times 8 = \frac{1}{2} \tag{2.94}$$

$$a_R = \frac{1}{24} \times 8 - \frac{1}{24} \times 8 = 0 \tag{2.95}$$

となる。

また超共形変換性のない左向き波に関しては、

$$\tilde{a}_{NS,NS'} = \frac{1}{24} \times 8 + \frac{1}{48} \times 32 = 1 \tag{2.96}$$

$$\tilde{a}_{NS,R'} = \frac{1}{24} \times 8 + \frac{1}{48} \times 16 - \frac{1}{24} \times 16 = 0 \tag{2.97}$$

$$\tilde{a}_{R,NS'} = \frac{1}{24} \times 8 - \frac{1}{24} \times 16 + \frac{1}{48} \times 16 = 0 \tag{2.98}$$

$$\tilde{a}_{R,R'} = \frac{1}{24} \times 8 - \frac{1}{24} \times 32 = -1 \tag{2.99}$$

となる。(非物理的な時間的振動モードと縦波モードの寄与は、ゴーストの寄与とキャンセルしている。)

また、特に

$$L_0 = \frac{\alpha'}{4} p^2 + N - a, \qquad N \equiv \sum_{n>0} \alpha^{\mu}_{-n} \alpha_{\mu n} + \sum_{r>0} r \psi^{\mu}_{-r} \psi_{\mu r} \tag{2.100}$$

$$\bar{L}_0 = \frac{\alpha'}{4} p^2 + \tilde{N} - \tilde{a} \qquad \tilde{N} \equiv \sum_{n>0} \tilde{\alpha}^{\mu}_{-n} \tilde{\alpha}_{\mu n} + \sum_{r>0} r \lambda^{A}_{-r} \lambda^{A}_{r} \tag{2.101}$$

である。ここでも normal orderring は取っているが省略して書いてある。

2.3.5 弦の状態

超弦理論の状態空間は、世界面上の物質場のフォック空間と、ゴースト場のフォック空間との直積で与えられる。

Virasoro 条件

物理的状態のゴースト部分は基底状態であり、物質場部分の物理的状態は次のように与えられる。

$$L_n^M |phys\rangle = G_r^M |phys\rangle = 0 \qquad n, r \geq 0 \tag{2.102}$$

ここで L_n^M、G_r^M は物質場の Virasoro 演算子である。

これは弦を on-shell にする条件になっており、物理的状態は gauge 不変であるということを意味する。そして、弦理論は弦の第一量子化を扱っており、常に弦の on-shell が物理的状態として理論に現れることにも注意しておく。もし on-shell でなければ、世界面上の対称性が崩れ、矛盾が出てきてしまう。

また特に、

$$L_0^M|phys\rangle = 0 \tag{2.103}$$

は mass-shell condition になっており、massless モードを見る際に重要である。

この条件は、元々は g_{ab}およびχ_a に対する古典的な運動方程式

$$\delta_g S = 0 \qquad \Rightarrow \qquad T_{ab} = 0 \tag{2.104}$$

$$\delta_\chi S = 0 \qquad \Rightarrow \qquad Q = 0 \tag{2.105}$$

から来ている。ここで世界面上の T_{ab} は energy momentum tensor、Q は supercharge である。

そして、$E_8 \times E_8$ Heterotic string 理論の場合は閉弦のみの理論なので、物理的状態は

$$|phys\rangle = |phys\rangle_{Left} \otimes \ \ |phys\rangle_{Right} \tag{2.106}$$

のように、左向きと右向きの状態の直積で与えられる。

massless モード（右向き部分）

これからは低エネルギー有効理論で生き残る可能性のある massless モードを見ることにする。

- NS セクター

まず右向き波の NS セクターについては、(2.94) より $a = 1/2$ だから、偏極ベクトル ϵ_μ を用いて

$$\mathbf{8}_v \quad : \quad \epsilon_\mu \psi^\mu_{-\frac{1}{2}}|k\rangle_{NS} \tag{2.107}$$

が $SO(8)_{lightcone}$ の $\mathbf{8}_v$（8 次元ベクトル）表現の massless モードになっている。ここで $|k\rangle_{R,NS} = e^{ik\cdot x}|0\rangle_{R,NS}$ である。実際、

$$L_0^M \epsilon_\mu \psi^\mu_{-\frac{1}{2}}|k\rangle_{NS} = 0 \to k^\mu k_\mu = 0 \tag{2.108}$$

である。また、もう一つの条件からは

$$G^M_{1/2}\ \epsilon_\mu \psi^\mu_{-\frac{1}{2}}|k\rangle_{NS} = 0 \to \epsilon_\mu k^\mu = 0 \tag{2.109}$$

と横波の条件が出る。

また、この状態は例えば具体的には

$$\epsilon_\mu \psi^\mu_{-\frac{1}{2}}|k\rangle_{NS} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^1_{-\frac{1}{2}} \pm i\psi^2_{-\frac{1}{2}})|k\rangle_{NS} \tag{2.110}$$

等である。更にはこの状態は、

$$G^M_{-1/2}|k\rangle_{NS} = \sqrt{2\alpha'}k_\mu\psi^\mu_{-\frac{1}{2}}|k\rangle_{NS} \tag{2.111}$$

を用いて、

$$\epsilon_\mu\psi^\mu_{-\frac{1}{2}}|k\rangle_{NS} \ \simeq \ \epsilon_\mu\psi^\mu_{-\frac{1}{2}}|k\rangle_{NS} + \sqrt{2\alpha'}k_\mu\psi^\mu_{-\frac{1}{2}}|k\rangle_{NS} \tag{2.112}$$

と同一視ができる。何故ならば、まず式（2.102）より同様に

$$|phys\rangle \ \supset \ G^M_{-1/2}|k\rangle_{NS} \tag{2.113}$$

と確かめられる。

そして、$G^M_{-1/2}|0\rangle_{NS}$ と書けることより、

$$\langle phys|G^M_{-1/2}|k\rangle_{NS} = \langle G^M_{1/2} \ \ phys|k\rangle_{NS} = 0 \tag{2.114}$$

と（自分自身を含む）物理的状態とのノルムがゼロになるからである。

よってこの状態には

$$\epsilon_\mu \simeq \epsilon_\mu + k_\mu \tag{2.115}$$

の gauge 不変性があることが分かる。

- R セクター

今度は R セクターについて考える。今、R セクターにはゼロモードがあり、ゼロモードを状態にいくら作用させても基底状態のままである事が式（2.100）からわかる。

さらに、ゼロモードは

$$\{\psi^\mu_0, \psi^\nu_0\} = \eta^{\mu\nu} \tag{2.116}$$

と時空間のクリフォード代数と同じ代数を満たす。（実際、時空間のガンマ行列の役割をする。）それゆえ、ゼロモードのみで張られた基底状態はクリフォード代数の表現（スピノール表現）になっている。

さらに、(2.95) より $a = 0$ だから、結局ゼロモードのみで張られた基底状態

$$|\mathbf{s} >= |s_0 s_1 s_2 s_3 s_4\rangle \qquad s_a = \pm\frac{1}{2} \tag{2.117}$$

に波動関数 u_{s} をかけた状態

$$\mathbf{8}_s \ \ : \ \ \ u_{\mathbf{s}}|\mathbf{s}\rangle \tag{2.118}$$

が $SO(8)_{lightcone}$ の $\mathbf{8}_s$（8 次元スピノール）表現の massless モードになっている。実際

$$L^M_0 u_{\mathbf{s}}|\mathbf{s}\rangle = 0 \rightarrow k_\mu k^\mu = 0 \tag{2.119}$$

となって massless モードである。もう一つの条件からは Dirac 方程式

$$G^M_0 u_{\mathbf{s}}|\mathbf{s}\rangle = 0 \rightarrow k_\mu \Gamma^\mu_{\mathbf{ss'}} u_{\mathbf{s'}} = 0 \tag{2.120}$$

がでる。また、この基底状態は具体的にはゼロモードを使って、

$$|s_1 = \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{2}(\psi_0^1 + i\psi_0^2)(\psi_0^1 - i\psi_0^2)|k\rangle_R \tag{2.121}$$

$$|s_1 = -\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0^1 - i\psi_0^2)|k\rangle_R \tag{2.122}$$

等の積で書ける。この時、

$$\Psi \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^1 + i\psi^2)\ ,\ \ \bar{\Psi} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^1 - i\psi^2) \tag{2.123}$$

と定義すると、$\Psi, \bar{\Psi}$ を同様にモード展開した振動子を使って

$$\Psi_n|s_1 = \frac{1}{2}\rangle = \bar{\Psi}_{n+1}|s_1 = \frac{1}{2}\rangle = 0\ \ (n \geq 0) \tag{2.124}$$

$$\Psi_{n+1}|s_1 = -\frac{1}{2}\rangle = \bar{\Psi}_n|s_1 = -\frac{1}{2}\rangle = 0\ \ (n \geq 0) \tag{2.125}$$

が成り立つ。実際、この場合の R セクターの基底状態は、このように定義されている。

特に、$\Psi_0, \bar{\Psi}_0$ はスピンの昇降演算子になっている。実際、

$$\bar{\Psi}_0|s_1 = \frac{1}{2}\rangle = |s_1 = -\frac{1}{2}\rangle \tag{2.126}$$

$$\Psi_0|s_1 = -\frac{1}{2}\rangle = |s_1 = \frac{1}{2}\rangle \tag{2.127}$$

がさらに成り立つ。

ただし、$\mathbf{8}_s$ 表現は式（2.120）の条件から出る Dirac 方程式より $k_\mu = (k, 0^8, k)$ を使って

$$\begin{aligned} k_\mu \Gamma^\mu u_{\mathbf{s}}|\mathbf{s}\rangle &= -k\Gamma^0(\Gamma^0\Gamma^9 - 1)u_{\mathbf{s}}|\mathbf{s}\rangle \\ &= -2k\Gamma^0(S_0 - \frac{1}{2})u_{\mathbf{s}}|\mathbf{s}\rangle = 0 \end{aligned} \tag{2.128}$$

と書ける。ここで、S_0 は後で定義するスピン演算子で、その固有値は $s_0 = \pm 1/2$ である。上を見ると分かるように $s_0 = 1/2$ のものが選ばれている。（これは on-shell の状態を意味する。）しかし、運動量の空間成分の符合が変われば $s_0 = -1/2$ のものが選ばれることにも注意する。

また Gliozzi-Scherk-Olive（GSO）射影より $s_a = -1/2$ $(a = 1\sim 4)$ が偶数個の状態のみが生き残っている。

- GSO 射影

ここで、少しだけ GSO 射影についてコメントしておく。これは、局所相互作用性、モジュラー不変性等を保つために行うものである。

具体的には、

$$\Sigma^{\mu\nu} = -\frac{i}{2}\sum_{r\in\mathbf{Z}+\nu}[\psi_r^\mu, \psi_{-r}^\nu] \tag{2.129}$$

$$S_0 = i\Sigma^{0,9}, \qquad S_a = \Sigma^{2a-1,2a} \quad a = 1 \sim 4 \tag{2.130}$$

$$F = \sum_{a=0}^{4} S_a \tag{2.131}$$

を用いて、

$$\exp[i\pi F] = (-1)^F \tag{2.132}$$

を定義する。そして今の場合であれば $(-1)^F = +1$ を取ってきている。(s_a は S_a の固有値となっていることに注意する。)実際にこうすると無矛盾に理論を作ることができる。後で見る左向きの場合も同様に考えるとよい。

ただし右向き部分のみ

$$e^{i\pi F}|0\rangle_{NS} = e^{-i\pi}|0\rangle_{NS} \quad , \qquad e^{i\pi F}|0\rangle_R = e^{-i\pi/2}|0\rangle_R \tag{2.133}$$

のように超共形ゴーストの寄与がある。

式(2.133)より、$(-1)^F = +1$ のみ理論に残すので、NS セクターの基底状態であるタキオンモードは落ちていることがわかる。

まとめると、右向き部分は

$$\mathbf{8}_v + \mathbf{8}_s \tag{2.134}$$

で与えられることになる。

massless モード(左向き部分)

次に左向き部分の massless モードを考える。(左向きは元々ボゾン弦なのですべてボゾンの自由度である。)

この場合、GSO 射影は $A = 1 \sim 16$ と $A = 17 \sim 32$ で独立なので

$$(-1)^{\tilde{F}} = (-1)^{\tilde{F}'} = +1 \tag{2.135}$$

と別々に取る。この場合に実際に無矛盾になる。

ここにもタキオンモードが出てくるが、これらはGSO射影とモジュラ—不変性(level matching condition)により理論から落ちる。

- NS - NS′ セクター

まずNS - NS′ について考える。このセクターは(2.96)を考慮にいれると $a = 1$ だから、massless モードとしては

$$\epsilon_\mu \tilde{\alpha}^\mu_{-1}|0\rangle_{NS-NS'} \tag{2.136}$$

の $\mathbf{8}_v$ 表現がある。ここで、ϵ_μ は右向きと同様に横波の偏極ベクトルである。さらに、式(2.102)の Virasoro 条件を考慮にいれると、右向きと同様に

$$\bar{L}_{-1}|k\rangle_{NS-NS'} = \sqrt{2\alpha'} k_\mu \tilde{\alpha}^\mu_{-1}|k\rangle_{NS-NS'} \tag{2.137}$$

を使って、

$$\epsilon_\mu \tilde{\alpha}^\mu_{-1}|k\rangle_{NS-NS'} \simeq \epsilon_\mu \tilde{\alpha}^\mu_{-1}|k\rangle_{NS-NS'} + \sqrt{2\alpha'}k_\mu \tilde{\alpha}^\mu_{-1}|k\rangle_{NS-NS'} \tag{2.138}$$

という同一視があり、gauge 変換があることを意味している。

このセクターにはまた

$$\lambda^A_{-1/2}\lambda^B_{-1/2}|k\rangle_{NS-NS'}, \qquad 1 \leq A, B \leq 16 \qquad \text{or} \qquad 17 \leq A, B \leq 32 \tag{2.139}$$

の massless モードがある。同じ組だけ残るのは GSO 射影を独立に取っている結果である。このため (2.139) は $SO(16) \times SO(16)'$ の随伴表現 ($\mathbf{120} + \mathbf{120}$ 表現) になっている。

- NS - R′、R - NS′、R - R′ セクター

次に NS - R′ を考える。(2.97) を考慮にいれると $a = 0$ だから、massless モードは R′ セクターのフェルミオンのゼロモードを真空にかけた状態になる。

このとき、状態は $SO(16)'$ の可約な **256** スピノール表現となり、さらに GSO 射影を考慮すると既約な **128** 表現となる。

R - NS′ も全く同様に、$SO(16)$ の **128** 表現となる。

R - R′ は (2.99) より $a = -1$ だから massive モードとなり、massless モードはない。

- 左向きの massless モードスペクトラム全体

よって左向き部分の massless モードは $SO(8)_{lightcone} \times SO(16) \times SO(16)'$ に対して、

$$\underbrace{(\mathbf{8}_v, \mathbf{1}, \mathbf{1}) + (\mathbf{1}, \mathbf{120}, \mathbf{1}) + (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{120})}_{\text{NS - NS}'} + \underbrace{(\mathbf{1}, \mathbf{128}, \mathbf{1})}_{\text{R - NS}'} + \underbrace{(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{128})}_{\text{NS - R}'} \tag{2.140}$$

の表現を持っている。

$E_8 \times E_8$ Heterotic string 理論全体の massless スペクトラム

- supergravity multiplet

ここで、右のモードの $\mathbf{8}_v + \mathbf{8}_s$ と、左のモードの $(\mathbf{8}_v, \mathbf{1}, \mathbf{1})$ をかけあわせると、$SO(8)_{lightcone}$ に対して、

$$\underbrace{\mathbf{1}}_{dilaton\ (\phi)} + \underbrace{[\mathbf{28}]}_{\text{反対称テンソル場}\ (B_{\mu\nu})} + \underbrace{(\mathbf{35})}_{graviton\ (G_{\mu\nu})} + \underbrace{\mathbf{56}}_{gravitino\ (\psi_\mu)} + \underbrace{\mathbf{8}'}_{dilatino\ (\lambda)} \tag{2.141}$$

の 10 次元 $N = 1$ supergravity multiplet が出る。このうち前の 3 つは、$\mathbf{8}_v \times \mathbf{8}_v$ から出るものである。

さらに、式（2.115）（2.138）を考慮すると、時空間の一般座標変換

$$e_{\mu\nu} \simeq e_{\mu\nu} + k_\mu \xi_\nu + k_\nu \xi_\mu \tag{2.142}$$

や B 場に対する gauge 変換

$$b_{\mu\nu} \simeq b_{\mu\nu} + k_\mu \zeta_\nu - k_\nu \zeta_\mu \tag{2.143}$$

があることが分かる。ここで、$e_{\mu\nu}$ は graviton の波動関数で対称で traceless なテンソルである。また、$b_{\mu\nu}$ は B 場の波動関数で反対称なテンソルである。

そして、

$$k^\mu e_{\mu\nu} = k^\mu \xi_\mu = 0 \tag{2.144}$$

$$k^\mu b_{\mu\nu} = k^\mu \zeta_\mu = 0 \tag{2.145}$$

である。

あとの２つは $\mathbf{8}_v \times \mathbf{8}_s$ から出るものである。この状態はベクトルの足（i）とスピナ―の足（α）を持った状態 $|i, \alpha>$ であるが、$SO(8)_{lightcone}$ のガンマ行列（Γ^i）を使って、

$$|i, \alpha\rangle \to |i, \alpha\rangle, \qquad \Gamma^i_{\alpha\beta}|\beta\rangle \tag{2.146}$$

と書ける。前者が gravitino（$\mathbf{56}$）、後者が元々の（$\mathbf{8}_s$）とは逆のカイラリティ―をもつ dilatino（$\mathbf{8}'$）である。

graviton の状態を波動関数 $u_{\mu\mathbf{s}}$ を使って

$$u_{\mu\mathbf{s}} \psi^\mu_{-1/2} |\mathbf{s}\rangle_{R-(NS-NS')} \tag{2.147}$$

と書く。この $u_{\mu\mathbf{s}}$ は

$$k^\mu u_{\mu\mathbf{s}} = k_\nu \Gamma^\nu_{\mathbf{ss}'} u_{\mu\mathbf{s}'} = 0 \tag{2.148}$$

を満たす。ここで、$\Gamma^\mu_{\mathbf{ss}'}$ は時空間のガンマ行列である。（つまり第 2 項は Dirac 方程式である。）

この時、gravitino は式（2.138）を考慮すると、

$$u_{\mu\mathbf{s}} \simeq u_{\mu\mathbf{s}} + k_\mu \zeta_{\mathbf{s}} \tag{2.149}$$

という時空間の局所 SUSY 変換があることが分かる。（ただし、$k_\mu \Gamma^\mu_{\mathbf{ss}'} \zeta_{\mathbf{s}'} = 0$ である。）

これは時空間の理論に実際に SUSY があることを意味している。

- $E_8 \times E_8$ vector supermultiplet

今度は残りの $SO(16)$ に対して $\mathbf{248}$（$= \mathbf{128}_\mathbf{s} + \mathbf{120}_{ad}$）表現 2 組と、$\mathbf{8}_v + \mathbf{8}_s$ を張り合わせることを考える。

この時、残りは（$\mathbf{248} + \mathbf{248}$）表現の 10 次元 $N = 1$ vector supermultiplet になることが分かる。さらに、（$\mathbf{248} + \mathbf{248}$）という次元は $E_8 \times E_8$ の随伴表現の次元になっている。これだけだと直感的だが、実際にこの理論は $E_8 \times E_8$ の gauge 群を持っている。この理論が $E_8 \times E_8$ Heterotic string 理論と呼ばれるのはこのためである。

次のようにボゾンを用いた表式で考えると、実際に $E_8 \times E_8$ の gauge 群になっていることが分かる。

2.3.6 ボゾンを用いた構築

ここでは gauge 群の自由度として、$\lambda^A(\bar{z})$（$A = 1〜32$）のかわりに、$X_L^I(\bar{z})$（$I = 1〜16$）を使う。

右向き側は前と全く同様である。よって左向き側のみを考える。

準備

このとき、$X_L^I(\bar{z})$ は

$$X_L^I(\bar{z})X_L^J(0) \sim -\frac{\alpha'}{2}\delta^{IJ}\ln\bar{z} \tag{2.150}$$

の OPE を満たすとする。

また、さらに $X_L^I(\bar{z})$ を、

$$X_L^I(\bar{z}) = x_L^I - i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}p_L^I\ln\bar{z} + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{m\neq 0}\frac{\tilde{\alpha}_m^I}{m}\bar{z}^{-m} \tag{2.151}$$

と展開する。ここで、$p_L^I = \tilde{\alpha}_0^I$ である。（便利のため、通常の運動量の定義とずらしてある）そしてまた次の交換関係を満たすとする。

$$[x_L^I, \sqrt{2/\alpha'}p_L^J] = i\delta^{IJ} \qquad [\tilde{\alpha}_m^I, \tilde{\alpha}_n^J] = m\delta^{IJ}\delta_{m+n,0} \tag{2.152}$$

また、共形変換のカレントは

$$\tilde{T}_B = -\frac{1}{\alpha'}[(\bar{\partial}X^\mu)^2 + (\bar{\partial}X_L^I)^2] \tag{2.153}$$

となり、このときの Virasoro 演算子は、

$$\bar{L}_m = \frac{1}{2}\sum_n :\tilde{\alpha}_{m-n}^\mu\tilde{\alpha}_{\mu n}: + \frac{1}{2}\sum_n :\tilde{\alpha}_{m-n}^I\tilde{\alpha}_n^I: - \delta_{m,0}\tilde{a} \tag{2.154}$$

となる。また、

$$\tilde{a} = \frac{8+16}{24} = 1 \tag{2.155}$$

である。よって、特に $\bar{L}_0$ は

$$\bar{L}_0 = \frac{\alpha'}{4}p^2 + \frac{1}{2}(p_L^I)^2 + \tilde{N} - 1 \qquad \tilde{N} \equiv \sum_{n>0}\tilde{\alpha}_{-n}^\mu\tilde{\alpha}_{\mu n} + \sum_{n>0}\tilde{\alpha}_{-n}^I\tilde{\alpha}_n^I \tag{2.156}$$

となる。

massless モード（左向き部分）

この時、式（2.156）より massles モードは

$$\tilde{N} = 1 \qquad \text{or} \qquad (p_L^I)^2 = 2 \tag{2.157}$$

の時である。つまり、次の状態が massless モードである。

$$\mathbf{8}_v \ \text{ of } \ SO(8)_{lightcone} \ : \ \epsilon_\mu \tilde{\alpha}^\mu |k\rangle \tag{2.158}$$

$$U(1)^{16} \ \text{ of } \ E_8 \times E_8 \quad : \ \tilde{\alpha}^I |k\rangle \qquad I = 1 \sim 16 \tag{2.159}$$

$$\text{root of } \ E_8 \times E_8 \ : \ |p_L^I\rangle \ \equiv \ \exp(i\sqrt{2/\alpha'} p_L^I x_L^I)|k\rangle \qquad (p_L^I)^2 = 2 \tag{2.160}$$

このとき、前と同様に式（2.158）の状態が $SO(8)_{lightcone}$ の $\mathbf{8}_v$ 表現である。そして、これを右向きと組み合わせると 10 次元 $N = 1$ の supergravity multiplet ができる。

そして次に式（2.159）の状態は、（この時点で群はまだ不明だが）$E_8 \times E_8$ の Cartan subalgebra に対応する。

そして最後に式（2.160）の状態について考える。

この状態は $(p_L^I)^2 = 2$ ならば、なんでもよいように見えるがそうではない。局所相互作用性、モジュラ―不変性などにより $p_L^I(I = 1$〜$16)$ は次の格子点に乗っていないといけない。

$$\Gamma_{16} \qquad \text{or} \qquad \Gamma_8 \times \Gamma_8 \tag{2.161}$$

ここで

$$\begin{gathered} \Gamma_{16} \ : \ (n_1, \ldots, n_{16}) \ \text{ or } \ (n_1 + \frac{1}{2}, \ldots n_{16} + \frac{1}{2}) \\ \sum_{i=1}^{16} n_i \in 2\mathbf{Z} \end{gathered} \tag{2.162}$$

$$\begin{gathered} \Gamma_8 \ : \ (n_1, \ldots, n_8) \ \text{ or } \ (n_1 + \frac{1}{2}, \ldots n_8 + \frac{1}{2}) \\ \sum_{i=1}^{8} n_i \in 2\mathbf{Z} \end{gathered} \tag{2.163}$$

である。

この時、$\Gamma_8 \times \Gamma_8$ の格子を選ぶと、$E_8 \times E_8$ の gauge 群が出る。

（Γ_{16} の格子に p_L^I を乗せると、双対な $SO(32)$ Heterotic string 理論が出るがここでは触れない。）

実際に Γ_8 の格子上での $(p_L^I)^2 = 2$ を満たす p_L^I の値を見ると

$$(\pm\frac{1}{2}, \ldots, \pm\frac{1}{2}) \ \text{ただし} - \text{符合は偶数個のみ} \ , \ \underbrace{(\pm 1, \pm 1, 0^6)}_{\text{permutation}} \tag{2.164}$$

となり、まさに E_8 のルート系になっている。もう一つの Γ_8 の方も全く同様である。（実は偶数個の $-1/2$ を取ってくることはフェルミオンを使った構築の GSO 射影に対応している。）よっ

て、式（2.160）の状態は $E_8\times E_8$ の root 部分に対応することが分かった。（実は、これら弦の状態は、後述する Kac-Moody 代数の表現になっている。また、その代数の一部が、$E_8\times E_8$ のリー代数を満たす事が確かめられている。それゆえ、実際にこれら弦の状態が $E_8\times E_8$ の gauge 群の表現になっている。）

以上は別々に $X_L^I(I=1\sim 16)$ と $\lambda_L^A(A=1\sim 32)$ を使って構成したが、ボゾン化の手法を使って 2 つを関係付けることができる。

2.3.7 ボゾン化と vertex operator

実は 2 次元の世界面上で、フェルミオンはボゾンを使って書くことができる。これをボゾン化という。

ボゾン化の利点としては、amplitude の計算に必要な vertex operator を明瞭に定義できる事があげられる。

Majorana-Weyl フェルミオンのボゾン化

まず Majorana-Weyl フェルミオンは、

$$H^a(z)H^b(0)\sim -\delta^{ab}\ln z \qquad a,b=0\sim 4 \tag{2.165}$$

の OPE を満たす H^a を使って、

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm\psi^0+\psi^9) \;\cong\; \exp(\pm iH^0) \tag{2.166}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^{2a-1}\pm i\psi^{2a}) \;\cong\; \exp(\pm iH^a), \qquad a=1\sim 4 \tag{2.167}$$

とボゾン化出来る。この時、式（2.166）（2.167）の左辺と右辺で実際に OPE が一致する。そして $e^{\pm H^a}$ 同士は反交換することが分かる。

さらに、$E_8\times E_8$ Heterotic string 理論の gauge 自由度に対して X_L^I と $\Lambda^{I\pm}$ がどのような関係にあるか見る。

まず

$$\Lambda^{I\pm}\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda^{2I-1}\pm i\lambda^{2I})\ ,\ \ I=1\sim 16 \tag{2.168}$$

を定義して

$$\Lambda^{I\pm} \;\cong\; \exp(\pm i\sqrt{2/\alpha'}X_L^I) \tag{2.169}$$

とボゾン化できる。この時 OPE も一致し、さらに共形変換のカレントも

$$\tilde{T}_{B\lambda}=-\frac{1}{2}(\Lambda^{I+}\bar{\partial}\Lambda^{I-}+\Lambda^{I-}\bar{\partial}\Lambda^{I+})\cong-\frac{1}{\alpha'}(\bar{\partial}X_L^I)^2 \tag{2.170}$$

と一致する。（こればかりでなく実際に分配関数も一致することが知られている）

vertex operator と 超共形ゴーストのボゾン化

（超）弦理論では、弦の状態と operator を 1 対 1 に対応させることができる。この対応させた operator を vertex operator という。

ここでは、その vertex operator について見てみる。

まず、場が無限の過去（$z=0$）において正則であると境界条件を決める。

すると場のモード展開より

$$\alpha_{-m} = (\frac{2}{\alpha'})^{1/2}\oint \frac{dz}{2\pi i} z^{-m}\partial X(z) \ \ \rightarrow \ \ (\frac{2}{\alpha'})^{1/2}\frac{i}{(m-1)!}\partial^m X(0) \qquad m\geq 1 \tag{2.171}$$

$$\psi_{-r} = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{-r-1/2}\psi_R(z) \ \ \rightarrow \ \ \frac{1}{(r-1/2)!}\partial^{r-1/2}\psi_R(0) \qquad r\geq 1/2 \quad \text{for} \quad \text{NS} \tag{2.172}$$

等と vertex operator が決まる。反正則側も同様である。この時、物質場の真空 $|0\rangle$ と unit operator $\mathbf{1}$ に対応する状態 $|1\rangle$ は等しい。それは式（2.171）（2.172）で $m\rightarrow -m$、$r\rightarrow -r$ とすれば真空の定義式（2.83）（2.84）を満たす事から分かる。そして、

$$|k\rangle = e^{ik\cdot x}|0\rangle = e^{ik\cdot x}|1\rangle \rightarrow e^{ik\cdot X} \tag{2.173}$$

である。

今の場合の NS セクターは、ボゾン化しなくても vertex operator を書くことができる。しかし、式（2.172）の形を見れば分かるように、R セクターの場合はカットが入ってしまっている。つまりこのままでは vertex operator を明瞭に定義できない。一般的には、twist された境界条件の下のセクターではカットが入り、vertex operator をフェルミオンでは明瞭に定義できなくなる。しかしボゾン化すると明瞭に vertex operator の定義ができる。このため、ボゾン化は有用である。

- NS セクター（右向き部分）の vertex operator

右向き部分の $SO(8)_{lightcone}$の $\mathbf{8}_v$ 表現の状態

$$\mathbf{8}_v \quad : \quad \epsilon_\mu \psi^\mu_{-\frac{1}{2}}|k\rangle_{NS} \tag{2.174}$$

を vertex operator で書くと

$$\mathcal{V}_{-1} = \epsilon_\mu \psi^\mu_R e^{-\phi} e^{ik_R\cdot X_R} \tag{2.175}$$

と書ける。またボゾン化して書くと

$$\mathcal{V}_{-1} = e^{ih^a_v H^a} e^{-\phi} e^{ik_R\cdot X_R} \qquad h^a_v = \underbrace{(\pm 1, 0^3)}_{\text{permutation}} \tag{2.176}$$

と書ける。ここで、右向きを意味するため、$e^{ik\cdot X} = e^{i(k_R\cdot X_R + k_L\cdot X_L)}$ と分けて書いた。また、h^a_v は H-momentum と呼ばれる。（余談ではあるがこの H-momentum は $SO(8)_{lightcone}$ のベクトル表現の格子に乗っている。）

ここで、$e^{-\phi}$ は、超共形ゴースト場 β、γ についてボゾン化したものである。具体的にはボゾン $\phi(z)$ とフェルミオン $\xi(z)$、$\eta(z)$ を使って

$$\beta \cong e^{-\phi}\partial\xi \tag{2.177}$$

$$\gamma \cong e^{\phi}\eta \tag{2.178}$$

としたものである。また超共形ゴーストは

$$\gamma(z)\beta(0) \sim \frac{1}{z}\ ,\ \ \beta(z)\gamma(0) \sim -\frac{1}{z} \tag{2.179}$$

の OPE を満たし

$$\phi(z)\phi(0) \sim -\ln z \tag{2.180}$$

$$\eta(z)\xi(0) \sim \frac{1}{z} \tag{2.181}$$

$$\eta(z)\eta(0) = \mathcal{O}(z) \qquad \partial\xi(z)\partial\xi(0) = \mathcal{O}(z) \tag{2.182}$$

である。また、conformal dimension は $(\beta, \gamma) = (3/2, -1/2)$ である。

この $e^{-\phi}$ の因子が出てくる理由を簡単に説明する。まず場を

$$\beta(z) = \sum_{r\in\mathbf{Z}+\nu} \beta_r z^{-r-3/2} \qquad \gamma(z) = \sum_{r\in\mathbf{Z}+\nu} \gamma_r z^{-r+1/2} \tag{2.183}$$

とモード展開する。(BRST 変換により超共形ゴーストはフェルミオンと関係しており、NS、R セクターを持つ。)

ここで、モードは

$$[\gamma_r, \beta s] = \delta_{r+s,0} \tag{2.184}$$

の交換関係を満たす。

この時、基底状態 $|0\rangle$ は

$$\beta_r|0\rangle_{NS} = \gamma_r|0\rangle_{NS} = 0 \qquad r \geq 1/2 \tag{2.185}$$

$$\beta_r|0\rangle_R = \gamma_s|0\rangle_R = 0 \qquad r \geq 0,\ \ s \geq 1 \tag{2.186}$$

で定義される。

また、unit operator $\mathbf{1}$ に対応する状態 $|1\rangle$ は

$$\beta_r = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{r+1/2}\beta(z), \qquad \gamma_r = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{r-3/2}\gamma(z) \tag{2.187}$$

を使うと次のことが分かる。

$$\beta_r|1\rangle_{NS} = \gamma_s|1\rangle_{NS} = 0 \qquad r \geq -1/2,\ \ s \geq 3/2 \tag{2.188}$$

$$\beta_r|1\rangle_R = \gamma_s|1\rangle_R = 0 \qquad r \geq 0,\ \ s \geq 1 \tag{2.189}$$

つまり、ゴースト場の場合は物質場と違い、$|1\rangle$ は基底状態 $|0\rangle$ とずれている。

この時

$$|0\rangle_{NS} \to e^{-\phi(0)}, \qquad |0\rangle_R \to e^{-\frac{\phi(0)}{2}} \tag{2.190}$$

と対応させるとよい。実際、式（2.187）を使って、式（2.190）に作用させると式（2.185）（2.186）を満たすことが分かる。

このように、超共形ゴーストの場合は $|0\rangle$ と $|1\rangle$ を関係させようとするとボゾン化しなければならない。

ここで、β, γ はフェルミオン的自由度に関係している場なので、そのフェルミオン数は奇数と定義するとよい。そして、さらにこれらの場が $e^{\pm\phi}$ の因子を持っているので、

$$e^{l\phi} \tag{2.191}$$

の演算子はフェルミオン数 l 個を持つと定義する。この式（2.190）が GSO 射影で（2.133）の寄与を出した原因である。

またこの時、l を picture 数といい、演算子 $e^{l\phi}$ は picture 数 l を持つという。

つまり、vertex operator

$$\mathbf{8}_v \ : \ \mathcal{V}_{-1} = e^{ih_v^a H^a} e^{-\phi} e^{ik_R \cdot X_R} \tag{2.192}$$

は picture 数 -1 を持つ。

- R セクター（右向き部分）の vertex operator

ここからは R セクターの vertex operator を考える。

このセクターはボゾン化をすると明瞭に vertex operator を定義できる。

この時、基底状態

$$\mathbf{8}_s \ : \ |\mathbf{s}\rangle = |s_0 s_1 s_2 s_3 s_4\rangle \tag{2.193}$$

に対応する vertex operator は

$$\mathcal{V}_{-\frac{1}{2}} = e^{ih_s^a H^a} e^{-\frac{\phi}{2}} e^{ik_R \cdot X_R} \qquad h_s^a = (\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}) \ \ -\frac{1}{2} \text{ は偶数個} \tag{2.194}$$

である。（picture 数 $-1/2$ の演算子である。）ここで、$e^{ih_s^a H^a} \equiv \Theta_{\mathbf{s}}$ をスピン場という。また NS セクターと同様に、h_s^a を H-momentum と呼ぶ。（同様にこの時の H-momentum は $SO(8)_{lightcone}$ のスピノール表現の格子に乗っている。）

- スピン場を含む twisted セクターのボゾン化

簡単に $SO(2)$ の場合を考える。まず

$$\psi(z) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^1 + i\psi^2) \qquad \bar{\psi}(z) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^1 - i\psi^2) \tag{2.195}$$

を定義して、一般的な境界条件

$$\psi(\omega+\pi) = \exp(2\pi i\theta)\psi(\omega) \qquad 0 \le \theta \le 1 \tag{2.196}$$

をもつセクター考える。（これは orbifold の twisted セクターに関係する）

この時、場は

$$\psi(z) = \sum_{r\in\mathbf{Z}+\theta} \psi_r z^{-r-1/2} \qquad \bar{\psi}(z) = \sum_{s\in\mathbf{Z}-\theta} \bar{\psi}_s z^{-s-1/2} \tag{2.197}$$

と展開できる。

そして振動子は

$$\{\psi_r, \bar{\psi}_s\} = \delta_{r+s,0} \qquad \text{others} = 0 \tag{2.198}$$

の反交換関係を満たす。

また、これらの場は

$$\psi(z) \cong \exp(iH(z))\ ,\ \bar{\psi}(z) \cong \exp(-iH(z)) \qquad (H(z)H(0) \sim -\ln z) \tag{2.199}$$

とボゾン化できる。

そしてここで、

$$\psi_{n+\theta}|\mathcal{A}_\theta\rangle = \bar{\psi}_{n+1-\theta}|\mathcal{A}_\theta\rangle = 0\ \ , n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.200}$$

を満たす状態 $|\mathcal{A}_\theta\rangle$ を考える。

この時、この状態に作用する振動子で、最初に nonzero になるのは $r = -1+\theta$、$s = -\theta$ である。

すると、$|\mathcal{A}_\theta\rangle$ に対応する vertex operator$\mathcal{A}_\theta(z)$ を使って

$$\psi_r|\mathcal{A}_\theta\rangle \cong \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{r-\frac{1}{2}}\psi(z)\mathcal{A}_\theta(0), \qquad \bar{\psi}_s|\mathcal{A}_\theta\rangle \cong \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{s-\frac{1}{2}}\bar{\psi}(z)\mathcal{A}_\theta(0) \tag{2.201}$$

を計算すると、式（2.200）を満たすために vertex operator $\mathcal{A}_\theta(z)$ は

$$\psi(z)\mathcal{A}_\theta(0) = \mathcal{O}(z^{-\theta+\frac{1}{2}})\ , \qquad \bar{\psi}(z)\mathcal{A}_\theta(0) = \mathcal{O}(z^{\theta-\frac{1}{2}}) \tag{2.202}$$

の OPE を満たすべきである。

よって、

$$\mathcal{A}_\theta \ \ \cong \ \ \exp[i(1/2-\theta)H] \tag{2.203}$$

とボゾン化して同一視できる。実際 conformal dimension も $h = \frac{1}{2}(\theta-\frac{1}{2})^2$ と一致する。

またこの時、θ を整数ずつずらしても境界条件は変わらない。つまり同じセクターのままである。よって同じセクターの違う状態（excited state）を見ることができる。

例えば、

$$\mathcal{A}_{\theta+1} \ \ \cong \ \ \exp[-i(1/2+\theta)H] \tag{2.204}$$

も同じセクターの状態である。このように一般に twist が入ると H-momentum が twist 分だけずれることになる。

　この時、式（2.200）の条件を思い出すと、

$$\mathcal{A}_{\frac{1}{2}} \cong 1 \tag{2.205}$$

は NS セクターの真空になっている。また、

$$\mathcal{A}_0 \cong \exp(i/2H) \tag{2.206}$$

は

$$|s = \frac{1}{2}\rangle \tag{2.207}$$

の R セクターの基底状態になっている事に気付く。そして、さらに

$$\mathcal{A}_1 \cong \exp(-i/2H) \tag{2.208}$$

も

$$|s = -\frac{1}{2}\rangle \tag{2.209}$$

の R セクターの基底状態になっている。
　それゆえ、

$$\mathbf{8}_s \ : \ \mathcal{V}_{-\frac{1}{2}} = e^{ih_s^a H^a} e^{-\frac{\phi}{2}} e^{ik_R \cdot X_R} \tag{2.210}$$

となる。
　ただし、twisted sector のボゾン部分の真空 vertex operator は少々特殊である。これは後で降れる。

- 左向き部分の vertex operator

　まず

$$\mathbf{8}_v \ : \ \epsilon_\mu \tilde{\alpha}^\mu_{-1} |k\rangle_{NS,NS'} \tag{2.211}$$

に対応する vertex operator は

$$\mathcal{V}_{\mathbf{8}_v} = i(\frac{2}{\alpha'})^{1/2} \epsilon_\mu \bar{\partial} X^\mu e^{ik_L \cdot X_L} \tag{2.212}$$

である。そして、

$$\Lambda^{+I}_{-1/2}\Lambda^{-I}_{-1/2}|k\rangle_{NS,NS'} \ \text{(no sum)}, \qquad \tilde{\alpha}^I|k\rangle \tag{2.213}$$

の状態は

$$\mathcal{V}_{Cartan} \ = \ \Lambda^{+I}\Lambda^{-I} e^{ik_L \cdot X_L} \cong i(\frac{2}{\alpha'})^{1/2} \bar{\partial} X^I e^{ik_L \cdot X_L} \tag{2.214}$$

と $E_8 \times E_8$ の Cartan subalgebra に対応している。（まさに $U(1)$ カレントの形をしている。）
　また

$$\Lambda^{\pm I}_{-1/2}\Lambda^{\pm J}_{-1/2}|k\rangle_{NS,NS'}, \ \ 1 \le I, J \le 8 \qquad \text{or} \qquad 9 \le I, J \le 16 \ \ (I \ne J) \tag{2.215}$$

と

$$|p_L^I\rangle \ , \quad p_L^I = \underbrace{(\pm1,\pm1,0^6)}_{\text{permutaion}}(0^8), \ \ (0^8)\underbrace{(\pm1,\pm1,0^6)}_{\text{permutaion}} \tag{2.216}$$

の状態は等しく、

$$\mathcal{V}_{root1} = e^{i\sqrt{2/\alpha'}p_L^I X_L^I} e^{ik_L\cdot X_L}, \ \ p_L^I = \underbrace{(\pm1,\pm1,0^6)}_{\text{permutaion}}(0^8), \ \ (0^8)\underbrace{(\pm1,\pm1,0^6)}_{\text{permutaion}} \tag{2.217}$$

とボゾン化して書ける。

さらに、

$$|k\rangle_{R-NS'}, \ \ |k\rangle_{NS-R'}, \tag{2.218}$$

と、

$$|p_L^I\rangle \ , \quad p_L^I = ((\pm1/2)^8)(0^8), \ \ (0^8)((\pm1/2)^8) \quad -1/2\text{ は偶数個} \tag{2.219}$$

の状態は等しく、

$$\mathcal{V}_{root2} = e^{i\sqrt{2/\alpha'}p_L^I X_L^I} e^{ik_L\cdot X_L}, \ \ p_L^I = ((\pm1/2)^8)(0^8), \ \ (0^8)((\pm1/2)^8) \quad -1/2\text{ は偶数個} \tag{2.220}$$

とボゾン化して書ける。これらの状態は $E_8 \times E_8$ の root 部分に対応している。

付け加えておくと（2.214)、(2.217)、(2.220）の状態は、後で話す Kac-Moody 代数の表現になっている。また、同時に gauge 群の表現にもなっている。これは Kac-Moody 代数が gauge 群のリー代数に関係しているからである。

そしてこれら右向き、左向きの vertex operator を張り合わせることにより、$E_8 \times E_8$ Heterotic string の状態に対応する vertex operator ができる。

3 $E_8 \times E_8$ Heterotic string 理論 on T^6

ここでは 6 次元トーラス T^6 上に conpact 化した 4 次元の $E_8 \times E_8$ Heterotic string 理論と、その現象論的問題点について説明する。

3.1 モード展開

3.1.1 non-compact ボゾン自由度、フェルミオン自由度、gauge 自由度

ここからは物理的側面を中心に見たいので、light-conegauge で話を進める。さらに α' は陽に書かず、$\alpha' = 1/2$ とおく。

まず、T^6 上に理論を compact 化した場合には T^6 は flat なので

$$G_{\mu\nu}(X) = \eta_{\mu\nu} \quad (\mu,\nu = 0,1,2,9) \ , \ \ G_{kl}(X) = \text{const} \ \ (k,l = 3 \sim 8) \tag{3.1}$$

となっており、特にここでは

$$G_{kl}(X) = \delta_{kl} \tag{3.2}$$

である。それゆえ運動方程式（2.33）には影響は無く、モード展開は前と同様になる。ただし、compact 化された 6 次元分の自由度については後に見るように振動子のゼロモードに変更がある。

（$G_{kl}(X) = \mathrm{const} \neq \delta_{kl}$ の場合でもゼロモードに変更があるのみである。）

まず、non-conpact な 4 次元の自由度の内、transverse な方向 $X^i(i=1,2)$ に対しては

$$X^i(\omega,\bar{\omega}) = x^i - ip^i\tau + \frac{i}{2}\sum_{n\neq 0}(\frac{\alpha_n^i}{n}e^{2in\omega} + \frac{\tilde{\alpha}_n^i}{n}e^{-2in\bar{\omega}}) \tag{3.3}$$

と展開できる。(ただし、$\omega = \sigma + i\tau$ としている。前節は $z = \exp(-2i\omega)$ を使っていたが、$z \to \omega$ として場を共形変換している。この結果、$X(z,\bar{z}) = X(\omega,\bar{\omega})$ である。)

そしてフェルミオン的自由度については、transverse な方向（$i=1,2$）と compact 化された方向（$k = 3 \sim 8$）に対して

$$\psi_R^{i(k)}(\omega) = i^{-1/2}\sum_{r\in\mathbf{Z}+\nu}\psi_r^{i(k)}e^{2ir\omega} \tag{3.4}$$

と展開する。(こちらも同様に $z \to \omega$ として共形変換している。この時は $\psi(\omega) = i^{-1/2}z^{1/2}\psi(z)$ である。)

そして、また gauge 自由度については $X_L^I(I = 1 \sim 16)$ を用いる。

$$X_L^I(\bar{\omega}) = x_L^I + p_L^I\bar{\omega} + \frac{i}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{\tilde{\alpha}_n^I}{n}e^{-2in\bar{\omega}} \tag{3.5}$$

と展開する。ここで、すでに見たように p_L^I は $E_8 \times E_8$ の格子上に量子化されている。

もしフェルミオンを使った構築と関係をつけたいのなら

$$\Lambda^{I\pm} \quad \cong \quad \exp(\pm i2X_L^I) \tag{3.6}$$

とすればよい。

3.1.2 compact ボゾン自由度

今度は compact 化されたボゾン部分について説明する。

T^6 は 6 次元格子

$$\Gamma = 2\pi\Lambda \ \ , \ \ \Lambda \equiv \{\sum_{t=3}^{8} w_t e_t^k | w_t \in \mathbf{Z}\} \tag{3.7}$$

を使って

$$T^6 = \mathbf{R}^6/\Gamma \tag{3.8}$$

と書ける。ここで $k(=3\sim 8)$ は compact 化された時空の足であり、$e_t^k = (e_t^3,\ldots,e_t^8)$ $(t = 3 \sim 8)$ は 6 次元格子の基底（〜トーラスの半径）である。

すると、T^6 上の弦の重心座標 x^k は $L^k \in \Lambda$ を使って

$$x^k \cong x^k + 2\pi L^k \tag{3.9}$$

と同一視できる。これは T^6 に巻き付いた閉弦の境界条件として見ると

$$X^k(\tau, \sigma + \pi) = X^k(\tau, \sigma) + 2\pi L^k \ , \ (k = 3 \sim 8) \tag{3.10}$$

という意味である。これを見ると w_t は閉弦の T^6 に対する巻き付き数を表わしていることがわかる。

ここで、T^6 上の波動関数 $\exp[ip^k x^k]$ を考える。ここで p^k は T^6 上の弦の重心運動量である。この波動関数が T^6 上で一価であるため（$\exp[ip^k x^k] = \exp[ip^k(x^k + 2\pi L^k)]$）には

$$p^k L^k \in \mathbf{Z} \tag{3.11}$$

でなければならない。

すると T^6 上の運動量 p^k は Λ に対して dual な Λ^* の上に量子化される。つまり

$$p^k \in \Lambda^* \ , \ \Lambda^* = \{\sum_{t=3}^{8} n_t e_t^{*k} | n_t \in \mathbf{Z}\} \tag{3.12}$$

である。そして e_t^{*k} は Λ^* の基底（$\sim T^6$ の半径の逆数）であり、$e_t^k e_u^{*k} \equiv \mathbf{e}_t \cdot \mathbf{e}_u^* = \delta_{tu}$ を満たす。また、 n_t は運動量モード（Kalzua-Klein モード）に対応することが分かる。

ここで、場を

$$\partial X^k = -\frac{i}{2}\sum_{n\in\mathbf{Z}} \alpha_n z^{-n-1} \ , \ \bar{\partial} X^k = -\frac{i}{2}\sum_{n\in\mathbf{Z}} \tilde{\alpha}_n \bar{z}^{-n-1} \tag{3.13}$$

と展開する。

そして、運動量カレント $j^k = 2i\partial X^k, \tilde{j}^k = 2i\bar{\partial} X^k$ を使って

$$p^k = \frac{1}{2\pi i}\oint (dz j^k - d\bar{z}\tilde{j}^k) = \alpha_0^k + \tilde{\alpha}_0^k \tag{3.14}$$

$$-2\pi L^k = \oint (dz\partial X^k + d\bar{z}\bar{\partial} X^k) = \pi(\alpha_0^k - \tilde{\alpha}_0^k) \tag{3.15}$$

を満たし、式（3.10）の境界条件を満たすように振動子のゼロモードを決める。

（$z = \exp(-2i\omega)$ である。）

すると

$$\alpha_0^k = \frac{1}{2}(p^k - 2L^k) \equiv p_R^k \tag{3.16}$$

$$\tilde{\alpha}_0^k = \frac{1}{2}(p^k + 2L^k) \equiv p_L^k \tag{3.17}$$

とするとよいことが分かる。（gauge 部分と同様に運動量の定義をずらしてある）

よって、場を

$$X_R^k(\omega) = x_R^I - p_R^k\omega + \frac{i}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{\alpha_n^k}{n}e^{2in\omega} \tag{3.18}$$

$$X_L^k(\bar{\omega}) = x_L^k + p_L^k\bar{\omega} + \frac{i}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{\tilde{\alpha}_n^k}{n}e^{-2in\bar{\omega}} \tag{3.19}$$

展開することにする。（ここでも $z \to \omega$ で共形変換している。）

ここで、

$$[x_R^k, 2p_R^l] = [x_L^k, 2p_L^l] = i\delta^{kl} \tag{3.20}$$

である。

3.2 massless モード

3.2.1 右向き部分

Virasoro 条件

$$L_0|phys\rangle = 0 \tag{3.21}$$

より

$$\frac{1}{8}m^2 = N + \frac{1}{2}(p_R^k)^2 - a \ \ , \ \ a_{NS} = \frac{1}{2} \ \ , \ \ a_R = 0 \tag{3.22}$$

が成り立つ。これは twist を受けていないので non-compact の場合と同様である。

よって massless になるのは

$$N = \frac{1}{2} \ \ (\text{or } (p_R^k)^2 = 1) \text{ for } \ \ \text{NS} \ \ , N = (p_R^k)^2 = 0 \text{ for } \ \ \text{R} \tag{3.23}$$

である。しかし、一般的な compact 化の半径では $(p_R^k)^2 = 1$ の条件を満たさないのでここでは考えない。よって、non-compact な場合と物理的自由度は変わらない。

もちろん特別な compact 化の半径の場合、massless モードが Kalzua-Klein(KK)gauge 場として新たに出てくる。この場合、compact 化によって出てくる KK 的な gauge 対称性が、例えば $U(1) \to SU(2)$ に enhance されることが知られている。（この事は Higgs 機構とも関係している。）

3.2.2 左向き部分

この場合は

$$\frac{1}{8}m^2 = \tilde{N} + \frac{1}{2}[(p_L^k)^2 + (p_L^I)^2] - 1 \tag{3.24}$$

となり、massless になるのは

$$\tilde{N} = 1 \text{ or } \ (p_L^I)^2 = 2 \text{ or } ((p_L^k)^2 = 2) \tag{3.25}$$

となる。前と同様に $(p_L^k)^2=2$ は考えない。よってこの場合も non-compact な場合と物理的自由度は変わらない。なおかつ gauge 群も $E_8\times E_8\times U(1)^{12}$ と非常に大きいままである。

（$U(1)^{12}$ のうち、半分は $G_{\mu k}$ より、もう半分は $B_{\mu k}$ より出てくる。）

3.3 T^6 compact 化の問題点

以上のように、理論を T^6 上に compact 化すると物理的自由度が変わらないことから、10 次元 N=1（supercharge 16 個）の超対称性（supersymmetry 、略して SUSY）を持つ理論が、4 次元 N=4（supercharge 16 個）の SUSY を持つ理論になることがわかる。これは 10 次元の Lorentz 対称性のうち、compact 化されて見えなくなった時空（T^6）の対称性（$SO(6)\simeq SU(4)_R$）が 4 次元の内部対称性になったとも理解できる。

この時、vector supermultiplet を考えてみる。gauge 場は $SO(8)_{lightcone}\supset SO(2)_{lightcone}\times SO(6)(\simeq SO(2)_{lightcone}\times SU(4)_R)$ の表現の元で

$$\begin{aligned}
A_M^a\ \ (M=1\sim 8)\ \ \rightarrow\ \ & A_i^a(i=1,2)\longleftrightarrow\ \ h_v=(\pm1,0^3)\\
&\phi_{\pm1}^a=\frac{1}{\sqrt{2}}(A_3^a\pm iA_4^a)\ \ \longleftrightarrow\ \ h_v=(0,\pm1,0^2)\\
&\phi_{\pm2}^a=\frac{1}{\sqrt{2}}(A_5^a\pm iA_6^a)\ \ \longleftrightarrow\ \ h_v=(0^2,\pm1,0)\\
&\phi_{\pm3}^a=\frac{1}{\sqrt{2}}(A_7^a\pm iA_8^a)\ \ \longleftrightarrow\ \ h_v=(0^3,\pm1)
\end{aligned}\tag{3.26}$$

と gauge 場一つと複素スカラー場 3 つに分解される。ここで、a は $E_8\times E_8$ の gauge 群の足であり、h_v はその状態に対応する H-momentum である。

また、そのスーパーパートナーである gaugino は同様に

$$\mathbf{8}_R=(s_1=+1/2)\times\mathbf{4}\oplus(s_1=-1/2)\times\bar{\mathbf{4}}\qquad(\lambda_R^a\to\lambda_{1,2,3,4}^a)\tag{3.27}$$

と 4 つに分解される。対応する H-momentum は

$$h_s=\underbrace{((\frac{1}{2})^4)\ (\frac{1}{2},\overbrace{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}^{\text{permutation}})}_{s_1=+1/2}\oplus\underbrace{((-\frac{1}{2})^4)\ (-\frac{1}{2},\overbrace{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{\text{permutation}})}_{s_1=-1/2}\tag{3.28}$$

である。つまり 4 次元で見たとき、それぞれのカイラリティ―に、等しく 4 つずつフェルミオン的自由度があることがわかる。

場の理論で書けるような低エネルギー有効理論を考えた時、これはまさに 4 次元 N=4 super Yang-Mills（SYM）の multiplet になっている。（supergravity multiplet の方も同様に 4 次元 N=4 の multiplet になっている。）

ここから分かるのは N=4 の理論は chiral な理論ではないということである。標準模型は chiral な理論なので、N=4 の理論は現実的ではない。実際、chiral な理論にできるのは 4 次元で N=1、 N=0 のみである事が知られている。しかし、階層性問題を SUSY が解決するのだと思えば、4 次元で N=1 の理論であるべきである。

よって、どうやって supercharge を 16 個（N=4）→4 個（N=1）まで減らすかが問題である。

そして $E_8 \times E_8(\times U(1)^{12})$ という gauge 対称性も大きすぎる。この gauge 対称性をどうやって小さくするかのか、特に標準模型の $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ にするのはどうすればいいのかが問題である。（超弦理論から $SU(5), SO(10), E_6$ 大統一理論を作るのは技術的に難しいことが知られている。）

問題点のまとめ

まとめると次の通りである。

- T^6compact 化をすると supercharge が 16 個残ってしまう。（non - chiral な理論）
  → supercharge を 4 個（chiral な理論）残すような compact 化をすれば良い。
- gauge 群が標準模型の $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ に対して大きすぎる。
  → さらに、矛盾無く gauge 群を壊す compact 化をすれば良い。

これらに対するひとつの解決方法が次の orbifold である。

4 $E_8 \times E_8$ Heterotic string 理論 on orbifold

ここからは orbifold 上に compact 化された 4 次元の $E_8 \times E_8$ Hetero 型超弦理論を考える。そして、そこから導き出される低エネルギー有効理論にの現象論的側面について見ていく。

4.1 点群と空間群

ここでは、orbifold はどのように T^6 から作られるのかを見る。そして、orbifold を構築する際に必要な点群と、それを含む空間群に対する簡単な条件ついて見ていく。

4.1.1 トーラスから orbifold へ

トーラス compact 化の場合、前に見たように、X_R^k、$X_L^k(k = 3 \sim 8)$ は、格子 Λ によって作られる 6 次元トーラス T^6 上に compact 化され、量子化された重心運動量を持っていた。

そして、$X_L^I(I = 1 \sim 16)$ は even self-dual 格子 $\Gamma_8 \times \Gamma_8$ によって作られる $E_8 \times E_8$ の 16 次元トーラス $T^{E_8 \times E_8}$ 上に compact 化され、同様に量子化された（$E_8 \times E_8$ root に対応する）重心運動量を持っていた。

また、6 次元トーラス T^6 は

$$T^6 = \mathbf{R}^6/\Gamma \tag{4.1}$$

のように、格子Γ上の点を同一視することによって作ることができる。ここで$\Gamma = 2\pi\Lambda$である。

ここでさらに、isometry $\theta(=\theta^{kl}\ \ k,l = 3\sim 8)$ の作用により、トーラス上の様々な点を同一視する事を考えよう。

この時、θの作用の同一視によってできる空間が well - defined になるためにはθはΓの automorphism でなければならない。

つまり

$$l^k \in \Gamma \to (\theta l)^k \in \Gamma\ \ , \qquad (\theta e_t)^k (\theta e_u)^k = e_t^k e_u^k \tag{4.2}$$

である。

この時、isometry θ の集合は 離散群 $P\,(\ni\theta)$ をなす。そして、このPを点群と呼ぶ。

するとこの時、orbifold Ωは次のように定義される。

$$\Omega \equiv T^6/P \times T^{E_8\times E_8}/G \tag{4.3}$$

ここでGは、点群Pの gauge 群$E_8\times E_8$に対する埋め込み（gauge embedding）であり、モジュラー不変性を保つために行われる。もちろんGもP同様離散群である。

この離散群Pの位数をNとしよう。（$\theta^N = \mathbf{1}, \theta\in P$）すると orbifold 上の点$x^k(k = 3\sim 8)$は $l^k\in\Gamma, \theta\in P$を使って

$$x^k \cong (\theta^n x)^k + l^k\ \ ,\ \ n = 0\sim N-1 \tag{4.4}$$

と同一視される。

ここで、式（4.4）の右辺をまとめて(θ, l^k)の作用としよう。つまり、

$$(\theta, l^k)x^k \equiv (\theta x)^k + l^k \tag{4.5}$$

である。また、この(θ, l^k)の集合は群をなす。これを空間群と呼ぶ。

そして、次のように空間群Sを定義する。

$$S \equiv \{(\theta, l^k)|\theta\in P, l^k\in\Gamma\} \tag{4.6}$$

この時、空間群の元の積は

$$[(\theta_1, l_1^k)(\theta_2, l_2^k)]x^k \equiv (\theta_1, l_1^k)[(\theta_2, l_2^k)x^k] = (\theta_1\theta_2 x)^k + l_1^k + (\theta_1 l_2)^k \tag{4.7}$$

と定義される。実際この時、結合則が成り立つことが確かめられる。

すると、orbifold Ωは

$$\Omega = \mathbf{R}^6/S \times T^{E_8\times E_8}/G \tag{4.8}$$

と書く事もできる。

このように、orbifold では空間群（点群）に対して理論が同一視されているので、空間群に対して不変でない状態は理論から落ちることになる。その結果、空間群Pの作用により、後で見るように SUSY を$N = 1$まで壊すことができる。そして gauge embedding により、gauge 群$E_8\times E_8$が壊れることになる。

4.1.2 orbifold の固定点

ここで、orbifold はほとんどの場所で平坦であるので、orbifold 上の弦の運動方程式をトーラスと同じように簡単に解くことができる。ただし orbifold の場合、トーラスと大きく違う点がある。それは空間群 S の作用による固定点（fixed point）が存在する点である。また固定点は点群 P の位数が N の時、

$$x_f^k = (\theta^n x_f)^k + l^k \ , \ (\theta \in P \quad n = 0 \sim N-1) \tag{4.9}$$

を満たす点と定義される。この固定点上では曲率が発散して特異点となっており、局所的 に $\mathbf{R}^6$ と同型ではなくなっている。

また一般的には、点群の位数が N（$\theta^N = \mathbf{1}$）で、$\det(\theta^n - \mathbf{1}) = 0$（$n < N$）の時がある。この時は、twist を受けない部分があるので、特に固定トーラス（fixed tori）が存在する。この固定トーラスは gauge coupling を考えるときには重要な役割を果たす。

この固定点のため、orbifold の理論はトーラスとは違ってくる。

4.1.3 場の境界条件（untwisted sector、twisted sector）

Z_N orbifold の時を考える。

この時、場の境界条件は式（4.4）を考慮すると

$$X^k(\tau, \sigma + \pi) = (\theta^n X(\tau, \sigma))^k + l^k, \qquad (k = 3 \sim 8 \ , \ n = 0 \sim N-1) \tag{4.10}$$

である。

- untwisted sector （bulk field）

$n = 0$ のセクターを untwisted sector と呼ぶ。

式（4.10）を考慮すると、untwisted sector の弦は様々な重心座標を取れるので bulk 全体に住んでいることが分かる。また、このセクターはトーラスの場合と同様なモード展開をする。

- twisted sector （boundary field）

$n \neq 0$ のセクターを twisted sector と呼ぶ。

twisted sector は、同様に式（4.10）を考慮すると、弦の重心座標は固定点上のみしか許されない。つまり twisted sector の弦は固定点近傍にのみに住んでいることが分かる。さらに具体的に後で見るように振動子ゼロモード（運動量、巻き付き数）を持つことができない。またこのセクターはモード展開が twist の分だけずれる。

モジュラ—不変性のため、これらのセクターは必ず存在していないといけない。

4.1.4 点群の満たすべき条件

orbifold をきちんと定義するためには格子 Γ、点群 P、そしてその gauge embedding G を明確にすることが必要である。ここでは具体的に点群 P の満たすべき条件を見ていく。

点群 P の元 θ $(\in P)$ は弦の座標 $X^k(\tau,\sigma)(k=3\sim 8)$ に対し $SO(6)$（$\simeq SU(4)$）の元のように作用する。この時、SUSY を 4 次元の $N=1$（supercharge 4 個）だけ残したい事を考慮にいれ、次のように考える。まず、弦の座標を

$$Z^i \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(X^{2i+1}+iX^{2i+2}) \ , \ (i=1\sim 3) \tag{4.11}$$

と定義する。またこの時、回転軸を適当に選ぶことによって、点群 P の元 θ は、$SO(6)$ の 3 つの Cartan subalgebra（M_{34}, M_{56}, M_{78}）を使って

$$\theta = \exp[2\pi i(v^1M_{34}+v^2M_{56}+v^3M_{78})] \tag{4.12}$$

とすることが可能である*。

ここで、Z_N orbifold の時、$\theta^N = \mathbf{1}$ であるので、

$$Nv^i \in \mathbf{Z} \ , \ (i=1\sim 3) \tag{4.13}$$

を満たす。

この時、θ twisted sctor の（一部の）境界条件は、

$$Z^i(\tau,\sigma+\pi) = \exp(2\pi i v^i)Z^i(\tau,\sigma) \tag{4.14}$$

となる。この時、これを考慮すると、$\theta \in P \subset U(3) \subset SO(6)(\simeq SU(4))$ であることが分かる。

さらに θ のスピノール表現 θ_{s} を考え、時空の supercharge に作用させることを考える。すると、

$$Q_\alpha \stackrel{\theta_{\mathrm{s}}}{\to} \theta_{\alpha\beta}Q_\beta \tag{4.15}$$

となる。また、Cartan subalgebra M_{34}, M_{56}, M_{78} の固有値 m_1, m_2, m_3 は $m_i = \pm 1/2$ である。（これは、すでに用いた R セクターの状態（2.117）のスピン固有値 s_2, s_3, s_4 に対応する。）

すると上式を

$$Q_\alpha \stackrel{\theta_{\mathrm{s}}}{\to} \exp(2\pi i m_i v^i)Q_\alpha \tag{4.16}$$

と書き直すことができる。この時、この作用に対して不変な状態の super charge のみが orbifold の理論に残ってくる。

もし、

$$v^1+v^2+v^3=0 \tag{4.17}$$

---

*一般的には、もっと複雑に回転するがここでは考えない。それは compact 化の段階（高いエネルギー scale）で SUSY をすべて壊す可能性があるからである。そこでは、また hirarchy が問題になる。また、この compact 化による、SUSY breaking の機構は Scherk-Schwarz 機構 [5] とも関係がある。

であれば、元々（16 個）の 1/4 つまり、4 個の supercharge が残ることになる。（これは 4 次元の $N=1$ SUSY が残っていることに対応する。）なぜならば、この時、

$$m_1 = m_2 = m_3 \tag{4.18}$$

の状態の supercharge が 4 次元で理論に残るからである。もちろん他の場合、例えば $v^1 - v^2 + v^3 = 0$ 等も考えられるが、この場合も全く同様のことが言える。

　そしてこの場合、式（4.17）より、

$$\theta \in P \subset SU(3) \subset SO(6) \tag{4.19}$$

であることが言える。

　しかし、もし

$$v^1 = v^2 + v^3 = 0 \ , \ \ v^{2,3} \neq 0 \ \ \rightarrow \ \ \theta \in P \subset SU(2) \subset SU(3) \subset SO(6) \tag{4.20}$$

ならば supercharge は 4 次元の理論に、元の半分である 8 個（$N=2$ SUSY）残ってしまうことになる。（この場合は、固定トーラスがあるセクターに対応する。）

　よって、点群 P の元 θ は

$$\theta = \exp[2\pi i(v^1 M_{34} + v^2 M_{56} + v^3 M_{78})] \ , \ \ v^1 + v^2 + v^3 = 0 \ , \ \ v^i \neq 0 \tag{4.21}$$

であり、

$$\theta \in P \subset SU(3) \subset SO(6) \tag{4.22}$$

であれば良いことが分かった。また、一般の θ^n twisted sector では twist を $v^i \rightarrow nv^i$ とすればよいから、これを考えれば十分である。

　ところで、この点群 P は、格子 Γ に式（4.21）の条件を満たしながら作用する。この時、結晶学の点から P は Z_N（$N = 3,4,6,7,8,12$）or $Z_M \times Z_N$（$M,N = 2,3,4,6$）でなければならないことが知られている。（後者はまさに、3 次元的な結晶に対する回転対称性と同じである。）

Table 1 † $Z_N \subset SU(3)$ orbifold $\theta = \exp[2\pi i(v^1 M_{34} + v^2 M_{56} + v^3 M_{78})]$

点群	(v^1, v^2, v^3)
Z_3	$\frac{1}{3}(1, 1, -2)$
Z_4	$\frac{1}{4}(1, 1, -2)$
$Z_6 - I$	$\frac{1}{6}(1, 1, -2)$
$Z_6 - II$	$\frac{1}{6}(1, 2, -3)$
Z_7	$\frac{1}{7}(1, 2, -3)$
$Z_8 - I$	$\frac{1}{8}(1, 2, -3)$
$Z_8 - II$	$\frac{1}{8}(1, 3, -4)$
$Z_{12} - I$	$\frac{1}{12}(1, 4, -5)$
$Z_{12} - II$	$\frac{1}{12}(1, 5, -6)$

Table 2 $Z_M \times Z_N \subset SU(3)$ orbifold

$\theta = \exp[2\pi i(v^1 M_{34} + v^2 M_{56} + v^3 M_{78})]$, $\varphi = \exp[2\pi i(w^1 M_{34} + w^2 M_{56} + w^3 M_{78})]$

点群	(v^1, v^2, v^3)	(w^1, w^2, w^3)
$Z_2 \times Z_2$	$\frac{1}{2}(1, 0, -1)$	$\frac{1}{2}(0, 1, -1)$
$Z_3 \times Z_3$	$\frac{1}{3}(1, 0, -1)$	$\frac{1}{3}(0, 1, -1)$
$Z_2 \times Z_4$	$\frac{1}{2}(1, 0, -1)$	$\frac{1}{4}(0, 1, -1)$
$Z_4 \times Z_4$	$\frac{1}{4}(1, 0, -1)$	$\frac{1}{4}(0, 1, -1)$
$Z_2 \times Z_6 - I$	$\frac{1}{2}(1, 0, -1)$	$\frac{1}{6}(0, 1, -1)$
$Z_2 \times Z_6 - II$	$\frac{1}{2}(1, 0, -1)$	$\frac{1}{6}(0, 1, -2)$
$Z_3 \times Z_6$	$\frac{1}{3}(1, 0, -1)$	$\frac{1}{6}(0, 1, -1)$
$Z_6 \times Z_6$	$\frac{1}{6}(1, 0, -1)$	$\frac{1}{6}(0, 1, -1)$

4.2 格子

ここからは 6 次元トーラスを生成する格子 Γ について考える。格子 Γ は点群 P を具体的に決めると決まることが知られている。また、格子の選び方によって具体的に模型が決まるので格子 Γ の選び方は重要である。

†例えば Z_4 の θ^2 - twisted sector は $v^3 = -1$ となる。境界条件（4.14）を考慮すると、第 3 平面自体が固定されるので固定トーラスになっていることがわかる。更にこの時、$m_1 = m_2$ の状態の supercharge が残る。（m_3 は何でもよい。）よって、このセクターだけ見ると、4 次元の理論で $N = 2$ SUSY が残っているように見える。（もちろん全体のセクターでは $N = 1$ SUSY の理論になっている。）

4.2.1 点群と Coxeter element

数学的な格子の作り方として、ランク 6 の半単純リ一群の単純 root で作る方法がある。この時の（inner）automorphism はリ一代数の Weyl 群であることが知られている。この Weyl 変換は単純 root を使った鏡映変換で、格子上の 6 次元ベクトル $x^k(k=1\sim 6)$ は

$$\mathbf{x} \quad \overset{\text{Weyl 変換}}{\to} \quad s_a(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2\frac{(\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_a)\mathbf{e}_a}{(\mathbf{e}_a\cdot\mathbf{e}_a)} \tag{4.23}$$

と変換される。ここで e_a^k $(a=1\sim 6)$ は単純 root で、a は単純 root を区別する足である。

ところで、この Weyl 群は $SU(3)$ には含まれない。つまり、点群 P とは見なせない。しかし、その部分群は $SU(3)$ に含まれることが知られている。この部分群は Coxeter element

$$C \equiv s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6 \tag{4.24}$$

によって生成される。よって、これによって生成される群をを点群 P と見なすことができる。このとき、Coxeter element C は

$$C^N = \mathbf{1} \quad , N = \frac{\text{リー代数の root 数}}{\text{リー代数のランク数}} \tag{4.25}$$

を満たす。ここで、(root 数) = (リ一群の次元) − (ランク数) である。また、実はこの Coxeter element によって生成される点群は、リ一群の拡大 Dynkin 図形の（outer）automorphism になっている。

またこの時、固定点の数 $n_{\rm fp}$ は Lefschetz の固定点定理より

$$n_{\rm fp} = \det(1-C) \tag{4.26}$$

である。

- 例 1

$SU(n)$ の場合

$$N = \frac{(n^2-1)-(n-1)}{n-1} = n \tag{4.27}$$

である。また $SU(3)$ のとき、

$$s_{12}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \frac{[\mathbf{x}\cdot(\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2)](\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2)}{(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1)} \tag{4.28}$$

を定義して、

$$C_{SU(3)^{[2]}} = s_1 s_{12} \;\;,\;\; N=6 \tag{4.29}$$

も可能である。

- 例 2

4 次元トーラスを考えて $SO(8)$ を使う場合

$$C_{SO(8)} = s_1 s_2 s_3 s_4 \ , \ \ N = \frac{28-4}{4} = 6 \tag{4.30}$$

である。

またこの時、次のようにしても点群を作ることができる。まず、

$$s_{34}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \frac{[\mathbf{x}\cdot(\mathbf{e}_3-\mathbf{e}_4)](\mathbf{e}_3-\mathbf{e}_4)}{(\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_3)} \tag{4.31}$$

$$s_{134}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \frac{[(\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_1)(\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_3)+(\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_3-\mathbf{e}_4)+(\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_4)(\mathbf{e}_4-\mathbf{e}_1)]}{(\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_3)} \tag{4.32}$$

を定義する。すると、これを使って

$$C_{SO(8)^{[2]}} = s_1 s_2 s_3 s_{34} \ , \ \ N = 8 \tag{4.33}$$

$$C_{SO(8)^{[3]}} = s_1 s_2 s_{134} \ , \ \ N = 12 \tag{4.34}$$

も作ることができる。

- 例 3

もし 2 次元トーラスから orbifold を考えるのならば、たとえば次のランク 2 の群を使うとよい。

$$Z_2 \ : \ (SU(2))^2 \qquad Z_3 \ : \ SU(3) \qquad Z_4 \ : \ SO(4), SO(5) \qquad Z_6 \ : \ SU(3)^{[2]}, G_2 \tag{4.35}$$

これらを使った 6 次元トーラスの格子を参考までに Table 3 に載せておく。

Table 3　Z_N Coxeter orbifold の格子

点群	格子
Z_3	$(SU(3))^3$
Z_4	$(SU(4))^2$
Z_4	$SO(5) \times SU(4) \times SU(2)$
Z_4	$(SO(5))^2 \times (SU(2))^2$
$Z_6 - I$	$(G_2)^2 \times SU(3)$
$Z_6 - I$	$(SU(3)^{[2]})^2 \times SU(3)$
$Z_6 - II$	$SU(6) \times SU(2)$
$Z_6 - II$	$SO(8) \times SU(3)$
$Z_6 - II$	$SO(7) \times SU(3) \times SU(2)$
$Z_6 - II$	$G_2 \times SU(3) \times (SU(2))^2$
$Z_6 - II$	$SU(3)^{[2]} \times SU(3) \times (SU(2))^2$
$Z_6 - II$	$SU(4)^{[2]} \times SU(3) \times SU(2)$
Z_7	$SU(7)$
$Z_8 - I$	$SO(9) \times SO(5)$
$Z_8 - I$	$SO(8)^{[2]} \times SO(5)$
$Z_8 - II$	$SO(8)^{[2]} \times (SU(2))^2$
$Z_8 - II$	$SO(10) \times SU(2)$
$Z_8 - II$	$SO(9) \times (SU(2))^2$
$Z_{12} - I$	E_6
$Z_{12} - I$	$F_4 \times SU(3)$
$Z_{12} - I$	$SO(8)^{[3]} \times SU(3)$
$Z_{12} - II$	$SO(4) \times F_4$
$Z_{12} - II$	$SO(8)^{[3]} \times (SU(2))^2$

4.2.2　背景場の影響

ゼロモードへの影響

次に、compact 部分の空間に定数背景場 G_{kl}, B_{kl} と Cartan subalgebra $U(1)^{16}$ に相当する Willson line A_k^I（定数）が入った場合を考える。

この時、ボゾン部分の作用は

$$S_B = -\frac{1}{2\pi}\int dtd\sigma[G_{kl}\partial_a X^k \partial^a X^l + \epsilon^{ab}B_{kl}\partial_a X^k \partial_b X^l + \partial_a X^I \partial^a X^I + \epsilon^{ab}A_k^I \partial_a X^k \partial_b X^I] \quad (4.36)$$

と書ける。（この形から分かるように、作用が不変になるためには、空間の twist の gauge embedding は、twist で行わなければならない。それゆえ、後に述べる Wilson line が連続的な場合に対応している。しかし、離散的な場合も、同様に無矛盾における。）また、定数場であるので場の運動方程式に変更はなく、ゼロモードに影響するだけである。

ただし、

$$C^I(\sigma) \equiv (\partial_t - \partial_\sigma) X^I = 0 \tag{4.37}$$

の拘束条件をおいて正準量子化する。（この時の拘束は第 2 類である）

この時、各々のゼロモードは

$$p_L^I \;\; \to \;\; p_L^{I\prime} \equiv p_L^I + A_k^I L^k \tag{4.38}$$

$$p_R^k = \frac{p^k}{2} - L^k \;\; \to \;\; p_R^{k\prime} \equiv \;\; \frac{p^k}{2} - L^k - B^{kl} L_l - \frac{1}{2}(A^{Ik} p_L^I + \frac{1}{2} A^{Ik} A_l^I L^l) \tag{4.39}$$

$$p_L^k = \frac{p^k}{2} + L^k \;\; \to \;\; p_L^{k\prime} \equiv \;\; \frac{p^k}{2} + L^k - B^{kl} L_l - \frac{1}{2}(A^{Ik} p_L^I + \frac{1}{2} A^{Ik} A_l^I L^l) \tag{4.40}$$

と変化する。ただし、$p^k \in \Lambda^*, L^k \in \Lambda$ である。

また、これらのパラメーターは、4 次元に compact 化した、同等でない Heterotic string 理論を結び付けるモジュライパラメーターである事が知られている。そして、4 次元に compact 化した時の、Heterotic string 理論のモジュライ空間は、

$$\frac{O(22,6;\mathbf{R})}{O(22;\mathbf{R}) \times O(6;\mathbf{R}) \times O(22,6;\mathbf{Z})} \tag{4.41}$$

と書かれる。ここで、$(22,6)$ は 4 次元に compact 化された理論の、左向き、右向きのゼロモード（運動量）が乗っている格子の次元数を与えている。分子は、モジュラ—不変で、無矛盾な Heterotic string 理論の集合の対称性

$$L_0 - \bar{L}_0 \supset (p_R)^2 - (p_L)^2 \in 2\mathbf{Z} : \text{inv.} \tag{4.42}$$

を与える。（しかし、格子、スペクトルを変えるので、1 つの理論の対称性ではない。）分母の連続変換は、ある 1 つの理論の対称性

$$L_0 \supset (p_R)^2 : \text{inv.} \;\; , \bar{L}_0 \supset (p_L)^2 : \text{inv.} \tag{4.43}$$

を与える。これは理論のスペクトルを変えない変換である。それゆえ理論の対称性である。最後の変換は格子を変えない離散変換を与える。なお、最後の $O(22,6;\mathbf{Z})$ の部分群は後で説明する T-duality と関係した対称性である。実際にこの空間の次元は $22 \times 6 = 132$ となり、G_{kl}, B_{kl}, A_k^I の数と一致する。また、これらのモジュライパラメーターを使う事により、$E_8 \times E_8$Heterotic string 理論と、$SO(32)$Heterotic string 理論は、双対な関係にある事が知られている。

時空間のトーラスへの影響

簡単のため、各々の平面に対してまたがって G_{kl}, B_{kl} が入ってない（例えば、$G_{35} = B_{57} = G_{73} = 0$ である）時を考える。この時、各々の平面の 2 次元トーラスを特徴づける moduli 場 $T_i, U_i \ (i = 1 \sim 3)$ を次のように定義できる。

$$iT_i \equiv 2(b_{2i-1,2i} + i\sqrt{(\det g)_i}) \ , \ (i = 1 \sim 3) \tag{4.44}$$

$$iU_i \equiv 1/g_{2i-1,2i-1}(g_{2i-1,2i} + i\sqrt{(\det g)_i}) \ , \ (i = 1 \sim 3) \tag{4.45}$$

ここで、

$$g_{ab} = e_a^k G_{kl} e_b^l \ , \ b_{ab} = e_a^k B_{kl} e_b^l \tag{4.46}$$

であり、$e_a^k \ (a, k = 3 \sim 8)$ は 6 次元トーラスの基底である。この場合の行列式は一つの平面に対してのみ取っている。

また、Tmoduli の期待値は時空間のトーラスの大きさ（compact 化の scale）を表わす。いわゆる radion に対応する場である。そして Umoduli は時空間のトーラスの形（モジュラーパラメーター）を表わす。

ただし、Umoduli は Z_2 orbifold の時のみ自由度がある。例えば Z_3 orbifold の時には $iU = e^{2\pi i/3}$ と数になり自由度がなくなる。これは、Z_2（180 度）回転は、1 次元的な広がりしか指定せず、平面における、格子の形を決めないからだと考えられる。

4.3 orbifold compact 化における massless モード

ここからは、背景場がないときの、一般的な Z_N orbifold の時を考える。この時、どのような場合に massless モードが残るのか、その簡単な条件を見る。

4.3.1 untwisted sector

このセクターは、前に説明したトーラス compact 化とほとんど同じである。このため、このセクターだけ見ると $N = 4$ の SUSY が残っているように見える。トーラス compact 化と違う点は、orbifold は点群の作用に対して理論を同一視している点である。その結果、点群の作用に対して不変でないものは理論より落ち（特に、compact 空間部分の重心運動量は持つことができない）、全体で $N = 1$ SUSY の理論になる。

- 例

4 次元の gravitino を表わす状態

$$|\mathbf{s}\rangle \otimes \tilde{\alpha}_{-1}^i |0\rangle \ , \ (i = 1, 2) \tag{4.47}$$

を考える。このとき $\mathbf{s}$ は $SO(8)_{lightcone}$ で

$$\mathbf{s} = ((\frac{1}{2})^4) \ (\frac{1}{2}, \underbrace{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}_{\text{permutation}}) \oplus ((-\frac{1}{2})^4) \ (-\frac{1}{2}, \underbrace{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}_{\text{permutation}}) \tag{4.48}$$

である。

この状態に前節の $\theta(\in P)$ を作用させることを考える。この時、$\tilde{\alpha}^i_{-1}|0\rangle$ は θ の作用に対し不変である。

そして $|\mathbf{s}\rangle$ は $\theta = \exp(2\pi i v^j m_j)$ $(j = 1 \sim 3)$ の作用に対し、それぞれのスピン状態が次の固有値を持つ。

$$\theta = \underbrace{\mathbf{1}\ ,\ e^{2\pi i v^i}}_{s_1=\frac{1}{2}},\ \ \underbrace{\mathbf{1}\ ,\ e^{-2\pi i v^i}}_{s_1=-\frac{1}{2}} \quad i = 1 \sim 3 \tag{4.49}$$

よって $v^i \neq 0$ の時、理論に残る状態は

$$\mathbf{s} = ((\frac{1}{2})^4)\ \oplus ((-\frac{1}{2})^4) \tag{4.50}$$

である。つまり 1 つの gravitino しか理論には残らず、実際に $N = 1$ SUSY の理論になる。

4.3.2 twisted sector

ここでは θ- twisted sector のみを具体的に考える。一般の θ^n- twisted sector の場合は、ここで出る v^i を $v^i \to nv^i$ とすればよい。

compact ボゾン部分のモード展開

この時、境界条件は

$$Z^i(\tau, \sigma + \pi) = \exp(2\pi i v^i) Z^i(\tau, \sigma) + l^i \quad (i = 1 \sim 3) \tag{4.51}$$

である。この境界条件を満たす完全系で場を

$$Z^i = z^i_f + \frac{i}{2}\sum_n \left[\ \frac{\beta^i_{n+v^i}}{n+v^i} e^{2i(n+v^i)\omega} + \frac{\tilde{\beta}^i_{n-v^i}}{n-v^i} e^{-2i(n-v^i)\bar{\omega}}\ \right] \tag{4.52}$$

と展開し、その複素共役場 $\bar{Z}^i$ を

$$\bar{Z}^i = \bar{z}^i_f + \frac{i}{2}\sum_n \left[\ \frac{\bar{\beta}^i_{n-v^i}}{n-v^i} e^{2i(n-v^i)\omega} + \frac{\bar{\tilde{\beta}}^i_{n+v^i}}{n+v^i} e^{-2i(n+v^i)\bar{\omega}}\ \right] \tag{4.53}$$

とモード展開する[‡]。ここで z^i_f は fixed point である。そして、振動子は次の代数を満たす。

$$[\beta^i_{n+v^i}, \bar{\beta}^j_{m-v^j}] = (n+v^i)\delta^{ij}\delta_{m+n,0}\ \ ,\ \ [\tilde{\beta}^i_{n-v^i}, \bar{\tilde{\beta}}^j_{m+v^j}] = (n-v^i)\delta^{ij}\delta_{m+n,0} \tag{4.54}$$

そして、twisted sector の真空 $|\sigma_{v^i}\rangle$ は

$$\beta^i_{n+v^i}|\sigma^i_{v^i}\rangle = \bar{\beta}^i_{n-v^i}|\sigma^i_{v^i}\rangle = 0 \quad (n+v^i\ \ ,\ \ n-v^i > 0) \tag{4.55}$$

と定義される。(左向き側も同様である。)

[‡]固定トーラスあるセクターはトーラスの時と全く同じモード展開をする。例えば Z_4 orbifold の θ^2 - twisted sector の第 3 平面に対応する場は、重心運動量を持つことになる。

compact フェルミオン部分のモード展開

ボゾン部分が twist を受けるため、超共形不変性を保つため、フェルミオンも同様に twist を受ける。同様に複素フェルミオン ψ^i $(i = 1 \sim 3)$ を使うと、境界条件は

$$\psi^i(\omega + \pi) = \pm e^{2\pi i v^i} \psi(\omega) \ , + \text{ for R} \quad , \quad - \ \text{ for NS} \tag{4.56}$$

と書ける。

この時、モード展開は

$$\psi^i = \sum_{r \in \mathbf{Z}+\nu} \psi^i_{r+v^i} e^{2i(r+v^i)\omega} \tag{4.57}$$

$$\bar{\psi}^i = \sum_{r \in \mathbf{Z}+\nu} \bar{\psi}^i_{r-v^i} e^{2i(r-v^i)\omega} \tag{4.58}$$

と展開し、振動子は

$$\{\psi^i_{r+v^i}, \bar{\psi}^j_{s-v^j}\} = \delta^{ij} \delta_{r+s,0} \tag{4.59}$$

の反交換関係を満たす。

そして twisted sector のフェルミオン場の真空 $|0\rangle$ は次のように定義される。

$$\psi_{r+v^i}|0\rangle = \bar{\psi}_{r-v^i}|0\rangle = 0 \ , \ r + v^i, r - v^i > 0 \tag{4.60}$$

この真空 $|0\rangle$ は式（2.200）を思い出すと式（2.203）のようにボゾン化して書けることが分かる。

このとき場は、点群の作用に対して

$$\psi^i \to e^{2\pi i v^i} \psi^i \tag{4.61}$$

のように変化するから、

$$\psi^i \cong e^{iH^i} \tag{4.62}$$

とボゾン化したときには

$$H^i \to H^i + 2\pi i v^i \tag{4.63}$$

と変換する。

gauge 自由度部分のモード展開

- standard embedding

実は、理論の無矛盾性（モジュラ—不変性）のため、多くの場合、twist を gauge 部分に埋め込まねばならない。ここでは、空間の twist をどのように gauge 部分に埋め込むのか少しコメントしておく。

gauge フェルミオン $\Lambda^{\pm I}$ に前節の ψ^i と全く同様に、

$$\Lambda^{+I}(\bar{\omega} + \pi) = e^{2\pi i V^I} \Lambda^{+I}(\bar{\omega}) \ , \ V^I = (v^1, v^2, v^3, 0^5)(0^8) \tag{4.64}$$

と境界条件を課す事を考える。この埋め込み方を standard embedding [§]と呼ぶ。

更に Z_N orbifold の場合、$\theta^N = \mathbf{1}$ である。この時に V^I が θ の正しい gauge embedding になっているためには

$$NV^I \in \mathbf{Z} \in \Gamma_8 \times \Gamma_8 \tag{4.65}$$

でなければならない。しかし、standard embedding の時にはこの条件は自動的に満たされている。

- モード展開

またこの時、$\Lambda^{\pm I}$ と X_L^I の間の関係は

$$\Lambda^{\pm I} \cong \exp[\pm 2iX_L^I] \tag{4.66}$$

である。

この形より、twisted sector での X_L^I の境界条件は

$$X_L^I(\bar{\omega}+\pi) = X_L^I(\bar{\omega}) + \pi V^I \quad (+\pi p_L^I) \tag{4.67}$$

となることが分かる。ここで、πp_L^I は本質的な twist には影響せず、フェルミオンの R セクター NS セクターの twist の役割をするのみである。

この時、モード展開は

$$X_L^I(\bar{\omega}) = x_L^I - i(p_L^I + V_L^I)\bar{\omega} + \frac{i}{2}\sum_{m\neq 0}\frac{\tilde{\alpha}_m^I}{m}e^{-2im\bar{\omega}} \ \ , \ \ V^I = (v^1, v^2, v^3, 0^5)(0^8) \tag{4.68}$$

となる。この時、θ^n-twisted sector では空間部分と同様に $V^I \to nV^I$ とすれば良い。

massless スペクトラム

ここからは Virasoro 条件から massless モードはどのような条件を満たすか見ていく。重要な点として、ここでは twist を受けているので、切片が変化する。

- 右向き部分

式（2.91）の結果を使うと、

$$\frac{m^2}{8} = N_B + N_F - a_B - a_F(\beta) \tag{4.69}$$

$$N_B \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{-n}^i\alpha_n^i + \sum_{n+v^\alpha>0}\bar{\beta}_{-n-v^\alpha}^\alpha\beta_{n+v^\alpha}^\alpha + \sum_{n-v^\alpha>0}\beta_{-n+v^\alpha}^\alpha\bar{\beta}_{n-v^\alpha}^\alpha \ \ , \ \ (i=1,2 \ \ \alpha = 1\sim 3) \tag{4.70}$$

[§]もちろん、これ以外の埋め込み方の可能性もある

$$N_F \equiv \sum_{r\in\mathbf{Z}+\nu>0} r\psi^i_{-r}\psi^i_r + \sum_{r+v^\alpha>0}(r+v^\alpha)\bar{\psi}^\alpha_{-r-v^\psi}\psi^\alpha_{r+v^\alpha} + \sum_{r-v^\alpha>0}(r-v^\alpha)\psi^\alpha_{-r+v^\alpha}\bar{\psi}^\alpha_{r-v^\alpha} \tag{4.71}$$

$$a_B = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3}|v^\alpha|(1-|v^\alpha|) \tag{4.72}$$

$$a_F(\mathrm{R}) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3}|v^\alpha|(1-|v^\alpha|) \tag{4.73}$$

$$a_F(\mathrm{NS}) = -\frac{5}{24} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3}|v^\alpha+\frac{1}{2}|(1-|v^\alpha+\frac{1}{2}|) \ \text{ for } \ -1<v^\alpha<\frac{1}{2} \tag{4.74}$$

$$a_F(\mathrm{NS}) = -\frac{5}{24} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3}|v^\alpha-\frac{1}{2}|(1-|v^\alpha-\frac{1}{2}|) \ \text{ for } \ \frac{1}{2}<v^\alpha<1 \tag{4.75}$$

となる。

- 左向き部分

同様に

$$\frac{m^2}{8} = \tilde{N} + \frac{1}{2}(p^I_L+V^I)^2 - \tilde{a} \tag{4.76}$$

$$\tilde{N} \equiv \sum_{n=1}^{\infty}(\tilde{\alpha}^i_{-n}\tilde{\alpha}^i_n + \tilde{\alpha}^I_{-n}\tilde{\alpha}^I_n) + \sum_{n+v^\alpha>0}\bar{\tilde{\beta}}^\alpha_{-n-v^\alpha}\tilde{\beta}^\alpha_{n+v^\alpha} + \sum_{n-v^\alpha>0}\tilde{\beta}^\alpha_{-n+v^\alpha}\bar{\tilde{\beta}}^\alpha_{n-v^\alpha} \tag{4.77}$$

$$\tilde{a} = 1 - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3}|v^\alpha|(1-|v^\alpha|) \tag{4.78}$$

である。

- level matcing（モジュラー不変性）

orbifold 上の分配関数 Z は

$$Z \sim \sum_{i\in \text{all sector}} \mathrm{Tr}(q^{L_0(i)}\bar{q}^{\bar{L}_0(i)}) \ , \ q = \exp(2\pi i\tilde{\tau}) \tag{4.79}$$

と書ける。ここで、トレースは点群の作用に対して不変な状態でのみ足し上げている¶。このため、元々トーラスの理論では untwisted sector だけで無矛盾になっていたのに、一部の状態が落ち、twisted sector が必要になる。また $\tilde{\tau}$ は世界面上のモジュラーパラメータである。

この時 $SL(2,\mathbf{Z})/Z_2$ モジュラー変換（世界面上のトーラスの基底の変換）

$$\tilde{\tau} \to \tilde{\tau}' = \frac{a\tilde{\tau}+b}{c\tilde{\tau}+d} \ , \ ad-bc=1 \ , \ a,b,c,d\in\mathbf{Z} \tag{4.80}$$

¶一般化された GSO 射影を取っているという意味である。

に対して理論が不変であるためには、次の条件が必要である。

$$L_0 - \bar{L}_0 \in \mathbf{Z} \tag{4.81}$$

Z_M orbifold の時、特に $L_0(\mathrm{R}) - \bar{L}_0$ を考えると

$$L_0(\mathrm{R}) - \bar{L}_0 = N_B + N_F - \tilde{N} - \frac{1}{2}(p_L^I + V^I)^2 + 1 - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3} |v^\alpha|(1 - |v^\alpha|) \tag{4.82}$$

である。ここで、

$$\sum_{\alpha=1}^{3} v^\alpha = 0 \ , \ p_L^I \ \in \ \Gamma_8 \times \Gamma_8 \to \ (p_L^I)^2 \in 2\mathbf{Z} \tag{4.83}$$

$$MV^I \in \mathbf{Z} \ , \ p_L^I \ \in \ \Gamma_8 \times \Gamma_8 \to \ M(p_L^I V^I) \in \mathbf{Z} \tag{4.84}$$

$$M(N_B + N_F - \tilde{N}) \in \mathbf{Z} \tag{4.85}$$

を考慮すると次の条件がでる。

$$M(\ (V^I)^2 - (v^\alpha)^2 \ ) \in 2\mathbf{Z} \tag{4.86}$$

今は R セクターのみ考えたが、この条件は十分正しいことが示されている。そして、standard embedding では、自動的にこの条件が成り立つ事が分かる。また、Table 1 を見ると、prime order orbifold と呼ばれる Z_3, Z_7 orbifold は $V^I = 0$ でも、モジュラ—不変の条件を満たすことが分かる。

4.3.3 gauge 対称性

次に orbifold compact 化をして残る gauge 対称性について話す。
orbifold compact 化をする場合、点群 P に対する条件

$$P \subset SU(3) \tag{4.87}$$

を考慮すると

$$E_8 \supset E_6 \times SU(3) \tag{4.88}$$

なので少なくとも $E_6 \times E_8$ が残ることがわかる。

Cartan subalgebra の状態

untwisted sector の $E_8 \times E_8$ の Cartan subalgebra に対応する gauge 場の状態

$$\psi^i_{-1/2}|0\rangle \otimes \tilde{\alpha}^I_{-1}|0\rangle \tag{4.89}$$

を考える。ここで、運動量依存性 k は露には書いていない。この状態は X_L^I に対する twist が πV^I の shift によって表わされているので、点群 P の作用に対し不変である。よって、理論に残る gauge 群のランクは落ちないことになる。

root の状態

同様に $E_8 \times E_8$ の root 部分に対応する gauge 場の状態

$$\psi^i_{-1/2}|0\rangle \otimes |p^I_L\rangle \ , \ (p^I_L)^2 = 2 \tag{4.90}$$

について考える。今、点群 P の作用に対して

$$X^I_L \xrightarrow{P} X^I_L + \pi V^I \tag{4.91}$$

と定義している。左向きの状態が式（2.160）のように書けるので、点群 P の作用に対してこの状態は固有値

$$\exp(2\pi i p^I_L V^I) \tag{4.92}$$

を持つことがわかる。

よって、orbifold compact 化をしたときに残る root 部分の状態は

$$p^I_L V^I \in \mathbf{Z} \tag{4.93}$$

を満たす。

例えば Z_3 orbifold であれば、残る gauge 群は $E_6 \times SU(3) \times E_8$ となり、Z_4 orbifold であれば $E_6 \times SU(2) \times U(1) \times E_8$ になる。

そして standard embedding の場合、壊れる E_8 と壊れない E_8 がある。前者を" observable" gauge 群と呼び、後者を"hidden"gauge 群と呼ぶ。

4.3.4　例 Z_3 orbifold with standard embedding

例として Z_3 orbifold で standard embedding をする時を考える。この時、点群 P の要素 θ は

$$\theta^3 = \mathbf{1} \tag{4.94}$$

を満たす。そしてトーラスの格子は

$$SU(3) \times SU(3) \times SU(3) \tag{4.95}$$

の単純ルートで作られる。

そしてこの時、3 つの複素平面は

$$(v^1, v^2, v^3) = \frac{1}{3}(1, 1, -2) \tag{4.96}$$

を使って twist される。さらにその gauge embedding は

$$V^I = \frac{1}{3}(1, 1, -2, 0^5)(0^8) \tag{4.97}$$

である。

untwisted sector

今は特に standard embedding なので

$$P \subset SU(3) \tag{4.98}$$

を考慮する。そして observable な gauge 群 E_8 に対して

$$E_8 \supset E_6 \times SU(3) \tag{4.99}$$

であるから、E_8の随伴表現を $E_6 \times SU(3)$ の表現に分解することを考える。
結果は次の通りである。

$$\mathbf{248} \rightarrow (\mathbf{78},\mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1},\mathbf{8}) \oplus (\mathbf{27},\mathbf{3}) \oplus (\overline{\mathbf{27}},\overline{\mathbf{3}}) \tag{4.100}$$

つまりこの時、これらの表現が理論に残ることが予想される。
まず gauge 自由度に対応する次の状態を考える。

$$|a\rangle \equiv \left(\ \tilde{\alpha}^I_{-1}|0\rangle \ , \ |p^I_L\rangle \ \right) \ , \ (p^I_L)^2 = 2 \tag{4.101}$$

この root 部分をどのような twist を受けるか考慮する。そして、$E_6 \times SU(3)$ の表現に分ける。
また、点群に対して状態が不変でなくなるので、compact 化された方向の重心運動量を持つことができない。

- 左向き（点群に対して不変な状態 ）

まず、この状態で twist を受けない点群に対して不変な部分

$$|p^I_L\rangle \ , \ p^I_L V^I \in \mathbf{Z} \tag{4.102}$$

の条件を考える。
この条件を満たす p^I_L の observable な E_8 部分は

$$\begin{aligned}
p^I_L &= (\underbrace{\pm 1, \mp 1, 0}_{\text{permutation}} |\ 0^5\ ) && - \ 6\text{ 個} \ : \ SU(3)\text{ の root 部分} \\
&= (0^3|\ \underbrace{\pm 1, \pm 1, 0^3}_{\text{permutation}}\ )\ (\pm\text{どれでもよい}) && - \ 40\text{ 個} \ : \ E_6\text{の root 部分} \\
&= \pm\,((1/2)^3|(1/2)^5\ ) && - \ 2\text{ 個} \ : \ E_6\text{の root 部分} \\
&= \pm\,((1/2)^3|\ \underbrace{(-1/2)^2, (1/2)^3}_{\text{permutation}}\ ) && - \ 20\text{ 個} \ : \ E_6\text{の root 部分} \\
&= \pm\,((1/2)^3|\ \underbrace{(-1/2)^4, 1/2}_{\text{permutation}}\ ) && - \ 10\text{ 個} \ : \ E_6\text{の root 部分}
\end{aligned} \tag{4.103}$$

となる。よってこの時の gauge 群の表現は $E_6\times SU(3)\times E_8'$ に対し

$$(\mathbf{78},\mathbf{1},\mathbf{1})\oplus(\mathbf{1},\mathbf{8},\mathbf{1}) \tag{4.104}$$

となることがわかる。

そして

$$\tilde{\alpha}^I_{-1}|0\rangle\ ,\ \ \tilde{\alpha}^i_{-1}|0\rangle \qquad I=1\sim 16\ ,\ \ i=1,2 \tag{4.105}$$

$$|p_L^I\rangle\ ,\ \ p_L^I=(0^8)(E_8')\to(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{248}) \tag{4.106}$$

も点群の作用に対して不変である。

- 左向き（点群に対して変換する状態その１）

次に点群に対して $\alpha=\exp(2\pi i/3)$ の固有値を持つ

$$|p_L^I\rangle\ ,\ \ (p_L^I)^2=2\ ,\ \ p_L^I V^I=\frac{1}{3}\pmod 1 \tag{4.107}$$

の状態を考える。

この時の root 部分は次のような値を持つ。（E_8 部分のみ。E_8' 部分はゼロである。）

$$\begin{aligned}
p_L^I &= (\underbrace{-1,-1,0}_{\text{permutation}}|\ 0^5\ ) && -\ \ 1\times 3\ \text{個}\\
&= (\underbrace{1/2,(-1/2)^2}_{\text{permutation}}|\ (\pm 1/2)^5\ )\ \ (\text{ただし}\ -1/2\ \text{は偶数個}) && -\ \ 16\times 3\ \text{個}\\
&= \pm(\ \underbrace{1,0^2}_{\text{permutation}}\ \ |\ \ \underbrace{\pm 1,0^4}_{\text{permutation}}\ ) && -\ \ 10\times 3\ \text{個}
\end{aligned} \tag{4.108}$$

よって、この時の gauge 群の表現は $E_6\times SU(3)\times E_8'$ に対して

$$(\mathbf{27},\mathbf{3},\mathbf{1}) \tag{4.109}$$

となることがわかる。また、E_6の表現を $SO(10)$ の表現に分けると 上から順に、

$$\mathbf{27}=\mathbf{1}_{\text{singlet}}\oplus\mathbf{16}_{\text{spinor}}\oplus\mathbf{10}_{\text{vector}} \tag{4.110}$$

となっている事が、式（4.108）を見ると分かる。

また、

$$\tilde{\beta}^{\alpha}_{-1}|0\rangle\ ,\ \ \alpha=1\sim 3 \tag{4.111}$$

も点群に対して α の固有値を持つ。

- 左向き（点群に対して変換する状態その２）

つぎに点群の作用に対し $\alpha^2 = \exp(4\pi i/3)$ の固有値を持つ状態

$$|p_L^I\rangle \ , \ (p_L^I)^2 = 2 \ , \ p_L^I V^I = \frac{2}{3} \quad (\mathrm{mod}\ 1) \tag{4.112}$$

を考える。この時の p_L^I は式（4.108）の逆符合になり、gauge 群の表現は

$$(\overline{\mathbf{27}}, \overline{\mathbf{3}}, \mathbf{1}) \tag{4.113}$$

である。

また状態

$$\bar{\tilde{\beta}}^{\alpha}_{-1}|0\rangle \tag{4.114}$$

も点群に対して α^2 の固有値を持つ。

これらをまとめると次の通りである。

$$\mathbf{1} \ : \ \tilde{\alpha}^i_{-1}|0\rangle \ , \qquad |a\rangle \in (\mathbf{78}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{8}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{248}) \tag{4.115}$$

$$\alpha \ : \ \tilde{\beta}^{\alpha}_{-1}|0\rangle \ , \qquad |a\rangle \in (\mathbf{3}, \mathbf{27}, \mathbf{1}) \tag{4.116}$$

$$\alpha^2 \ : \ \bar{\tilde{\beta}}^{\alpha}_{-1}|0\rangle \ , \qquad |a\rangle \in (\overline{\mathbf{3}}, \overline{\mathbf{27}}, \mathbf{1}) \tag{4.117}$$

- 右向き

こちらも同様に

$$\mathbf{1} \ : \ \psi^i_{-1/2}|0\rangle \ , \qquad |s_1 = 1/2|(1/2)^3\rangle \equiv |1/2, \mathbf{1}\rangle \ , \qquad |s_1 = -1/2|(-1/2)^3\rangle \equiv |-1/2, \overline{\mathbf{1}}\rangle \tag{4.118}$$

$$\alpha \ : \ \psi^{\alpha}_{-1/2}|0\rangle \ , \qquad |s_1 = +1/2|\underbrace{1/2, (-1/2)^2}_{\text{permutation}}\rangle \equiv |1/2, \mathbf{3}\rangle \tag{4.119}$$

$$\alpha^2 \ : \ \bar{\psi}^{\alpha}_{-1/2}|0\rangle \ , \qquad |s_1 = -1/2|\underbrace{(1/2)^2, -1/2}_{\text{permutation}}\rangle \equiv |-1/2, \overline{\mathbf{3}}\rangle \tag{4.120}$$

である。

- 弦の状態

これら左右を点群に対して不変になるように張り合わせる。

まず、

$$\tilde{\alpha}^i_{-1}|0\rangle \otimes \psi^j_{-1/2}|0\rangle \to g_{ij}, \ \ \phi, \ \ D \tag{4.121}$$

$$\tilde{\alpha}^i_{-1}|0\rangle \otimes [|1/2, \mathbf{1}\rangle \oplus |-1/2, \overline{\mathbf{1}}\rangle] \to \psi^i \ \ , \lambda \tag{4.122}$$

が可能である。ここで g_{ij}、ϕ、D は 4 次元の graviton、dilaton、そして反対称場に双対な axion である。そして ψ^i、λ は 4 次元の gravitino、dilatino である。これらは 4 次元の $N=1$ supergravity multiplet と $N=1$ chiral supermultiplet を構成している。

また

$$|a\rangle \otimes \psi^i_{-1/2}|0\rangle \to A^a_i, \qquad a \in (\mathbf{78},\mathbf{1},\mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1},\mathbf{8},\mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{248}) \tag{4.123}$$

$$|a\rangle \otimes [|1/2,\mathbf{1}\rangle \oplus |-1/2,\overline{\mathbf{1}}\rangle] \to \lambda^a \tag{4.124}$$

は A^a_i、λ^a は 4 次元の gauge ボゾン、gaugino である。そしてこれらは $SU(3) \times E_6 \times E_8$ の 4 次元 $N=1$ vector supermultiplet を構成している。

次に gauge 群に対して singlet なカイラルな物質場に対応する状態

$$\tilde{\beta}^\alpha_{-1}|0\rangle \otimes \bar{\psi}^\gamma_{-1/2}|0\rangle \ , \ \bar{\tilde{\beta}}^\alpha_{-1}|0\rangle \otimes \psi^\gamma_{-1/2}|0\rangle \ \to T_i \ \ i=1\sim 3 \ \ (\text{for} \ \ \alpha=\gamma) \tag{4.125}$$

も可能である。これらは先に説明した Tmoduli 場に対応する。（今は Z_3 orbifold なので Umoduli はない。）そのスーパーパートナーは

$$\tilde{\beta}^\alpha_{-1}|0\rangle \otimes |-1/2,\overline{\mathbf{3}}\rangle \ , \ \bar{\tilde{\beta}}^\alpha_{-1}|0\rangle \otimes |1/2,\mathbf{3}\rangle \tag{4.126}$$

となる。これらは 4 次元の $N=1$ chiral supermultiplet を構成している。

最後に gauge 群に対して電荷を持っている場は

$$|a\rangle \otimes \bar{\psi}^\alpha_{-1/2}|0\rangle \ , \ a \in (\mathbf{3},\mathbf{27},\mathbf{1}) \tag{4.127}$$

であり、そのスーパーパートナーのヘリシティー $-1/2$ の状態は

$$|a\rangle \otimes |-1/2,\overline{\mathbf{3}}\rangle \ , \ a \in (\mathbf{3},\mathbf{27},\mathbf{1}) \tag{4.128}$$

である。

そして同様にこれらとは逆の電荷を持つ反粒子状態

$$|a\rangle \otimes \psi^\alpha_{-1/2}|0\rangle \ , \ a \in (\overline{\mathbf{3}},\overline{\mathbf{27}},\overline{\mathbf{1}}) \tag{4.129}$$

$$|a\rangle \otimes |1/2,\mathbf{3}\rangle \ , \ a \in (\overline{\mathbf{3}},\overline{\mathbf{27}},\overline{\mathbf{1}}) \tag{4.130}$$

もある。これらの状態は元は 10 次元の vector multiplet であることが分かる。また、これらは $\mathbf{27}$（ or $\overline{\mathbf{27}}$）表現の $N=1$ chiral supermultiplet を構成している。（固定トーラスがある場合、そのセクターでは、これらが $\mathbf{27}+\overline{\mathbf{27}}$ 表現の $N=2$ hypermultiplet の一部を構成している。）

またこの untwisted sector の場は、10 次元 bulk 全体に住んでいる場である。特に元々、式（4.123）（4.124）（4.127）（4.128）（4.129）（4.130）の状態で 10 次元 $N=1$ SYM multiplet の一部を構成していた。つまり、この部分だけ見ると 4 次元 $N=4$ SYM multiplet の一部を構成していることになる。この事は Yukawa coupling 等の相互作用の形を決める上で重要である。

ここで $\mathbf{27}$ 表現は $SO(10)$ の表現の元で

$$\mathbf{27} = \mathbf{1}_{\text{singlet}} \oplus \mathbf{16}_{\text{spinor}} \oplus \mathbf{10}_{\text{vector}} \tag{4.131}$$

と分解できる。このうちの $\mathbf{16}_{\text{spinor}}$ 表現が標準模型の物質場と右巻きニュートリノを含んでいると考える事ができる。またこの時 untwisted sector では、$\mathbf{27}$ ($\overline{\mathbf{27}}$) 表現に対して 9 世代あることに気が付く。

固定点

今、格子は $(SU(3))^3$ の単純 root で作っている。そして $SU(3)$ 格子は基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ を持っている。これらは次の関係を満たす。

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = -2\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \tag{4.132}$$

この時、Coxeter element は

$$C = s_1 s_2 \tag{4.133}$$

である。そしてこの Coxeter element を基底に作用させると

$$C\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \tag{4.134}$$

$$C\mathbf{e}_2 = -(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \tag{4.135}$$

となる。

　このとき、

$$\mathbf{e}_1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{e}_2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.136}$$

と対応させると

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \ , \ C^3 = \mathbf{1} \tag{4.137}$$

となる。この時の固定点の数は 1 つの平面で

$$n_{\mathrm{fp}} = \det(\mathbf{1} - C) = 3 \tag{4.138}$$

となるので、全体で 27 個ある。また C の固定点は一つの平面に対して

$$\mathbf{x}_f = \frac{n_1}{3}(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2) \ , \ n_1 = 0 \sim 2 \tag{4.139}$$

と書ける。全体では

$$\mathbf{x}_f = \sum_{i=1}^{3} \frac{n_i}{3}(\mathbf{e}_{2i-1} + 2\mathbf{e}_{2i}) \ , \ n_i = 0 \sim 2 \tag{4.140}$$

と書ける。

- Umoduli（untwisted sector）

　この時、$G_{kl} = \delta_{kl}$ であり、

$$g_{1,1} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = g_{2,2} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = -2g_{1,2} = -2\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \tag{4.141}$$

の関係式を使うと、Umoduli は

$$iU_1 = 1/g_{1,1}(g_{1,2} + i\sqrt{(\det g)_1}) = (1/\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1(-\frac{1}{2} + i\sqrt{\frac{3}{4}}) = e^{2\pi i/3} \tag{4.142}$$

と定数になってしまい自由度がない。

twisted sector

ここからは 27 個の固定点近傍にのみ存在する θ - twisted sector の弦の状態を見る。

- 右向き

この時の L_0 の切片は

$$a(\mathrm{NS}) = a(\mathrm{R}) = 0 \tag{4.143}$$

である。よって基底状態が massless モードになる。この時の NS セクターの 基底状態は式 (4.60) が基底状態の条件なので

$$\mathcal{A}_v \quad \cong \quad \exp[i(r+1/2-v)H] \quad r \in \mathbf{Z} \;\text{ for } \quad \mathrm{R}, \quad r \in \; \mathbf{Z}+\mathbf{1/2} \;\text{ for } \quad \mathrm{NS} \tag{4.144}$$

のように基底状態がずれることを考慮する。すると、

$$|0\rangle_{NS} \cong e^{ih_v^a H^a} e^{-\phi} \;\;,\;\; h_v^a = (0,(-1/3)^3) \;\;,\;\; a = 1 \sim 4 \tag{4.145}$$

が基底状態になる。H -momentum を見れば GSO 射影で $(-1)^F = +1$ より、理論に残ってくることがわかる。

R セクターについても同様に

$$|-\frac{1}{2}\rangle_R \cong e^{ih_s^a H^a} e^{-\phi/2} \;\;,\;\; h_s^a = (1/2,-1/2,(1/6)^3) \;\;,\;\; a = 0 \sim 4 \tag{4.146}$$

が GSO 射影 $(-1)^F = +1$ を考慮すると理論に残る。

よってこの時、理論に残るのは

$$|0\rangle_{NS} \qquad |-\frac{1}{2}\rangle_R \tag{4.147}$$

である。この時、これらの状態は点群の作用 $H \to H + 2\pi v$ に対して $h \cdot v = 0$ の位相が出るので不変である。

- 左向き

この時の $\bar{L}_0$ の切片は

$$\tilde{a} = \frac{2}{3} \tag{4.148}$$

である。これより、この時の massless 条件は

$$\frac{m^2}{8} = \tilde{N} + \frac{1}{2}(p_L^I + V^I)^2 - \frac{2}{3} = 0 \tag{4.149}$$

である。

まず $(p_L^I+V^I)^2=4/3$ の状態を考える。この時、$p_L^I+V^I$ の値は次の通りである。

$$\begin{aligned} p_L^I+V^I &= ((1/3)^3|\ \underbrace{\pm1,0^4}_{\text{permutation}}\ ) && - \ SO(10)\text{ の }\mathbf{10}_v\text{表現} \\ &= ((-1/6)^3|\ (\pm1/2)^5\ ), \quad (-1/2\text{ は偶数個}) && - \ SO(10)\text{ の }\mathbf{16}_s\text{表現} \\ &= ((-2/3)^3|\ 0^5\ ) && - \ SO(10)\text{ の }\mathbf{1}_{\text{singlet}}\text{表現} \end{aligned} \tag{4.150}$$

そしてこの値を持つ状態

$$|p_L^I+V^I\rangle \cong e^{2i(p_L^I+V^I)X^I} \tag{4.151}$$

は $SU(3)\times E_6\times E_8$ の $(\mathbf{1},\mathbf{27},\mathbf{1})$ 表現である。（ここでは gauge 自由度部分のみ露に書いた。）更にこの状態は点群の作用に対して、$(p_L^I+V^I)V^I=0$ の位相を出すので不変である。

また $\tilde{N}=1/3$,$(p_L^I+V^I)^2=2/3$ の状態

$$\tilde{\beta}^{\alpha}_{-1/3}|p_L^I+V^I\rangle\ ,\ \ \alpha=1\sim3 \tag{4.152}$$

も massless である。ただし、

$$p_L^I+V^I=\frac{1}{3}(\underbrace{1,1,-2}_{\text{permutation}}\ |\ 0^5) \tag{4.153}$$

である。

この時、状態は点群の作用に対して

$$\frac{1}{3}+(p_L^I+V^I)V^I=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1\ \ (\ \ \times 2\pi i\ \ ) \tag{4.154}$$

の位相を出すので不変である。この時、これら 3 つの状態は $SU(3)\times E_6\times E_8$ の $(\overline{\mathbf{3}},\mathbf{1},\mathbf{1})$ 表現になっている。

この最後の $\tilde{\beta}^{\alpha}_{-1/3}|p_L^I+V^I\rangle$ によって構成されるスカラー場は ”twisted moduli ”とか ”blowing up mode ”と呼ばれ、superpotential を持たない moduli 場である。（ただし、$SU(3)$ の電荷を持っているので、D -term scalar potential を持つが、こちらも flat direction がある。）実はこの moduli 場は orbifold の固定点の特異性と関係している。この場が期待値を持つと曲率が有限になり、特異性が解消される。特に期待値が無限大になると、固定点上での曲率が 0 になり、至るところで曲率が 0 になる。すると、この orbifold が Calabi-Yau 多様体になる事が知られている。

また、Heterotic string 理論では、twisted moduli は gauge singlet ではないので、低エネルギー有効理論の gauge kinetic function に入らないことが知られている。しかし、TypeIIB orientifold 模型に現れてくる twisted moduli は、gauge singlet である。それゆえ、gauge kinetic function に入り、現実的な gauge coupling の値に大きく関わってくる事が知られている。[6] この点は、Heterotic string 理論と TypeIIB orientifold 模型で大きく違うところである。

そして θ^2 - twisted sector からは、これらとは電荷が逆の反粒子状態がでる。これら左右を組み合わせると、弦の状態ができるが詳しくは書かない。

ここまで見てきて分かったと思うが、この例では E_6 の随伴表現に属する物質場（Higgs 場）が無い。すなわち、この模型に E_6 の大統一理論を埋め込むことはできない。

世代数に関しては、twisted sector からは固定点の数と同じ 27 世代が出る。

つまり E_6 の表現に対して、全部のセクターから 36 世代出る。このことからも分かるがこの場合の Z_3 orbifold 模型はあまり現実的ではない。

下に他の例も載せておく。

Table 4　Z_3 orbifold の gauge embedding と残る gauge 群

V^I	理論に残る gauge 群
$\frac{1}{3}(1,1,-2,0^5 \mid 0^8)$	$SU(3)\times E_6\times E_8$
$(0^8 \mid 0^8)$	$E_8\times E_8$
$\frac{1}{3}(1,1,0^6 \mid -2,0^7)$	$E_7\times U(1)\times SO(14)\times U(1)$
$\frac{1}{3}(1,1,-2,0^5 \mid 1,1,-2,0^5)$	$E_6\times SU(3)\times E_6\times SU(3)$
$\frac{1}{3}(1,1,1,1,2,0^3 \mid 2,0^7)$	$SU(9)\times SO(14)\times U(1)$

4.3.5　世界面上の超共形変換と時空間の超対称性

理論に時空の 4 次元 $N=1$ supercharge カレントがある時、世界面上の $N=2$ 超共形対称性が現れることが知られている[‖]。[3]

この時の超共形変換のカレントは

$$T_F^+ = i\psi^\alpha\partial\bar{Z}^\alpha \qquad T_F^- = i\bar{\psi}^\alpha\partial Z^\alpha \tag{4.155}$$

と 2 つあり、さらに $U(1)$ カレント

$$j = -\bar{\psi}^\alpha\psi^\alpha \tag{4.156}$$

が存在する。この時、これらで $N=2$ 超共形代数

$$T_B(z)T_F^\pm(0) \sim \frac{3}{2z^2}T_F^\pm(0) + \frac{1}{z}\partial T_F^\pm(0) \tag{4.157}$$

$$T_B(z)j(0) \sim \frac{1}{z^2}j(0) + \frac{1}{z}\partial j(0) \tag{4.158}$$

$$T_F^+(z)T_F^-(0) \sim \frac{2c}{3z^2} + \frac{2}{z^2}j(0) + \frac{2}{z}T_B(0) + \frac{1}{z}\partial j(0) \tag{4.159}$$

$$T_F^+(z)T_F^+(0) \sim T_F^-(z)T_F^-(0) \sim 0 \tag{4.160}$$

$$j(z)T_F^\pm(0) \sim \pm\frac{1}{z}T_F^\pm(0) \tag{4.161}$$

[‖] 時空の supercharge カレントは $j_\alpha = e^{-\phi/2}S_\alpha\Sigma$ のように作られる。ここで、S_α は 4 次元部分のスピン場であり、Σ は compact 部分のスピン場である。そして、4 次元 $N=1$ SUSY という事は、理論にカレントが 4 つだけあることを意味する。そして、この時に実際、4 次元の $N=1$ superpoincaré 代数を満たすことは確かめられている。

$$j(z)j(0) \sim \frac{c}{3z^2} \tag{4.162}$$

を満たす。

付け加えておくと、トーラス compact 化の場合には、世界面上の compact 部分の超共形対称性が $(0,4)$ に enhance されている。この事が時空の $N=4$SUSY に反映されている。

4.3.6 Kac-Moody 代数

Kac-Moody 代数を満たすカレントは、例えば ∂X^I や $\exp(2ip_L^I X_L^I)$ の線形結合で表わされるものである。これらをまとめて j^a と書く。(a は gauge 群の次元の足である。) この時 j^a は次の OPE を満たす。

$$j^a(z)j^b(0) \sim \frac{\bar{k}\delta^{ab}}{z^2} + \frac{if^{abc}j^c(0)}{z} \tag{4.163}$$

ここで f^{abc} は理論に残る、時空の gauge 群の構造定数である。(実際に OPE を取ると、p_L^I が構造定数に関わっていることが分かる。) そして、$\bar{k}$ は Kac-Moody レベル k を使って $\bar{k}=k/2$ と書ける。特に、今の場合ならば $k=1$ である。

この時、j^a は comformal dimension$(1,0)$ を持ち

$$j^a(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{j_n^a}{z^{n+1}} \tag{4.164}$$

と展開できる。この時 j_n^a は上の OPE より

$$[j_m^a\, j_n^b] = if^{abc}j_{m+n}^c + \frac{mk}{2}\delta^{ab}\delta_{m+n,0} \tag{4.165}$$

の代数を満たす。これを Kac-Mood 代数と呼ぶ。前述したが、弦の状態は全て、この Kac-Moody 代数の表現になっており、時空の gauge 群の表現になっている。この事は、Kac-Moody 代数に gauge 群の構造定数が現れる事や、例えば j_0 が、リー代数を満たすことから分かる。

gauge coupling の Kac-Moody レベル依存性

例えばこの時、gauge 場の vertex operator は

$$\mathcal{V}_{-1} = g_c\, \bar{k}^{-1/2}\psi^\mu j^a e^{ip\cdot X}e^{-\phi} \tag{4.166}$$

と書くことができる。ここで、p は 4 次元の弦の重心運動量である。

また $\bar{k}^{-1/2}$ を入れたのは、j^a の 2 点関数を

$$\langle\ \bar{k}^{-1/2}j^a\ \bar{k}^{-1/2}j^b\ \rangle = \frac{\delta^{ab}}{z^2} \tag{4.167}$$

のように規格化するためである。

そして、g_c は弦の coupling constant である。これは 10 次元の gravity coupling constant κ と、10 次元の gauge coupling constant $g_{\rm YM}$ を使い、弦理論の tree level の計算で

$$g_c = \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{\bar{k}^{1/2} g_{\rm YM}}{4\pi M_{\rm st}} \tag{4.168}$$

と与えられる。また $M_{\rm st}$ は string scale である。

そして 4 次元の gravity coupling constant κ_4 と 4 次元の gauge coupling constant g_4 は compact 空間の体積 V を使って

$$\kappa_4^2 = \frac{\kappa^2}{V} \qquad g_4^2 = \frac{g_{\rm YM}^2}{V} \tag{4.169}$$

と与えることができる。よってこの時、

$$\frac{1}{g_4^2} = \frac{k}{8\kappa_4^2 M_{\rm st}^2} \tag{4.170}$$

の関係があり、4 次元の gauge coupling constant g_4 は Kac-Moody レベルに依存していることがわかる。

string scale

さらにここで重力 scale $M_{\rm G} \equiv 1/\kappa_4$ を使うと式（4.168）は

$$M_{\rm st} = (k/8)^{\frac{1}{2}} g_4 \, M_{\rm G} \tag{4.171}$$

となる。つまり Heterotic string 理論の場合は gauge coupling の値が決まれば、scale が決まってしまう。これは理論に閉弦しかない事が原因である。（Heterotic string の場合、閉弦しかないので、各々の coupling の 10 次元 dilaton ϕ_H 依存性は、$\kappa_4 \sim e^{\langle\phi_H\rangle}$、$g_4 \sim e^{\langle\phi_H\rangle}$ である。これは、coupling を計算する際に使う世界面が S^2 のみであることに起因している。）実際に、$k = 1$、$M_G = 2.4 \times 10^{18}$GeV で値を入れてみる。さらにここで、g_4 は GUT scale 付近の値（ ~ 0.7）だとすると、

$$M_{\rm st} \sim 10^{17}\,{\rm GeV} \tag{4.172}$$

と string scale が決まる。

しかし、TypeIIB orientifold 理論の場合、10 次元 dilaton ϕ_B を使って、

$$M_{\rm st} \sim e^{\langle\phi_B\rangle/2} g_4 M_{\rm G} \tag{4.173}$$

と書ける。[3] これは、理論の重力 coupling が閉弦の寄与によって決まり、gauge coupling が、Heterotic string のように閉弦ではなく、開弦の寄与によって決まるのが原因である。（各々の coupling の dilaton 依存性は、$\kappa_4 \sim e^{\langle\phi_B\rangle}$、$g_4 \sim e^{\langle\phi_B\rangle/2}$ である。これは重力 coupling の計算は S^2、gauge coupling の計算は D_2 の世界面を使う事に起因している。）それゆえ、TypeIIB orientifold 理論の場合は string scale が決まらず、TeV string 等のような様々なシナリオが考えられている。[8]

表現について

弦理論に出てくる状態は、全て Kac-Moody 代数の表現になっている事が知られている。（実際、massless モードであれば弦の状態に、Kac-Moody カレントのモード j^a_{-1} が作用している。）

standard embedding の場合、少なくとも E_6 の gauge 群が理論に残るが、gauge 群が大きすぎるので、他に gauge 群を破る機構を見つけたいと思うだろう。この場合、通常の $SU(5), SO(10), E_6$ 大統一理論のように、Higgs 機構で gauge 群を破ることがまず考えられる。

しかし、レベル 1 の弦理論の orbifold 模型からは、例えば $SU(5), SO(10), E_6$ 等の随伴表現の Higgs 場を出すことが技術的に難しいことが知られている。またそれよりレベルを上げると、随伴表現の Higgs 場は出てくるが、通常の大統一理論には出てこない大きな表現が出てきてしまう事が知られている。それゆえ、弦理論からエネルギー scale は近いのに通常の大統一理論を出さず、直接に標準模型を出す事が多くの人によって試みられている。

そうしたときに、HIggs 機構を使わず、どうやって gauge 群をさらに壊すかが問題になる。その一つのアイデアが次の Wilson line である。

4.4 Wilson line

ここまでは twisted sector に、空間群の twist のみ gauge 自由度の shift として埋め込む事を考えた。ここからは空間群全体、つまりはトーラス上の並進も、gauge 自由度に埋め込むことを考える。

この時、twist だけを埋め込むよりも、さらに gauge 群を落とせることが知られている。

まず、空間群 S の要素 (θ, l^k) のうちトーラス上の並進 l^k は

$$l^k = 2\pi L^k \ , \ L^k = \sum_{t=1}^{6} w_t e_t^k \quad L^k \in \Lambda \ , \ w_t \in \mathbf{Z} \tag{4.174}$$

と書ける。ここで、w_tは整数であり、e_t^kは 6 次元トーラス格子の基底である。具体的にこの並進の要素 L^k を gauge 自由度に埋め込むことにする。

まず、θ -twisted sector を考える。この時は、twist を gauge 自由度に πV^I の shift として埋め込んだ。並進の場合、これを更に拡張し、前節に登場した Wilson line A_k^I を使う。この時の gauge 自由度のゼロモードは式（4.38）使うと、

$$p_L^{I\prime} = p_L^I + V^I + l^I \tag{4.175}$$

となる。（ここで、連続 Wilson line の時は実際にこうなる。しかし離散的な Wilson line の時は、無矛盾にこの形に置くだけである。）ここで、

$$l^I = A_k^I L^k = \sum_{t=1}^{6} w_t a_t^I \ , \ a_t^I = e_t^k A_k^I \ , \ w_t \in \mathbf{Z} \tag{4.176}$$

である。一般に θ^n-twisted sector の場合には、前と同様に $V^I \to nV^I$ とすれば良い。つまりは gauge 自由度の θ-twisted sector の境界条件として

$$X_L^I(\bar{\omega}+\pi) = X_L^I(\bar{\omega}) + \pi V^I + \pi l^I + \pi p_L^I \tag{4.177}$$

とすることを意味する。

ここで、空間部分の θ-twisted sector の境界条件

$$X^k(\sigma+\pi) = \theta X^k(\sigma) + l^k \tag{4.178}$$

を gauge 自由度部分でも正しく再現しなければ、埋め込みにはならない。この時は、固定点ごとに l^k のずらし方が違い、w_t の値が違っていた。全く同一の w_t を使っているのであたり前だが、gauge 自由度の方も、固定点ごとに w_t の値が違っている。そうすると、Wilson line を使った並進の埋め込みは、自然なものになっている事に気が付くだろう。

例えば Z_3 orbifold の時、第一平面だけに注目すると固定点が 3 つある。

そして、それぞれの固定点に対して $(w_1, w_2) = (0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ である。これによって固定点を区別することが可能である。

そしてまた、空間群の積

$$(\theta_1, l_1^k)(\theta_2, l_2^k) = (\theta_1\theta_2, l_1^k + \theta_1 l_2^k) \tag{4.179}$$

と gauge 自由度に埋め込んだものの積が準同型になっているべきである。

さらに点群が Z_N の時、

$$(\theta, l^k)^N = (\mathbf{1}, 0) \tag{4.180}$$

となっているべきである。これが gauge 自由度の埋め込みについても成り立たなければならない。フェルミオン時の描像を思い出すと、前と同様に、

$$N(V^I + l^I) \in \mathbf{Z} \in \Gamma_8 \times \Gamma_8 \tag{4.181}$$

であるべきである。よって、

$$NV^I \;\;,\;\; Na_t^I \in \mathbf{Z} \in \Gamma_8 \times \Gamma_8 \tag{4.182}$$

という条件が成り立つべきである。

ここまでみてきて分かると思うが、Z_N orbifold の時、ただ単純に

$$nV^I \to nV^I + l^I \;\;,\;\; n = 0 \sim N-1 \tag{4.183}$$

とすれば、Wilson line が無い場合と変わらずに解析が可能である。[9]

モジュラー不変性

前と同様にこの場合も level matching 条件

$$L_0 - \bar{L}_0 \in \mathbf{Z} \tag{4.184}$$

を満たすべきである。これは簡単に条件を求めることができる。まず、式（4.86）より Z_N orbifold の時、

$$N((V^I)^2 - (v^\alpha)^2) \in 2\mathbf{Z} \tag{4.185}$$

を満たすべきであった。今の場合、ゼロモードが $V^I \to V^I + l^I$ とずれているのみなので

$$N((V^I + l^I)^2 - (v^\alpha)^2) \in 2\mathbf{Z} \tag{4.186}$$

の条件を満たせば良いことが分かる。（もちろん式（4.86）の条件も満たす。）

この時、Wilson line が満たすべき条件は

$$N\sum_{I=1}^{16}(a_t^I)^2 \in 2\mathbf{Z} \tag{4.187}$$

$$N\sum_{I=1}^{16} a_t^I a_u^I \in \mathbf{Z} \quad \text{for} \ \ t \neq u \tag{4.188}$$

$$N\sum_{I=1}^{16} a_t^I V^I \in \mathbf{Z} \tag{4.189}$$

である。

連続 Wilson line

実は twisted sector における twist の gauge 自由度への埋め込みを

$$X_L^I(\sigma + \pi) = \Theta X_L^I(\sigma) + \pi l^I \tag{4.190}$$

と表わす方法もある。ただし、Θ は $\Gamma_8 \times \Gamma_8$ の automorphism で、点群の位数が N の時、

$$(\Theta, l^I)^N = (\mathbf{1}, 0) \tag{4.191}$$

を満たす。この時 Θ によって回されない部分のみ、式（4.182）のような条件がつく。

また今度は Θ によって回される部分を考える。今、空間部分と同様に twisted sector の場はゼロモードを持たず、Wilson line が L_0 の中に入ってこない。つまりは、twist の埋め込みを shift にすれば、場がゼロモードを持ち、level matching（モジュラ—不変性）条件

$$L_0 - \bar{L}_0 \in \mathbf{Z} \tag{4.192}$$

から V^I と同様、a_t^I にも条件がつくのだが、今の話の場合、この条件からの Willson line に対する要請が無くなるのである。その結果 Θ によって回される Wilson line は何の条件も持たず、連続的なものが許される。

この場合、twist の埋め込みが shift の場合と違うのは、gauge 群のランクが落とせる点である。それは Cartan subalgebra 部分の

$$\tilde{\alpha}^I_{-1}|0\rangle \tag{4.193}$$

の状態が twist を受ける可能性があるからである。この場合、新たに Θ の固有状態

$$|p^I\rangle + |\Theta p^I\rangle + \cdots + |\Theta^{N-1} p^I\rangle \tag{4.194}$$

の一部が Cartan subalgebra の役割を果たすが、一般的には、全ては理論に残らない。

よって、結局 gauge 群のランクは落ちることになる。

$Z_M \times Z_N$orbifold の場合

なお、ここまでは全て Z_N orbifold について話をしたが、$Z_M \times Z_N$orbifold の場合も簡単である。点群の要素 θ, ϕ の $\theta^k \phi^l$-twisted sector $(k = 0 \sim M-1, l = 0 \sim N-1)$ については

$$n v^\alpha \to k \tilde{v}^\alpha + l \tilde{w}^\alpha \tag{4.195}$$

$$n V^I + l^I \to k \tilde{V}^I + l \tilde{W}^I + \tilde{l}^I \tag{4.196}$$

と Z_N orbifold の θ^n-twisted sector の場合からそれぞれ置き換えれば良い。

4.4.1 例 Z_3 orbifold

結果だけを載せておく。例えば

$$V^I = \frac{1}{3}(1,1,-2,0^5|\ 0^8\ )\ ,\ \ a^I_1 = a^I_2 = a^I_3 = \frac{1}{3}(0^5,1,1,-2|\ 0^8\ ) \tag{4.197}$$

の時には gauge 群が $SU(3)^4 \times E_8$ になる。最初の 3 つの $SU(3)$ を $SU(3)_c \times SU(3)_L \times SU(3)_R$ と解釈する。

- untwisted sector

9 つの $(\mathbf{1},\mathbf{3},\overline{\mathbf{3}},\mathbf{1})$ 表現が出る。

- twisted sector

前にも言ったが、Wilson line の入れ方が固定点ごとに違う。Z_3 orbifold の時、第一平面だけに注目すると固定点が 3 つあり、それぞれ $(w_1, w_2) = (0,0)\ ,(1,0)\ ,(1,1)$ である。

$\sum_t w_t \in 3\mathbf{Z}$ の時、9 つの $(\mathbf{1},\overline{\mathbf{3}},\mathbf{3},\mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3},\mathbf{3},\mathbf{1},\mathbf{1}) \oplus (\overline{\mathbf{3}},\mathbf{1},\overline{\mathbf{3}},\mathbf{1})$ が出る。

$\sum_t w_t \in 3\mathbf{Z}+1$ の時、9 つの $(\mathbf{3},\overline{\mathbf{3}},\mathbf{1},\mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1},\mathbf{3},\mathbf{1},\overline{\mathbf{3}}) \oplus (\overline{\mathbf{3}},\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{3}) \oplus 3(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{3},\mathbf{1})$ が出る。

$\sum_t w_t \in 3\mathbf{Z}+2$ の時、9 つの $(\overline{\mathbf{3}},\mathbf{1},\mathbf{3},\mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1},\mathbf{1},\overline{\mathbf{3}},\overline{\mathbf{3}}) \oplus (\mathbf{3},\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{3}) \oplus 3(\mathbf{1},\overline{\mathbf{3}},\mathbf{1},\mathbf{1})$ が出る。

例えば

$$Q_{\rm em} = T^L_3 + T^R_3 + \frac{1}{2}Y_L + \frac{1}{2}Y_R \tag{4.198}$$

とすれば、$\sum_t w_t \in 3\mathbf{Z}$ を 9 世代のレプトンとクオークと見なせる。この時、これらは E_6 の $\mathbf{27}$ 表現になっている。しかし、他のセクターからは標準模型には出ない物質場もたくさん出てくる。

4.5 anomalous $U(1)$ と Fayet-Iliopoulos D - term

Heterotic string 理論を orbifold compact 化して gauge 群を破ると、一般的に $SU(3)\times SU(2)\times U(1)^p$ （$p>1$）の gauge 群が残る可能性がある。標準模型の gauge 群を出したい場合、これらの $U(1)$ は、一つを除いて高いエネルギー scale で破れているべきである。そしてしばしば、幾つかの $U(1)$ は、他との gauge 相互作用や重力との mixed anomaly を持ち、anomalous になっている事がある。これら anomalous $U(1)$ の幾つかは本当に anomaly があり、壊れる。しかし幾つかの anomalous $U(1)$ は、4 次元の Green-Schwarz 機構 [10] により、dilaton 場 S^{**} が 1-loop レベルで gauge 変換

$$S \to S + k_a \delta^{\mathrm{X}}_{\mathrm{GS}} \Lambda_{\mathrm{X}} \tag{4.199}$$

を受けて anomaly が打ち消される。（実は、後で示すが、4 次元複素 dilaton 場 S_4 の虚部は、B 場に双対な axion 場になっている。そう考えると、Green-Schwarz 機構が働いていると理解しやすい。）

ここで Λ_{X} は変換のパラメーターである。また $\delta^{\mathrm{X}}_{\mathrm{GS}} \propto \mathrm{tr}Q_X$ であり、anomaly を打ち消す係数である。また、Q_{X} は anomalous $U(1)_{\mathrm{X}}$ の電荷である。トレースは電荷を持ったフェルミオンについてとってある。そして k_a は mixed anomaly のある gauge 群 G_a の Kac-Moody レベルである。

この時、この anomalous $U(1)_{\mathrm{X}}$ が存在するせいで、弦理論の tadpole 1-loop amplitude （世界面がトーラスで vertex operator が 1 つの場合）から Fayet-Iliopoulos (FI) D- term ξ が生成される事が知られている。[11] 結果は次のようになる。

$$\xi = \frac{g_4^2 \mathrm{tr} Q_{\mathrm{X}}}{192\pi^2} \tag{4.200}$$

ただし、この結果は $\alpha' = 2$ としている。

また、FI-term を Heterotic string 理論の低エネルギー有効理論で考えてみる。例えば簡単のため、次のような Kähler ポテンシャルを考える。

$$K(S, S^\dagger, V_{\mathrm{X}}) = -\kappa_4^{-2} \ln(S + S^\dagger - k_a \delta^{\mathrm{X}}_{\mathrm{GS}} V_{\mathrm{X}}) \tag{4.201}$$

ここで、V_{X} は anomalous $U(1)_{\mathrm{X}}$ の vector superfield であり、gauge 変換に対して

$$V_{\mathrm{X}} \to V_{\mathrm{X}} + \Lambda_{\mathrm{X}} + \Lambda^\dagger_{\mathrm{X}} \tag{4.202}$$

と変換する。この時、実際に gauge 不変になっていることが分かる。また、vector superfield に合わせて Wess-Zumino gauge を取った時を考える。この時、gauge 場と dilaton 対しては、次のような変換になる。

$$A^{\mathrm{X}}_\mu \to A^{\mathrm{X}}_\mu + \partial_\mu \alpha_{\mathrm{X}} \ , \ \ S_4 \to S_4 + \frac{i}{2} k_a \delta^{\mathrm{X}}_{\mathrm{GS}} \alpha_{\mathrm{X}} \ , \ \ \alpha_{\mathrm{X}} \subset \Lambda_{\mathrm{X}} \tag{4.203}$$

** ここでは component スカラー場を S_4 、chiral superfield を S とした。特に混同することがない時は S のみを使う。

超弦理論の低エネルギー有効理論の場合、dilaton が実際に

$$\mathcal{L} \supset \int d^2\theta S W^{\alpha a} W^a_\alpha + \text{ h.c.} \sim \mathrm{Im} S_4 F^a_{\mu\nu} \tilde{F}^{a\mu\nu} \tag{4.204}$$

と gauge kinetic function の中に入っている事を考えれば、上で言った anomaly を打ち消す理由も分かりやすい。(gauge kinetic function の中に dilaton が入ることも、後で示す。)

話を元に戻してラグランジアンを考えると

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &\supset \int d^4\theta K(S, S^\dagger, V_\mathrm{X}) \\ &= \int d^4\theta (K|_{V_\mathrm{X}=0} - k_a \delta^\mathrm{X}_\mathrm{GS} V_\mathrm{X} K'|_{V_\mathrm{X}=0} + \ldots)\end{aligned} \tag{4.205}$$

となるので、もし $\langle \mathrm{Re} S_4 \rangle \neq 0$ の時、($V_\mathrm{X} \supset \theta^4 D_X/2$ を考慮すると)

$$\xi = -\frac{1}{2} k_a \delta^\mathrm{X}_\mathrm{GS} \langle K'|_{V_\mathrm{X}=0} \rangle \ = \ \frac{\kappa_4^{-2} k_a \delta^\mathrm{X}_\mathrm{GS}}{2\langle S_4 + S_4^\dagger \rangle} \tag{4.206}$$

のように、大きい scale の Fayet-Iliopoulos D- term-term が生成されることになる。なお、dilaton$S$ は gauge kinetic function の中に入っているので(後で示す。)

$$\langle \mathrm{Re} S_4 \rangle = \frac{8\pi^2}{g_4^2} \tag{4.207}$$

とその期待値が gauge coupling になる。(この定義は場合によっては factor 分ずれることがある。)またこの時、anomalous $U(1)_\mathrm{X}$ の D -term は

$$D_\mathrm{X} = -\xi + \sum_i Q^i_\mathrm{X} |\chi_i|^2 \tag{4.208}$$

となる。もし、$|\langle \chi_i \rangle|^2 \sim \xi \neq 0$ の時に、理論全体に(F-term も含めて)flat direction があれば、SUSY を壊すことなく、理論に残っている anomalous $U(1)_\mathrm{X}$ が高い scale で発的に破れることになる。

実際、anomalous $U(1)_\mathrm{X}$ の gauge 場 A^X_μ が

$$|D_\mu \chi_i|^2 \supset |(\partial_\mu - i Q^i_X A^\mathrm{X}_\mu)\chi_i|^2 \to |\langle \chi_i \rangle|^2 (A^\mathrm{X}_\mu)^2 \tag{4.209}$$

と大きい質量を持ち、低エネルギーでは残らない。

しかし、flat direction が無ければ、この時に SUSY と anomalous $U(1)_\mathrm{X}$ が破れてしまう。

また弦理論とは直接の関係は無いかも知れないが、この anomalous $U(1)_\mathrm{X}$ があれば、理論に自然に FI-term を入れることができる。flat direction を利用し、スカラー場に大きな期待値を持たせ、non-renormalizable coupling を使った Froggatt-Nielsen 機構 [12]

$$\frac{\tilde{y}_{ijk}}{M^n} \phi^i \bar{\psi}^j \psi^k \chi^{l_1} \ldots \chi^{l_n} \ \overset{\langle \chi^i \rangle \neq 0}{\to} \ \tilde{y}_{ijk} (\frac{\langle \chi \rangle}{M})^n \phi^i \bar{\psi}^j \psi^k \equiv y_{ijk} \phi^i \bar{\psi}^j \psi^k \tag{4.210}$$

で Yukawa coupling に階層性を出す事にも利用される。ここで、M は理論のカットオフ scale で、場の期待値に比べて大きいと仮定してある。そして、この場合本当の Yukawa coupling は y_{ijk} である。それゆえに、相互作用の乗数に依存して、y_{ijk} は小さくなり得る。

（正確には、物質場の anomalous $U(1)$ の電荷の値によって、相互作用の乗数が変わってくる。つまりは物質場によって、相互作用の M 依存性が変わることになる。これにより、様々な階層性が出せる。）

なお、TypeIIB orientifold 模型では、4 次元 dilaton S の代わりに、twisted moduli 場 $\mathcal{M}_f^k$ が 4 次元の Green-Schwarz 機構に寄与することが知られている。[6]（ここで、f は固定点、k はθ^k-twist の足である。）つまり、S は全く変換を受けず、同様に $\mathcal{M}_f^k$ の虚数部が anomalous $U(1)$ に対して変換を受ける。（この時、dilaton 場の虚部は R-R 場になっている。）それゆえ、ここで説明した事に対して全て

$$S \to \mathcal{M}_f^k \tag{4.211}$$

と置き換えると良い。ただし、この時違いがある。Hetero の時には式（4.199）のように、anomalous $U(1)$gauge 群の種類ににによらず、δ_{GS}^X で universal に変換する。しかし、TypeIIB orientifold 模型の場合、ある anomalous $U(1)_\alpha$ 変換に対して、

$$\mathcal{M}_f^k \to \mathcal{M}_f^k + i\delta_{f\mathrm{GS}}^k(\alpha)\Lambda_\alpha \tag{4.212}$$

と anomalous $U(1)_\alpha$ の種類によって変換する。

また、FI-term は、同様に式（4.206）の中辺を $S \to \mathcal{M}_f^k$ と置き換えたものになる。（ただしこの時、Kähler potential の形は、完全に決められず、詳しくは模型によって違う。）

最近では extra dimension 模型でも、1-loop レベルで 3 ブレーン上に FI-term が生成されることが知られている。[13] 更に FI-term を使って様々な研究がなされている。[14]

4.6 superpotential (Yukawa coupling)

4.6.1 Riemann-Roch の定理

場の理論の chiral anomaly を思い出すと、Dirac operator のゼロモードが寄与して、Atiyah-Singer の指数定理を出した。これはインスタントンの数に対応していた。この時、指数の数に対応したフェルミオン数を入れなければ、amplitude が well-defined にならずに消えてしまう。弦理論の場合も同様に、一般的にゴースト数保存則に anomaly があり、それが Riemann-Roch の定理になっている。（重要な gauge 対称性ではないので、anomaly があっても良い。）

例えば bc ゴーストからは

$$\kappa - \mu = 3\chi \tag{4.213}$$

の結果が出る。ここで、κ は conformal Killing vector (CKV) の数であり、世界面で大局的に定義された共形変換の自由度に対応したものである。（これは世界面の計量を不変にする変換である。）そして μ は世界面上の moduli パラメーターの数であり、χ は世界面のオイラー数である。

例えば世界面が S^2 の場合は $\chi = 2,\ \ \kappa = 6$ であり、CKV を使った

$$z \to z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\ \ ,\ \ \alpha\delta - \beta\gamma = 1\ \ ,\ \ \alpha, \delta, \beta, \gamma \in \mathbf{C} \tag{4.214}$$

$SL(2, \mathbf{C})$ メビウス変換がある。（この形で一斉に全ての座標系を変換する。）世界面が T^2 の場合は $\chi = 0,\ \ \kappa = 2, \mu = 2$ である。

通常は amplitude 計算の際、座標不変性（共形不変性）のため、挿入した vertex operator を世界面の座標で積分する。しかし、場の理論と同様に amplitude が消えないためには、CKV の数だけ vertex operator の位置を固定し、bc ゴーストを挿入しなければならない。具体的には、moduli 数だけ b ゴーストを、CKV の数だけ c ゴーストを入れる事になる。

例えば、

$$\langle \int d^2z_1\mathcal{V}_1 \int d^2z_2\mathcal{V}_2 \int d^2z_3\mathcal{V}_3\rangle_{S^2} \to \langle c_1\tilde{c}_1\mathcal{V}_1 c_2\tilde{c}_2\mathcal{V}_2 c_3\tilde{c}_3\mathcal{V}_3\rangle_{S^2} \neq 0 \tag{4.215}$$

という意味である。そして moduli についても、モジュラ—変換で移り合わない領域を足し上げる。（実はこれらの事は、モジュラ—変換と世界面の座標の付け方を固定していることになる。）

そして超共形 $\beta\gamma$ ゴーストの方からは、

$$n_X = 2g - 2 + n_B + \frac{n_F}{2} \tag{4.216}$$

の結果が出る。ここで、g は genus の数であり、n_B, n_F は時空のボゾンとフェルミオンの数である。そして n_X は後述する picture changing operator(PCO) の amplitude に挿入すべき数である。

ピクチャ—ゼロ状態

ここでは正則側のみ考える。もし超共形不変性が反正則側にあれば、同様の事を行う。

PCO $X(z)$ は、BRST 電荷 Q_B

$$Q_B = \oint [\frac{dz}{2\pi i} j_B(z) - \frac{d\bar{z}}{2\pi i}\tilde{j}_B(\bar{z})]\ \ ,\ \ j_B = c(T_B^M + \frac{1}{2}T_B^g) - \frac{\gamma}{2}(T_F^M + \frac{1}{2}T_F^g) \tag{4.217}$$

と超共形ゴーストのボゾン化に使用した ξ を使って

$$X(z) = \{Q_B, \xi(z)\} \equiv Q_B \cdot \xi(z) \quad \sim e^{\phi}T_F(z) \tag{4.218}$$

と書ける。

すると、PCO を使って、ピクチャ—ゼロ状態

$$\lim_{z\to 0} X(z)\mathcal{V}_{-1}(0) = \mathcal{V}_0(0) \tag{4.219}$$

を作ることができる。

ただし、

$$\mathcal{V}_{-1} = e^{-\phi}\mathcal{O}\ \ ,\ \ G_{-1/2}\cdot\mathcal{O} \equiv \mathcal{V}_0\ \ ,\ \ G_r\cdot\mathcal{O} = 0\ \ (r > 0)\ \ ,\ \ T_F = \sum_r \frac{G_r}{z^{r+3/2}} \tag{4.220}$$

とした。このように、PCO はピクチャー数を 1 だけ上げる事が分かる。

ところで、ピクチャーゼロ状態は

$$\mathcal{V}_0^a = g_c(2/\alpha')^{1/2}\bar{k}^{-1/2}j^a(i\partial X^\mu + \frac{\alpha'}{2}p\cdot\psi\psi^\mu)e^{ip\cdot X} \tag{4.221}$$

と書ける。これは super Virasoro 演算子を使った、$G_{-1/2}\psi^\mu_{-1/2}|0\rangle$ の状態である。

このピクチャーゼロ状態は時空のボゾンに対応する。ここでは gauge ボゾンの状態を書いたが、スカラー場にしたいなら μ を内部空間の座標にすれば良い。

なお、ピクチャーゼロ状態は次のようにも理解される。amplitude 計算の際、座標不変性（共形不変性）のため、挿入した vertex operator を世界面の座標で積分する。そして超共形不変性のため、superfield 化した vertex operator を、さらに世界面上の Grassmann odd のパラメータ θ_{WS} でも積分する。この θ_{WS} で積分した状態がピクチャーゼロ状態にあたる。

$$\int d\theta_{WS}\mathbf{V} \leftrightarrow \mathcal{V}_0 \tag{4.222}$$

これと式（4.220）を比べると

$$\int d\theta_{WS} \leftrightarrow G_{-1/2} \tag{4.223}$$

と作用の対応がつくことが分かる。

そして、ピクチャーがノンゼロの状態は、

$$\int d\theta_{WS} \to e^{-\phi} \ \text{ or } \ e^{-\phi/2} \tag{4.224}$$

と置き換えて、θ の位置を固定した状態に対応している。これは先に説明した bc ゴーストの場合に、

$$\int d^2z \to c\tilde{c} \tag{4.225}$$

と置き換えた事に似ている。（超共形ゴーストを挿入する事は、前と同様に odd 座標と oddmoduli に関係している。）

この時、amplitude にどれだけピクチャー数を入れるべきか考える。まず超共形ゴースト数の anomaly より

$$n_X = 2g - 2 + n_B + \frac{n_F}{2} \tag{4.226}$$

の関係があった。そして、ボゾンはピクチャー数 -1、フェルミオンはピクチャー数 $-1/2$ を持っていたことを思い出そう。この時に

$$\langle\mathcal{V}^1_{-1}\ldots\mathcal{V}^{n_B}_{-1}(X)^{2g-2+n_B}\rangle \tag{4.227}$$

のような amplitude を考える。すると一般に、amplitude にピクチャー数を合計 $2g-2$ だけ入れるべきだとわかる。特に、世界面が S^2 $(g=0)$ の時には、合計ピクチャー数 -2 の vertex operator を amplitude に入れるべきであると分かる。

（蛇足であるが、S^2 の場合は $\xi(z)$ のゼロモードが 1 つあるので、$\xi(z)$ を一つ挿入しておく必要がある。しかしゼロモードしか効かないので、座標依存性無く $\langle\xi(z)\rangle = 1$ とできる。）

相互作用

これを考慮すると、実際に Yukawa coupling を計算するときには、例えば

$$\langle c^1\tilde{c}^1\mathcal{V}^1_{-1}c^2\tilde{c}^2\mathcal{V}^2_{-1/2}c^3\tilde{c}^3\mathcal{V}^3_{-1/2}\rangle_{S^2} \leftrightarrow y_{ijk}\phi^i\bar{\psi}^j\psi^k \ \ (\subset W = y_{ijk}\Phi^i\Phi^j\Phi^k + \dots) \tag{4.228}$$

を OPE を用いて計算すれば良い。また、non-renormalizable superpotential を計算したいときには

$$\begin{aligned}&\langle c^1\tilde{c}^1\mathcal{V}^1_{-1}c^2\tilde{c}^2\mathcal{V}^2_{-1/2}c^3\tilde{c}^3\mathcal{V}^3_{-1/2}\int d^2z_4\mathcal{V}^4_0\dots\int d^2z_n\mathcal{V}^n_0\rangle_{S^2} \leftrightarrow \\ &\frac{1}{M^{n-3}}g_{i_1\dots i_n}\phi^{i_1}\dots\phi^{i_{n-2}}\bar{\psi}^{i_{n-1}}\psi^{i_n} \ \ (\subset W = \frac{1}{M^{n-3}}g_{i_1\dots i_n}\Phi^{i_1}\dots\Phi^{i_n} + \dots)\end{aligned} \tag{4.229}$$

等を計算すれば良い。ここで M はカットオフ scale である。

なお、この non-renormalizable superpotential は Froggatt-Nielsen 機構を使い Yukawa coupling に階層性を持たせる場合に重要である。この計算は原理的には可能だが、非常に複雑である。

4.6.2 空間群の selection rule

orbifold の理論は、空間群の作用に対して同一視しているので、空間群の作用に対して不変な amplitude のみがノンゼロになる。閉弦の場合、左右の状態は各々独立であるので、右向き、あるいは左向きのみで amplitude が不変になっていなければならない。特に twisted sector の amplitude がノンゼロになるためには、空間群からの条件が存在する。

例えば twisted sector の 3 点関数を考える。この時、3 つの状態と関係した空間群の要素 $(\alpha, l_1), (\beta, l_2), (\gamma, l_3)$ がある。この時、 l_1, l_2, l_3 は、点群の要素 α, β, γ の固定点 $f_\alpha, f_\beta, f_\gamma$ を使って次のように書くことができる。

$$l_1 = (\mathbf{1} - \alpha)(f_\alpha + \Gamma_\alpha) \tag{4.230}$$

$$l_2 = (\mathbf{1} - \beta)(f_\beta + \Gamma_\beta) \tag{4.231}$$

$$l_3 = (\mathbf{1} - \gamma)(f_\gamma + \Gamma_\gamma) \tag{4.232}$$

ここで、$\Gamma_i \ (\in \Gamma = 2\pi\Lambda)$ は任意の格子ベクトルである。

そしてこの時、空間群の作用に対して amplitude が不変な条件は

$$(\alpha, l_1)(\beta, l_2)(\gamma, l_3) = (\alpha\beta\gamma, l_1 + \alpha l_2 + \alpha\beta l_3) \tag{4.233}$$

を考慮すると、次の意味である。

$$\alpha\beta\gamma = \mathbf{1} \tag{4.234}$$

$$l_1 + \alpha l_2 + \alpha\beta l_3 = 0 \rightarrow l_1 + l_2 + l_3 = 0 \tag{4.235}$$

そして最後の式は、

$$(\mathbf{1}-\alpha)(f_\alpha+\Gamma_\alpha)+(\mathbf{1}-\beta)(f_\beta+\Gamma_\beta)+(\mathbf{1}-\gamma)(f_\gamma+\Gamma_\gamma)=0 \tag{4.236}$$

と書き直すことができる。この式（4.236）は相互作用できる固定点上の弦の種類を制限している。

- 例 Z_3 orbifold（prime order orbifold）

この Z_3 orbifold 時、固定点 f は一つの平面に 3 つづつあり、トーラス格子の基底ベクトル $e_a(a=1\sim 6)$ を使って

$$f=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}n_i(2e_{2i-1}+e_{2i}) \quad n_i=0,1,2 \tag{4.237}$$

と書くことができる。この時、空間群の要素 (θ,l) で l は

$$l=(\mathbf{1}-\theta)(f_\theta+\Gamma_\theta)=n_1e_1+n_2e_3+n_3e_5+(\mathbf{1}-\theta)\Gamma_\theta \tag{4.238}$$

と表わすことができる。この時、式（4.236）の 3 点関数に対する条件式は

$$\sum_{J=1}^{3}n_i^J\in 3\mathbf{Z} \ , \ i=1,2,3 \tag{4.239}$$

となる。この意味は、3 つの状態が全て同じ固定点か、あるいは一つの平面に注目した時、全て違う固定点に存在するもののみ相互作用する、と言うことである。

一般には θ^m-twisted sector と θ^n-twisted sector では $m\neq n$ の時、固定点の位置が違う。この orbifold を non-prime order orbifold と呼ぶ。しかし、この Z_3 orbifold の固定点はどの twisted sector でも固定点はかわらない。そして、Z_7 orbifold も同様である。この、Z_3 , Z_7 orbifold を prime order orbifold と呼ぶ。

- non-prime order orbifold

この時は prime order orbifold よりも単純ではない。なぜなら、任意のセクターの固定点上の状態が、点群の作用によって、他の固定点上の状態に移り得るからである。それゆえ、物理的状態は点群の固有状態として扱う。そして、その固有状態は様々な固定点上の状態の線形結合によって作られる。

具体的には、f_k を θ^k-twisted sector の固定点とする。そして、m を格子ベクトルを除いて $\theta^m f_k\sim f_k$ となる最小の整数とする。この時、点群の固有状態は

$$|p\rangle=\sum_{r=0}^{m-1}\exp(-i2\pi pr/m)|\theta^r f_k\rangle \quad p=0,\ldots,m-1 \tag{4.240}$$

と作られる。ここで、$|f_k\rangle$ は θ^k-twisted sector の固定点上の状態である。この時、点群の要素 θ に対してこの状態は固有値 $\exp(i2\pi p/m)$ を持つ。

例えば 3 点関数を計算する際、$|f^{1,2,3}\rangle$ が selection rule を満たせば、これらから作られる固有状態も selection rule を満たす。

- その他（excited state）

例えば Z_N orbifold の時、

$$\langle (\partial_z Z)^m (\partial_{\bar{w}} \bar{Z})^n (\partial_{\bar{u}} Z)^p (\partial_v \bar{Z})^q \rangle \tag{4.241}$$

の amplitude が不変のためには

$$m + p - n - q \in N\mathbf{Z} \tag{4.242}$$

であるべきである。

4.6.3 H - momentum 保存則 と untwisted sector の Yukawa coupling

vertex operator

ここでもう一度、$SO(8)_{lightcone}$ の H - momentum 部分に注目して、興味のある部分の vertex operator を簡単に書いておく。

- untwisted sector

4 次元の gauge 場に対応するものは

$$A_i^a \ \ (i=1,2) \ \ : \ \ \mathcal{V}_{-1} = j^a e^{ih_v^\alpha H^\alpha} e^{-\phi} e^{ip\cdot X} \quad h_v^\alpha = (\pm 1, 0^3) \tag{4.243}$$

である。3 つの複素スカラー場に対応するものは

$$\phi_{\alpha\pm} \ \ (\alpha = 1,2,3) \ \ : \ \ \mathcal{V}_{-1} = j^{a\prime} e^{ih_v^\alpha H^\alpha} e^{-\phi} e^{ip\cdot X} \quad h_v^\alpha = (0, \underbrace{\pm 1, 0^2}_{\text{permutation}}) \tag{4.244}$$

である。同様に gaugino は

$$\lambda^a \ \ : \ \ \mathcal{V}_{-1/2} = j^a e^{ih_s^\alpha H^\alpha} e^{-\phi/2} e^{ip\cdot X} \quad h_s^\alpha = \pm((1/2)^4) \tag{4.245}$$

である。また、スカラー場のスーパーパートナーは

$$\psi_{\alpha\pm} \ \ (\alpha = 1,2,3) \ \ : \ \ \mathcal{V}_{-1/2} = j^{a\prime} e^{ih_s^\alpha H^\alpha} e^{-\phi/2} e^{ip\cdot X} \quad h_s^\alpha = \pm((1/2), \underbrace{1/2, (-1/2)^2}_{\text{permutation}}) \tag{4.246}$$

である。ただしこの時は $s_0 = 1/2$ とした。

- twisted sector

θ^n-twisted sector の時は、これまで見てきたように

$$h_{v,s}^{\text{untwist}} \to h_{v,s}^{\text{twist}} = h_{v,s}^{\text{untwist}} + nv \tag{4.247}$$

のようにすれば良い。ただし、左向き部分の twisted sector にも少し変更点がある。これは次節で触れる。

これらの vertex operator を使い、右向き部分の amplitude は簡単に計算できる。（ただし、積分は除く。）

H - momentum 保存則

H - momentum はローレンツ群の表現に関係していたものである。それゆえ、ローレンツ不変な amplitude（相互作用）になるためには、H - momentum が保存していなければならない。

例えば Yukawa 3 点相互作用の場合、

$$\langle \mathcal{V}^1_{-1}\mathcal{V}^2_{-1/2}\mathcal{V}^3_{-1/2}\rangle_{S^2} \tag{4.248}$$

を計算すれば良い。この時に、H - momentum 保存則は、

$$h^1_v + h^2_s + h^3_s = (0^3) \tag{4.249}$$

という意味である。ここで重要なのは compact 部分の H - momentum の和がゼロになっている点である。この時、amplitude が点群の作用に対し、右向き部分のみで不変になる事が分かる。（点群の作用で、各々の状態から $2\pi i h^J \cdot v$ の位相が出る事を思い出すとよい。）それゆえ、この時にのみ実際に相互作用が存在し、amplitude がノンゼロになる。またこの時、gauge 不変な amplitude になるためには、左向き側の p^I_L 保存則も必要だが、ここでは触れない。

ところで、時空の supercharge の H - momentum は

$$h_{Q^+} = ((1/2)^2, (1/2)^3),\ \ h_{Q^-} = ((-1/2)^2, (1/2)^3)\ \ ,\ \ h_{Q^+} + h_{Q^-} = (1,1,1) \tag{4.250}$$

と与えられる。また上式と

$$h^J_s = h^J_v - h_Q \tag{4.251}$$

の関係を使い、式（4.249）を具体的に確かめると、次のことが分かる。

$$\sum_{J=1}^{3} h^J_v = (1,1,1) \tag{4.252}$$

ここで、h^J_v は h^J_s のスーパーパートナーの H-momentum である。

この条件を満たすならば

$$\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\mathcal{U}_3 \tag{4.253}$$

のような相互作用も可能である。ただし、$\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ は twisted sector の場、$\mathcal{U}_3$ は untwisted sector の場とした。（ここで気が付くことは、twist を打ち消すため、twisted sector の場は 2 つ以上必要である。）

untwisted sector の Yukawa coupling

まず、untwisted sector のみの coupling に注目する。

式 (4.252) から次のことが分かる。$(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ の H-momentum を持つ untwisted secot のスカラー場を ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 とする。そして ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 を lowest component とするような chiral superfield を U_1, U_2, U_3 とする。この時、untwisted sector の superpotential W は

$$W \sim U_1 U_2 U_3 \tag{4.254}$$

と、これら3つの場で書くことが可能である。この superpotential は元々gauge 相互作用なので、untwisted sector の Yukawa coupling は gauge coupling になる。

ところで、すでに見たように U_α は10次元の $N=1$ SYM multiplet に入っていた。それゆえ、式（4.254）の superpotential は4次元の $N=4$ SYM の3点相互作用項

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\mathrm{tr}(U_\alpha[U_\beta,U_\gamma]) \tag{4.255}$$

の形を尊重したものになっている事が分かる。

実際、$E_8\times E_8$ Heterotic string 理論の場合は、10次元の低エネルギー有効理論を dimensional reduction する事によって

$$W=\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\epsilon^{\overline{a}\overline{b}\overline{c}}d^{\overline{x}\overline{y}\overline{z}}U_{\alpha\overline{a}\overline{x}}U_{\beta\overline{b}\overline{y}},U_{\gamma\overline{c}\overline{z}} \tag{4.256}$$

の形の superpotential が出てくる。[15] ここで $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ は $SU(3)$ の $\overline{\mathbf{3}}$ 表現の足である。そして、$\overline{x},\overline{y},\overline{z}$ は E_6 の $\overline{\mathbf{27}}$ 表現の足であり、d^{xyz} は $\overline{\mathbf{27}}^3$ の完全対称不変テンソルである。ただし、$SU(3)\times E_6\times E_8$ の gauge 群は残るとした。

4.6.4 twisted field

n 点関数の例

これまでに言ったように、$\partial X^\mu, e^{ik\cdot X}, e^{ih\cdot H}, j^a=\{e^{ip_L^I\cdot X_L^I},\bar{\partial}X_L^I\}$ の部分は、すでに与えられた OPE や、特異点の次元解析を行うと簡単に計算できる。

例えば、10次元の untwisted sector の場合は次の通りである。

$$\langle c(z_1)c(z_2)c(z_3)\rangle_{s^2}=z_{12}z_{13}z_{23} \tag{4.257}$$

$$\langle e^{-\phi/2}(z_1)e^{-\phi/2}(z_2)e^{-\phi}(z_3)\rangle_{s^2}=z_{12}^{-1/4}z_{13}^{-1/2}z_{23}^{-1/2} \tag{4.258}$$

$$\langle\Theta_\alpha(z_1)\Theta_\beta(z_2)\psi^\mu(z_3)\rangle_{s^2}=2^{-1/2}(C\Gamma^\mu)_{\alpha\beta}z_{12}^{-3/4}z_{13}^{-1/2}z_{23}^{-1/2}\quad,\quad\Theta_{\mathbf{s}}=e^{ih_s\cdot H} \tag{4.259}$$

$$\langle j^a(z_1)j^b(z_2)\rangle_{s^2}=\frac{\bar{k}\delta^{ab}}{z_{12}^2} \tag{4.260}$$

$$\langle j^a(z_1)j^b(z_2)j^c(z_3)\rangle_{s^2}=\frac{i\bar{k}f^{abc}}{z_{12}z_{13}z_{23}} \tag{4.261}$$

$$\begin{aligned}\langle\ &\textstyle\prod_{i=1}^n e^{ik_i\cdot X(z_i,\bar{z}_i)}\prod_{j=1}^p\partial X^{\mu_j}(z'_j)\prod_{k=1}^q\bar{\partial}X^{\nu_k}(\bar{z}''_k)\ \rangle_{s^2}\\ &=i\frac{8\pi}{\alpha' g_c^2}(2\pi)^{10}\delta^{10}(\sum_i^n k_i)\prod_{i<j}^n|z_{ij}|^{\alpha' k_i\cdot k_j}\\ &\qquad\times\langle\prod_{j=1}^p[v^{\mu_j}(z'_j)+q^{\mu_j}(z'_j)]\prod_{k=1}^q[\tilde{v}^{\nu_k}(\bar{z}''_k)+\tilde{q}^{\nu_k}(\bar{z}''_k)]\rangle\end{aligned} \tag{4.262}$$

$$v^\mu(z)=-i\frac{\alpha'}{2}\sum_{i=1}^n\frac{k_i^\mu}{z-z_i}\ ,\ \ \tilde{v}^\mu(\bar{z})=-i\frac{\alpha'}{2}\sum_{i=1}^n\frac{k_i^\mu}{\bar{z}-\bar{z}_i}\ ,\ \ \langle q^\mu(z_1)q^\nu(z_2)\rangle=-\frac{\eta^{\mu\nu}\alpha'}{2z_{12}^2}$$

ここで、C は10次元の荷電共役行列である。これらの結果は4次元に compact 化した場合も同様である。twisted sector の場合も、ボゾン化すれば簡単に計算できる。

ただし、式（4.262）の場合は若干勝手が違う。それは、式（4.55）の twisted sector のボゾンの真空 $|\sigma^i_{v^i}\rangle$ をボゾン化して明瞭に書くことが出来ないからである。次からは twisted sector の真空 $|\sigma^i_{v^i}\rangle$ に対応する twisted field について説明する。

twisted field

ここでは Z_N orbifold の場合の twisted field について説明する。

untwisted sector の場合、ボゾンの真空 $|0\rangle$ は

$$|0\rangle \quad \leftrightarrow \quad 1 \tag{4.263}$$

と対応していた。それゆえ、amplitude 計算の際、vertex operator として 1 を挿入するだけで良かった。しかし、twisted sector の真空 $|\sigma^i_{v^i}\rangle$ は

$$|\sigma^i_{v^i}\rangle \quad \leftrightarrow \quad \sigma^i_{v^i}(0,0) \tag{4.264}$$

と対応するとする。ここで、 $\sigma^i_{v^i}$ は twisted field と呼ばれるものである。その結果、twisted sector の3点 amplitude 計算の際には、各々の複素平面 i （$i=1,2,3$）に対して、

$$A^i = \langle\ \sigma^i_{k^i/N,f_a}(z_1,\bar{z}_1)\ \sigma^i_{l^i/N,f_b}(z_2,\bar{z}_2)\ \sigma^i_{(N-k^i+l^i)/N,f_c}(z_3,\bar{z}_3)\ \rangle_{S^2} \quad i=1,2,3 \tag{4.265}$$

をさらに計算しなければならない。ここで、$v^i = k^i/N$（$k^i = 1 \sim N-1$）とした。また $\sigma^i_{k^i/N,f_a}$ の f_a は固定点を区別している添字である。（実際に、twisted field で固定点を区別することが可能である。）

また、式（4.265）のように、twisted field の twist が合計ゼロの時のみ、点群に対して不変な amplitude が存在する。つまり、この時にのみ amplitude がノンゼロとなり、相互作用が存在する。

twisted field の OPE

ここからは twisted field の OPE を求める。また、i 番目の複素平面の場にのみ注目し、i の添字は書かないこととする。

まず、θ^k-twisted sector の境界条件は、次のように書くことができる。

$$Z(\tau,\sigma+\pi) = e^{-2\pi ik/N}Z(\tau,\sigma) \rightarrow Z(e^{2\pi i}z, e^{-2\pi i}\bar{z}) = e^{2\pi ik/N}Z(z,\bar{z}) \tag{4.266}$$

そしてこの時、次のようにモード展開する。

$$\partial Z(z) = -\frac{i}{2}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\frac{\beta_{n-k/N}}{z^{n-k/N+1}} \tag{4.267}$$

ここで、次の式を考える。

$$\partial Z(z)|\sigma_{k/N}\rangle \tag{4.268}$$

$|\sigma_{k/N}\rangle \leftrightarrow \sigma_{k/N}(0,0)$ より、式（4.268）で $z \to 0$ とすれば、特異性を見る事ができる。

すると、$z \to 0$ で

$$\partial Z(z)|\sigma_{k/N}\rangle \sim z^{-1+k/N}\beta_{-k/N}|\sigma_{k/N}\rangle \tag{4.269}$$

のような特異性があることが分かる。ただし、消滅演算子は効かないので落としている。

よって、式（4.269）より OPE は

$$\partial Z(z)\sigma_{k/N}(0,0) \sim z^{-1+k/N}\tau_{k/N}(0,0)\ \ ,\ \ \tau_{k/N} \equiv \beta_{-k/N}\cdot\sigma_{k/N} \tag{4.270}$$

となる。実際、

$$\beta_{n-k/N}|\sigma_{k/N}\rangle \cong \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n-k/N}\partial Z(z)\sigma_{k/N}(0,0) \tag{4.271}$$

を考えたときに、真空の定義式（4.55）を満たす事が分かる。

$\partial\bar{Z}(z), \bar{\partial}Z(\bar{z}), \bar{\partial}\bar{Z}(\bar{z})$ についても同様の議論を行うと、OPE が分かることになる。

結果をまとめると次の通りである。

$$\partial Z(z)\sigma_{k/N}(0,0) \sim z^{-1+k/N}\tau_{k/N}(0,0) \tag{4.272}$$

$$\partial\bar{Z}(z)\sigma_{k/N}(0,0) \sim z^{-k/N}\tau'_{k/N}(0,0) \tag{4.273}$$

$$\bar{\partial}Z(\bar{z})\sigma_{k/N}(0,0) \sim \bar{z}^{-k/N}\tilde{\tau}_{k/N}(0,0) \tag{4.274}$$

$$\bar{\partial}\bar{Z}(\bar{z})\sigma_{k/N}(0,0) \sim \bar{z}^{-1+k/N}\tilde{\tau}'_{k/N}(0,0) \tag{4.275}$$

また、comformal ウェイトは上式の OPE を使うと計算できる。

まず、

$$g(z,w) = -4\langle\ \partial_z Z(z)\partial_w\bar{Z}(w)\sigma_{k/N}(0)\sigma_{1-k/N}(\infty)\ \rangle_{S^2} \tag{4.276}$$

を定義する。この時、OPE より特異性の振る舞いは

$$g(z,w) \overset{z\to w}{\sim} \frac{1}{(z-w)^2} \tag{4.277}$$

$$g(z,w) \overset{z\to 0}{\sim} \ \ z^{-1+k/N} \tag{4.278}$$

$$g(z,w) \overset{w\to 0}{\sim} \ \ w^{-k/N} \tag{4.279}$$

となる。特に $z \to w$ の時の 2 位の極の留数は 1 である。そして、1 位の極は無い事が分かる。よって、これらの条件を考慮すると

$$g(z,w) = z^{-1+k/N}w^{-k/N}[\frac{(1-k/N)z + kw/N}{(z-w)^2}] \tag{4.280}$$

である。実際に 2 位の極の留数が 1 で、1 位の極が無い事が確かめられる。

ここで、特に

$$T_B = -4\partial Z(z)\partial\bar{Z}(z) \tag{4.281}$$

であるから、次式が成り立つ。

$$\langle\ T_B(z)\sigma_{k/N}(0)\sigma_{1-k/N}(\infty)\ \rangle_{S^2} = [g(z,w) - \frac{1}{(z-w)^2}]_{z=w} = \frac{1}{z^2}\frac{k}{2N}(1-\frac{k}{N}) \tag{4.282}$$

ただし、ここまでは

$$\langle\sigma_{1-k/N}(\infty)\sigma_{k/N}(0)\rangle_{S^2} = \langle\sigma_{1-k/N}|\sigma_{k/N}\rangle = 1 \tag{4.283}$$

と規格化して計算している。（これは真空同士の内積が 1 だと考えれば理解できる。）

すると、OPE

$$T_B(z)\sigma_{k/N}(0) \sim \frac{h\sigma_{k/N}(0)}{z^2} + \frac{\partial\sigma_{k/N}(0)}{z} \tag{4.284}$$

より、twisted field $\sigma_{k/N}$ の conformal ウェイトは $\frac{k}{2N}(1-\frac{k}{N})$ であることが分かる。（反正則側も同様である。）

これは、twisted sector の共形変換のカレント T_B の切片が untwisted sector と比べて $\frac{k}{2N}(1-\frac{k}{N})$ ずれることに対応している。

4.6.5 世界面上のインスタントン

ここでは twisted field に付随した世界面上のインスタントン解について考える。そして、インスタントン解を考えるため、理論をユークリッド化する。

まず、一般的に場を

$$Z = Z_{cl} + Z_{qu} \tag{4.285}$$

のように古典解部分と量子揺らぎ部分に分ける。（通常は $Z_{cl} = 0$ と取っている。）

すると作用も

$$S = S_{cl} + S_{qu}\ \ ,\ \ S = \frac{1}{\pi}\int d^2z(\partial Z\bar{\partial}\bar{Z} + \bar{\partial}Z\partial\bar{Z}) \tag{4.286}$$

と分けられる。この時、分配関数の形は

$$\int[dZ]e^{-S} = \sum_{\{Z_{cl}\}}\int[dZ_{qu}]e^{-S_{cl}-S_{qu}} = \sum_{\{Z_{cl}\}}e^{-S_{cl}}\int[dZ_{qu}]e^{-S_{qu}} \tag{4.287}$$

となる。すると、一般に amplitude A を

$$A = \sum_{\{Z_{cl}\}}e^{-S_{cl}}A_{qu} \equiv A_{cl}A_{qu}\ \ ,\ \ A_{cl} \equiv \sum_{\{Z_{cl}\}}e^{-S_{cl}} \tag{4.288}$$

古典部分と量子部分に分けることができる。（弦の状態は量子部分の振動子によってつくられる。それゆえ、vertex operator も量子部分のみで作られることになる。）

最も重要なことは、上式のように amplitude A に抑制効果が出る事である。つまり、この世界面上のインスタントン効果で、相互作用の大きさを抑制する事ができる。これにより、Yukawa coupling の階層性を、現象論的に実現することが可能である。

また、実際にこのように考えなければ、正しい amplitude の評価方法ではない事が後で分かる。

インスタントン解

例えば、twisted field の三点関数

$$A = \langle\ \sigma_{k/N}(z_1,\bar{z}_1)\ \ \sigma_{l/N}(z_2,\bar{z}_2)\ \ \sigma_{(N-k+l)/N}(z_3,\bar{z}_3)\ \rangle_{S^2} \tag{4.289}$$

についてのインスタントン解を考える。ただしこの場合、基底状態を massless としている。

それぞれ $k, l, N-(k+l)$ -twisted sector の境界条件と、さらに運動方程式

$$\partial\bar{\partial}Z_{cl} = \partial\bar{\partial}\bar{Z}_{cl} = 0 \tag{4.290}$$

を満たす古典解は次の通りである。

$$\partial Z_{cl}(z) = a(z-z_1)^{-1+k/N}(z-z_2)^{-1+l/N}(z-z_3)^{-(k+l)/N} \tag{4.291}$$

$$\bar{\partial}\bar{Z}_{cl}(\bar{z}) = \bar{a}(\bar{z}-\bar{z}_1)^{-1+k/N}(\bar{z}-\bar{z}_2)^{-1+l/N}(\bar{z}-\bar{z}_3)^{-(k+l)/N} \tag{4.292}$$

$$\bar{\partial}Z_{cl}(\bar{z}) = b(\bar{z}-\bar{z}_1)^{-k/N}(\bar{z}-\bar{z}_2)^{-l/N}(\bar{z}-\bar{z}_3)^{-1+(k+l)/N} \tag{4.293}$$

$$\partial\bar{Z}_{cl}(z) = \bar{b}(z-z_1)^{-k/N}(z-z_2)^{-l/N}(z-z_3)^{-1+(k+l)/N} \tag{4.294}$$

ここで、a, b は定数である。これは後で決める。

まず、足し上げる古典解のうち、作用を有限にする部分が相互作用に効いてくることになる。($e^{-S_{cl}}$ の形を思い出すと良い。) この時には実際に、$\partial Z_{cl}(z)$ しか効いてこない。$\bar{\partial}Z_{cl}(z)$ を使うと作用が発散することになる。よって、効いてくるのは $b=0$ のみである。

そして a は次の monodromy 条件より決める。固定点近傍の紐（twisted sector）が、元のトーラス上で巻き付いている時を考える。（通常は古典解が 0 で考えているから考えられない。）ところでこの時、量子揺らぎの部分は巻き付いていない。それはまず、twisted sector の境界条件を満たそうとすれば、巻き付きを表わすゼロモードを取れないからである。また、巻き付いていれば空間群の作用に対して amplitude が不変にならなくなる。

それゆえ、その巻き付きによるずれを古典解で表わす事にする。ただし、並進的なずれのみで、位相（回転）は出ないようにする。

そして、巻き付きによるずれ v を次式で表わす。

$$\oint_C dz\partial Z_{cl}(z) + \oint_C d\bar{z}\bar{\partial}Z_{cl}(\bar{z}) = \oint_C dz\partial Z_{cl}(z) = v\ \ ,\ \ \oint_C dz\partial Z_{qu}(z) = 0 \tag{4.295}$$

ここで、 C は z_1 の周りで反時計回りに l 回、z_2 の周りで時計回りに k 回まわって戻るような閉じた経路である。この時、実際に古典解に位相は出ない事に注意する。($\bar{Z}$ に対する式は、単なる複素共役である。)

ここで、k-twisted sector の点群の要素を α、l-twisted sector の点群の要素を β とする。
またこの時、この経路の意味は、空間群の要素を使って次のように書ける。

$$\begin{aligned}&(\alpha,(\mathbf{1}-\alpha)(f_\alpha+\Gamma))^l(\beta^{-1},(\mathbf{1}-\beta^{-1})(f_\beta+\Gamma))^k\\&=(\mathbf{1},(\mathbf{1}-\alpha^l)(f_\alpha-f_\beta+\Gamma))\\&=(\mathbf{1},v)\end{aligned} \tag{4.296}$$

ここで、Γ は任意の格子ベクトルである。(実際は、各々の平面ごとにこの条件を考えると良い。)
ここで、CKV を使った S^2 上のメビウス変換

$$z\to z'=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\ ,\ \ \alpha\delta-\beta\gamma=1\ ,\ \ \alpha,\delta,\beta,\gamma\in\mathbf{C} \tag{4.297}$$

を行う。するとこの変換により、

$$z_1=0\ \ ,z_2=1\ \ ,z_3=\infty \tag{4.298}$$

と世界面上の座標を固定できる。
するとこの時

$$\begin{aligned}\oint_C dz\partial Z_{cl}&=\oint_C dzaz^{-1+k/N}(z-1)^{-1+l/N}(-z_\infty)^{-(k+l)/N}\\&=-2ia(-z_\infty)^{-(k+l)/N}\sin(kl\pi/N)\frac{\Gamma(k/N)\Gamma(l/N)}{\Gamma((k+l)/N)}\\&=v\end{aligned} \tag{4.299}$$

となる。ゆえに、

$$a=\frac{iv(-z_\infty)^{(k+l)/N}\Gamma((k+l)/N)}{2\sin(kl\pi/N)\Gamma(k/N)\Gamma(l/N)}\ \ ,\ \ b=0 \tag{4.300}$$

と係数が決まる。そしてこの時、古典解を作用に代入すると、

$$S_{cl}=\frac{|v|^2|\sin(k\pi/N)||\sin(l\pi/N)|}{4\pi\sin^2(kl\pi/N)|\sin[(k+l)\pi/N]|} \tag{4.301}$$

と作用の値が決まる。(これの一般的な計算は Appendix に載せておいた。) この時、v は式 (4.296) によって決まる。そして、Z_{cl} の中に v があるので、Z_{cl} の足し上げは v の足し上げ、つまりは様々な Γ の足し上げを意味する。物理的には、元のトーラスに対する弦の巻き付き回数を足し上げることを意味する。(通常のインスタントン解は、Target space に対する場の巻き付きと関係している。今の Target space は時空なので、このように弦の巻き付きとして理解できる訳である。)
ここで、少し問題がある。$k\neq l$ の時は、z_1,z_2 、及び z_1,z_3 のペアを囲む 2 つの経路によって、monodromy 条件が 2 つ得られる事が知られている。この事は、2 つの違う表現の S_{cl} を導

き出す。しかし、ここで使った v の表現に足し上げを制限すれば、違いはなく、どちらでも使って良い。また $k=l$ の時は monodromy 条件が 1 つしか出ないので問題ない。

そして、固定トーラスがあるセクターでは、真空が unit operator に対応してしまい、3 点関数が 2 点関数になる。つまり、

$$\langle \sigma_{1-k/N}(\infty)\sigma_{k/N}(0)\rangle_{S^2} = \langle \sigma_{1-k/N}|\sigma_{k/N}\rangle = 1 \tag{4.302}$$

と規格化できる事になってしまう。このような困難があるので、様々な場合を別々に考える必要がある。

例 ： Z_3 orbifold

ここでは twisted sector の 3 点関数の場合、どのようなインスタントン解を実際に持つか見る。（ここでは考えていないが、この場合、もちろん H-momentum 保存則や、空間群の selection rule も考慮に入れるべきである。）

まず、Z_3 orbifold の時、各々の平面で twisted field を

$$k^i = l^i = 2 \ , \ \ i = 1,2,3 \tag{4.303}$$

と選ぶ。すると、式（4.301）より、古典作用が求まる。

$$S^i_{cl} = \frac{|v_i|^2}{2\pi\sqrt{3}} \tag{4.304}$$

よって、

$$A_{cl} = \sum_v \exp(\sum_{i=1}^{3} \frac{-|v_i|^2}{2\pi\sqrt{3}}) \tag{4.305}$$

となる。この時、v は式（4.296）より

$$v = (\mathbf{1}-\theta^2)(f_1 - f_2 + \Gamma) \tag{4.306}$$

と与えられる。ここで、Z_3 orbifold の時の、固定点の表式

$$f = \sum_{i=1}^{3} \frac{n_i}{3}(e_{2i-1} + 2e_{2i}) \ , \ \ n_j = 0 \sim 2 \tag{4.307}$$

を使う。e_t $(t = 1 \sim 6)$ は 6 次元トーラス格子の基底である。ここでは、空間方向の足は省いて書いている。（ただし n_j は Z_3 orbifold なので mod 3 で同一視が可能である。）

すると v は

$$v = \sum_{j=1}^{3} d_j(e_{2j-1} + e_{2j}) + (\mathbf{1}-\theta^2)\Gamma \ , \ \ d_j = n^1_j - n^2_j \tag{4.308}$$

となる。また、上式は 6 次元トーラス上の任意の格子ベクトル Γ を使って、

$$v = \sum_{j=1}^{3}[(d_j + 2k_{2j-1} - k_{2j})e_{2j-1} + (d_j + k_{2j-1} + k_{2j})e_{2j}] \tag{4.309}$$

と書き直すこともできる。ここで、k_t は任意の整数である。

また、orbifold は元のトーラスの半径や、トーラス格子の基底同士の角度のパラメーターを持っている。これらのパラメーター—はトーラス基底 e_t の大きさや、その内積に対応している。またこの時、トーラス基底の内積 $e_t \cdot e_s$ は点群（トーラス上の automorphism）の操作により保存する。故に、orbifold の時でも重要なパラメーターになる。

ここでは特に、古典作用のトーラス半径依存性に注目する。まず内積は、Z_3 orbifold の時、

$$R_{2j-1}^2 = |e_{2j-1}|^2 = |e_{2j}|^2 = 2|e_{2j-1} \cdot e_{2j}| \tag{4.310}$$

である。R_{2j-1} $(j = 1, 2, 3)$ は 6 次元トーラスの半径である。

また moduli 場の期待値は定義

$$iT_i \equiv 2(b_{2i-1,2i} + i\sqrt{(\det g)_i}) \ , \ \ (i = 1 \sim 3) \tag{4.311}$$

$$g_{ab} = e_a^k G_{kl} e_b^l \ , \ \ b_{ab} = e_a^k B_{kl} e_b^l \tag{4.312}$$

により、$\langle T_i \rangle \sim R_{2i-1}^2$ とトーラスの半径になる。そしてまた、古典作用は相互作用に $e^{-S_{cl}}$ で入ることになる。

すると、古典作用のトーラス半径依存性に注目するという事は、相互作用（Yukawa coupling）の moduli 場依存性に注目するという事がわかる。

ここで、compact 空間部分の直行基底を g_k $(k = 1 \sim 6)$ とする。この時、直行基底 g_k とトーラス基底 e_t の関係は次のように与えられる。

$$e_{2j-1} = R_{2j-1} g_{2j-1} \ , \ \ e_{2j} = R_{2j-1}(\cos(2\pi/3) g_{2j-1} + \sin(2\pi/3) g_{2j}) \tag{4.313}$$

これを式（4.309）に代入すると

$$|v_j|^2 = [(d_j + 2k_{2j-1} - k_{2j})^2 + (d_j + k_{2j-1} + k_{2j})(2k_{2j} - k_{2j-1})]R_{2j-1}^2 \tag{4.314}$$

となる。またこの時、d_j の値は

$$d_j = n_j^1 - n_j^2 = 0, 1, -1 \pmod 3 \tag{4.315}$$

となる。

ここで、一番相互作用に効くのは、v の最小値である。最小になるよう、k_t の値を選ぶ。

すると結果は次のようになる。

$$\begin{aligned} |v_j|^2_{\min} &= 0 && \text{for} \quad d_j = 0 \\ &= R_{2j-1}^2 && \text{for} \quad d_j = \pm 1 \end{aligned} \tag{4.316}$$

よって相互作用項に

$$A_{cl} \sim \exp(\sum_{i=1}^{3} \frac{-|v_i|^2_{\min}}{2\pi\sqrt{3}}) \tag{4.317}$$

の因子が、それぞれ掛ることになる。(v で足し上げているので、この部分が一番効くことになる。$Z_{cl}=0$ では決してこの結果は出ない。つまりは、$Z_{cl}=0$ は正しい評価方法ではない。これが、一般的に古典解を考えなければいけない理由である。)

ここで、d_j の値は twisted sector が住んでいる、固定点の相対位置に関係していた。つまり、twisted sector が同じ固定点に住んでいれば、

$$A_{cl} \sim 1 \tag{4.318}$$

となる。これは、相互作用する 3 つの弦をつないだ時に、元のトーラスに巻き付いていない事を表わす。しかし、違う固定点に離れて住んでいれば、

$$A_{cl} \sim \exp(\sum_{i=1}^{3} \frac{-R^2_{2j-1}}{2\pi\sqrt{3}}) \tag{4.319}$$

の因子が掛り、相互作用が距離分だけ抑制されることになる。これは、twisted sector の弦が局在化し、離れて存在している事に対応している。また、これは 3 つの弦をつないだときに、元のトーラスに 1 回巻き付いていることを表わす。

これは古典解部分しか見ていないが、量子効果の部分

$$A_{qu} = \langle\ \sigma_{k/N}(z_1,\bar{z}_1)\ \ \sigma_{l/N}(z_2,\bar{z}_2)\ \ \sigma_{(N-k+l)/N}(z_3,\bar{z}_3)\ \rangle_{S^2\ \ qu} \tag{4.320}$$

もある。しかし、古典解部分に比べれば、twisted sector での相対的な相互作用の大きさは、ほとんど変わらない。故に、現象論的に一番重要なのは古典解部分になる。よって、

$$A = A_{cl}A_{qu} \sim A_{cl} \tag{4.321}$$

が成り立つ。

untwisted sector でインスタントン解を考えないのは、すでに言ったように、Yukawa coupling が gauge coupling になるからである。また、実際にインスタントン解を考えても、境界条件よりカットのない、全平面で正則なものしか許されない。よって、$Z_{cl}=\mathrm{const}$ となる。また、$Z_{cl}\neq 0$ の時は古典作用が発散することになり、$Z_{cl}=S_{cl}=0$ が効くことになる。これは untwisted sector の弦が bulk 全体に均等に住んでいることに対応している。つまり弦理論には、untwisted sector の弦が局在化している描像はない。これにより、Yukawa coupling の階層性を出そうとすれば、twisted sector の古典解が非常に重要なことが分かる。

最近の extra dimension 模型では、non-rivial な背景で bulk の場を局在化させることも研究されている。[14] この場合も同様に、Yukawa coupling の階層性が出ることになる。

4.6.6 B 場の役割と moduli 依存性

次に背景場として B 場を入れることを考える。

まず、B 場が入ったときの作用は次の通りである。

$$S = \frac{1}{\pi}\int d^2z[\partial Z^i\bar{\partial}\bar{Z}^i + \bar{\partial}Z^i\partial\bar{Z}^i] - \frac{iB_{2i-1,2i}}{\pi}\int d^2z[\partial Z^i\bar{\partial}\bar{Z}^i - \bar{\partial}Z^i\partial\bar{Z}^i] \tag{4.322}$$

この作用を見ると、ユークリッド化の影響で虚数単位 i が入っていることが分かる。(作用が複素数になっていて、一見問題があるように見える。しかし、元々の理論がミンコフスキー的世界面で定義されているので、きちんと虚数単位を評価すれば問題はない。)つまり、相互作用には $e^{-S_{cl}}$ の因子が掛るので、coupling に位相が入ることになる。特に、元の Yukawa coupling に位相因子が入る事は重要である。それは、小林—益川行列に位相が入る事になるからである。

前と同様に 3 点関数を考える。この時同様に、 $\bar{\partial}Z^i$ の項は発散するので $b=0$ しか効いてこない。よって、足し上げるのは ∂Z^i のみ考えれば良い。

すると、古典作用は前の場合から

$$1 \to (1 - iB_{2i-1,2i}) \tag{4.323}$$

と全体に掛る因子がずれるだけである。よってこの時、

$$A_{cl} = \sum_{v^i}\exp[-\sum_{i=1}^{3}\frac{(1-iB_{2i-1,2i})|v^i|^2|\sin(k^i\pi/N)||\sin(l^i\pi/N)|}{4\pi\sin^2(k^il^i\pi/N)|\sin[(k^i+l^i)\pi/N]|}] \tag{4.324}$$

である。

例 :Z_3 orbifold

前と全く同様に考える。この場合は $R^2_{2j-1} \to (1-iB_{2i-1,2i})R^2_{2j-1}$ とずらせばいいだけである。

そして moduli 場の定義

$$iT_i \equiv 2(b_{2i-1,2i} + i\sqrt{(\det g)_i}) \ \ , \ \ (i = 1 \sim 3) \tag{4.325}$$

$$g_{ab} = e^k_a G_{kl} e^l_b \ \ , \ \ b_{ab} = e^k_a B_{kl} e^l_b \tag{4.326}$$

を思い出すと、この場合も相互作用が moduli 場依存性を持つことが分かる。

まず第一平面に注目する。(他の場合も同様である。)この時、トーラスの基底は

$$e_1 = (1,0)R_1 \ \ , \ \ e_2 = (\cos(2\pi/3), \sin(2\pi/3))R_1 \tag{4.327}$$

である。そして、これを使うと

$$\sqrt{(\det g)_1} = (\sqrt{3}/2)R_1^2 \tag{4.328}$$

$$b_{12} = (\sqrt{3}/2)R_1^2 B_{12} \tag{4.329}$$

$$(1 - iB_{12})R_1^2 = \frac{T_1}{\sqrt{3}} \tag{4.330}$$

である。よって離れていなければ

$$A_{cl} \sim 1 \tag{4.331}$$

であり、離れていれば

$$A_{cl} \sim \exp(-\sum_{i=1}^{3} \frac{T_i}{6\pi}) \tag{4.332}$$

となる。実際に moduli 場依存性が、相互作用にあることが分かる。

3 点以上の関数について

なお、ここまでは 3 点関数にのみ注目したが、4 点関数も同様である。ただしこの場合は、座標が 1 つ固定されず、量子効果部分に積分が入り複雑になる。量子効果部分は、式（4.276）のように考えると、求める事ができる。[16]（量子効果部分は、すでに OPE が求まっているので、原理的に計算可能である。）

また 3 点関数の量子効果部分は、これだけ計算したのでは規格化が決まらない。規格化部分は、4 点関数を計算して、光学定理（unitarity）により決まる。[16] 結果だけだが書いておく。

まず、twisted field 同士の OPE は次のようなものである。

$$\sigma_{k/N,f_1}(z_1, \bar{z}_1)\sigma_{k/N,f_2}(z_2, \bar{z}_2) \sim \sum_f Y^{k/N}_{f_1 f_2 f} \;\; \sigma_{2k/N,f}(z_2, \bar{z}_2)|z_1 - z_2|^{-2(h_{k/N} - h_{2k/N})} \tag{4.333}$$

ここで、$h_{k/N}, h_{2k/N}$ は各々の場の conformal dimension である。また、

$$v = -(\mathbf{1} - \theta^{2k})(f - f_1 + \Gamma) \tag{4.334}$$

を使い、$Y^{k/N}_{f_1 f_2 f}$ は次のように書ける。

$$Y^{k/N}_{f_1 f_2 f} = \sqrt{V_\Gamma \tan(k\pi/N)} \frac{\Gamma^2(1 - k/N)}{\Gamma(1 - 2k/N)} \sum_v e^{-S(v)} \;\; , \;\; S(v) = \frac{|v|^2}{4\pi \sin(2k\pi/N)} \tag{4.335}$$

ここで V_Γ は compact 空間の体積である。（v の足し上げは違う Γ の足し上げを意味する。）これを見ると、twisted field には固定点依存性があることが分かる。よって、

$$\langle \sigma(0)_{k/N,f_1}\sigma(1)_{k/N,f_2}\sigma(z_\infty)_{-2k/N,f_3}\rangle_{S^2 qu} = Y^{k/N}_{f_1 f_2 f_3}|z_\infty|^{-4h_{1-2k/N}} \tag{4.336}$$

である。

そしてここまでは、twisted sector の真空 $\sigma_{k/N}$ が massless だとした。しかし、一般的には ∂Z が作用した excited state $\tau_{k/N} \sim \partial Z \sigma_{k/N}$ が massless になりうる。この状態を含む、3 点関数以上の計算も、式（4.276）のようにすれば計算可能である。[16][17]

これらの量子効果部分は、理論的には興味深い。しかし、量子効果部分よりも、古典解部分の方が現象論的には重要である。それは次の理由である。

古典解の重要性

- Yukawa coupling の階層性

相互作用の強さの比は、amplitude の比でしか効かない。また、量子効果部分の大きさは、古典解に比べて、一般的にほとんど同じである。つまり、古典解部分の比で Yukawa coupling y_i の階層性がほとんど決まることになる。（正確には、Kähler potential の寄与（場の規格化）がさらにある。しかし、こちらも古典解部分に比べれば差は出ない。）

そして、Yukawa coupling の階層性を自然に出そうとするならば、標準模型の物質場は、twisted sector の弦の状態を必ず含むことが分かる。

$$\frac{y_1}{y_2} \sim \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_{cl1}A_{qu1}}{A_{cl2}A_{qu2}} \sim \frac{A_{cl1}}{A_{cl2}} \tag{4.337}$$

- 位相因子、moduli 場依存性

更に、位相因子や moduli 場依存性が入るのは、古典解部分のみである。（moduli 場依存性は Target space duality を厳密に考える際に重要である。）

以上の理由により、現象論的に興味のある部分は、古典解部分である。

4.6.7 mixing について

これまで見てきたように、twisted sector の Yukawa coupling y_{ij} には、

$$y_{ij} \sim \exp(-a_{ij}T) \quad , \ a_{ij} : \mathrm{const} \tag{4.338}$$

のように moduli 場 T による抑制効果が出る。その結果、quark や lepton の質量行列に階層性が出ることになる。（もちろん、T の期待値を決めなければならない。）そこで、orbifold 模型では、様々な twisted sector や固定点に、標準模型の物質場を当てはめ、現実的な質量行列（また、 mixing angle 等）を出すことが試みられている。[18]

少し復習すると、quark の Yukawa coupling 行列を電弱相互作用の固有状態基底で書いた時、一般的に対角形ではない。そこから対角形にする際（つまりは質量固有状態に基底をとる時)、$SU(2)_L$ doublet のアップセクターとダウンセクターで、対角化に使う行列にずれが生じる。そのずれを表わすものが小林—益川行列である。

ここで、小林—益川行列は次のように書く。

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} c_1 & c_3 s_1 & s_1 s_3 \\ -c_2 s_1 & c_1 c_2 c_3 - s_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 c_2 s_3 + s_2 c_3 e^{i\delta} \\ s_1 s_2 & -c_1 s_2 c_3 - c_2 s_3 e^{i\delta} & -c_1 s_2 s_3 + c_2 c_3 e^{i\delta} \end{pmatrix} \ , \ c_i = \cos\theta_i \ , \ s_i = \sin\theta_i \tag{4.339}$$

また、質量行列の形が分かれば、対角化に使う行列が分かる。それゆえ、小林—益川行列も分かることになる。

ところで、もし対角化前の Yukawa coupling 行列に、非対角要素がなければ対角化の際のずれは生じ得ず、現実的な小林—益川行列は出ない。ゆえに、現実的な小林—益川行列を弦理論から再現しようとするならば、世代に対して非対角な相互作用が存在するかどうかが重要になる。

また、twisted sector 同士の相互作用が存在するかどうかは、selection rule が大きく関わって来ていた。それゆえ、現実的な行列を再現しようとするとしても大きな拘束がある。

例えば Z_3 orbifold の場合を考える。この場合に 3 点結合が許されるのは、一つの平面で見た時に、全て同じ固定点上に弦が住んでいるときか、あるいは全て違う固定点上にいる場合である。まず、対角部分を考える。現象論的には、第 3 世代の Yukawa coupling は大きく出したい。すると、アップ Higgs（H_u）、第 3 世代の left handed quark（Q_3）、そして right handed top quark（$\bar{U}_3$）が同じ固定点上に住んでいる事になる。（この時、moduli 場による抑制効果は出ない。）また、第 2 世代は Yukawa coupling が小さいので、抑制効果が出るよう、離しておきたい。すると H_u 、第 2 世代の left handed quark（Q_2)、そして right handed charm quark（$\bar{U}_2$） は一つの平面で見て、別々の固定点に置くべきである事が分かる。よってこの時、$H_uQ_3\bar{U}_2, H_uQ_2\bar{U}_3$ の非対角部分に当る相互作用は許されない。

一般的に、3 点関数のみを考えていたのでは、Z_3 orbifold の場合には非対角項が決して出ない。つまり Z_3 orbifold の場合、mixing を出すには、4 点以上の non-renormalizable coupling を使用しなければならない事になる。この場合は、低エネルギー有効理論にして、Froggatt-Nielsen 機構を使い、非対角部分の Yukawa coupling を出す。ただしこの場合は Froggatt-Nielsen 機構を使うので、非対角の部分の Yukawa coupling は対角部分に比べて非常に小さくなる。また第一世代の対角項は、他の世代の対角項に比べて Yukawa coupling が小さい。それゆえ、第一世代の対角項も non-renormalizable coupling を用いるべきである。また、適当に位相が出るためには、B 場も使用しなければいけない。ただし、対角部分の位相は、場の再定義により出ない事になる。つまり非対角の部分のみ位相が出る。これらの事は Z_3 orbifold だけではなく、prime order orbifold の Z_7 orbifold も同様であることが知られている。

この場合の大体質量行列の形は、次の通りである。

$$M = \begin{pmatrix} \epsilon & a & b \\ \tilde{a} & A & c \\ \tilde{b} & \tilde{c} & B \end{pmatrix} \quad , \quad \epsilon, a, b, c, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c} \ll A, B \tag{4.340}$$

ただし、ここまでは、Higgs 場が minimal に H_u, H_d と、MSSM のように 2 つしかないときの話である。それゆえ、Higgs 場がたくさんあれば mixing は出る。

なお、non-prime order orbifold の場合はもっと複雑になる。この場合は、non-renormalizable coupling を用いなくても、非対角項は出る事が知られている。

ここで、Yukawa coupling を含む種々の coupling は、Heterotic string 理論の scale（$\sim 10^{18}$GeV）から、繰り込み群で走る。その際、特に gauge coupling unification の問題は気になるところである。通常の MSSM のように、2×10^{16}GeV 付近で unificatin が起るのかどうかは後で議論する。

4.7 Kähler potential と gauge kinetic function

ここからは Kähler potential と gauge kinetic function について話す。

- Kähler potential

一般に Kähler potential $K(\Phi, \Phi^\dagger)$ が存在すると、場の運動項が

$$\mathcal{L} \supset \int d^4\theta K(\Phi, \Phi^\dagger) \supset -\frac{\partial^2 K}{\partial\phi^A \partial\phi_B^\dagger}\partial_\mu \phi^A \partial^\mu \bar{\phi}_B \equiv -K_A{}^B \partial_\mu \phi^A \partial^\mu \phi_B^\dagger \tag{4.341}$$

となる。ただし、Φ は superfield であり、$\Phi^A \supset \phi^A$ である。そして、A は場の種類についての添字である。

それゆえ、理論を正準形にするには、

$$K_A{}^B \partial_\mu \phi^A \partial^\mu \phi_B^\dagger \to \partial_\mu \tilde{\phi}^A \partial^\mu \tilde{\phi}_A^\dagger \tag{4.342}$$

と場を規格化する必要がある。すると、ここまでに話した superpotential 部分も変更される。

もし Kähler メトリックが

$$K_A{}^B = K_A \delta_A{}^B \tag{4.343}$$

の場合には

$$\Phi^A \to K_A^{-1/2} \tilde{\Phi}^A \tag{4.344}$$

とすれば良い。この時には、

$$W \supset \tilde{y}_{ABC} \Phi^A \Phi^B \Phi^C \to \frac{\tilde{y}_{ABC}}{(K_A K_B K_C)^{1/2}} \tilde{\Phi}^A \tilde{\Phi}^B \tilde{\Phi}^C \equiv y_{ABC} \tilde{\Phi}^A \tilde{\Phi}^B \tilde{\Phi}^C \tag{4.345}$$

のように、coupling に影響が出ることを忘れてはならない。

- gauge kinetic function

また、gauge kinetic function $f_{ab}(\Phi)$ が存在すると、gauge kinetic term が

$$\mathcal{L}_{gk} = \frac{1}{4}\int d^2\theta f_{ab}(\Phi) W^{a\alpha} W_\alpha^b + \text{h.c.} \tag{4.346}$$

となる。ここで、$W^{a\alpha}$ は superfield strength である。また、α はスピノールの足、a は gauge 群の随伴表現の足である。また、この時の場 Φ は gauge singlet である。特に弦理論を元にした場合、Φ は dilaton や、moduli である。特に TypeIIB orientifold 模型の場合、gauge singlet な twisted moduli が入る。

この時

$$\mathcal{L}_{gk} = -\frac{\mathrm{Re} f_{ab}}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu b} - \frac{\mathrm{Im} f_{ab}}{8} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^a F_{\rho\sigma}^b - i \mathrm{Re} f_{ab} \lambda^a \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\lambda}^b + \frac{\mathrm{Re} f_{ab}}{2} D^a D^b \tag{4.347}$$

となる。つまり、gauge kinetic function の実数部が gauge coupling になり、虚数部は θ-term になる。

4.7.1 Target space duality

ここではTarget space duality（T-duality）について述べる。

弦理論の T-duality

弦理論の T-duality について述べる。
まず、理論を半径 R の S^1 に 1 次元だけ compact 化した時を考える。
この時の mass operator は

$$\frac{m^2}{8} = \frac{p_R^2}{2} + N - a = \frac{p_L^2 + (p_L^I)^2}{2} + \tilde{N} - \tilde{a} \tag{4.348}$$

である。そして上式の中式、右式を足して 2 で割ると、

$$\frac{m^2}{8} = \frac{p_R^2 + p_L^2 + (p_L^I)^2}{4} + \frac{N + \tilde{N} - a - \tilde{a}}{2} \tag{4.349}$$

が成り立つ。ここで、

$$p_R = \frac{n}{2R} - wR \ , \ \ p_L = \frac{n}{2R} + wR \ , \ \ n, w \in \mathbf{Z} \tag{4.350}$$

である。それぞれ、n, w は運動量モードと、弦の巻き付き数に対応する。よって、これを式（4.349）に代入すると

$$\frac{m^2}{8} = \frac{1}{8}(\frac{n^2}{R^2} + 4w^2R^2) + \frac{(p_L^I)^2}{4} + \frac{N + \tilde{N} - a - \tilde{a}}{2} \tag{4.351}$$

となる。この時、

$$R \to R' = \frac{1}{2R} \ \ , \ \ n \leftrightarrow w \tag{4.352}$$

としても理論のスペクトルは不変である。また、この時

$$p_L \to p_L \ \ , \ \ p_R \to -p_R \tag{4.353}$$

となる。これはゼロモードだけの関係であるが、一般化して弦の compact 化した方向の座標 X を

$$X(z, \bar{z}) = X_L(\bar{z}) + X_R(z) \to X'(z, \bar{z}) = X_L(\bar{z}) - X_R(z) \tag{4.354}$$

と、双対な座標 X' に置き換える。すると、余計な符合が理論に現れず、半径 R の理論と半径 R' の理論が等しくなる。この変換が T-duality である。この変換により、compact な理論（$R \sim 0$）と non-compact な理論（$R' \sim \infty$）が等価になる。また、付け加えておくと、超共形不変性のためには、$\psi(z) \to -\psi(z)$ となる。これを行うため、右向き R セクター部分のカイラリティ―が変わる。すると T-duality により

$$\text{TypeIIA} \leftrightarrow \text{TypeIIB} \tag{4.355}$$

となる事が知られている。

そして、TypeIIB 理論に世界面上のパリティー変換不変性を課した、TypeI 理論には、無矛盾性より開弦が存在する。この場合には、境界条件が Neumann 条件から

$$\partial_\sigma X = 0 \to \partial_\tau X' = 0 \tag{4.356}$$

と Dirichlet 条件に変わる。この条件は、双対な描像の X' の方向に開弦の両端が固定されていることに対応している。その固定している物体が、有名な D-brane である。

結果、双対な X' 方向には運動量を持たない。X' の振動子のゼロモードには開弦の長さ（座標）のみ入る。これが mass operator に影響して、長ければ長いほど、弦の状態は重くなる事になる。

- orientifold

右向きと左向きを入れ替える、世界面上のパリティー変換（Ω）を考える、（この場合には、無矛盾性より閉弦だけでなく、開弦が必要になる。）

ここで、Ω は

$$\Omega : \sigma \to \pi - \sigma \tag{4.357}$$

と作用する。また、場に対しては

$$\Omega : X_L(\bar{z}) \leftrightarrow X_R(z) \quad (\alpha_n \leftrightarrow \tilde{\alpha}_n) \tag{4.358}$$

となる。そして、理論の状態に $\Omega = +1$ を課すとする。この場合、弦の向きづけが無い理論になる。

また、開弦に対しては、$Z = -\exp(-2i\omega)$ の座標で、閉弦と同様に

$$X(z, \bar{z}) \sim \sum_{n \in \mathbf{Z}} [\frac{\alpha_n}{n} z^{-n} + \frac{\alpha_n}{n} \bar{z}^{-n}] \tag{4.359}$$

とモード展開する。（開弦は境界条件があり、右向きと左向きの波は独立でなくなる。）それゆえ、開弦に対する世界面上のパリティー変換

$$\Omega : \ \ \sigma \to \frac{\pi}{2} - \sigma \tag{4.360}$$

の元では $z \to -\bar{z}$ となるので、開弦の振動子は

$$\Omega : \ \ \alpha_n \to (-1)^n \alpha_n \tag{4.361}$$

となる。

この理論の元で T-duality を取ることを考える。T-duality を取っていない座標 X^μ については

$$\Omega : X^\mu = X_L^\mu + X_R^\mu \leftrightarrow X^\mu \tag{4.362}$$

である。双対な座標 X' は

$$X'(z,\bar{z}) = X_L(\bar{z}) - X_R(z) \tag{4.363}$$

と書ける。それゆえ、双対な座標 X' に対してのみ

$$\Omega : X' \leftrightarrow -X' \tag{4.364}$$

のように、時空のパリティー変換（Z_2）が作用するようになる。

したがって、双対な描像で見たとき、この理論は $\Omega \times Z_2$ に対して不変となる。

このようにして世界面上のパリティー変換と時空の変換を組み合わせてできる空間を orientifold という。（一般的に、時空の対称性は Z_N $(N \in \mathbf{Z})$ としても可能である。）この空間は、orbifold と世界面上のパリティー変換を組み合わせたものとしても理解できる。それゆえ、orientifold にも固定点がある。

例として 1 次元だけ T-dual を取った orientifold S^1/Z_2 を考える。（S^1 の半径を R' とする。）この時、固定点は $x' = 0, \pi R'$ にある。orientifold 固定点があるための変更は、$0 \leq x' \leq \pi R'$ の物理が $-\pi R' \leq x' < 0$ で決まっている点である。（それゆえ、$0 \leq x' \leq \pi R'$ のみを考えれば良い。これは orbifold の時と同じである。）そして、固定点から十分離れた $0 \ll x' \leq \pi R'$ にある弦は自由に動いて何の問題もない。また、$\Omega = +1$ である向きづけのない状態は、向きづけのある状態の線形結合で書かれる。

それゆえ、orientifold 固定点や D-brane から十分離れると、局所的物理は向きづけのある、D-brane の無い理論と同じになる。

この orientifold を使うと、TypeIIA,TypeIIB 理論に閉弦だけでなく、開弦が現れ、D-brane も現れる。

ここで、T-duality を取る度に、Neumann 条件と Dirichlet 条件が入れ替わっていた。そして、Dirichlet 条件のある方向は D-brane に対して tranesverse な方向になる。それゆえ、様々な方向に T-duality を取る度に、D-brane の次元が上下することになる。

また、TypeIIB 理論に $\Omega = +1$ のみを状態に課す（$\sim$ TypeI）と、10 次元時空全体に開弦が住むことになるので、D9-brane （Dp-brane と書いたとき、p は空間次元を表わす。）が存在することになる。ここで T-duality により TypeIIA と TypeIIB が入れ替る事を思い出すと、次のことが言える。

$$\mathrm{D9(TypeIIB)} \overset{\text{T-dual for } x^9}{\rightarrow} \mathrm{D8(TypeIIA)} \overset{\text{T-dual for } x^8}{\rightarrow} \mathrm{D7(TypeIIB)} \rightarrow \ldots \tag{4.365}$$

これより安定な BPS Dp-brane は TypeIIA 理論には p = 0,2,4,6,8 がある。そして TypeIIB 理論には p = 1,3,5,7,9 があると分かる。（安定と言えないかも知れないが、TypeIIB 理論に 0-form の RR field が存在するので、D(−1)-brane も存在する。）

低エネルギー有効理論との関係

ここでは、背景場として B 場が入ったときを考える。簡単のため、理論の 8、9 方向を半径 R の T^2 に compact 化した時を考える。

ここで、Umoduli 場

$$iU = \frac{1}{g_{8,8}}(g_{8,9} + i\sqrt{\det g}) \tag{4.366}$$

は時空のトーラスのモジュラ―パラメーターに対応していた。この時、世界面のトーラス同様、時空間のトーラスの $SL(2, \mathbf{Z})$ モジュラ―変換

$$U \to \frac{AU - iB}{iCU + D} \ , \ \ AD - BC = 1 \ , \ \ A, B, C, D \in \mathbf{Z} \tag{4.367}$$

の対称性がある事が知られている。

また、式（4.39）、（4.40）を書き直すと、

$$p_R^k = \frac{n_k}{2R} - w_k R - B w_k R = \frac{n_k}{2R} - w_k R - \frac{b w_k}{R} \tag{4.368}$$

$$p_L^k = \frac{n_k}{2R} + w_k R - B w_k R = \frac{n_k}{2R} + w_k R - \frac{b w_k}{R} \tag{4.369}$$

となる。ここで、$B \equiv B_{8,9}$ であり、$b = BR^2$ である。この b はトーラスの基底で書いた、式（4.46）に対応するものである。この時、

$$b \to b + \frac{l}{2} \ , \ \ l \in \mathbf{Z} \tag{4.370}$$

としても理論のスペクトルは不変である。これは Tmoduli の定義

$$iT \equiv 2(b + i\sqrt{(\det g)}) \tag{4.371}$$

を思い出すと、

$$T \to T - il \tag{4.372}$$

に対応している。また、同時に 8、9 方向に T-dual を取ることを考える。

この時、

$$\langle T \rangle \sim 2R^2 \stackrel{\text{T-dual for } x^{8,9}}{\to} 1/2R^2 \tag{4.373}$$

であったことを思い出すと、（簡単のため、B 場は無く、$G_{kl} = \delta_{kl}$ を考えるとよい。）T-dual に対して

$$T \to \frac{1}{T} \tag{4.374}$$

となる。よって、これらを組み合わせると

$$T \to \frac{aT - ib}{icT + d} \ , \ \ ad - bc = 1 \ , \ \ a, b, c, d \in \mathbf{Z} \tag{4.375}$$

の $SL(2, \mathbf{Z})$ 変換対称性があることになる。

ここでは簡単化したが orbifold compact 化した時も、それぞれの moduli 場に対して変換対称性があることが知られている。つまり、T_i $(i = 1, 2, 3)$ の時は、$SL(2, \mathbf{Z})$ 変換が 3 つある。対角的な U moduli 場と合わせると、$SL(2, \mathbf{Z})^3 \times SL(2, \mathbf{Z})^3$ の対称性があることになる。

4.7.2 untwisted sector の Kähler potential、gauge kinetic function、Yukawa coupling

untwisted sector の場は、元々10 次元の bulk 全体に住む場である。それゆえ、10 次元の低エネルギー有効理論の作用より、dimensional reduction によって、4 次元の作用は出すことができる。[15] ただしその際、 orbifold compact 化の結果と同様に、点群の作用に対して不変な場やその gauge 群の表現を正しく選ぶ必要がある。

10 次元のラグランジアン

$E_8 \times E_8$ Heterotic string は 10 次元 $N=1$ SUSY を持っていた。この時、Einstein frame で書いた、10 次元 $N=1$ supergravity と SYM のボゾン部分の作用は string の tree レベルで次のようなものである[††]。

$$\begin{aligned}
S_{10B} &= \int d^{10}x\sqrt{-g_{10}}\mathcal{L}_{10B} \\
\mathcal{L}_{10B} &= -\frac{1}{2}R^{(10)} - 4(\partial_M\phi)^2 - \frac{1}{12}e^{-4\phi}\tilde{H}_{LMN}\tilde{H}^{LMN} - \frac{1}{4}e^{-2\phi}\mathrm{tr}_{adj}F_{MN}F^{MN} \\
\tilde{H}_{LMN} &= [\partial_L B_{MN} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{tr}_{adj}(A_L F_{MN} - \frac{2}{3}g'_{10}A_L A_M A_N) + \text{cyclic permutation}] \\
M, N &= 0 \sim 9
\end{aligned} \tag{4.376}$$

ここで、g'_{10} は dilaton が期待値を持つ前の 10 次元の gauge coupling である。また、同様に、ここでは dilaton が期待値を持つ前の 10 次元の gravitational coupling を $\kappa'_{10}=1$ とした。またトレースは随伴表現についてとってある。

ここで、簡単化のため、

$$\begin{aligned}
g^{(10)}_{\mu\nu} = e^{-3\sigma}g^{(4)}_{\mu\nu}\ ,\ \ \mu,\nu = 0\sim 3\quad ,\ g^{(10)}_{mn} = e^{\sigma}\delta_{mn}\ ,\ \ m,n = 4\sim 9 \\
B_{mn} = \epsilon_{mn}b\ ,\qquad \epsilon_{45}=\epsilon_{67}=\epsilon_{89}=+1\ ,\ \epsilon_{54}=\epsilon_{76}=\epsilon_{98}=-1
\end{aligned} \tag{4.377}$$

とする。(ϵ_{mn} は $SU(3)$ に対して不変なテンソルになっている。)

そしてこの時、compact 化の結果、理論に残る gauge 群が $E_8 \times E'_8 \to E_6 \times SU(3) \times E_8$ とする。つまり、Wilson line の無い Z_3 orbifold で、standard embedding をした時を考える。そして、これからは E_8 の部分群 、$E_6 \times SU(3)$ にのみ注目する。($N=2$ CFT を使う場合、Wilson line のある場合でも、untwisted sector では、GSO 射影で残る amplitude は変化せず、vertex operator も変化しないので、簡単に計算可能である。[19])

この時、理論に残るのは vector multiplet に関しては $E_6 \times SU(3)$ の随伴表現であった。untwisted matter は、点群の作用($\subset SU(3)_R$)の $\mathbf{3}$ 表現に対して、gauge 群の $(\overline{\mathbf{27}}, \overline{\mathbf{3}})$ 表現であった。

それゆえ、次のように考える。

[††] ここでは通常の $N=1$ supergravity の dilaton と違って $\phi \to e^{8\phi/3}$ と書いた。また $\alpha' = 2$ としてある。

場の分解

- gauge 場

ここで、$G = E_8$ 、$S = E_6 \times SU(3)$ とする。そして、S の生成子を λ^α とする。そして、

$$\mathrm{tr}_{adjG}(\lambda^\alpha\lambda^\beta) = f\mathrm{tr}_{adjS}(\lambda^\alpha\lambda^\beta) \ \ = f\delta^{\alpha\beta} \tag{4.378}$$

とする。この時、理論に残るのは S の gauge 場部分

$$\mathcal{L} \supset -\frac{1}{4}e^{-2\phi}f\mathrm{tr}_{adjS}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{4.379}$$

である。(もちろん E'_8 の寄与もある。)

- untwisted matter

場を次のように定義する。

$$B^i \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(A^{2i+2} + A^{2i+3}) \ , \ \ i = 1 \sim 3 \tag{4.380}$$

ここで、G の生成子のうち、$SU(3)$ に対して $\overline{\mathbf{3}}$ 表現、E_6 に対して $\overline{\mathbf{27}}$ 表現で変換するものを $T_{a,x}$ とする。ここで、$T_{a,x}$ の a は $SU(3)$ の $\overline{\mathbf{3}}$ 表現の足であり、x は E_6 の $\overline{\mathbf{27}}$ 表現の足である。

ここで、$T_{a,x}$ は次の式を満たすとする。

$$\mathrm{tr}_{adjG}[T_{a,x}(T_{b,y})^*] = \delta^y_x\delta^b_a \ \ , \ \ \mathrm{tr}_{adjG}(T_{a,x}T_{b,y}T_{c,z}) = \epsilon_{abc}d_{xyz} \tag{4.381}$$

ここで、d_{xyz} は E_6 の $\overline{\mathbf{27}}^3$ 不変な完全対称テンソルである。

そして、これを用いて、場を次のように展開する。

$$B^i = \sum_{x,a} T_{a,x}C^{a,x}_i \tag{4.382}$$

ここで、$C^{a,x}_i$ は 4 次元の($\overline{\mathbf{27}}, \overline{\mathbf{3}}, \mathbf{1}$)表現のスカラー場である。そして、i は点群 $SU(3)_R$ の $\mathbf{3}$ 表現の足である。

するとこの時、まず、$\tilde{H}_{l\,\mu\nu}$ の中の状態は、点群の作用に対して不変でないので、理論には残らない。

次に残りの結果をを上げておく。

$$\mathrm{tr}F^2_{\mu\,m} = \mathrm{tr}F^2_{m\,\mu} = 6e^{2\sigma}|D_\mu C^{a,x}_i|^2 \tag{4.383}$$

$$\tilde{H}^2_{\mu\,mn} = \tilde{H}^2_{n\mu\,m} = \tilde{H}^2_{mn\mu} = 6e^{\sigma}(\partial_\mu b - \frac{i}{\sqrt{2}}(C^{a,x}_i)^\dagger \overleftrightarrow{D}_\mu C^{a,x}_i)^2 \tag{4.384}$$

$$\tilde{H}^2_{lmn} = 2e^{-3\sigma}g'^2_4[\mathrm{tr}(A_l[A_m, A_n])]^2 = 16e^{-3\sigma}g'^2_4|\epsilon^{ijk}\epsilon_{abc}d_{xyz}C^{a,x}_i C^{b,y}_j C^{c,z}_k|^2 \tag{4.385}$$

これらの最後の項は superpotential に当る。また、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}F_{mn}^2 &= 2e^{-2\sigma}\sum_{i,j}\mathrm{tr}[B^i,B^j][B_j^\dagger,B_i^\dagger] + 2e^{-2\sigma}\sum_{i,j}\mathrm{tr}[B^i,B_j^\dagger][B^j,B_i^\dagger] \\
&= 4e^{-2\sigma}\sum_{i,j}\mathrm{tr}[B^i,B^j][B_j^\dagger,B_i^\dagger] + 2e^{-2\sigma}\sum_{i,j}\mathrm{tr}[B^i,B_j^\dagger][B^i,B_j^\dagger]
\end{aligned}
\tag{4.386}
$$

である。（上式の最後は Jacobi 恒等式を使った。）ここで、

$$
\sum_{i,j}\mathrm{tr}[B^i,B^j][B_j^\dagger,B_i^\dagger] = 4|\epsilon^{ijk}\epsilon_{abc}d_{xyz}C_j^{b,y}C_k^{c,z}|^2 \tag{4.387}
$$

$$
\sum_{i,j}\mathrm{tr}[B^i,B_j^\dagger][B^i,B_j^\dagger] = \frac{9}{f}\sum_\alpha (C_i^\dagger\lambda^\alpha C_i)^2 \tag{4.388}
$$

となる。これらの最初の式は F-term に、最後の式は D-term に当る事が分かる。

4 次元のラグランジアン

- superpotential(Yukawa coupling)

よって、4 次元のラグランジアンは

$$
(\det g_{\mu\nu}^{(10)})^{1/2} = e^{-3\sigma}(\det g_{\mu\nu}^{(4)})^{1/2} \ \ , \ \ S_{4B} = \int d^4x (\det g_{\mu\nu}^{(4)})^{1/2}\mathcal{L}_{4B} \tag{4.389}
$$

を考慮すると、次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{4B} = &-\frac{1}{2}R^{(4)} - 3(\partial_\mu\sigma)^2 - 4(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{3}{2}e^{-4\phi}e^{-2\sigma}(\partial_\mu b - \frac{i}{\sqrt{2}}(C_i^{a,x})^\dagger \overleftrightarrow{D}_\mu C_i^{a,x})^2 \\
&- \frac{1}{12}e^{-4\phi}e^{6\sigma}\tilde{H}_{\mu\nu\rho}^2 - \frac{1}{4}e^{-2\phi}e^{3\sigma}f\,\mathrm{tr}F_{\mu\nu}^2 - 3e^{-\sigma}e^{-2\phi}|D_\mu C_i^{a,x}|^2 \\
&- \frac{8}{3}g_4'^2 e^{-2\phi}e^{-5\sigma}\left|\frac{\partial W}{\partial C_i}\right|^2 - \frac{9g_4'^2}{2f}e^{-2\phi}e^{-5\sigma}\sum_\alpha (C_i^\dagger\lambda^\alpha C_i)^2 - 8g_4'^2 e^{-4\phi}e^{-6\sigma}|W|^2
\end{aligned}
\tag{4.390}
$$

ここで

$$
W = \frac{8}{\sqrt{3}}g_4'\epsilon^{ijk}\epsilon_{abc}d_{xyz}C_i^{a,x}C_j^{b,y}C_k^{c,z} \tag{4.391}
$$

はsuperpotentialである。実際に、untwisted sectorの場合は、Yukawa couplingがgauge couplingになっている事が分かる。（また、理論には dilaton を scale 変換する自由度がある。[15]）

- gauge kinetic function

また、ここで、

$$
e^{-4\phi}e^{6\sigma}\tilde{H}_{\mu\nu\rho} = \frac{\epsilon_{\mu\nu\rho}{}^{\sigma}}{(\det g)^{1/2}}\partial_\sigma a \tag{4.392}
$$

と B 場に対して、双対な場 a を定義する。この a を axion と呼ぶ。

（B 場の運動方程式 $\nabla^\mu e^{-4\phi}e^{6\sigma}\tilde{H}_{\mu\nu\rho}=0$ を満たすように決めた。）

また、Jacobi 恒等式より、

$$\frac{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{(\det g)^{1/2}}\partial_\mu \tilde{H}_{\nu\rho\sigma}=-\sqrt{2}f\mathrm{tr}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} \tag{4.393}$$

となる。ここで、

$$\tilde{F}^{\mu\nu}=\frac{1}{2}\frac{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{(\det g)^{1/2}}F_{\rho\sigma} \tag{4.394}$$

である。またここで、式（4.392）を式（4.393）に代入すると、

$$\nabla^\mu e^{4\phi}e^{-6\sigma}\nabla_\mu a=-\frac{\sqrt{2}}{4}f\mathrm{tr}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} \tag{4.395}$$

と axion の運動方程式が出る。このとき、双対な描像では

$$-\frac{1}{12}e^{-4\phi}e^{6\sigma}\tilde{H}^2_{\mu\nu\rho}\to-\frac{1}{2}e^{4\phi}e^{-6\sigma}(\partial_\mu a)^2+\frac{\sqrt{2}a}{4}f\mathrm{tr}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} \tag{4.396}$$

が、代わりに式（4.390）のラグランジアンに入ることになる。

これはまた、次のようにも解釈できる。式（4.390）の中の、B 場の field strength $H_3=dB_2$（微分形式で書いた）は、Jacobi 恒等式 $dH_3=0$ を満たす。しかし、B 場と独立だと思って Jacobi 恒等式を課さず、式（4.390）の B 場の運動項を（擬）スカラー補助場 a を使って次のように置き換える。

$$-\frac{1}{12}\int d^4x(-g)^{1/2}e^{-4\phi}e^{6\sigma}\tilde{H}^2_{\mu\nu\rho}\to-\frac{1}{12}\int d^4x(-g)^{1/2}e^{-4\phi}e^{6\sigma}\tilde{H}^2_{\mu\nu\rho}+\int adH_3 \tag{4.397}$$

これは、a で積分すると元に戻ることが分かる。またこの時、次の事が成り立つ。

$$\int adH_3=\int a[d\tilde{H}_3+\frac{f}{\sqrt{2}}\mathrm{tr}(F_2\wedge F_2)] \tag{4.398}$$

よって、この形にしておいて $\tilde{H}_3$ で積分すれば、

$$\begin{gathered}-\tfrac{1}{12}\int d^4x(-g)^{1/2}e^{-4\phi}e^{6\sigma}\tilde{H}^2_{\mu\nu\rho}+\int a[d\tilde{H}_3+\tfrac{f}{\sqrt{2}}\mathrm{tr}(F_2\wedge F_2)]\to\\ \int d^4x(-g)^{1/2}[-\frac{1}{2}e^{4\phi}e^{-6\sigma}(\partial_\mu a)^2+\frac{\sqrt{2}a}{4}f\mathrm{tr}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}]\end{gathered} \tag{4.399}$$

となる。（上式を $\tilde{H}_3$ で変分すると、式（4.392）の関係式が出る。それを代入すればよい。）

ここで、4 次元複素 dilaton 場 S を次のように定義する。

$$S\equiv e^{-2\phi}e^{3\sigma}-i\sqrt{2}a \tag{4.400}$$

よってこの時、式 (4.390）のラグランジアンより、string の tree レベルで、gauge kinetic function $f_{ab}(S)$ は

$$f_{ab}(S)=\frac{fS\delta_{ab}}{g'^2_4} \tag{4.401}$$

となる。ここで、a, b は gauge 群の随伴表現の足である。（ただし、ここでは gauge 場の定義を $g'_4 A_\mu \to A_\mu$ とした。）

ここでは Kac-Moody レベルを考慮していないが、Kac-Moody レベルを考慮すると、すでに説明したように

$$f_{A\,ab}(S) = \frac{k_A f S \delta_{ab}}{g'^2_4} \tag{4.402}$$

となる。

ここで、さらに dilaton、axion を再規格化すると、g'_4 を消すことができる。例えば次のようにすることも可能である。

$$f_{A\,ab}(S) = k_A S \delta_{ab} \tag{4.403}$$

（ここで、$f_{ab}(S) = k_a S \delta_{ab}/8\pi^2$ と取ることも可能である。その際、以下の定義が $8\pi^2$ ずれるだけである。）

また、gauge kinetic term が正準系になるには、

$$k_a \langle \mathrm{Re}S \rangle = \frac{1}{g^2_{4a}} \ \ , \ \ k_a \langle \mathrm{Im}S \rangle = -\frac{\theta_a}{8\pi^2} \tag{4.404}$$

となるべきである。ここで、θ は真空角である。

つまり、dilaton の実部が現実的な gauge doupling を決めていることがわかる。虚部は strong CP 問題に関連した θ-term を決めている。また、B 場には式（4.370）のように、定数だけずらす対称性があったので、双対な a にもその対称性がある。つまり

$$S \to S + i\lambda \ \ , \ \ \lambda \, : \, \mathrm{const} \tag{4.405}$$

のように λ だけ θ をずらすことが可能である。この対称性は Peccei-Quinn （PQ）対称性とも呼ばれる。しかし、この θ-term はインスタントン数 n ($n \in \mathbf{Z}$) とも関係していて、ユークリッド化した時空の作用に $S_E \supset in\theta$ と入る。それゆえ、インスタントン効果と経路積分を考えると、量子論的には $\theta \to \theta + 2\pi m$ ($m \in \mathbf{Z}$) と 2π ずつしかずらせない。

またここまで見て分かったように、gauge coupling を決める dilaton 場は、理論に一つしかない。そして、この場合の gauge 群は $SU(3) \times E_6 \times E_8$ であったが、一般にその寄与は gauge 群に寄らず、同じように couple している。特に、ゲージ群の Kac-Moody レベルが一致している場合は全く同じである。それゆえ、string の tree レベルでは、gauge coupling unification が string scale（$\sim 10^{18}$Gev）で起こることになる。これは MSSM の結果と比べると、問題のようだが、string の loop の寄与を入れると、通常の GUT scale（$\sim 10^{16}$Gev）で起り得る。（この時は、一般にゲージ群の Kac-Moody レベルが一致していなくても起こる。）

また、TypeIIB orintifold 模型では、次元や配位の違う、様々な D-brane がある。特に、D-brane の次元が違うと compact 空間の数と体積が違う。それゆえ、それら D-brane を起源にした gauge 群ごとに、dilaton の coupling の仕方が違うことになる。その結果、gauge coupling が一致することは難しい。（4 次元の gauge coupling には compact 空間の体積が寄与していた事を思い出すと良い。）

また、付け加えておくと Hetero の場合は、dilaton の虚部は B 場であった。しかし、TypeIIB orintifold 模型の場合は、R-R field になる。

- Kähler potential

さらに対角な moduli 場を次式で定義する。

$$T_i \equiv e^{\sigma} e^{2\phi} - i\sqrt{2}b + |C_i^{a,x}|^2 \tag{4.406}$$

またこの時、S, T, C の Kähler potential は、式（4.390）のラグランジアンより

$$K = -\ln(S + S^\dagger) - \sum_i \ln(T_i + T_i^\dagger - 2|C_i^{a,x}|^2) \tag{4.407}$$

となる。（この Kähler potential は no scale 模型 [20] 型になっていることに気が付く。）

この時、実際に T の運動項は

$$-\frac{3}{2}\frac{|\partial_\mu T|^2}{(\mathrm{Re}T)^2} \tag{4.408}$$

となって、$SL(2, \mathbf{Z})$ 不変な形になっている事がわかる。

そして U moduli が存在しない場合、非対角な場合も考慮して一般的に、

$$K = -\ln(S + S^\dagger) - \ln\det[(T_{i\bar{j}} + T_{i\bar{j}}^\dagger) - 2\sum_{\{a\}} C_i C_j^\dagger] \tag{4.409}$$

と書くことができる。[21] ただし、untwisted matter C_i は残る gauge 群の表現（a）で足しあげている。ここで、T moduli の非対角な部分は、時空の計量と B 場の、2 つの複素平面間にまたがった部分からの寄与である。また、$\bar{j}$ は点群の $\overline{\mathbf{3}}$ 表現の足である。特に対角的な場合は、

$$K = -\ln(S + S^\dagger) - \sum_{i=1}^{3} \ln[(T_i + T_i^\dagger) - 2\sum_{\{a\}} C_i C_i^\dagger] \tag{4.410}$$

である。

特に T moduli 部分に注目すると、

$$K_{non-diagT} = -\ln\det(T_{i\bar{j}} + T_{i\bar{j}}^\dagger) \tag{4.411}$$

となる。[21] 対角な moduli 場の場合は

$$K_{diagT} = -\sum_{i=1}^{3} \ln(T_i + T_i^\dagger) \tag{4.412}$$

となり、ここの結果と一致する。

ここまでの例では、U moduli 場が出て来ず、考慮していない。しかし U moduli 場が存在する時、その Kähler potential は次のものである。[21][23]

$$K_{diagU} = -\sum_{i=1}^{h(2,1)} \ln(U_i + U_i^\dagger) \tag{4.413}$$

ここで、$h(2,1)$ はorbifoldのホッジ数である。例えば、$Z_2\times Z_2$ orbifoldなら $h(2,1)=3$、Z_4 なら $h(2,1)=1$ である。これは次のように考えると良い。U moduliは、格子の形を決める自由度のある、Z_2 平面にのみ現れる。Table1,2を見ると分かるが、$Z_2\times Z_2$ なら全平面が、Z_4 なら第3平面が Z_2 平面になっている。それゆえ、$Z_2\times Z_2$ なら3つ、Z_4 なら第3平面に対応した1つの U moduli場が存在する。（この事が、orbifoldのホッジ数 $h(2,1)$ に対応している。）また、このKähler potentialは、$SL(2,\mathbf{Z})$ 不変性を理論に課しても出てくる。

また、特に対角的な可換orbifoldの場合かつ、U moduliが存在する時、Kähler potentialは次の通りである。

$$
\begin{aligned}
K_{diag} &= -\ln(S+S^\dagger) - \sum_{i=1}^{3}\ln[(T_i+T_i^\dagger)(U_i+U_i^\dagger) - 2\mathrm{tr}(X_i+Y_i^\dagger)(X_i^\dagger+Y_i)] \\
&\equiv -\ln(S+S^\dagger) - \sum_{i=1}^{3}\ln[(T_i+T_i^\dagger)(U_i+U_i^\dagger) - 2\mathrm{tr}\Phi_i\Phi_i^\dagger] \qquad (4.414)\\
&= -\ln(S+S^\dagger) - \sum_{i=1}^{3}[\ln(T_i+T_i^\dagger)+\ln(U_i+U_i^\dagger)] + 2\sum_i \frac{\mathrm{tr}\Phi_i\Phi_i^\dagger}{(T_i+T_i^\dagger)(U_i+U_i^\dagger)} + \ldots
\end{aligned}
$$

ただし、X_i, Y_i は複素スカラー場であり、

$$\Phi \equiv X_i + Y_i^\dagger \ , \ \mathrm{tr}\Phi_i\Phi_i^\dagger \equiv \sum_{\{a\}}\Phi_i\Phi_i^\dagger \tag{4.415}$$

とした。また、ここでは $Z_2\times Z_2$ を書いた。しかし U moduli場が存在しない場合、その寄与は適当に省かれるべきである。例えば一つの平面については、U moduli場が存在する場合、

$$K_i = -\ln[(T_i+T_i^\dagger)(U_i+U_i^\dagger) - 2\mathrm{tr}(X_i+Y_i^\dagger)(X_i^\dagger+Y_i)] \tag{4.416}$$

と書ける。また、U moduli場が存在しない平面の場合は

$$K_j = -\ln[(T_j+T_j^\dagger) - 2\mathrm{tr}X_jX_j^\dagger]] \ , \ i\neq j \tag{4.417}$$

と書ける。

ここで、untwisted matterの、U moduliが存在する場合のKähler potentialに注目すると

$$K_{diag}^{um(i)} \sim (T_i+T_i^\dagger)^{n^i}(U_i+U_i^\dagger)^{l^i}\mathrm{tr}\Phi_i\Phi_i^\dagger \ , \ n^i = l^i = -1 \tag{4.418}$$

の形になっている。この時、n^i, l^i をmodular weightという。つまり、untwisted matterはmodular weight -1 になる。このmodular weightは $SL(2,\mathbf{Z})^3\times SL(2,\mathbf{Z})^3$ 変換に対してどのように振る舞うか指定している。これは後で説明する。

ここで、一般的にuntwisted mattterの2次についてのKähler potentialを次のように書く。

$$K_{diag(2)}^{um} = \sum_{\alpha=1}^{3}\mathrm{tr}(\hat{\Phi}_\alpha\hat{\Phi}_\alpha^\dagger)\prod_{i=1}^{3}(T_i+T_i^\dagger)^{n_\alpha^i}\prod_{j=1}^{h(2,1)}(U_j+U_j^\dagger)^{l_\alpha^j} \tag{4.419}$$

ただし、

$$\sqrt{2}\Phi_\alpha = \hat{\Phi}_\alpha \ , \ n^i_\alpha = -\delta^i_\alpha \ , \ l^j_\alpha = -\delta^j_\alpha \tag{4.420}$$

である。（もちろん U moduli が存在しない平面の場合は、その寄与は無い。）

他にも前節で紹介した、$SL(2,\mathbf{Z})$ 対称性を理論に課しても、これらの Kähler potential は出すことができる。[22] また、N=2 共形場の理論（CFT）の vertex operator を使い、amplitude を計算し、その結果を、場の理論の一般的な Kähler potential と比べることにより、出すことも可能である。[19]

4.7.3 twisted sector

twisted sector の場は固定点近傍にしか住まない場である。それゆえ、前節のように 10 次元の低エネルギー有効理論から dimensional reduction によって 4 次元の有効理論を出すことは出来ない。よって、$N = 2$ CFT を使って計算するしかない。[19] 詳細は非常に複雑なので結果のみ、ここで上げておく。[23] （また、Wilson line が入った場合は、vertex operator の形が変化するので計算をやり直す必要がある。）

前節同様に、twisted matter の Kähler potential は次のように書ける。

$$K^{tm}_{diag} = \sum_\alpha \mathrm{tr}(\mathcal{T}_\alpha \mathcal{T}^\dagger_\alpha) \prod_{i=1}^{3} (T_i + T_i^\dagger)^{n^i_\alpha} \prod_{j=1}^{h(2,1)} (U_j + U_j^\dagger)^{l^j_\alpha} \tag{4.421}$$

ここで、α は twisted mattter の数だけ走る。

この時、modular weight に twist v^i $(i = 1, 2, 3)$ の寄与がある。（Z_3 orbifold なら $v = 1/3(1, 1, -2)$ である。）

$0 \le v^i < 1$, $\sum_{i=1}^{3} v^i = 1$ の時であれば、modular weight は次のようなものである。

$$n^i_\alpha = v^i - 1 \ , \ l^j_\alpha = v^j - 1 \ , \ \text{for} \ \ v^i \neq 0 \tag{4.422}$$

$$n^i_\alpha = l^j_\alpha = 0 \ , \ \text{for} \ \ v^i = 0 \tag{4.423}$$

（もし、$\sum_{i=1}^{3} v^i = 0$ の場合と結び付けたいならば、例えば、 $-2/3 \to 1/3$ と負の値に $+1$ すれば良い。）

例えば、Z_3 orbifold ならば、

$$n^i_\alpha = -\frac{2}{3} \tag{4.424}$$

である。（この場合には U moduli は存在しない。）

またさらに、excited state

$$\prod_{i=1}^{3}\prod_{j=1}^{3}\prod_{m_i}\prod_{n_j} (\beta^i_{m_i+v_i})^{p^i_m} (\bar{\beta}^j_{n_j-v_j})^{q^j_n} |\sigma\rangle \otimes |p^I_L + V^I\rangle \tag{4.425}$$

については次の通りである。

$$n^i_\alpha = v^i - 1 - p^i + q^i \ , \ l^j_\alpha = v^j - 1 + p^j - q^j \ , \ \text{for} \ \ v^i \neq 0 \tag{4.426}$$

$$n_\alpha^i = l_\alpha^j = 0 \ , \ \text{for} \ \ v^i = 0 \tag{4.427}$$

ここで、

$$p^i = \sum_m p_m^i \ , \ q^i = \sum_n q_n^i \tag{4.428}$$

である。ただし、U moduli が存在しない場合は、もちろん Kähler potential に U moduli の寄与はない。

4.7.4 modular weight

ここでは $SL(2,\mathbf{Z})$ 変換

$$T_i \to \frac{a_i T_i - i b_i}{i c_i T_i + d_i} \ , \ a_i d_i - b_i c_i = 1 \ , \ a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbf{Z} \ , i = 1,2,3 \tag{4.429}$$

$$U_i \to \frac{A_i U_i - i B_i}{i C_i U_i + D_i} \ , \ A_i D_i - B_i C_i = 1 \ , \ A_i, B_i, C_i, D_i \in \mathbf{Z} \ , i = 1,2,3 \tag{4.430}$$

についてコメントしておく。

ここでまず、T moduli 場にのみ注目する。(U moduli 場も全く同様である。)

$SL(2,\mathbf{Z})$ 変換に対して $T_i + T_i^\dagger$ は次のように変換する。

$$T_i + T_i^\dagger \to \frac{T_i + T_i^\dagger}{|i c_i T_i + d_i|^2} \tag{4.431}$$

それゆえ、この 1 つの i 方向の変換に対して、Kähler potential

$$\hat{K} = -\ln(S + S^\dagger) - \sum_{i=1}^{3} \ln(T_i + T_i^\dagger) \tag{4.432}$$

は次のように変換する。

$$\hat{K} \to \hat{K} + \ln |i c_i T_i + d_i|^2 \tag{4.433}$$

この時、この変換に対して Kähler メトリックは不変である。なぜなら、Kähler メトリックは、正則な量と、反正則な量で微分して作られるからである。また、この変換は通常の Kähler 変換になる事が後で分かる。

この時、次の Kähler potential を考える。

$$K = \hat{K} + \sum_A \mathrm{tr}(\Phi^A \Phi_A^\dagger) \prod_{i=1}^{3} (T_i + T_i^\dagger)^{n_A^i} \tag{4.434}$$

ここで、A は matter の数だけ足し上げている。

この時、$SL(2,\mathbf{Z})$ 変換に対して

$$\Phi^A \to \Phi^A (i c_i T_i + d_i)^{n_A^i} \tag{4.435}$$

と変換する時、式（4.434）の第2項は不変になる。この時にはKähler potentialが

$$K \to K + \ln |ic_iT_i + d_i|^2 \tag{4.436}$$

と変換することになる。

ここで、F-term scalar potential V_F は

$$V_F = e^G(G_A(G^{-1})^A{}_B G^B - 3) \tag{4.437}$$

と書ける。ここで、

$$G = K + \ln |W|^2\,,\, G_A = \frac{\partial G}{\partial \Phi^A}\,,\, G^A = \frac{\partial G}{\partial \Phi_A^\dagger}\,,\, G_A{}^B = \frac{\partial^2 G}{\partial \Phi^A \partial \Phi_B^\dagger} \tag{4.438}$$

であり、W はsuperpotentialである。そして、$(G^{-1})^A{}_B$ は $G_A{}^B$ の逆行列である。また、G はgeneralized Kähler potentialと呼ばれる。理論にはKähler potentialよりも、generalized Kähler potentialが直に入ってくる。それゆえ、$SL(2,\mathbf{Z})$ 変換に対して G 自体が不変でないといけない。このためには、superpotential W は次のように変換すべきである。

$$W \to W(ic_iT_i + d_i)^{-1} \tag{4.439}$$

よってこの時、式（4.436）（4.439）は、通常のKähler変換と同じである事が分かる。ここで、次のようなsuperpotential W を考える。

$$W = h_{ABC}(T_i)\Phi^A\Phi^B\Phi^C \tag{4.440}$$

するとこの時、$h_{ABC}(T_i)$ は次のように変換すべきである事が分かる。

$$h_{ABC}(T_i) \to h_{ABC}(T_i)(ic_iT_i + d_i)^{-(1+n^i_A+n^i_B+n^i_C)} \tag{4.441}$$

これによっても、twisted sectorのYukawa couplingのmuduli場依存性が分かる事になる。（untwisted sectorは $n^i_{A,B,C}$ のどれか1つは -1 なので、muduli場依存性が、実際に無い事と矛盾しない事が分かる。）

なお、ここまでは T moduliの $SL(2,\mathbf{Z})$ にのみ注目したが、U moduliの $SL(2,\mathbf{Z})$ に対しても全く同様である。（ここまでの議論で $T_i \to U_i$ とすれば良い。）

- 例（untwisted sector）

また、実際に式（4.391）を見ると

$$W_u = \frac{8}{\sqrt{3}} g_4' \epsilon^{ijk} \epsilon_{abc} d_{xyz} C_i^{a,x} C_j^{b,y} C_k^{c,z} \tag{4.442}$$

であった。（i,j,k は点群の $\mathbf{3}$ 表現の足である。）

それゆえ、$SL(2,\mathbf{Z})$ 変換に対して場が式（4.435）のように変換する時、

$$W_u \to W_u(ic_iT_i + d_i)^{-1} \tag{4.443}$$

と実際に変換される。（この時、各々の場のmodular weightは -1 である。）

4.8 dilaton と moduli の安定化

ここからは dilaton 場を含む、moduli 場の安定化（真空期待値の決定）について説明する。また、それに付随した SUSY breaking についても少し説明する。（一般的な soft term については、Appendix に載せてある。）もちろん、現在の世界には SUSY が無いので、hierarchy 問題が起らない程度の scale で、自発的に破れていなければならない。

まず、これらの場の期待値は、実際の gauge coupling、Yukawa coupling の値や compact 化の scale を決める。さらには gauge coupling unification にも、この値が関わってくる。しかし、moduli 場（dilaton 場を含む）は、SUSY があれば、摂動論的にはそれらを安定化させる superpotential を持ち得ない。（これは式（4.390）のラグランジアンを見れば明らかである。）例えば、実際に摂動論的には、dilaton S に、PQ symmetry

$$S \to S + i\lambda \ , \ \ \lambda \ : \ \mathrm{const} \tag{4.444}$$

や、moduli 場 T_i に $SL(2,\mathbf{Z})$ 変換対称性

$$T_i \to \frac{a_i T_i - ib_i}{ic_i T_i + d_i} \ , \ \ a_i d_i - b_i c_i = 1 \ , \ \ a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbf{Z} \ , \ i = 1,2,3 \tag{4.445}$$

があるのがいい証拠である。何故なら、それらの場の superpotential が摂動論的にも存在するならば、場の空間を並進させた時、一般的に superpotential が持ち上がるからである。これらのことからも摂動論的には、superpotential が無いことが分かる。

しかし、string 理論の摂動論の範囲内でも見ることのできる、何らかの効果（例・Scherk-Schwarz 機構）で SUSY が破れれば、量子効果で effective superpotential ができる。だが、非摂動効果の方が、1-loop の量子効果より一般的に大きいと考えられる。それゆえ、ここでは非摂動効果のみを考える。特にここでは、これらの場を安定化させる非摂動論的な superpotential が、hidden sector の gaugino condensation によって作られると考える事にする。（この時の hidden sector の gauge coupling は、dilaton 依存性を持たないものである。）

また、この時には、hidden sector の gaugino condensation の影響で、局所的な SUSY breaking が起る。（もちろん、global SUSY は F-term が期待値を持たない限り壊れない。）それゆえ、我々の標準模型の物質場が住む visible sector へは、重力場を通して SUSY breaking が伝わることになる。（gravity mediation）‡‡ そしてこの時、（Heterotic ,Type IIB orientifold 等）string 理論特有の、soft SUSY breaking term のスペクトルが見られる。また、今の場合、hidden sector の物質場は標準模型の物質場と、重力場を通してのみ相互作用している事になる。それゆえ、今の所観測されていない。またもちろん、hidden sector の物質は、string 理論の matter content に入っているものである。（例えば Heterotic orbifold の standard embedding の場合、hidden sector は壊れない E_8' の表現に属するものである。）

この gravity mediation の場合であれば、soft mass は

$$m_{soft} \sim \frac{\langle F_X \rangle}{m_{pl}} \tag{4.446}$$

‡‡もちろん他の、4 次元で可能な gauge mediation 等の可能性を考えても良いが、string 理論特有の興味深い結果は出ない。また、extra dimension を使った gaugino mediation[24]、anomaly mediation[25] 等は、既に 4 次元の理論に compact 化しているので、今の枠組みでは無理がある。

となる。ここで、F_X は dilaton 場、あるいは moduli 場の F-term である。また、$\langle F_X \rangle$ は次のように書ける。

$$\langle F_X \rangle \sim \frac{\Lambda^3}{m_{pl}} \tag{4.447}$$

ここで、Λ は hidden sector の gauge 相互作用の dynamical scale であり、一般的には複素数である。また、これは、running gauge coupling $g_A(\mu)$ を使って $1/g_A^2(|\Lambda|) \simeq 0$ となる scale である。それゆえ、この Λ は dimensional transmutation を使って書くこともできる。まず、$N=1$ SUSY がある時、hidden sector の（dilaton の期待値の入っていない）gauge coupling の 1-loop ベータ関数は

$$\beta(g_A) = \frac{b_A}{16\pi^2} g_A^3 \ , \ \ b_A = -3C_2(G_A) + \sum_i T(R_A^i) \ , \ \ |b_A| \gg 1 \tag{4.448}$$

と書ける。ここで、gauge coupling の漸近自由性より $b_A < 0$ である。なお、holomorphic coupling であれば、1-loop で exact である。[26] ここで、$C_2(G_A)$ は gauge 群の 2 次のカシミアである。そして、$T(R_A^i)$ は gauge 群の表現の dynkin index である。

この時、running holomorphic gauge coupling $g_A(\mu)$ は string scale の holomorphic coupling $\hat{g}_{st}$ を使って次のように書ける。（string の tree レベルでは $1/\hat{g}_{st}^2 = k_A \langle S \rangle$ である。）

$$\frac{16\pi^2}{g_A^2(\mu)} = \frac{16\pi^2}{\hat{g}_{st}^2} + b_A \ln(M_{st}^2/\mu^2) \tag{4.449}$$

このとき、$\mu = \Lambda$ とすると、

$$\Lambda \simeq M_{st} \exp(-8\pi^2/|b_A|\hat{g}_{st}^2) \simeq M_{st} \exp(-8\pi^2 k_A \langle S \rangle / |b_A|) \tag{4.450}$$

と書く事ができる。

また、この時、Λ は hidden sector の gaugino λ^a を使って、

$$\langle \lambda^a \lambda^b \rangle \simeq \Lambda^3 \delta^{ab} \neq 0 \tag{4.451}$$

と書く事ができる。（Λ は複素数である。）

この時、実際に moduli 場のスーパーパートナー（dilatino 等）ψ^A の局所 SUSY 変換をみると

$$\delta_\xi \psi^A = -\sqrt{2} e^{G/2} (G^{-1})^A{}_B G^B \xi(x) - \frac{1}{8} \frac{\partial f_{ab}}{\partial \Phi_B^\dagger} (G^{-1})^A{}_B \lambda^a \lambda^b \xi(x) + \dots \tag{4.452}$$

となっている。ここで、$\xi(x)$ は局所 SUSY 変換のパラメーターである。また、Φ^A は dilaton を含む moduli 場である。

それゆえ、$\partial f_{ab}/\partial \Phi_B^\dagger \neq 0$ であれば、

$$\langle \delta_\xi \psi^A \rangle \sim \langle \lambda^a \lambda^b \rangle \neq 0 \tag{4.453}$$

となって局所的な SUSY が破れることになる。

またこの時、hierarchy 問題の無いように、$m_{soft} \sim 1\text{TeV}$ のためには $|\Lambda| \sim 10^{13}\text{GeV}$ である。

4.8.1 gaugino condensation からの非摂動的 superpotential

ここでは、hidden sector における、dynamical scale$|\Lambda|$ 付近の強結合ゲージ理論を考える。また、この時は物質場は簡単のために考えないことにする。

glueball field

まず、global SUSY では gauge kinetic term は次のように書ける。

$$\mathcal{L}_{gk} = \frac{1}{4}\int d^2\theta f_{ab}(\Phi) W^{a\alpha} W^b_\alpha + \text{ h.c.} \tag{4.454}$$

ここで、W^a_α は superfield strength であり、$f_{ab}(\Phi)$ は gauge kinetic function である。そして Φ は、dilaton を含む gauge singlet な moduli 場である。

この強結合領域では、gaugino condensation

$$\langle \lambda^a \lambda^b \rangle \neq 0 \tag{4.455}$$

が起こる。それゆえ、強結合 gauge 理論では、一般的に、基本的な W^a_α で記述するよりも、gauge singlet な composite field である glueball field

$$U \equiv W^{a\alpha} W^a_\alpha \tag{4.456}$$

で記述した方が描像が良い。なお、U の lowest component field は、$\phi \equiv \lambda^a \lambda^a$ である。この時の U の kinetic term は

$$\mathcal{L}_k = \frac{9}{\gamma}\int d^4\theta (UU^\dagger)^{1/3} = \gamma^{-1}(\phi\phi^\dagger)^{-2/3}|\partial_\mu \phi|^2 + \ldots \tag{4.457}$$

となる。[27] ここで、γ は無次元の定数である。このような kinetic term ができるという事は、強結合の非摂動効果により、Kähler potential が変更を受けるという事である。この時の Kähler potential$K$ は、既に知っている U の寄与のない、摂動論の K^p に加えて、次のような変更がある。

$$K = K^p + K^{np} \tag{4.458}$$

$$K^{np} = -3\ln[1 + \frac{9}{\gamma} e^{K^p/3} (UU^\dagger)^{1/3} (S_0 S_0^\dagger)^{-1}] \tag{4.459}$$

ここで、S_0 は chiral compensator[28] である。また、例えば、通常の S_0 の選び方は Einstein-Hilbert 作用に

$$\mathcal{L}_g \supset (e^{-K/3} S_0 S_0^\dagger|_{\theta=\bar{\theta}=0}) R^{(4)} \tag{4.460}$$

と入るので、

$$e^{-K/3} S_0 S_0^\dagger|_{\theta=\bar{\theta}=0} = \frac{1}{16\pi G_N} = \frac{1}{2\kappa_4^2} \sim m_{pl}^2 \tag{4.461}$$

と決める。（ただし今の場合、dilaton の期待値が決まる前の重力 coupling は $\kappa_4' = 1$ としている。）それゆえ、Kähler potential への U の寄与は、plank mass の 2 乗で抑えられている事になると思って良い。後で、global SUSY limit （$m_{pl} \to \infty$）を取るので、この非摂動的 Kähler potential は結局効かない事が分かる。（そしてこの時は、解析自体は global SUSY のみ見れば良い。）

anomaly からの寄与

ここではanomaly の寄与を考えて、簡単のため、量子論的な effective superpotential を構成することを考える。[27] ここでは、holomorphic coupling g のベータ関数を使用する。ただし、holomorphic なベータ関数は

$$\beta(g)=\frac{b}{16\pi^2}g^3\ ,\ \ b=-3C_2(G_A)+\sum_i T(R_A^i)\quad |b|\gg 1 \tag{4.462}$$

となる。(holomorphic coupling の場合は 1-loop しかない。そして、gauge 場しか考えていない今は第 2 項の寄与はない。)

ここで考えるのは、この理論における composite field に対する chiral anomaly

$$\partial_\mu j_5^\mu=-\frac{\beta(g)}{2g^3}F_{\mu\nu}^a\tilde{F}^{a\mu\nu}=-\frac{b}{32\pi^2}F_{\mu\nu}^a\tilde{F}^{a\mu\nu} \tag{4.463}$$

そして、scale anomaly

$$\Theta^\mu{}_\mu=\frac{\beta(g)}{2g^3}F_{\mu\nu}^aF^{a\mu\nu}=\frac{b}{32\pi^2}F_{\mu\nu}^aF^{a\mu\nu} \tag{4.464}$$

を使う。ここで、$\Theta_{\mu\nu}$ は対称化された enegy-momentum tensor である。ただし、ここでの axial カレントは通常の QCD と定義を変更しており、通常の Adler-Bardeen の定理を満たさない。その anomaly の係数に、ベータ関数が来るようになっている。[27] また、暗にではあるが、superconformal anomaly $\gamma^\mu S_\mu=(\beta(g)/g^3)F_{\mu\nu}^a\sigma^{\mu\nu}\lambda^a$ も存在している。ここで、S_μ は super カレントである。この anomaly の存在が通常の QCD と違う点である。また、これら 3 つの anomaly で chiral supermultiplet を組んでいる事が知られている。[29] そう考えると、holomorphic coupling が anomaly に現れることは妥当であろう。(ここではこの superconfomal anomaly について扱わないが、以下の解析は、これも正しく含んでいる。[29])

また、これらの anomaly は、condensation の前後で共通に存在するはずである。

それを考慮したグランジアンは次のものである。

$$\mathcal{L}_a=\frac{-b}{96\pi^2}\int d^2\theta U\ln\left(\frac{cU}{S_0^3}\right)+\text{h.c.} \tag{4.465}$$

ここで、c は定数である。実際に、上式のラグランジアンを理論に加えることによって、tree レベルで anomalous Ward identity を満たす。それを簡単に見ることにする。まず、次の変換で chiral 変換を定義する。(実際に componet で見ると分かりやすい。)

$$U(x,\theta,\bar{\theta})\to e^{3i\alpha}U(x,e^{-3i\alpha/2}\theta,e^{3i\alpha/2}\bar{\theta}) \tag{4.466}$$

そして scale 変換を次で定義する。

$$U(x,\theta,\bar{\theta})\to e^{3\gamma}U(e^{-\gamma}x,e^{-\gamma/2}\theta,e^{-\gamma/2}\bar{\theta}) \tag{4.467}$$

簡単のため、$\ln U$ 部分の lowest componet ϕ を見ることにする。この時には、次のような項がある。

$$\mathcal{L}_a \supset \frac{-b}{96\pi^2} F_U \ln\phi + \text{h.c.} \tag{4.468}$$

ここで、F_U は U の F-term であり、元の場で書くと、

$$F_U = -\frac{1}{2} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} + \frac{i}{2} F^a_{\mu\nu} \tilde{F}^{a\mu\nu} \tag{4.469}$$

である。（ただし、gaugino に対しては運動方程式を使った。）そして、2 つの変換に対して

$$\ln\phi \to \ln\phi + 3i\alpha \ , \quad \ln\phi \to \ln\phi + 3\gamma \tag{4.470}$$

と変換する。この時に、式（4.465）のラグランジアンから各々の変換に対して

$$-i\alpha \frac{b}{32\pi^2}(F_U - F_U^\dagger) = \alpha \frac{b}{32\pi^2}(F^a_{\mu\nu}\tilde{F}^{a\mu\nu}) \tag{4.471}$$

$$-\gamma \frac{b}{32\pi^2}(F_U + F_U^\dagger) = \gamma \frac{b}{32\pi^2}(F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}) \tag{4.472}$$

の項が出る。よって、式（4.465）を理論に入れると、anomaly が正しく再現されることになる。
　ここで、gauge kinetic function が次の形をしているとする。

$$f_{ab}(\Phi) = f_G(\Phi)\delta_{ab} \tag{4.473}$$

すると gauge kinetic term は次のようになる。

$$\mathcal{L}_{gk} = \frac{1}{4}\int d^2\theta f_G(\Phi) U + \text{h.c.} \tag{4.474}$$

それゆえ、これと、anomaly の寄与を組み合わせると、非摂動的な effective superpotential

$$\tilde{W}^{np} = \frac{1}{4} f_G(\Phi) U - \frac{b}{96\pi^2} U \ln\left(\frac{cU}{S_0^3}\right) \tag{4.475}$$

が出来ることになる。（この形は Yankielowicz 型の superpotential である。[27]）

T-duality からの寄与

　またここで、理論には $SL(2,\mathbf{Z})$ T-duality

$$T_i \to \frac{a_i T_i - ib_i}{ic_i T_i + d_i} \ , \ \ a_i d_i - b_i c_i = 1 \ , \ \ a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbf{Z} \ , \ i = 1,2,3 \tag{4.476}$$

があった。ここで、この変換に対して前節の Kähler potential K^p は次のように変換した。

$$K^p \to K^p + \ln|ic_i T_i + d_i|^2 \tag{4.477}$$

そしてここで、Kähler potential K^{np} がこの変換に対して不変であることを要求する。すると、U/S_0 は modular weight -1 を持ち、次のように変換するべきである。

$$\frac{U}{S_0} \to \frac{U}{S_0}(ic_iT_i + d_i)^{-1} \tag{4.478}$$

するとこの時、generalized Kähler potential

$$G \equiv K + \ln |W/S_0^3|^2 \tag{4.479}$$

が不変のためには、W/S_0 は modular weight -1 を持つべきである。つまり、非摂動的な superpotential も T moduli 依存性を持つべきであることが分かる。

またここで、threshold correction（string の loop の寄与）を入れた、Kac-Moody レベルが 1 の、gauge kinetic function の正則な部分は次のように書ける。[30] （ただし、U moduli の寄与は考えていない。）

$$f_G(\Phi) = S - \frac{1}{8\pi^2}\sum_i (b_G^{i\prime} - \delta_{\rm GS}^i)\ln \eta^2(iT_i) \tag{4.480}$$

ここで、$\eta(iT)$ は dedekind 関数

$$\eta(iT) = e^{-\pi T/12}\prod_{n=1}^{\infty}(1 - e^{-2\pi T}) \tag{4.481}$$

である。また $\delta_{\rm GS}^i$ は T-duality と geuge 群と mixed anomaly に対する Green-Schwarz 係数である。（実は T-duality には、loop レベルで一般的に anomaly がある。しかし、string の loop レベルの寄与である threshold correction で、うまく打ち消すことができる。）そして $b_G^{i\prime}$ は、gauge 群と T-duality の mixed anomaly の係数

$$b_G^{i\prime} = -C_2(G) + \sum_\alpha T(R_G^\alpha)(1 + 2n_\alpha^i) \tag{4.482}$$

である。[30] ここで、$C_2(G), T(R_G^\alpha)$ は gauge 群に対する 2 次のカシミアであり、表現の dynkin index である。そして n_α^i はこの gauge 群に属する全ての matter の modular weight である。（ここで正則な部分のみを考えたのは、これから生成され得る superpotential を考えたいからである。）

そして T-duality に対し、dilaton は Green-Schwarz 機構により、1-loop レベルで

$$S \to S - \frac{1}{8\pi^2}\sum_i \delta_{\rm GS}^i \ln(ic_iT_i + d_i) \tag{4.483}$$

と変換を受ける。そしてまた、dedekind 関数は T-duality に対し、

$$\eta(iT_i) \to (ic_iT_i + d_i)^{1/2}\eta(iT_i) \tag{4.484}$$

と変換を受ける。

- coupling unification について

ここで、少し話がそれるが重要な事を言っておく。これまで見て分かるように、string の loop レベルでは、現実的な gauge coupling に T moduli 場依存性が現れることになる。また gauge kinetic function には、正則な寄与だけでなく、更に正則でない非局所的な寄与

$$f_G \supset -\frac{b_G^{i\prime}}{16\pi^2}\sum_i \ln(T_i + T_i^\dagger) \tag{4.485}$$

もある事が知られている。[30]（一般的に、正則でない部分のアノマリー（4.482）への寄与は、非局所的なラグランジアンから生成され得る。これは、その非局所的な部分の、string threshold correction を考慮した形である。実際にこれを加えると、正しい anomaly が生成され、さらに gauge coupling も不変になる。）

この時には、Kac-Moody レベルが 1 の時、

$$\begin{aligned} 1/g_{tree}^2 &= \mathrm{Re}S \quad \rightarrow \\ 1/g_{G\,loop}^2 &= \mathrm{Re}S - \frac{b_G^{i\prime}}{16\pi^2}\sum_i \ln(T_i + T_i^\dagger) - \frac{1}{16\pi^2}\sum_i (b_G^{i\prime} - \delta_{\mathrm{GS}}^i)\ln|\eta(iT_i)|^4 \end{aligned} \tag{4.486}$$

と変更を受ける。（もちろんこれ自体は、T-duality に対して不変な coupling である。）

ここで、T-duality に対して不変な場

$$Y \equiv S + S^\dagger - \sum_i \frac{\delta_{\mathrm{GS}}^i}{8\pi^2}\ln(T_i + T_i^\dagger) \tag{4.487}$$

を定義する。そして、T-duality に対して不変な、gauge 群に寄らない string scale の coupling を

$$\frac{1}{g_{st}^2} = \frac{Y}{2} \tag{4.488}$$

とする。すると、string scale の、gauge 群に寄る coupling（4.486）は次のように書ける。

$$\frac{16\pi^2}{g_G^2} = \frac{16\pi^2}{g_{st}^2} + \Delta_G(T_i)\ ,\ \ \Delta_G(T_i) = -\sum_i (b_G^{i\prime} - \delta_{\mathrm{GS}}^i)\ln(T_i + T_i^\dagger)|\eta(iT_i)|^4 \tag{4.489}$$

これによって、string scale の coupling が、gauge 群によってばらつきが出ることになる。よって、この時の running coupling は、

$$\frac{16\pi^2}{g_G^2(\mu)} = \frac{16\pi^2}{g_{st}^2} + \Delta_G(T_i) + b_G \ln(M_{st}^2/\mu^2) \tag{4.490}$$

となる。ゆえに、もし T が適当な期待値（overall moduli 場の時、$T \sim 20$ ただし、plank mass を 1 とする。）を持てば、繰り込み群で coupling を走らせたときに、GUT scale（$\sim 10^{16}$GeV）で coupling unification が起き得る事になる。[23] よって、compact 化の scale を決めるだけでなく、gauge coupling の値を決める上でも、T の期待値は重要である。

- 非摂動的な superpotential

話を元に戻して、gauge kinetic function の正則部分を、次のように書き直す。

$$f_G(\Phi) = \Sigma - \frac{1}{8\pi^2}\sum_i b_G^{i\prime} \ln \eta^2(iT_i)\,, \;\; \Sigma \equiv S + \frac{1}{8\pi^2}\sum_i \delta_{\mathrm{GS}}^i \ln \eta^2(iT_i) \tag{4.491}$$

この時、Σ は変換（4.483)、（4.484）に対して不変である。それゆえ、gauge kinetic function は

$$f_G(\Phi) \to f_G(\Phi) - \frac{1}{8\pi^2}\sum_i b_G^{i\prime} \ln(ic_iT_i + d_i) \tag{4.492}$$

と変換される。この時、式（4.475）の superpotential の定数部分を、

$$c \to c\prod_i \eta^{2n_i}(iT_i) \;\;,\;\; n_i = 1 - \frac{3b_G^{i\prime}}{b} \tag{4.493}$$

とすれば、実際に superpotential の modular weight が -1 になる。さらにこれが、iT_i の複素上半平面に pole を持たず、非物理的な 0 の値を取らない唯一のものであることが知られている。[31]

よって、T-dualiy を考慮した superpotential は

$$\begin{aligned} W^{np} &= \frac{1}{4}f_G(\Phi)U - \frac{b}{96\pi^2}U\ln\left(cU\prod_i \eta^{2n_i}(iT_i)/S_0^3\right) \\ &= \frac{1}{4}\Sigma U - \frac{b}{96\pi^2}U\ln\left(cU\prod_i \eta^{2}(iT_i)/S_0^3\right) \end{aligned} \tag{4.494}$$

となる。この場合は gaugino condensation が 1 つの gauge 群でのみ起ったが、一般的に、hidden sector に複数の gauge 群があると、複数の condensation が起る。hidden sector に p 個の condensation を起こす gauge 群がある時、この時の superpotential は

$$W^{np} = \sum_{n=1}^{p}\left[\frac{1}{4}\Sigma U_n - \frac{b_n}{96\pi^2}U_n\ln\left(c_nU_n\prod_i \eta^{2}(iT_i)/S_0^3\right)\right] \tag{4.495}$$

である。この superpotential は race track 模型で重要になる。[32] これを使って、dilaton を含む moduli 場の安定化を行う。さらにはどのような局所 SUSY breaking soft term が生じるのかも見たい。しかし、その詳細を見るには、effective F-term scalar potential を見なければいけない。（この時、moduli は gauge singlet なので、F-term scalar potential のみに寄与がある。）

4.8.2 effective potential

ここからは F-term scalar potential V_F を見ていく。

まず、F-term scalar potential V_F は

$$V_F = e^G(G_A(G^{-1})^A{}_B G^B - 3) \tag{4.496}$$

と書ける。ここで、

$$G = K + \ln|W|^2\,,\ G_A = \frac{\partial G}{\partial \Phi^A}\,,\ G^A = \frac{\partial G}{\partial \Phi_A^\dagger}\,,\ G_A{}^B = \frac{\partial^2 G}{\partial \Phi^A \partial \Phi_B^\dagger} \tag{4.497}$$

であり、W はsuperpotentialである。そして $(G^{-1})^A_{\ B}$ は $G_A{}^B$ の逆行列である。(もちろん、scalar componet のみを見ている。)そして、この時の scalar componet は dilaton (S)、moduli (T)、squark、slepton、Higgs (H_u、H_d) 等である。

ここで、簡単のため weak coupling limit ($1/g_{st}^2 \sim \langle \mathrm{Re}S \rangle \to \infty$) を考える。(これは string 理論の摂動論に対応している。) この極限は $K \sim -\ln(\mathrm{Re}S) \to -\infty$ となり、式 (4.461) より $m_{pl} \to \infty$ の global SUSY のみを考える極限にも対応している。なお、この時は非摂動的な Kähler potential (4.459) は効かない。ところで、global SUSY では F (or D) -term が期待値を持たない限り、SUSY は破れない。それゆえ、この極限では gaugino condensation が起っても、global SUSY の supersymmetric vacuum が残る事になる。

この極限 (global SUSY limit) の元で、実際にこの事を見る。まず、scalar potential V_F の最小値に注目したいので、これに対応する式 (4.494) の W^{np} の値を見つけると良い。この時、glueball field U_n に対しては、

$$\frac{\partial W^{np}}{\partial U_n} = 0 \tag{4.498}$$

を満たす U_n が scalar potential の最小値になる。何故ならば、global SUSY では glueball field の F-term が、 $F_{U_n}^\dagger = -\partial W^{np}/\partial U_n$ と書け、F-term scalar potential が $V_F^{global} = |F_{U_n}|^2$ と書けるからである。それゆえ、上式は global SUSY の $F_{U_n} = V_F^{global} = 0$ の最小値に対応している。(glueball field は gauge singlet なので、D-term の寄与はない。)

式 (4.498) を使って glueball field を積分すると、

$$\mathcal{U}_n(S, T_i) = \frac{\mu^3}{c_n e} e^{24\pi^3 \Sigma / b_n} \prod_i \eta^{-2}(iT_i) \tag{4.499}$$

となる。ここで、μ は compensator S_0 の lowest component であり、式 (4.461) より $\mu \sim m_{pl}$ である。(conformal supergravity の場合、gauge 固定でこの形にすることが可能である。)

ここで、式 (4.450) を考慮すると、この時に実際に

$$\langle \mathcal{U}_n(S, T_i) \rangle \sim \langle \lambda^a \lambda^a \rangle \sim m_{pl}^3 e^{-24\pi^3 \langle S \rangle / |b_n|} \sim \Lambda^3 \tag{4.500}$$

となる。そして式 (4.499) を (4.494) に代入すると次のようなものになる。

$$W_{tr}^{np} = \sum_n \frac{b_n}{96\pi^2} \mathcal{U}_n(S, T_i) \quad (\sim \Lambda^3) \tag{4.501}$$

この superpotential は weak coupling limit において、良い近似である。また、近似した非摂動的な effective superpotential を

$$W_{tr}^{np} = \frac{\Omega(\Sigma)}{\prod_i \eta^2(iT_i)}\ ,\ \ \Omega(\Sigma) \equiv \sum_n d_n e^{-24\pi^2 \Sigma / |b_n|}\ ,\ \ d_n = \frac{b_n \mu^3}{96\pi^2 c_n e} \tag{4.502}$$

と書く。この時に、これがmodular weight -1 を持っていることが良く分かる。

ここで、現象論的に、string scale（$\sim 10^{17}$ GeV）の物理的なgauge coupling（g_{st}）の値を、GUT scale（$\sim 10^{16}$ GeV）の値で近似すると、

$$\alpha_{st} = \frac{g_{st}^2}{4\pi} \simeq \frac{1}{4\pi\langle \mathrm{Re}S\rangle} \sim \frac{1}{24} \to \langle \mathrm{Re}S\rangle \sim 2 \tag{4.503}$$

となる。この $\langle \mathrm{Re}S\rangle \sim 2$ はそれほど大きい値ではない。それゆえ、上記のsuperpotentialが良い近似になっているかどうかが気になる。しかしここで、違った観点で次の事を考える。まず、glueball fieldを積分する前にもhierachy問題が無いためには、次式が成り立つべきである。

$$\frac{m_{soft}^2}{m_{pl}^2} \sim \frac{|\Lambda|^6}{m_{pl}^6} \sim \sum_n \frac{|\langle U_n\rangle|^2}{|\mu|^6} \ll 1 \tag{4.504}$$

この（4.504）の条件の元で、（4.459）のKähler potential、（4.495）のsuperpotentialでoverall moduli T、$\delta_{\mathrm{GS}}^i = 0$ を使って、full effective scalar potentialの計算はされている。[33] この時は、full effective scalar potential V_{full} が停留点を取る条件 $\partial V_{full}/\partial\phi_n = 0$ から、式（4.499）が出る。（ただし、$\phi_n \subset U_n$ である。）つまり、この領域はglobal SUSY limitに対応している。

そうすると、この時に U_n の積分後も

$$\sum_n \frac{|\langle \mathcal{U}_n(S,T_i)\rangle|^2}{|\mu|^6} \ll 1 \tag{4.505}$$

が成り立つべきである。このためには次式が成り立てば良い。

$$\langle \mathrm{Re}S\rangle > \frac{|b_n|}{24\pi^2} \tag{4.506}$$

つまり、現実的には $\langle \mathrm{Re}S\rangle \sim \infty$ とならなくても、上式を満たせば十分良い近似になっていることになる。つまり、$\langle \mathrm{Re}S\rangle \sim 2$ で、十分良い近似となり得る。そしてこの領域では、global SUSYと見て近似する事が可能である。すると同時に、Kähler potentialも（4.459）の非摂動な部分は、この領域ではplank mass order（$m_{pl} \to \infty$）で十分に抑えられて、摂動論的な部分のみで近似することができると考えられる。

4.8.3 例： pure gauge hidden sector

ここでは、hidden sectorがgauge場だけの時を考える。

T-dualityに対してanomalyがある時は、string理論の1loopで、dilatonが

$$S \to S - \frac{1}{8\pi^2}\sum_i \delta_{\mathrm{GS}}^i \ln(ic_iT_i + d_i) \tag{4.507}$$

と変換を受ける。このため、Kähler potentialがmodular covariantのためには、実はdilaton部分にstring理論の1-loopで変更がある。それは次のようなものである。

$$K^p = -\ln Y - \sum_i \ln(T_i + T_i^\dagger) \tag{4.508}$$

$$Y = \Sigma + \Sigma^\dagger - \frac{1}{8\pi^2}\sum_i \delta^i_{\rm GS}\ln(T_i + T_i^\dagger)|\eta(iT_i)|^4 \tag{4.509}$$

この Kähler potential と、前節で出した U を積分した非摂動的な superpotential （4.502）を使って、F-term effectiv scalar potential V_{eff} を出す。この時、visible sector の物質場の Kähler potential や coupling の中に、moduli 場依存性があるが、結局 visible sector は、電弱相互作用のスケールの期待値しか持たないはずなので、その寄与は小さい。（むしろ、現象論的には、大きな期待値を持たない場を visible sector の場とする。それゆえ、その寄与を入れても、大きな期待値を持ったものは hidden sector の物質場と解釈され得る。）ゆえに visible sector の物質場の寄与は考えない。その hidden sector に物質場をいれた場合は、次に考える。

話を戻して、scalar potential は次の通りである。

$$\begin{aligned} V_{eff} = Y^{-1}\prod_i (T+T^\dagger)^{-1}|\eta(iT_i)|^{-4}[\,|\Omega - Y\Omega_\Sigma|^2 - 3|\Omega|^2 \\ + \sum_i \frac{Y}{Y-(1/8\pi^2)\delta^i_{\rm GS}}\left|\Omega - \frac{\delta^i_{\rm GS}}{8\pi^2}\Omega\right|^2 (T+T^\dagger)^2|\hat{G}^i|^2\,], \\ \hat{G}^i = (T+T^\dagger)^{-1} + 2\eta^{-1}(iT_i)\frac{d\eta}{dT_i},\ \ \Omega_\Sigma = \frac{d\Omega}{d\Sigma} \end{aligned} \tag{4.510}$$

ここで、$\hat{G}$ は Eisenstein 関数と呼ばれるものである。この effective potential が dilaton 場を含む moduli 場の期待値を決めるはずであるが、一般的には現実的な値を出さない。特に dilaton を固定し、overall moduli T で解析はされている。[35] この時には、Eisenstein 関数 $(\hat{G})$ の、modular 変換に対する固定点 （$T = 1, e^{i\pi/6}$）近くの値 $T \sim 1.23$ で常に安定化されてしまう。

また、condensation が 1 つの時、dilaton が有限の値では安定化されない。実際にそれを見ていくことにする。まず、dilaton に対する、effective scalar potential の停留点の条件は

$$\frac{\partial V_{eff}}{\partial \Sigma} = 0 \tag{4.511}$$

である。この時、次式が満たされる Σ の値が停留点である。

$$\begin{aligned} (\Omega - Y\Omega_\Sigma)\left[2\Omega^\dagger - \textstyle\sum_i \frac{Y^2}{(Y-d_i)^2}(T_i+T_i^\dagger)^2|\hat{G}^i|^2(\Omega^\dagger - d_i\Omega^\dagger_{\Sigma^\dagger})\right] - Y^2\Omega_{\Sigma\Sigma}(\Omega^\dagger - Y\Omega^\dagger_{\Sigma^\dagger}) \\ = Y^2\Omega_{\Sigma\Sigma}\sum_i \frac{d_i}{Y-d_i}(T_i+T_i^\dagger)^2|\hat{G}^i|^2(\Omega^\dagger - d_i\Omega^\dagger_{\Sigma^\dagger}) \\ d_i \equiv \frac{\delta^i_{\rm GS}}{8\pi^2}\ ,\ \ \Omega_{\Sigma\Sigma} \equiv \frac{d^2\Omega}{d\Sigma^2} \end{aligned} \tag{4.512}$$

ここで簡単のため、$\delta^i_{\rm GS} = 0\,(Y = 2{\rm Re}\Sigma = 2{\rm Re}S)$ の時を考える。

この時、上式の条件式が

$$(2-\tilde{G})(\Omega - Y\Omega_\Sigma)\Omega^\dagger = Y^2\Omega_{\Sigma\Sigma}(\Omega^\dagger - Y\Omega^\dagger_{\Sigma^\dagger}) \tag{4.513}$$

となる。ここで、

$$\tilde{G} \equiv \sum_i (T_i + T_i^\dagger)^2|\hat{G}^i|^2 \tag{4.514}$$

である。これは、次の時にも満たされる。

$$\Omega - Y\Omega_{\Sigma} = 0 \tag{4.515}$$

これは、dilaton の F-term が 0 になっている条件に対応している。この時に解が物理的な値（例 : $\langle \mathrm{Re}S \rangle > 0$）を満たす時、それは極小値に対応する。そして、これ以外の解は決して極小値にならない事が知られている。[32]

それを例を挙げて見ていく。

- 例 1 single condensate

この時

$$\Omega(\Sigma) = de^{-\Delta\Sigma},\ \Delta = \frac{24\pi^2}{b} > 0 \tag{4.516}$$

この時、条件（4.515）より、

$$Y = -\Delta < 0 \tag{4.517}$$

となり、非物理的である。また、式（4.512）より $Y > 0$ の次の解もある。

$$Y = \frac{\sqrt{2 - \tilde{G}}}{\Delta} \tag{4.518}$$

この時、この effective scalar potential を Y の関数だとすると次式になる。

$$V_{eff}(Y) \propto \frac{e^{-\Delta Y}}{Y}[(1 + \Delta Y)^2 - 3 + \tilde{G}] \tag{4.519}$$

よって、$2 > \tilde{G}$ の時、極大値が $Y = \sqrt{2 - \tilde{G}}/\Delta$ で存在することになる。ゆえに dilaton はこの時、安定化されない。

また。$2 < \tilde{G}$ の時、$Y > 0$ で極値は存在せず、$\mathrm{Re}S \to 0$ となり、安定化はされない事になる。ただし、ここでは T moduli は何らかの機構で安定化されていると考えた。

- 例 2 double condensates（race track 模型 [32]）

ここでは、2 つの hidden gauge 群で condensation が起こると仮定する。（2 つ以上でも原理は同じである。）そして、ここも同様に T moduli は何らかの機構で安定化されていると考える。

ここで、

$$\Omega(\Sigma) = \sum_{n=1}^{2} d_n e^{-\Delta_n \Sigma} \tag{4.520}$$

である。この時に式（4.515）を満たせば良い。すると、これは

$$[(\Sigma + \Sigma^{\dagger})\Delta_1 + 1]d_1 e^{-\Delta_1\Sigma} + [(\Sigma + \Sigma^{\dagger})\Delta_2 + 1]d_2 e^{-\Delta_2\Sigma} = 0 \tag{4.521}$$

を満たせば良いことになる。ここで、$\Sigma = \mathrm{Re}\Sigma + i\mathrm{Im}\Sigma$ のように実部と虚部に分ける。すると、虚部については、符合が反対であるべきなので

$$\exp(i(\Delta_1 - \Delta_2)\mathrm{Im}\Sigma) = -1 \tag{4.522}$$

とすると、

$$\mathrm{Im}\Sigma = \frac{(2n+1)\pi}{\Delta_1 - \Delta_2} \ , n \in \mathbf{Z} \tag{4.523}$$

になる。この時は、

$$\frac{(1+2\Delta_1 \mathrm{Re}\Sigma)d_1}{(1+2\Delta_2 \mathrm{Re}\Sigma)d_2} = e^{\mathrm{Re}\Sigma(\Delta_1 - \Delta_2)} \tag{4.524}$$

を満たせば良い。よって、

$$\mathrm{Re}\Sigma = \frac{1}{\Delta_1 - \Delta_2} \ln\left[\frac{(1+2\Delta_1 \mathrm{Re}\Sigma)d_1}{(1+2\Delta_2 \mathrm{Re}\Sigma)d_2}\right] \tag{4.525}$$

である。特に、dilaton の現実的な値は

$$\Delta_n \mathrm{Re}\Sigma \gg 1 \tag{4.526}$$

であるので、この時には

$$\mathrm{Re}\Sigma \simeq \frac{1}{\Delta_1 - \Delta_2} \ln\left[\frac{\Delta_1 d_1}{\Delta_2 d_2}\right] \tag{4.527}$$

となる。この領域の dilaton の値は、global SUSY limit に対応しており、dilaton の F-term がゼロになっている事に対応している。

例えば gauge 群がそれぞれ $SU(N_1), SU(N_2)$ とする。この時、

$$\Delta_n = \frac{24\pi^2}{3N_n} = \frac{8\pi^2}{N_n} \tag{4.528}$$

である。そして、

$$N_1 = 3\,,\ N_2 = 4 \rightarrow \Delta_1 \simeq 26\,,\ \Delta_2 \simeq 20\,,\ \frac{d_1}{d_2} \simeq 3 \tag{4.529}$$

とする。この時、式（4.527）に代入すると、

$$\mathrm{Re}\Sigma \simeq 0.23 \tag{4.530}$$

の値になる。この時には $\Delta_1 \mathrm{Re}\Sigma \simeq 6\,,\ \Delta_2 \mathrm{Re}\Sigma \simeq 5$ となり、式（4.525）と比べてみると、実際に良い近似になっている事が確かめられる。また、極小値になっているかどうかを調べる。ここで極値では、

$$V_{eff\,\Sigma\Sigma^\dagger} \propto \frac{[(\Sigma+\Sigma^\dagger)^2|\Omega_{\Sigma\Sigma^\dagger}|^2 - 2|\Omega_\Sigma|^2]}{(\Sigma+\Sigma^\dagger)} \tag{4.531}$$

$$V_{eff\,\Sigma\Sigma} \propto -\frac{\Omega_{\Sigma\Sigma}\Omega^\dagger}{(\Sigma+\Sigma^\dagger)} \tag{4.532}$$

が成り立つことに注意する。（省かれた係数は、moduli 場依存性である。）これらを使うと、この値の時には

$$V_{eff\,\Sigma\Sigma^\dagger} + V_{eff\,\Sigma\Sigma} + V_{eff\,\Sigma^\dagger\Sigma^\dagger} \simeq 4.8 > 0 \tag{4.533}$$

と極小値になっている。（ただし moduli 場依存性は除く。）問題は、この値が gauge coupling unification があると思ったときの、string scale 付近の値 （Re$\Sigma \simeq 2$）に程遠いことである。ReΣ の値を $\mathcal{O}(1)$ で出そうと思えば、Δ がある程度大きい必要がある。（hidden sector の gauge 群が、E_8 に入りきらない程大きい必要がある。）あるいは Δ_i 同士の値を近くする fine tuning が必要である。それゆえ、もし、gauge coupling unification があるならば、これの他にも、moduli 場の寄与を含む、様々な threshold correction があると思われる。

4.8.4　例： hidden sector with matter

ここでは、hidden sector に物質場がある時を考える。物質場として、ある gauge 群 G の基本表現の物質場 Q^i_m、そして、反基本表現の物質場 $\bar{Q}_{mi}$ がある時を考える。ここで、i は G の（反）基本表現の足であり、m（$=1\sim M$）は flavor の足である。また簡単のため、gauge 群は単純群とし、これらの物質場は、この 1 つの gauge 群にのみ電荷を持っているとする。（そしてこれは、gaugino condensation が 1 つの gauge 群でのみ起ると仮定することと同じである。）

ここで、gaugge singlet な場 A_m を使い、摂動論的に次のような 3 点 superpotential が書ける。

$$W^p = \sum_{i,m} h_m(T_i) A_m Q^i_m \bar{Q}_{mi} \tag{4.534}$$

（ここで、$\langle A_m \rangle \neq 0$ であれば mass term $m_m = h_m(T_i)\langle A_m \rangle$ ができる。）もちろん、ここではこの superpotential は modular weight -1 を持っていると仮定している。（$h_m(T_i$ にも non-trivial な moduli 場依存性がある。）

ここで、前節と同様に、強結合 gauge 理論では物質場の方も基本場で理論を記述するよりも、gauge singlet な composite field （meson 場）で理論を記述したほうが、描像が良い。それを次式で定義する。

$$V_m \equiv \sum_i Q^i_m \bar{Q}_{mi} \tag{4.535}$$

この時は hidden sector に次の大局的対称性がある。

$$SU(M)_{diag} \times U(1)_V \times U(1)_A \times U(1)_R \tag{4.536}$$

(今は、superpotential（4.534）の形のせいで上記の対称性になっている。しかし、更に一般的に、例えば、$SU(M)_L \times SU(M)_R \times U(1)_V \times U(1)_A \times U(1)_R$ の大局的対称性がある理論を考えることも可能である。また、大局的対称性が分かると、これだけで非摂動的な effective superpotential が分かることが知られている。[36] しかし、ここではそれを用いないことにする。）

この時に、これらに対する anomaly を見ることにする。まず、$U(1)_A$ に対しては式（4.466）に加えて、

$$V_m(x,\theta,\bar{\theta}) \to e^{2i\alpha} V_m(x, e^{-3i\alpha/2}\theta, e^{3i\alpha/2}\bar{\theta}) \tag{4.537}$$

と変換するとする。（これは component でみると、chiral 変換になっている。）そして、$U(1)_R$ に対しては、次のように変換するとする。

$$\begin{aligned} &U(x,\theta,\bar{\theta}) \to U(x,\theta,\bar{\theta}) \\ &V_m(x,\theta,\bar{\theta}) \to e^{2i\beta} V_m(x,\theta,\bar{\theta}) \end{aligned} \tag{4.538}$$

この時、これらの変換にはもちろん anomaly がある。$U(1)_A$ に対しては変換に対して、次の項が経路積分の測度から生成される。

$$\delta_A \mathcal{L} = \alpha \frac{b}{32\pi^2} F^a_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu a} \tag{4.539}$$

ここで、b は 1-loop ベータ関数の係数である。そして、また $U(1)_R$ に対しては、次の項が生成される。

$$\delta_R \mathcal{L} = 2\beta \frac{c}{32\pi^2} F^a_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu a} \quad c = 2\sum_m T(R_m) = 2MT(R_m) \tag{4.540}$$

そしてここで、U/S_0^3 は modular weight -1、V/S_0^2 は、前と同様に考えて、運動項

$$\mathcal{L} = \text{const.} \int d^4\theta (VV^\dagger)^{1/2} \tag{4.541}$$

を持っているので、次の Kähler potential を持つ。

$$K^V = -3 \ln(1 + \text{const.} \times e^{K^p/3} (VV^\dagger)^{1/2} (S_0 S_0^\dagger)^{-1}) \tag{4.542}$$

（ただし前と同様に、この Kähler potential は、ここで行う近似の元では効かないと考える。）よってこの時、T-duality に対して

$$K^p \to K^p + \ln |ic_i T_i + d_i|^2 \tag{4.543}$$

であるから、Kähler potential が不変のためには、V/S_0 は modular weight $-2/3$ を持つ。

　そして、anomalous Ward 恒等式を満し、modular weight が -1 の非摂動的 super potential は次のようなものである。

$$W^{np} = \frac{1}{4} U\Sigma - \frac{b}{96\pi^2} U \ln \left[f U^{1+2c/b} \prod_m V_m^{-6T(R)/b} \prod_i \eta^2(iT_i)/S_0^3 \right] + \sum_m h_m(T_i) A_m V_m \tag{4.544}$$

ここで、f は定数である。そして、前節と同様に

$$\frac{\partial W^{np}}{\partial U} = \frac{\partial W^{np}}{\partial V_m} = 0 \tag{4.545}$$

と場を積分する。（ただし、hidden sector に gauge 場しか無い時に比べて、正当性は幾分不明瞭である。しかし、[36] と比べても、大局的対称性の要求から出てくる superpotential とほぼ一致していることが分かる。）すると次式になる。

$$\mathcal{V}_m = \frac{2T(R)\mathcal{U}}{32\pi^2 h_m(T_i) A_m} \tag{4.546}$$

$$\frac{2T(R)\mathcal{U}}{32\pi^2} = \mu^3 \left(\frac{32\pi^2 e}{2T(R)}\right)^{-b+(b+2c)/c} e^{24\pi^2\Sigma/(c-b)} \left[f \prod_i \eta^2(iT_i) \prod_m \{h_m(T_i)A_m\}^{6T(R)/b} \right]^{-b/(b-c)} \tag{4.547}$$

$$W_{tr}^{np} = \frac{b-c}{96\pi^2}\mathcal{U} \tag{4.548}$$

ただし、S, T_i を使って書いた V_m, U を $\mathcal{V}_m, \mathcal{U}$ とした。また、更に一般的に

$$W = \sum_{i,m} h_m(T_i)A_m Q_m^i \bar{Q}_{mi} \to \sum_{i,m,\alpha} h_{\alpha mn}(T_i)A_\alpha Q_m^i \bar{Q}_{ni} \tag{4.549}$$

と摂動的な superpotential を置き換えると、

$$\prod_m h_m(T_i)A_m \to \det M \quad , \quad M_{mn} \equiv \sum_\alpha h_{\alpha mn}(T_i)A_\alpha \tag{4.550}$$

となる。ここで、上式より

$$\det M \propto (\det \mathcal{V})^{-1} = (\det Q_m \bar{Q}_n)^{-1} \tag{4.551}$$

を考慮すると、まさにこれは、Affleck-Dine-Seiberg 型の superpotential [37] になっている事が分かる。

そしてまた、物質場の Kähler potential は一般に次のように書ける。

$$K_{matter} = \sum_\alpha |\phi_\alpha|^2 \prod_i (T_i + T_i^\dagger)^{n_\alpha^i} \tag{4.552}$$

ここで n_α^i は modular weight である。

ここでは簡単のため、ovarrall moduli T（$= T_1 = T_2 = T_3$）を使う。さらに gauge singlet matter A は untwisted matter （$n_\alpha^i = -1$）とし、flavor は 1 つとする。

この時に考えるべき Kähler potential は次のものである。

$$K = -\ln(S + S^\dagger) - 3\ln(T + T^\dagger - |A|^2) \tag{4.553}$$

するとこの時、F-term effective scalar potential は次のように書ける。

$$\begin{aligned} V_{eff} = (S+S^\dagger)^{-1}(T+T^\dagger-|A|^2)^{-3} [\ & |(S+S^\dagger)W_S - W|^2 \\ & + \frac{1}{3}(T+T^\dagger-|A|^2)|W_A + A^\dagger W_T|^2 \\ & + \frac{1}{3}(T+T^\dagger-|A|^2)^2 \left| W_T - 3\frac{W}{T+T^\dagger-|A|^2} \right|^2 - 3|W|^2\ ] \end{aligned} \tag{4.554}$$

なお、下の添字は場による微分を意味する。ここで、superpotential

$$W_{tr}^{np} \propto \left[\frac{e^{24\pi^2\Sigma}}{\eta^6(iT)A^{3c}} \right]^{1/(b-c)} \tag{4.555}$$

の形を使うと、次のように scalar potential を書き直すことができる。

$$V_{eff}=\tfrac{1}{3}|W|^2(S+S^\dagger)^{-1}(1-|\tilde{A}|^2)^{-2}\{\ 3(1-|\tilde{A}|^2)^{-1}|f_S|^2 + \left(\frac{3c}{b-c}\right)^2|\tilde{A}|^{-2}+\left(\frac{3c}{b-c}\right)^2[|\hat{G}(T+T^\dagger)|^2-1]\ \} \tag{4.556}$$

ここで、$\hat{G}$ は前に定義した Eisenstein 関数であり、

$$|\tilde{A}|^2\equiv\frac{|A|^2}{T+T^\dagger}\ ,\ \ f_S\equiv 1-(S+S^\dagger)\frac{W_S}{W} \tag{4.557}$$

である。この時、前と同様に、1 つの gaugino condensation では dilaton や f_S の値が有限の値で固定されない。よって、他の機構で固定されていると考える。[34] これらは、完全なフリーパラメーターとして考える。そして、T の安定化については、$b, c, (f_S)$ のフリーパラメーターの値次第で、どうなるか決まることになる。

まず、$b+2c<0$（potential に A の巾級数が分母に入る）の時、前と同様に、この scalar potential が T-duality に対して不変であることから、Eisenstein 関数の固定点である $T\sim 1$ で安定化してしまう。つまり、plank scale で compact 化されていることになる。（今の場合、plank mass はオーダー 1 になる。）そしてまた、この時、V_{eff} は non-trivial な $\langle\tilde{A}\rangle\neq 0$ の最小値を持つ。つまり、hidden sector 物質場が質量を持つことになる。さらにこの時には、superpotential も有限の値を持つようになり、その A 微分（F-term）も有限の値を持つことになる。よって、local SUSY は破れることになる。（また、この場合は f_S の fine tuning によって宇宙項をゼロにすることが可能である。）

そして $b+2c>0$ の時、（potential に A の巾級数が分子にのみ入る場合、つまりは通常の摂動論的な potential になる時）この時には $\tilde{A}=V_{eff}=0$ の最小値が存在する事が分かる。よって、この時、F-term は 0 になり、local SUSY は破れない事になる。そして、hiddensector の物質場の質量は生成されない。さらには、他の場の期待値が決まらなくなってしまう。つまりは compact 化の scale が決まらなくなる。

また、物質場を入れて race-track 模型も考えられたが、[32] 安定化はするものの、真の最小値ではない等の問題がある。

また、gauge coupling が弱くなる高エネルギーでは、非摂動的な superpotential は生成されず、一般的に $\langle\tilde{A}\rangle=0$ となってしまう。（これは $b+2c>0$ の時と同様である。）つまり、摂動論的になる高エネルギーでは、場の期待値が消えてしまう（無視できる）ので、結局 $\langle\tilde{A}\rangle\neq 0$ でも、$\langle\tilde{A}\rangle\ll m_{pl}(\sim 1)$ と予想できる。そうすると、式（4.556）の中で主な寄与をするのは、A の次数が一番小さい W_A の項である。それは次の部分である。

$$V_{eff}\sim\frac{1}{3}(S+S^\dagger)^{-1}(T+T^\dagger)^{-2}|W_A|^2 \tag{4.558}$$

そう思うと、この時、この scalar potential は $W_A=0$ で最小値を持つ。しかし、gaugino condensation の寄与が 1 つで、式（4.555）の形の superpotential ではこの条件を満たさない。そこで、簡単のため、次の 3 点 renormalizable superpotential をさらに加える事にする。

$$W^p=A^3 \tag{4.559}$$

すると、この時、

$$W_A = 0 \to A^3 = \frac{c\mathcal{U}}{96\pi^2} \tag{4.560}$$

となる。これを A について解くと

$$A \propto \frac{e^{8\pi^2\Sigma}}{\eta^2(iT)} \tag{4.561}$$

となる。これを式（4.555）に代入すると次式になる。

$$W^{np} \propto \frac{e^{-\Delta\Sigma}}{\eta^6(iT)} \ , \ \ \Delta = \frac{24\pi^2}{|b|} \ , \ \ |b| = 3C_2(G_A) - \sum_i T(R_A^i) \tag{4.562}$$

結局、pure gauge の場合と同じような結果になる。

特に、この hidden sector に物質場がある場合に、2 つの condensation がある場合は解析されている。[46] この時は、前と同様、T moduli 場は $T \sim 1.23$ となる。ただし今の場合、hidden sector に物質場が入った分 Δ を幅広く自由に動かせるようになり、$\langle \mathrm{Re}S \rangle \sim 2$ に近い値も出る。[32] また、ここまで pure gauge の場合も、物質場がある場合も、簡単のため $\delta^i_{\mathrm{GS}} = 0$ と置いたが、$\delta^i_{\mathrm{GS}} \neq 0$ の場合も解析されている。[32]

4.8.5 その他の例

他にも、例えば dilaton の Kähler potential を

$$K^p = -\ln(S+S^\dagger) \to K^{p+np} = \ln\left(\frac{1}{S+S^\dagger} + \exp(d(S+S^\dagger)^{p/2} e^{-\Delta(S+S^\dagger)^{1/2}})\right) \ , \ p, \Delta > 0 \tag{4.563}$$

のように、anzatz をおいて Kähler potential に非摂動的な効果を加える。そして、この Kähler potential をこれまでの代わりに用い、dilaton の安定化を行う方法もある。[38]

また、TypeIIB orientifold 理論の枠組みにおいて、dilaton に対する $SL(2,\mathbf{Z})$ S-duality 対称性を理論に課す。そうすると、

$$W^{np} \sim \eta^{-2}(iS)[j(iS) - 744] \tag{4.564}$$

のような非摂動的な effective superpotential が作られる。ここで、$j(iS)$ はある $SL(2,\mathbf{Z})$ 不変な dilaton の関数である。これを用いて dilaton の安定化を行う方法もある。[39]

5 Type IIB orientifold 模型

ここでは、T^6/Z_N orientifold compact 化した TypeIIB 理論を考える。ここでは、4 次元に compact 化された際、$N=1$ SUSY が残るとして話を進めていく。[40]

Type IIB orientifold 模型の場合、Heterotic string 理論と大きく違うのは、D-brane が存在する事である。D-brane が存在すれば、その上で開弦を元にした gauge 場が存在し、gauge 群が

存在することになる。例えば、D-brane が N 枚重なると、どの D-brane に開弦の端が固定されるか、という開弦の両端の自由度が存在することになる。つまりは、片方の端について N 自由度あるので、両端で $N \times N = N^2$ 自由度あり、$U(N)$ gauge 対称性が現れることになる。この開弦の足の自由度の波動関数は、Chan-Paton 因子と呼ばれる。[3] また、この Chan-Paton 因子は gauge 群の生成子に対応している。ここで、世界面上のパリティー変換不変性を課す事を考える。gauge 場は

$$\alpha_{-1}|ij\rangle\lambda^a_{ij}\ ,\ \ i,j = 1 \sim n\ ,\ \ a = 1 \sim \text{number of dimension of gauge group} \tag{5.1}$$

と書かれる。ここで、α_{-1} は開弦の振動子、i,j は開弦の端の自由度である。そして、λ^a_{ij} が Chan-Paton 因子である。また、世界面上のパリティー変換 Ω に対して開弦の状態は、向きを変えるので Ω の作用に対して

$$\Omega : |ij\rangle \to |ji\rangle \tag{5.2}$$

となる。よって、gauge 場の状態は

$$\Omega : \alpha_{-1}|ij\rangle\lambda^a_{ij} \to -\alpha_{-1}|ji\rangle\lambda^a_{ij} \tag{5.3}$$

となる。よって、gauge 場の状態の Chan-Paton 因子は、

$$\lambda^a_{ij} = -\lambda^a_{ji} \tag{5.4}$$

の i,j に対して反対称なものしか理論には残らない。そして、その Chan-Paton 因子の独立な数は $n(n-1)/2$ となり、$SO(n)$ gauge 群が理論に残ることになる。また、更に世界面上のパリティー変換を一般化すると、$Sp(n/2)$（$n \in 2\mathbf{Z}$）群が出る事が知られている。[3]

また、理論に Dp-brane と Dq-brane が存在した場合、

$$p - q \in 4\mathbf{Z} \tag{5.5}$$

であれば、理論に SUSY が残ることが知られている。[3] これは TypeIIB 理論を orientifold を使って、compact 化した場合も同様である。さらにこの時には、4 次元で $N = 1$ SUSY が残り得る事が知られている。[40]

例えば、具体的に次の事を考える。理論に D9-brane と 3 種類の D5-brane が存在する時は SUSY が残る事になる。この 3 種類の D5-brane 意味は、$0 \sim 3$ を non-compact な方向と考えた場合、$4,5$ の compact 方向に伸びた $\mathrm{D5}_1$-brane、$6,7$ の compact 方向に伸びた $\mathrm{D5}_2$-brane、$8,9$ の compact 方向に伸びた $\mathrm{D5}_3$-brane があるという意味である。

他にも non-compact な方向に伸びた D3-brane と、3 種類の D7-brane が存在する時を考えても良い。この時の 3 種類の意味は、D5-brane と逆に、$4,5$ の compact 方向に伸びていない $\mathrm{D7}_1$-brane、$6,7$ の compact 方向に伸びていない $\mathrm{D7}_2$-brane、$8,9$ の compact 方向に伸びていない $\mathrm{D7}_3$-brane があるという意味である。

また、伸びた方向の開弦の境界条件は Neumann 条件、伸びていない方向は Dirichlet 条件である。また、T-duality は、この Neumann 条件と Dirichlet 条件を入れ替えるものである。こう

考えると、D9-D5系とD3-D7系は全compact方向（$4,5,6,7,8,9$）にT-dualityを取るとつながることになる。つまり、

$$D9 \leftrightarrow D3 \;\; , \;\; D5_i \leftrightarrow D7_i \;\; , \;\; i=1,2,3 \tag{5.6}$$

である。よって、片方の系を考えれば良いことになる。ここでは便宜上、D9-D5系を考えることにする。

更にこの系でも、$6,7,8,9$方向にT-dualityを取れば、

$$D9 \leftrightarrow D5_1 \;\; , D5_2 \leftrightarrow D5_3 \tag{5.7}$$

等のように、D-braneの種類が入れ替わることになる。

5.1 場の説明

ここで開弦を元にした場の定義をしておく。

- $C^9_i \qquad i=1,2,3$

これは、D9-braneに両端を持つ開弦を元にした場である。そしてiはcompact平面の添字である。例えばgauge 場A_M $(M=0\sim 9)$を使うと、次のようにも書ける。

$$C^9_i = A_{2i+2} + iA_{2i+3} \tag{5.8}$$

つまり、これらはD9-brane上のgauge場に対応した場である。これらの場は、D9-braneを元にしたgauge群G_9の表現に属しており、iが違えば、G_9に対する表現が違うことになる。（ただし、Z_3 orientifoldに対しては同じように変換する。）そして、この場は10次元bulk全体に住んでいるので、Heterotic stringのuntwisted sectorの場に対応している。

- $C^{5_i}_j \qquad i,j=1,2,3$

これは同じ1つのD5_i-braneに両端を持つ開弦を元にした場である。そしてjは、D9の場合と同様に、どのcompact複素平面方向に振動しているか示している。そして、D5-braneを元にしたgauge群G_{5_i}の表現に属している。jが違えば、G_{5_i}に対する表現が違うことになる。また、これらの場は、D5_i-brane上のgauge場と、D5_i-braneのtranseverseな6方向の振動モードを元にした場である。

- $C^{95_i} \qquad i,=1,2,3$

これは、D9-braneと、D5_i-braneに端を持つ開弦である。gauge群はG_9とG_{5_i}の両方に電荷を持っている。（通常bifundamentalな表現になっている。これを利用して、最近はintersecting D-brane world 模型[41]等から標準模型の物質場を出すことが研究されている。）なお、この

時、片方の端では Neumann 条件、片方の端では Dirichlet 条件になっている compact 方向がある。この時、この方向の開弦のモード展開は

$$X \sim \sum_{r \in \mathbf{Z}+1/2} \frac{\alpha_r}{r}(e^{2ir\sigma} \pm e^{-2ir\sigma}) \tag{5.9}$$

となる。(± は、$\sigma = 0$ で Neumann 条件か、$\sigma = 0$ で Dirichlet 条件かによる。)

よって、この場は Heterotic string 理論の Z_2 twisted sector に対応する場である。例えば C^{95_1} は、compact な第 2 平面、第 3 平面に関して、Z_2 twisted sector になっている。

- $C^{5_i 5_j}$ $\quad i,j = 1,2,3$ ($i \neq j$)

この場は、D5_i-brane と、D5_j-brane ($i \neq j$) に端を持つ開弦である。C^{95_i} と同様に、Z_2 twisted sector に対応する場であり、G_{5_i} と、G_{5_j} の両方に対して電荷を持っている場である。

例えば、$C^{5_1 5_2}$ は compact な第 1 平面、第 2 平面に関して、Z_2 twisted sector になっている。

- S : 4 次元 dilaton

これは、10 次元 dilaton ϕ とそれぞれの compact 平面の compact 化の半径 R_i $i = 1,2,3$、そして、閉弦の untwisted な状態から出る、R-R2 形式の双対場 θ (擬 scalar) を用いて次のように書ける。[7]

$$S = \frac{2R_1^2 R_2^2 R_3^2 e^{-\phi}}{(\alpha')^3} + i\theta \tag{5.10}$$

この事は、低エネルギー有効理論のラグランジアンが、TypeI と Heterotic string で、R-R2 形式場と B 場を入れ替えると、ほとんど同じなっている事に起因する。[3] (R-R2 形式場は D1-brane と結合し、Heterotic string の B 場は基本弦 (F1) と結合するものである。特に $SO(32)$ TypeI の D1 と $SO(32)$ Hetetotic string の F1 は双対な関係にある事が知られている。[3])

そして、dilaton 依存性が $e^{-\phi}$ となっているのは、開弦より、gauge 場が出てくるためである。(coupling の計算に使う世界面が、オイラー数が 1 の D_2 である事による。)

この S は Heterotic string と同様に D9-brane を元にした gauge 群の gauge coupling を決める。また、この dilaton の半径依存性は、D9-brane の世界体積が 10 次元であることから来ている。それゆえ、6 次元トーラスの半径が来ている。

- T_i : 4 次元 (untwisted) moduli 場

この場合の 4 次元の moduli 場は、次のように書かれる。[7]

$$T_i = \frac{2R_i^2 e^{-\phi}}{\alpha'} + i\eta_i \tag{5.11}$$

ここで、η_i は、閉弦の untwisted な状態から出る、R-R2 形式場の compact 部分である。そして、この T_i は D5_i -brane を元にした、gauge 群の gauge coupling を決める。(10 次元 dilaton は

通常理論の coupling を決める。）この moduli 場の半径依存性は、D5$_i$-brane の世界体積が 6 次元であることから来ている。それゆえ、2 次元トーラスの半径が寄与している。

これらの S, T_i を見て分かるように、一般に、種類の違う D-brane を元にした gauge coupling の値は違うことになる。それは、D-brane の世界体積が違い、かつ compact 化の方向も違うからである。よって、もし我々の標準模型の gauge coupling が、種類の違う D-brane を元にしているのならば、gauge coupling unification を考えることは難しい。非常に non-trivial な事が起っていることになる。この事は、非摂動効果が分かれば、解決されるかも知れない事である。もちろん、種類が同じ D-brane を元にした gauge 群が標準模型の gauge 群ならば、unification は起り得る。

- M_k：twisted moduli

これは twisted sector の閉弦の状態である。それゆえ Chan-Paton 因子を持ち得ず、gauge singlet になっており、gauge kinetic function に入り得る。（TypeIIB orientifold 模型では、開弦が Chan-Paton 因子を持たない限り、gauge 自由度を持ち得ない。なお、この場合は Kalzua-Klein ベクトルは、orbifold により理論より落ちている。）それゆえこの場は、gauge coupling unification の観点では、Hetertic string 理論の gauge coupling threshold correction と同じような役割をする事が知られている。[42] つまり、string scale での gauge coupling の値をずらし、GUT scale （$\sim 10^{16}$GeV）で gauge coupling unification を起こすことを理論的に可能にしている。また、この場は、Heterotic string の時とほぼ同じように、orientifold の固定点近傍にのみ住む。そしてすでに言ったように、4 次元の Green-Schwarz 機構には dilaton ではなく、この場が寄与する。

T-duality に対する場の変化

まず、compact 化した理論に対して、T-duality の元で理論の coupling は不変である。例えば 8, 9 方向の 2 次元だけ半径 R の T^2 に compact 化した時を考える。この時、8 次元重力 couplingκ_8 を考えると、

$$\kappa_8^2 = \kappa_{10}^2(2\pi R)^{-2} = \kappa_{10}^{2\prime}(2\pi R')^{-2} \tag{5.12}$$

である。ここで、κ_{10} は T-duality を取る前の 10 次元重力 coupling、κ'_{10} は 8, 9 方向に T-duality を取ったときの 10 次元重力 coupling である。そして $R^{2\prime} = \alpha^{2\prime}/R^2$ である。また、10 次元 dilaton は $\kappa_{10} \propto e^{\phi}$ と coupling に入っている。すると、8, 9 方向に T-duality を取ったときの 10 次 dilaton ϕ' は

$$e^{-\phi'} = \frac{R^2}{\alpha'} e^{-\phi} \tag{5.13}$$

となる。これは他の方向にも compact 化されている場合も同様である。

また、この時に、6, 7, 8, 9 方向に T-duality を取る事を考える。すると、この時には T-duality を取った方向の半径は

$$R'_i = \frac{\alpha'}{R_i} \tag{5.14}$$

となる。そして、式（5.13）を考慮し、実数部分に注目すると、

$$S \leftrightarrow T_1 \ \ , T_2 \leftrightarrow T_3 \tag{5.15}$$

となる。実は、R-R2 形式場の方も、T-duality を取ると、その方向に応じた添字がつく事になる。これは $X' = X_L - X_R$, $\psi'_R = -\psi_R$ のように、右向き部分のみに、T-duality を取った方向に対してパリティ—変換が作用するからである。それゆえ、例えば 9 方向に T-duality を取った時、右向きの R セクターの弦の状態に対して、

$$\Theta \to \Gamma^9 \Gamma \Theta \tag{5.16}$$

となる。ここで、Θ はスピン場であり、Γ^9, Γ（$= \Gamma^0 \ldots \Gamma^9$）は 10 次元のガンマ行列である。実際、$\Gamma^9 \Gamma$ がガンマ行列に作用するとき、

$$\Gamma^M \to (\Gamma^9 \Gamma) \Gamma^M (\Gamma^9 \Gamma)^{-1} = (-1)^{\delta^{M,9}} \Gamma^M \tag{5.17}$$

となって、9 方向へのパリティー演算子になっている。それゆえ、R-R2 形式の vertex operator を考えると、

$$\tilde{\Theta}^T \Gamma^{MN} \Theta \to \tilde{\Theta}^T \Gamma^{MN} \Gamma^9 \Gamma \Theta \tag{5.18}$$

となる。すると、次のように考えることができる。A_{MN} $(M, N = 0 \sim 9)$ を R-R2 形式場とする。そして $6, 7, 8, 9$ 方向に T-duality を取れば、$A_{67} \leftrightarrow A_{89}$ となる。つまり、$\eta_2 \leftrightarrow \eta_3$ である。そして、$A_{45} \to A_{456789} \sim A_{0123}$ は Γ_5（$= i\Gamma^0 \ldots \Gamma^3$）が作用しているので、4 次元の擬スカラー場（$\theta$）になる事が分かる。つまり、$\eta_1 \leftrightarrow \theta$ である。

同様に、物質場に対しても D-brane の種類が入れ替わるので、

$$\begin{array}{ll} C_j^9 \leftrightarrow C_j^{5_1} \ \ , & C_j^{5_2} \leftrightarrow C_j^{5_3} \\ C^{95_1} : \text{inv.} \ \ , & C^{95_2} \leftrightarrow C^{5_1 5_3} \\ C^{95_3} \leftrightarrow C^{5_1 5_2} \ \ , & C^{5_2 5_3} : \text{inv.} \end{array} \tag{5.19}$$

となる。他の方向に T-duality を取っても同じである。

理論にはこの T-duality 対称性があるので、これらの入れ替えに対して不変なラグランジアンを構成すればよい事になる。そして、Heterotic string を思い返して、（un）twisted sector に対応する場に、 Heterotic string と同様な Kähler potential を与えれば良いことになる。

ただし、ある種類の D-brane が理論に無い場合は、対応する場を落とすべきである。例えば、D5-brane が無ければ、C_i^9, S, T_i, M_k しか、理論に存在しない事になる。

5.2 Kähler potential、gauge kinetic function、 superpotential

- gauge kinetic function

まず、固定点近傍の、Dp-brane を元にした gauge 群 G_a の gauge kinetic function f_a は次のように与えられる。[7]

$$f_a = f_p + \sum_k \sigma_a^k M_k \tag{5.20}$$

$$f_p \ : \ f_9 = S \ \text{or} \ f_{5_i} = T_i \ (i = 1, 2, 3) \tag{5.21}$$

ここで、λ_a を gauge 群 G_a に対応する Chan-Paton 因子とし、γ^k を Chan-Paton 因子にかかる、orbifold twist とする。それらを用いて、$\sigma_a^k = \mathrm{tr}(\gamma^{-1\,k}(\lambda_a)^2)$ である。そして、k は θ^k-twisted sector を表わす。また、固定点から遠く離れた場所では、twisted moduli は存在しないので、その寄与はない。また、twisted moduli の寄与によっては、違う種類の D-brane を元にした gauge 群でも、coupling unification が起り得る。この twisted moduli は、Heterotic string の場合の threshold correction と同じような働きをする。

また、これらの事は、TypeIIB orientifold（TypeI）理論において、R-R2 形式場が Heterotic string の場合の B 場と同じ働きをすると考えれば分かりやすい。(実際、TypeI 理論と $SO(32)$ Heterotic string 理論は、S-duality でつながっている。そして、Heterotic string の場合の、基本弦（F1）を使った描像と、TypeI 理論の D1-brane を使った描像は双対な関係にある事が知られている。)

- Kähler potential

T-duality に対して不変で、 $C^{95_i}, C^{5_j 5_k}$ が、Z_2-twisted sector と同じである事を考慮 Kähler potential は次のものである。

$$\begin{aligned} K = &- \ln(S + S^\dagger - \sum_{i=1}^{3} |C_i^{5_i}|^2) - \sum_{i=1}^{3} \ln(T_i + T_i^\dagger - |C_i^9|^2 - \sum_{j,k=1}^{3} d_{ijk} |C_j^{5_k}|^2) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^{3} d_{ijk} \frac{|C^{5_j 5_k}|^2}{(S + S^\dagger)^{1/2} (T_i + T_i^\dagger)^{1/2}} + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^{3} d_{ijk} \frac{|C^{95_i}|^2}{(T_j + T_j^\dagger)^{1/2} (T_k + T_k^\dagger)^{1/2}} \\ &\quad + K(M_k, M_k^\dagger) \end{aligned} \tag{5.22}$$

ここで、$d_{ijk} = 1$ （for $i \neq j \neq k \neq i$） 、 $d_{ijk} = 0$（ for others）である。ここで $K(M_k, M_k^\dagger)$ は twisted moduli の Kähler potential であり、この議論からでは、明確に書くことができない。(対称性で形を決められない。) 詳しくは模型によってくる。ただし、$M_k \to 0$（orbifold limit）で、Kähler メトリック

$$K_k{}^l = \frac{\partial^2 K}{M_k M_l^\dagger} \tag{5.23}$$

が特異性を持たない要請をする。Kähler メトリックは運動項の規格化に関係するので、自然な要請である。そうすると、anomaly の無い $M_k \to 0$ の時、次のように anzatz を置くことが多い。

$$K(M_k, M_k^\dagger) \to \frac{1}{2}(M_k + M_k^\dagger)^2 \tag{5.24}$$

また、この TypeIIB orientifold 模型の時には、twisted moduli のみが 4 次元の Green-Schwarz 機構に寄与することが知られている。[43] それゆえ、anomalous $U(1)$ や、$SL(2, \mathbf{Z})$ T-duality

に対する anomaly がある時、Kähler potential の形は、

$$K(M_k, M_k^\dagger) = K(M_k + M_k^\dagger - \sum_\alpha \delta^\alpha_{\mathrm{GS}k} V_\alpha + \sum_{i=1}^{3} \delta^i_{\mathrm{GS}k} \ln(T_i + T_i^\dagger)) \tag{5.25}$$

となる。[43] ここで、V_α は anomalous $U(1)$ の vector supermultiplet である。そして、$\delta^\alpha_{\mathrm{GS}k}$、$\delta^i_{\mathrm{GS}k}$ は anomalous $U(1)$、T-duality に対する Green-Schwarz 係数である。

そしてこの時、各々の変換に対して twisted moduli は次のように変換する。

$$\mathrm{Im}M_k^f \to \mathrm{Im}M_k^f + \delta^f_{\mathrm{GS}k}(\alpha)\Lambda_\alpha \tag{5.26}$$

$$\mathrm{Im}M_k^f \to \mathrm{Im}M_k^f + \delta^i_{\mathrm{GS}k} \ln(ic_i T_i + d_i) \tag{5.27}$$

ただし、Λ_α は anomalous $U(1)$ の変換パラメーターである。そして、ここでは twisted moduli の固定点依存性（f）をあらわに書いた。（ただし T^6/Z_N , N : 奇数 としている。）

- (renormalizable) superpotential

ここでは、superpotential の結果を与える。この renormalizable superpotential は、様々な種類の D-brane に固定された開弦が結合したり、離れるという相互作用から作られる。[45] 結果は次の通りである。

$$\begin{aligned} W &= g_9 \left(C_1^9 C_2^9 C_3^9 + C^{95_1} C^{95_2} C^{95_3} + \sum_{i=1}^{3} C_i^9 C^{95_i} C^{95_i} \right) \\ &+ \sum_{i,j,k=1}^{3} g_{5_i} \left(C_1^{5_i} C_2^{5_i} C_3^{5_i} + C_i^{5_i} C^{95_i} C^{95_i} + d_{ijk} C_j^{5_i} C^{5_i 5_k} C^{5_i 5_k} \frac{1}{2} d_{ijk} C^{5_j 5_k} C^{95_j} C^{95_k} \right) \end{aligned} \tag{5.28}$$

ここで、

$$g_9^2 = \frac{4\pi}{\langle \mathrm{Re}S \rangle} \ , \ g_{5_i}^2 = \frac{4\pi}{\langle \mathrm{Re}T_i \rangle} \tag{5.29}$$

である。

5.3 Type IIB orientifold 模型を元にした安定化

ここでは heterotic string 理論を元にして、Type IIB orientifold 模型での moduli 場の安定化について解析する。既に見たように、これらの場の期待値は様々な種類の D-brane を起源とした、現実的な gauge coupling の値を決める上で非常に重要になる。

例えば、1 つの gaugino condensation を考える場合は、Heterotic string の場合と同じである。（$S \to T$ と potential 形の置き換えをするだけで良い。）また、例えば同じ brane で 2 つ以上の gaugino condensation が起り得る。この時は先にやった race-track 模型にあたる。また、異な

る種類の D-brane に由来した gaugino condensation もある。この時には、Heterotic string 理論には無かった

$$W \sim d_S e^{-\Delta_S S} + d_T e^{-\Delta_T T} \tag{5.30}$$

のような形の superpotential が理論に現れる。さらには twisted moduli の存在が重要になる。また、すでに moduli 場の Kähler potential は与えてあるのでここでは書かない。

- 例 1

ここでは次のような非摂動的な superpotential を考える。

$$W = de^{-\Delta S} + ce^{i\gamma} \ \ , \ \ c, \gamma : \text{real const.} \tag{5.31}$$

これは、他の brane に由来する moduli 場が何らかの機構で安定化されているときに当る。

前と同様に、scalar potential を V_{eff} とする。この時の計算は Heterotic string の場合（4.510）（4.512）と同じである。すると、

$$\frac{\partial V_{eff}}{\partial S} = 0 \to (S + S^\dagger) W_S - W = 0 \tag{5.32}$$

が条件として出る。（この条件は global SUSY を考えると分かりやすいが、$F_S = 0$ の条件に対応している。他にも $(S + S^\dagger) W_S - W \neq 0$ の時、これ以外の条件から出る解があるが、この時は前と同様に極小値にはならないはずなので、無視することにする。）

これより、

$$(2\Delta \text{Re} S + 1) d e^{-\Delta \text{Re} S} = c \tag{5.33}$$

$$\Delta \text{Im} S + \gamma = 2\pi (n+1) \ \ , \ \ n \in \mathbf{Z} \tag{5.34}$$

である。特に、

$$c = d_T e^{-\Delta_T \text{Re} T} \ \ , \ \ \Delta \text{Re} S \gg 1 \tag{5.35}$$

と思えば、

$$\Delta \text{Re} S = \Delta_T \text{Re} T + \ln \left(\frac{d_T}{2d \Delta \text{Re} S} \right) \tag{5.36}$$

である。対数部分はそう効かないと思うと、

$$\mathcal{O}(\Delta \text{Re} S) = \mathcal{O}(\Delta_T \text{Re} T) \tag{5.37}$$

となるはずである。ここでまた、極小値である条件（4.531）（4.532）を使うと次式が出る。

$$\Delta (S + S^\dagger) > \sqrt{3} + 1 \tag{5.38}$$

よって、この時は簡単に安定化できる。ここで分かったことは、1 つの場が安定化されると、それが原因となって、他の場も安定化されることである。さらに、この場合はフリーパラメーターが多いので、欲しい値が簡単に出せてしまう。よって、値には触れないことにする。

• 例 2

ここでは前の例から、T moduli を dynamical な場として扱うことにする。
ここで使う superpotential は

$$W = d_S e^{-\Delta_S S} + d_T e^{-\Delta_T T} \tag{5.39}$$

である。（moduli T が 1 つしかないときを考える。しかし、3 つあっても、それぞれの場は独立に扱うので、結果は同じである。）もし、どちらかの場がが安定化されれば、簡単にもう一方の場も安定化され得る事になる。
ここでも同様に式（4.531）（4.532）を使うと

$$\frac{\partial V_{eff}}{\partial S} = 0 \to (S + S^\dagger)W_S - W = 0 \tag{5.40}$$

$$\frac{\partial V_{eff}}{\partial T} = 0 \to (T + T^\dagger)W_T - W = 0 \tag{5.41}$$

となる。これは、各々の F-term が 0 であることに対応している。すると、

$$(2\Delta_S \mathrm{Re}S + 1)d_S e^{-\Delta_S S} + d_T e^{-\Delta_T T} = 0 \tag{5.42}$$

$$d_S e^{-\Delta_S S} + (2\Delta_T \mathrm{Re}T + 1)d_T e^{-\Delta_T T} = 0 \tag{5.43}$$

この 2 式より、

$$\Delta_S \mathrm{Im}S = \Delta_T \mathrm{Im}T + \pi(2n+1) \tag{5.44}$$

$$\mathrm{Re}S \ \ , \ \ \mathrm{Re}T \to \infty \tag{5.45}$$

となって、安定化しないことが分かる。つまり、どちらかの場の、よりよい安定化の機構が必要となる。

• 例 3

前の例を受けて、ここでは race-track 的な模型を扱うことにする。（これは 1 つの同じ brane 上で gaugino condensation が 2 つの gauge 群で起こることに対応している。）よって、ここでは次の superpotential を扱うことにする。

$$W = d_S^{(1)} e^{-\Delta_S^{(1)} S} + d_S^{(2)} e^{-\Delta_S^{(2)} S} + d_T e^{-\Delta_T T} \tag{5.46}$$

式（5.40）（5.41）より、次式が極値の条件となる。

$$d_S^{(1)}(2\Delta_S^{(1)} \mathrm{Re}S + 1)e^{-\Delta_S^{(1)} S} + d_S^{(2)}(2\Delta_S^{(2)} \mathrm{Re}S + 1)e^{-\Delta_S^{(2)} S} + d_T e^{-\Delta_T T} = 0 \tag{5.47}$$

$$d_S^{(1)} e^{-\Delta_S^{(1)} S} + d_S^{(2)} e^{-\Delta_S^{(2)} S} + (2\Delta_T \mathrm{Re}T + 1)d_T e^{-\Delta_T T} = 0 \tag{5.48}$$

ここで、S が race-track 的な機構で安定化される事を考える。これら（5.47）（5.48）を実際に調べてみると例えば次の数値が出る。（ただし、$\Delta = 24\pi^2/|b|$ を考慮する。ここで、b は 1-loop ベータ関数の係数である。）

ここで、

$$d_S^{(i)} = d_T = 1 \ , \ \Delta_S^{(1)} = 12 \ , \ \Delta_S^{(2)} = 9 \ , \ \Delta_T = 15 \tag{5.49}$$

として、条件式の第 2 項の位相を、係数が -1 になるようにとる。するとこの時、

$$\langle \mathrm{Re}S \rangle \simeq 0.01 \ , \ \langle \mathrm{Re}T \rangle \simeq 0.19 \tag{5.50}$$

と安定化される。

この場合、S を起源とするような gauge 相互作用は、T を起源とするような gauge 相互作用よりも強結合になっていることが分かる。

- 例 4 extradimension 的な模型

ここまでは、10 次元の bulk 中にいる場の安定化について注目してきた。ここでは twisted moduli を考慮にいれた、固定点近傍における moduli 場の安定化について注目することにする。ただし、簡単化のため $\delta_{\mathrm{GS}}^{\alpha}$、$\delta_{\mathrm{GS}}^{i} = 0$ とする。

まず、orientifold 固定点近傍では、（extradimension 模型の観点から）次のような 4 次元ラグランジアンが、bulk の部分に加えてさらに書ける。

$$\mathcal{L}_{fp} = \int d^6y \delta^6(y) \int d^2\theta f_{a\,fp}(M) W^{\alpha a} W_{\alpha}^{a} \tag{5.51}$$

ここで、

$$f_{a\,fp}(M) = \sigma_a M \tag{5.52}$$

である。よって、固定点近傍の全体の gauge kinetic function は、例えば次のように書ける。

$$f_{tot} = f_{bulk} + f_{fp} = S + \sigma M \tag{5.53}$$

ここで、非摂動的な superpotential W は hidden sector の gauge 相互作用の dynamical scale Λ を使って、

$$W \propto \Lambda^3 \simeq M_{st} \exp\left(\frac{-24\pi^2}{|b| g_{h\,st}^2}\right) \tag{5.54}$$

と書けた。ここで、$g_{h\,st}$ は string scale の holomorphic coupling である。また、

$$\langle f_{tot} \rangle = \frac{1}{g_{h\,st}^2} \tag{5.55}$$

である。よって、ここで考えるべき superpotential は

$$W = \exp\left(\frac{-24\pi^2 f_{tot}}{|b|}\right) = d e^{-\Delta(S+\sigma M)} \tag{5.56}$$

であるべきである。
また、簡単化のため、Kähler potential を

$$K = -\ln(S+S^\dagger) + \frac{1}{2}(M+M^\dagger)^2 \tag{5.57}$$

とする。これらの superpotential と Kähler potential を仮定した元で、解析を行う。この Kähler potential を考える理由は、orientifold 空間では固定点が存在し、その曲率は発散しているからである。(この事は $\langle M_k \rangle = 0$ に対応している。) よって、orientifold 空間で理論を近似出来るなら、twisted moduli の期待値が小さく、低次の項のみ効くと考えるからである。もし、期待値が大きくなれば、この近似は危うい。
まず、この時の F-term scalar potential は次のように書ける。

$$\begin{aligned} V_{eff} &= \frac{1}{S+S^\dagger} e^{(M+M^\dagger)^2/2} |W|^2 \left[\left| (S+S^\dagger)\frac{W_S}{W} - 1 \right|^2 + \left| M + M^\dagger + \frac{W_M}{W} \right|^2 - 3 \right] \\ &= \frac{1}{S+S^\dagger} e^{(M+M^\dagger)^2/2} |W|^2 \left[\{\Delta(S+S^\dagger)+1\}^2 + (M+M^\dagger - \Delta\sigma)^2 - 3 \right] \end{aligned} \tag{5.58}$$

この時、S に注目すると、Heterotic string の時の potential (4.519) と同じ形をしている事が分かる。ゆえに、この時は M が期待値を持っても、S は安定化されない。
よって、ここからは S が何らかの機構で安定化されていると仮定して話を進める。まず、M に対する極値は、次の条件を満す。

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{eff}}{\partial M} = \frac{|W|^2}{S+S^\dagger} & e^{(M+M^\dagger)^2/2} (M+M^\dagger - \Delta\sigma) \\ & \times \left[\ \{\Delta(S+S^\dagger)+1\}^2 + (M+M^\dagger-\Delta\sigma)^2 - 1 \ \right] = 0 \end{aligned} \tag{5.59}$$

よって、この時に S が安定化されていれば、

$$M + M^\dagger = \Delta\sigma \tag{5.60}$$

の時に twisted moduli は安定化される。よって、一般的に $\Delta \gg 1$ より、M の値は大きくなり得る。さらに、もし $S \ll M\sigma$ ならば、M が gauge coupling に主な寄与を与える。つまり、S の寄与だけ見ていれば gauge coupling が強結合でも、全体としては、弱結合になる。
このように安定化したのは、

$$K_M = \frac{1}{2}(M+M^\dagger)^2 \tag{5.61}$$

と選んだ事が原因である。この時、一般的な Kähler potential では、twisted moduli は

$$\frac{\partial K_M}{\partial M} = \Delta\sigma \tag{5.62}$$

の時に安定化される事が確かめられる。
しかし、このままでは S の安定化がされないので、さらに S の安定化を考える。

- 例 5

ここでは前のセットアップと全く同じだが、違うのは、次の superpotential を考える点である。

$$W = d_1 e^{-\Delta_1(S+\sigma_1 M)} + d_2 e^{-\Delta_2(S+\sigma_2 M)} \tag{5.63}$$

これは固定点近傍で異なる 2 つの gauge 群の、gaugino condensation が起こったことに対応している。この時、scalar potential は

$$V_{eff} = \frac{1}{S+S^\dagger} e^{(M+M^\dagger)^2/2} |W|^2 \left[\left| (S+S^\dagger)\frac{W_S}{W} - 1 \right|^2 + \left| M + M^\dagger + \frac{W_M}{W} \right|^2 - 3 \right] \tag{5.64}$$

である。これより、極値は次の条件を満たす。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_{eff}}{\partial M} = & \frac{1}{S+S^\dagger} e^{(M+M^\dagger)^2/2} [\ (M+M^\dagger) \left| (S+S^\dagger)W_S - W \right|^2 \\
& + \left| (M+M^\dagger)W_M + W \right|^2 (\ (M+M^\dagger) - 3W^\dagger \{ (M+M^\dagger)W + W_M \} \\
& + \{ (S+S^\dagger)W_{SM} - W_M \} \{ (S+S^\dagger)W_S - W \} \\
& + \{ W + (M+M^\dagger)W_M + W_{MM} \} \{ (M+M^\dagger)W^\dagger + W_M^\dagger \} \\
& + \{ (M+M^\dagger)W^\dagger + W_M^\dagger \} W^\dagger\ ] \\
& = 0
\end{aligned} \tag{5.65}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_{eff}}{\partial S} = & \frac{1}{(S+S^\dagger)^2} e^{(M+M^\dagger)^2/2} [\ \{ (S+S^\dagger)W_S^\dagger - W^\dagger \} (S+S^\dagger)^2 W_{SS} \\
& - 2\{ (\ (S+S^\dagger)W_S - WW^\dagger\ ) - W_S(S+S^\dagger)(\ (M+M^\dagger)W^\dagger + W_M^\dagger\ ) \\
& - |(M+M^\dagger)W + W_M|^2\ ] \\
& = 0
\end{aligned} \tag{5.66}$$

これより、極値の 1 つは次のものである。

$$(S+S^\dagger)W_S - W = 0\ ,\ \ (M+M^\dagger)W + W_M = 0 \tag{5.67}$$

これは Heterotic string の時と同様に、trivial な解であり、moduli 場の F-term が 0 になっている事に対応する。それゆえ、これを満す極値は極小値に対応しているはずである。実際に式 (5.67) を解くと、

$$(\Delta_1 - \Delta_2)\mathrm{Im}S + (\Delta_1\sigma_1 - \Delta_2\sigma_2)\mathrm{Im}M = \pi(2n+1)\,, n \in \mathbf{Z} \tag{5.68}$$

$$\ln\left[\frac{(2\Delta_1\mathrm{Re}S + 1)}{(2\Delta_2\mathrm{Re}S + 1)}\right] = (\Delta_1 - \Delta_2)\mathrm{Re}S + (\Delta_1\sigma_1 - \Delta_2\sigma_2)\mathrm{Re}M \tag{5.69}$$

$$\ln\left[\frac{(2\Delta_1\mathrm{Re}M - \Delta_1\sigma_1)}{(2\Delta_2\mathrm{Re}M - \Delta_2\sigma_2)}\right] = (\Delta_1 - \Delta_2)\mathrm{Re}S + (\Delta_1\sigma_1 - \Delta_2\sigma_2)\mathrm{Re}M \tag{5.70}$$

となる。特に、

$$\Delta_1\mathrm{Re}S \gg 1 \tag{5.71}$$

の場合、

$$\mathrm{Re}M \simeq \frac{\Delta_1\Delta_2(\sigma_1 - \sigma_2)}{2(\Delta_1 - \Delta_2)} \tag{5.72}$$

$$\mathrm{Re}S \simeq \frac{(\Delta_1\sigma_1 - \Delta_2\sigma_2)\Delta_1\Delta_2(\sigma_1-\sigma_2)}{2(\Delta_1-\Delta_2)^2} + \frac{1}{\Delta_1-\Delta_2}\ln\frac{\Delta_1 d_1}{\Delta_2 d_2} \tag{5.73}$$

である。特に、$\sigma_2 \simeq 0$ ならば、

$$\mathrm{Re}M \simeq \frac{\Delta_1\Delta_2\sigma_1}{2(\Delta_1-\Delta_2)} \tag{5.74}$$

$$\mathrm{Re}S \simeq \frac{\Delta_1 \mathrm{Re}M\sigma_1}{\Delta_1-\Delta_2} + \frac{1}{\Delta_1-\Delta_2}\ln\frac{\Delta_1 d_1}{\Delta_2 d_2} \tag{5.75}$$

である。

たとえばここで、$\Delta = 24\pi^2|b|$ を考慮して次の数値を入れてみる。

$$\Delta_1 \simeq 80\,,\ \sigma_1 \simeq 0.5\,,\ d_1 \simeq 1 \tag{5.76}$$

$$\Delta_2 \simeq 240\,,\ \sigma_2 \simeq 0.3\,,\ d_2 \simeq 1 \tag{5.77}$$

この時は

$$\mathrm{Re}M \simeq 12\,,\ \mathrm{Re}S \simeq 3 \tag{5.78}$$

である。つまり、全体としては弱結合になっている。更に注目すべきは、Δ の値が大きい（b の値が小さい。つまりは gauge 群が小さい。）場合にも ReS の値が $\mathcal{O}(1)$ で出る事が分かる。（ただし、ReM の値は大きい、現時点では、この事は改善の余地がある。）

また、ここでは Kähler potential を簡単化して考えたが、一般の場合、twisted moduli は次の時に安定化する。

$$\frac{K'_M - \Delta_1\sigma_1}{K'_M - \Delta_2\sigma_2} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \tag{5.79}$$

ここで、$K'_M = \partial K_M/\partial M$ である。

ところで、前にも説明したように、twisted moduli の期待値は、orientifold の固定点の曲率と関係している。それゆえ、twisted moduli が大きな期待値を取れば、今の orientifold の場合（$\langle M_k\rangle = 0$）で使えた議論が果たして正しいのか疑問になる。それは次の意味である。まず、ここで使った Kähler potential や superpotential は、orientifold compact 化して出したものであった。それゆえ、compact 空間が orientifold でなくなれば、Kähler potential が大きく変更される可能性がある。（superpotential 部分は正則性で抑えられる。）今の場合、この値が orientifold の近似として正しいのかは不明である。

6 議論

まず、ここで moduli 場の安定化について考える事にする。本論文では、簡単化して様々な場合を考えた。そして、数値を全く気にせずに、moduli 場が安定化するかどうかだけを議論した。しかし、特に gauge coupling unificatin との関係を気にするならば、数値も気にする必要がある。また、TypeIIB orientifold 模型の場合、twisted moduli の期待値が大きすぎると、orbifold limit（$\langle M_k\rangle \to 0$）から外れ、この解析自体が、orbifold として近似していいのか不明になる。

それゆえ、解析で使った Kähler potential の正当性が危うくなる。つまり、具体的な解析では twisted moduli の Kähler potential を

$$K_M = \frac{1}{2}(M_k + M_k^\dagger)^2 \tag{6.1}$$

と置いていたが、これは一般的ではない。この近似は twisted moduli の期待値が小さいときだけ成り立つべきものである。特に twisted moduli の期待値が大きくなると、M_k の高次の項を考慮する必要もあるという事である。よって、twisted moduli の Kähler potential を、CFT を使って正確に決める事が重要であろう。以上の理由により、今後、様々な面で安定化され得る数値を考え、twisted moduli の正確な Kähler potential を求めたい。また、更なる一般化が必要である。例えば、anomaly がある場合を考えて、Green-Schwarz 係数をノンゼロ（$\delta_{\rm GS} \neq 0$）にする必要もあるであろう。

そして、レビューパートで摂動論的超弦理論の orbifold compact 化を学習し、感じたことは次の通りである。

orbifold compact 化は、無矛盾になるよう gauge embedding を行い、様々な事を手で行っている事に気づく。これを逆に言えば、摂動論の範囲では、無矛盾であれば何をしても良いように感じられる。それゆえ、超弦理論は、重力の量子論を含む統一理論の候補として有望視されているが、摂動論のみを行っている場合は、ほとんどの予言能力は無いに等しいよう感じられる。それゆえ、非摂動効果の研究が必要であろう。

また、特に gauge coupling unification を考えるならば、threshold correction だけでなく、非摂動効果を考えるべきであろう。（T moduli の期待値が現在までの解析では、常に $T \sim 1$ となってしまう。GUT scale($\sim 10^{16}$GeV) で unification が起こるならば、$T \sim 20$ が必要である。）また、例えば Heterotic M 理論では、gauge kinetic function が次の形になることが知られている。[44]

$$f = S + \alpha T \ \ , \ \ \alpha : \mathrm{const} \tag{6.2}$$

このように、Heterotic string 理論とは違った、T moduli が大きく寄与する形になる。

特に、TypeIIB orientifold 模型では、string scale が

$$M_{\rm st} \sim e^{\langle \phi_B \rangle /2} g_4 M_{\rm G} \tag{6.3}$$

と書けるせいで string scale が決まらず、実験に引っ掛からない程度であれば、どの scale でもよい事になる。つまりは、string scale が GUT scale($\sim 10^{16}$GeV) より下という事も考えられる。それゆえ、gauge coupling unification の存在が Heterotic string 以上に大きく問題になる。（もちろん、種類の違う D-brane を元にした gauge coupling 同士の unification の問題もある。）

ゆえに、超弦理論の摂動論に依らない構成的定式化の必要がある。しかし、摂動論のように、多くのことが計算できるのかは不明である。また、摂動論とはいえ、超弦理論の重要な本質の幾らかは掴んでいるはずである。それゆえ、現実的な 4 次元模型への別のアプローチとして、（摂動論的）超弦理論を現象論に応用し、近い将来の実験結果（特に SUSY、extra dimension の発見等）と比べ、現実的な模型を選ぶことも重要に思われる。これは、どちらが現実的な 4 次元模型への近道とは言えないが、両方とも重要な事であろう。

謝辞

そして常日頃より、私の研究を熱心に指導し、励まし、個人的にも非常にお世話になっている小林さんに、心より深く感謝致します。また、一緒にゼミをして頂き、質問にも答えてくださった、村上さん、野口さん、安部さんに深く感謝致します。そして、普段から様々な面で励ましてくれている、同じ研究室 M2 の藤田さん、三輪君、森田君に、心より感謝致します。また、私の論文の言葉使いについて気をかけて下さり、普段の研究面、生活面でも非常にお世話になっている（ここには書ききれないですが）研究室のみなさん、他研究室の M2 の友人達、そして他大学の友人に、心より感謝致します。そして最後に、普段から様々な面で私だけでなく、研究室の方々にも支援してくれている家族に深く感謝します。

A　公式集

A.1　古典作用の計算法

式（4.301）作の用の計算の方法は、一般化して次の積分を考えるとよい。

$$I(\alpha, n; \beta, m) = \frac{1}{\pi} \int d^2 z |z|^\alpha |1-z|^\beta z^n (1-z)^m \tag{A.1}$$

この時、I は

$$\mathrm{Re}(\alpha + \beta + m + n) < 0 \ \ , \mathrm{Re}(\alpha + n + 2) < 0 \ \ , \mathrm{Re}(\beta + m + 2) < 0 \tag{A.2}$$

を満たすとき収束する。（$\bar{\partial} Z$ の解は、これにより発散する事が分かる。）そして

$$|z|^\alpha = \frac{1}{\Gamma(-\alpha/2)} \int_0^\infty ds s^{-\alpha/2-1} e^{-s|z|^2} \ \ , \ \ \Gamma(p) = \int_0^\infty du u^{p-1} e^{-u} \tag{A.3}$$

を用いて I を書き直す。すると、次式のようになる。

$$I = \frac{1}{\Gamma(-\alpha/2)\Gamma(-\beta/2)} \int_0^\infty ds s^{-\alpha/2-1} \int_0^\infty dt t^{-\beta/2-1} \times \frac{1}{\pi} \int d^2 z e^{-s|z|^2 - t|1-z|^2} z^n (1-z)^m \tag{A.4}$$

この時、次のガウス型の積分を考える。

$$J(\lambda, \mu) = \frac{1}{\pi} \int d^2 z \exp[-s|z|^2 - t|1-z|^2 \lambda z + \mu(1-z)] \tag{A.5}$$

これは $z = x + iy$ を使って簡単に計算できる。結果は、

$$J(\lambda, \mu) = \frac{1}{s+t} \exp(\frac{\lambda t + \mu s - st}{s+t}) \tag{A.6}$$

である。すると、式（A.4）の z 積分部分は式（A.6）を λ, μ について微分すれば出る。結果は次の通りである。

$$\frac{1}{\pi} \int d^2 z e^{-s|z|^2 - t|1-z|^2} z^n (1-z)^m = \frac{t^n s^m}{(s+t)^{n+m+1}} e^{-st/(s+t)} \tag{A.7}$$

ただし、この時の m,n は整数であるが、一般的に成り立つ事が知られている。そして、変数変換

$$u=\frac{st}{s+t}\ ,\ x=\frac{t}{s+t} \tag{A.8}$$

を行う。この時 u,x は次の積分範囲を動く。

$$0\le u<\infty\ ,\ 0\le x\le 1 \tag{A.9}$$

よってこの時 I は

$$I=\frac{1}{\Gamma(-\alpha/2)\Gamma(-\beta/2)}\int_0^1 dx x^{n+2}(1-x)^{m+\beta/2}\int_0^\infty du u^{-\alpha/2-\beta/2-2}e^{-u} \tag{A.10}$$

$$=\frac{\Gamma(1+n+\alpha/2)\Gamma(1+m+\beta/2)\Gamma(-\alpha/2-\beta/2-1)}{\Gamma(-\alpha/2)\Gamma(-\beta/2)\Gamma(2+m+n+\alpha/2+\beta/2)} \tag{A.11}$$

となる。

A.2 gravity mediation による SUSY breaking soft term の一般公式

ここでは、gravity mediation による、SUSY breaking soft term の一般公式を簡単に説明する。

string 理論では、moduli 場の安定化のために gaugino condensation を考えると、supergravity sector で moduli 場の F-term が期待値を持ち、SUSY breaking が起こる。(gravity mediation) それゆえ、string 理論の範囲内で SUSY breaking を考える時に重要な公式となる。

まず、次のように場を定義する。

$$\Phi^i:\ \text{dilaton , moduli fields} \tag{A.12}$$

$$Q^I:\ \text{light mode fields} \tag{A.13}$$

そして、M を plank mass とすると、典型的には

$$\langle\Phi^i\rangle\sim M \tag{A.14}$$

と、moduli が期待値を持つ。更にこの時、moduli 場の F-term が

$$\langle F_\Phi\rangle\neq 0 \tag{A.15}$$

となれば、SUSY が破れる。ここで、場を

$$\Phi^i\to M\Phi^i \tag{A.16}$$

無次元化して再定義する。まとめると、ここで考えるのは、次の場合である。

$$\langle\Phi^i\rangle\neq 0\ ,\ \langle F_\Phi\rangle\neq 0 \tag{A.17}$$

他の期待値は 0 とする。

また、この時、考える Kähler potential と superpotential は次の通りである。

$$K = M^2\hat{K}(\Phi) + Z_{I\bar{I}}(\Phi)|Q^I|^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{M^2}\right) \tag{A.18}$$

$$W = \hat{W}(\Phi) + \frac{1}{3}Y_{IJk}Q^IQ^JQ^K \tag{A.19}$$

ここで、簡単のため、3 点相互作用に moduli 場依存性は無いとした。また、ここで

$$K_i = \frac{\partial K}{\partial \Phi^i} \tag{A.20}$$

等と表式を定義する。

また、この時、Kähler メトリックは次のように書ける。

$$K_{i\bar{j}} = M^2\hat{K}_{i\bar{j}} + |Q^I|^2\partial_i\partial_{\bar{j}}Z_{I\bar{I}} + \dots \tag{A.21}$$

$$K_{i\bar{I}} = Q^I\partial_i Z_{I\bar{I}} + \dots \tag{A.22}$$

$$K_{I\bar{I}} = Z_{I\bar{I}} + \dots \tag{A.23}$$

つまり、この係数が場の運動項に掛ることになる。よって、正準形に直すときは、この係数で場を再規格化する必要がある。

そしてその逆行列は次の通りである。

$$\begin{aligned}(K^{-1})^{i\bar{j}} = M^{-2}(\hat{K}^{-1})^{i\bar{j}} - M^{-4}[\ &|Q^I|^2\partial^i\partial^{\bar{j}}Z_{I\bar{I}} \\ &+ (\hat{K}^{-1})^{l\bar{j}}(\hat{K}^{-1})^{i\bar{m}}(\partial_l Z_{I\bar{J}})Z^{M\bar{J}}(\partial_{\bar{m}}Z_{M\bar{L}})Q^I\bar{Q}^{\bar{L}} + \dots\ ]\end{aligned} \tag{A.24}$$

$$(K^{-1})^{J\bar{i}} = -M^{-2}(\hat{K}^{-1})^{\bar{i}m}Z^{\bar{M}J}(\partial Z_{I\bar{M}})Q^I + \dots \tag{A.25}$$

$$(K^{-1})^{I\bar{J}} = Z^{I\bar{J}} + M^{-2}Z^{\bar{J}M}Z^{I\bar{P}}(K^{-1})^{l\bar{m}}(\partial_{\bar{m}}Z_{M\bar{L}})(\partial_l Z_{N\bar{P}})\bar{Q}^{\bar{L}}Q^N + \dots \tag{A.26}$$

$$Z^{I\bar{I}} = (Z_{I\bar{I}})^{-1} \tag{A.27}$$

この時、F-term scalar potential は次のように書ける。

$$\begin{aligned}V &= e^{K/M^2}[(WM^{-2}K_A + W_A)(K^{-1})^{A\bar{B}}(\bar{W}M^{-2}K_{\bar{B}} + \bar{W}_{\bar{B}}) - 3M^{-2}|W|^{-2}] \\ &= e^{\hat{K}}(1 + M^{-2}Z_{I\bar{I}}|Q^I|^2 + \dots) \\ &\quad \times [\ (WM^{-2}K_i + W_i)(K^{-1})^{i\bar{j}})(\bar{W}M^{-2}K_{\bar{j}} + \bar{W}_{\bar{j}}) \\ &\quad + (WM^{-2}K_i + W_i)(K^{-1})^{i\bar{J}})(\bar{W}M^{-2}K_{\bar{J}} + \bar{W}_{\bar{J}}) \\ &\quad + (WM^{-2}K_I + W_I)(K^{-1})^{I\bar{j}})(\bar{W}M^{-2}K_{\bar{j}} + \bar{W}_{\bar{j}}) \\ &\quad + (WM^{-2}K_I + W_I)(K^{-1})^{I\bar{J}})(\bar{W}M^{-2}K_{\bar{J}} + \bar{W}_{\bar{J}}) \\ &\quad - 3|W|^2M^{-2}\ ]\end{aligned} \tag{A.28}$$

ところでこの時、グラビティーノ mass は次のように与えられる。[4]

$$m_{3/2}^2 = \frac{e^{\hat{K}}|\hat{W}|^2}{M^4} \tag{A.29}$$

これはもちろん、期待値の意味である。ただしこの mass を定義する際、局所 SUSY 変換でグラビティーノの定義を変更している。（superHiggs 機構 [4]）

また、この時、moduli 場の F-term は

$$F_{\bar{i}} = -M^{-2} e^{\hat{K}/2}(\hat{W}\hat{K}_i + \hat{W}_i) \tag{A.30}$$

である。そしてこの時に、式（A.55）の定数項部分を見ると

$$V_0 = M^2(F_i(\hat{K}^{-1})^{i\bar{j}} F_{\bar{j}} - 3m_{3/2}^2) \tag{A.31}$$

となる。（moduli 場のみ期待値を持っていることを思い出すと良い。）

ここで、supergravity base で、global SUSY 部分（light mode のみの寄与）の F-term scalar potential は、式（A.55）の 6 行目を見るとよい。その中から、light mode のみの部分に注目すると、

$$e^{\hat{K}} W_I Z^{I\bar{J}} \bar{W}_{\bar{J}} \tag{A.32}$$

である。（$e^{\hat{K}}$ の因子はどうしても掛る。）よって、これを global SUSY F-term scalar potential と見直すと、

$$e^{\hat{K}} W_I Z^{I\bar{J}} \bar{W}_{\bar{J}} \to W_{Iglobal} Z^{I\bar{J}} \bar{W}_{\bar{J}global} \tag{A.33}$$

となる。よって、3 点 coupling が supergravity base と global SUSY base で、

$$Y^2 \to Y_{global}^2 = e^{\hat{K}} Y^2 \tag{A.34}$$

と、ずれることになる。

またここで、light mode の soft scalar mass を考える。この時は、$|Q^I|^2$ の項を見れば良い。結果、式（A.55）の 2 行目と、3 行目、そして 6 行目に注目すれば良い事になる。まず 2 行目からは、

$$(F_i F_{\bar{j}}(K^{-1})^{i\bar{j}} - 3m_{3/2}^2) Z_{I\bar{I}} |Q^I|^2 = V_0 Z_{I\bar{I}} |Q^I|^2 \tag{A.35}$$

そして 3 行目からは、$(K^{-1})^{i\bar{j}}$ の寄与から、

$$F_i F_{\bar{j}} \{-(\partial^i \partial^{\bar{j}} Z_{I\bar{I}}) + (\partial^{\bar{j}} Z_{I\bar{I}}) Z^{M\bar{L}} (\partial^i Z_{M\bar{I}})\} |Q^I|^2 \tag{A.36}$$

最後に 6 行目からは、$|WK_I|^2$ の寄与から、

$$e^{\hat{K}} \frac{|\hat{W}|^2}{M^4} Z_{I\bar{I}} |Q^I|^2 = m_{3/2}^2 Z_{I\bar{I}} |Q^I|^2 \tag{A.37}$$

また、今、light mode には Kähler メトリック $Z_{I\bar{I}}$ が掛っているので、soft scalar mass を考えるには、これを考慮しなければいけない。最終的に soft scalar mass は

$$m_I^2 = V_0 + m_{3/2}^2 - F_i F_{\bar{j}} R_{I\bar{I}}^{i\bar{j}} \tag{A.38}$$

と書ける。ここで、

$$R_{I\bar{I}}^{i\bar{j}} = (Z_{I\bar{I}})^{-1} \times \{\ (\partial^i \partial^{\bar{j}} Z_{I\bar{I}}) - (\partial^{\bar{j}} Z_{I\bar{I}}) Z^{M\bar{L}} (\partial^i Z_{M\bar{I}})\ \} \tag{A.39}$$

である。これは、場の Target space の曲率に対応している。

次に A-term（3 点 scalar 相互作用）を考える。これは式（A.55）の 3 行目と、5 行目を考えれば良い。3 行目からは、

$$\frac{1}{3}F^i K_i Y_{global\,IJK} Q^I Q^J Q^K \tag{A.40}$$

がでる。ただし、

$$F^i = (K^{-1})^{i\bar{j}} F_{\bar{j}} \tag{A.41}$$

である。そして、5 行目からは

$$-\frac{1}{3}F^i (Z^{\bar{M}L}\partial_i Z_{\bar{M}\,(\,I} Y_{global\,JK\,)}) Q^I Q^J Q^K \tag{A.42}$$

が出る。これ以外の項は $\mathcal{O}(1/M)$ となって、global SUSY limit（$M\to\infty$）で残らない。ただし、正準形にするには、

$$Y_{global\,IJK} \to \frac{Y_{global\,IJK}}{(Z_{I\bar{I}} Z_{J\bar{J}} Z_{k\bar{k}})^{1/2}} \equiv \tilde{Y}_{global\,IJK} \tag{A.43}$$

とするべきである。

ところで、もし Y_{IJK} に moduli 場依存性があれば

$$\frac{1}{3}F^i e^{\hat{K}/2}(\partial_i Y_{IJK}) Q^I Q^J Q^K \tag{A.44}$$

の項も出る。

そして、gaugino mass について考える。まず、gauge kinetic term は次のようなものである。

$$\mathcal{L}_{gk} = \frac{1}{4}\int d^2\theta f_{ab}(\Phi) W^{a\alpha} W^b_\alpha + \text{ h.c.} \tag{A.45}$$

$$\mathcal{L}_{gk} = -\frac{\mathrm{Re}f_{ab}}{4} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu b} - \frac{\mathrm{Im}f_{ab}}{8}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F^a_{\mu\nu} F^b_{\rho\sigma} - i\mathrm{Re}f_{ab}\lambda^a \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\lambda}^b + \frac{\mathrm{Re}f_{ab}}{2} D^a D^b \tag{A.46}$$

この時、gauge kinetic function を $f_{ab} = f_a \delta_{ab}$ として、soft term を見たいので、期待値を持つ部分のみに注目し、次のように展開する。

$$f_a = f_a(\Phi) + \theta^2 F_i \partial_i f_a(\Phi) \tag{A.47}$$

（moduli 場は chiral supermultiplet を組んでいる。）またこの時、

$$\frac{1}{4}W^{a\alpha} W^b_\alpha \supset \frac{1}{4}\lambda^{a\alpha}\lambda^b_\alpha \tag{A.48}$$

であることを考慮すると、gaugino mass は

$$M_a = \frac{F_i \partial_i f_a}{2\mathrm{Re}f_a} \tag{A.49}$$

となる。$\mathrm{Re}f_a$ で割っているのは、gaugino の運動項の規格化のためである。

また、b-term（2 点相互作用）は string 理論の範囲内では、かなり模型依存性が大きいので考えないことにする。

まとめ

ここでは $M=1$ と置いて書く。

- moduli 場の F-term

$$F_{\bar{i}} = -e^{\hat{K}/2}(\hat{W}\hat{K}_i + \hat{W}_i) \tag{A.50}$$

- グラビティーノ mass

$$m_{3/2}^2 = e^{\hat{K}}|\hat{W}|^2 = e^G \tag{A.51}$$

- 宇宙項

$$V_0 = (F_i(\hat{K}^{-1})^{i\bar{j}}F_{\bar{j}} - 3m_{3/2}^2) \tag{A.52}$$

- soft scalar mass

$$m_I^2 = V_0 + m_{3/2}^2 - F^i F^{\bar{j}} \partial_i \partial_{\bar{j}} (\ln K_{I\bar{I}}) \tag{A.53}$$

- gaugino mass

$$M_a = \frac{F_i \partial_i f_a}{2\mathrm{Re} f_a} \tag{A.54}$$

- A-term

$$\begin{aligned} h_{IJK} = Y_{global\,IJK} A_{IJK} = \frac{1}{3} Y_{global\,IJK} F^i \partial_i (\hat{K} - \ln K_{I\bar{I}} K_{J\bar{J}} K_{K\bar{K}}) \\ + F^i e^{\hat{K}/2} (\partial_i Y_{IJK}) \end{aligned} \tag{A.55}$$

ここで、規格化を

$$Y_{global\,IJK} \to \frac{Y_{global\,IJK}}{(Z_{I\bar{I}} Z_{J\bar{J}} Z_{k\bar{k}})^{1/2}} \equiv \tilde{Y}_{global\,IJK} \tag{A.56}$$

と考えると、A_{IJK}（A-term）には影響はない。

これらの公式自体は、模型によらないので有用である。

参考文献

[1] H. Kawai, D. C. Lewellen and S. H. Tye, Nucl. Phys. B **288**, 1 (1987).

[2] D. Gepner and E. Witten, Nucl. Phys. B **278**, 493 (1986).
D. Gepner, Nucl. Phys. B **296**, 757 (1988).

[3] J. Polchinski, "String Theory I,II," Cambridge University Press.

[4] D.Bailin , A.Love, Supersymmetric Gauge Field Theory and String Theory, IOP Publishing,Amsterdam, 1994

[5] J. Scherk and J. H. Schwarz, Phys. Lett. B **82**, 60 (1979).
J. Scherk and J. H. Schwarz, Nucl. Phys. B **153**, 61 (1979).

[6] A. Sagnotti, Phys. Lett. B **294**, 196 (1992) [arXiv:hep-th/9210127].
G. Aldazabal, A. Font, L. E. Ibanez and G. Violero, Nucl. Phys. B **536**, 29 (1998) [arXiv:hep-th/9804026].

[7] L. E. Ibanez, C. Munoz and S. Rigolin, Nucl. Phys. B **553**, 43 (1999) [arXiv:hep-ph/9812397].

[8] I. Antoniadis and B. Pioline, arXiv:hep-ph/9906480.
I. Antoniadis, S. Dimopoulos and A. Giveon, JHEP **0105**, 055 (2001) [arXiv:hep-th/0103033].

[9] T. Kobayashi and H. Nakano, Nucl. Phys. B **496**, 103 (1997) [arXiv:hep-th/9612066].

[10] M. B. Green and J. H. Schwarz, Phys. Lett. B **149**, 117 (1984).
M. B. Green and J. H. Schwarz, Phys. Lett. B **151**, 21 (1985).
M. B. Green and J. H. Schwarz, Nucl. Phys. B **255**, 93 (1985).
M. B. Green, J. H. Schwarz and P. C. West, Nucl. Phys. B **254**, 327 (1985).
S. Ferrara and M. Villasante, Phys. Lett. B **186**, 85 (1987).
G. Lopes Cardoso and B. A. Ovrut, Nucl. Phys. B **369**, 351 (1992).
A. Sagnotti, Phys. Lett. B **294**, 196 (1992) [arXiv:hep-th/9210127].
F. Gonzalez-Rey, arXiv:hep-th/9602178.

[11] M. Dine, N. Seiberg and E. Witten, Nucl. Phys. B **289**, 589 (1987).
M. Dine, I. Ichinose and N. Seiberg, Nucl. Phys. B **293**, 253 (1987).
J. J. Atick, L. J. Dixon and A. Sen, Nucl. Phys. B **292**, 109 (1987).

[12] C.D. Froggatt and H.B. Nielsen, Nucl. Phys. **B147** (1979) 277.

[13] S. Groot Nibbelink, H. P. Nilles and M. Olechowski, Phys. Lett. B **536**, 270 (2002) [arXiv:hep-th/0203055].

S. Groot Nibbelink, H. P. Nilles and M. Olechowski, Nucl. Phys. B **640**, 171 (2002) [arXiv:hep-th/0205012].

[14] H. Abe, T. Higaki and T. Kobayashi, arXiv:hep-th/0210025.

[15] E. Witten, Phys. Lett. B **155**, 151 (1985).

[16] L. J. Dixon, D. Friedan, E. J. Martinec and S. H. Shenker, Nucl. Phys. B **282**, 13 (1987).

[17] D. Bailin, A. Love and W. A. Sabra, Phys. Lett. B **311**, 110 (1993) [arXiv:hep-th/9304066].

D. Bailin, A. Love and W. A. Sabra, Nucl. Phys. B **416**, 539 (1994) [arXiv:hep-th/9307172].

[18] L. E. Ibanez, Phys. Lett. B **181**, 269 (1986).

J. A. Casas and C. Munoz, Nucl. Phys. B **332**, 189 (1990) [Erratum-ibid. B **340**, 280 (1990)].

[19] L. J. Dixon, V. Kaplunovsky and J. Louis, Nucl. Phys. B **329**, 27 (1990).

D. Bailin, S. K. Gandhi and A. Love, Phys. Lett. B **269**, 293 (1991).

D. Bailin and A. Love, Phys. Lett. B **267** (1991) 46.

[20] E. Cremmer, S. Ferrara, C. Kounnas and D. V. Nanopoulos, Phys. Lett. B **133**, 61 (1983).

[21] S. Ferrara, C. Kounnas and M. Porrati, Phys. Lett. B **181**, 263 (1986).

S. Ferrara, L. Girardello, C. Kounnas and M. Porrati, Phys. Lett. B **192**, 368 (1987).

S. Ferrara, L. Girardello, C. Kounnas and M. Porrati, Phys. Lett. B **194**, 358 (1987).

[22] S. Cecotti, S. Ferrara and L. Girardello, Phys. Lett. B **213**, 443 (1988).

S. Cecotti, S. Ferrara and L. Girardello, Nucl. Phys. B **308**, 436 (1988).

M. Cvetic, J. Louis and B. A. Ovrut, Phys. Lett. B **206**, 227 (1988).

M. Cvetic, J. Molera and B. A. Ovrut, Phys. Rev. D **40**, 1140 (1989).

M. Cvetic, B. A. Ovrut and W. A. Sabra, Phys. Lett. B **351**, 173 (1995) [arXiv:hep-th/9502144].

[23] L. E. Ibanez and D. Lust, Nucl. Phys. B **382**, 305 (1992) [arXiv:hep-th/9202046].

[24] D.E. Kaplan, G.D. Kribs and M. Schmaltz, Phys. Rev. **D62** (2000) 035010;
Z. Chacko, M.A. Luty, A.E. Nelson and E. Ponton, JHEP **0001** (2000) 003.

[25] L. Randall and R. Sundrum, Nucl. Phys. **B557** (1999) 79;
G.F. Giudice, M.A. Luty, H. Murayama and R. Rattazzi, JHEP **9812** (1998) 27.

[26] N. Arkani-Hamed and H. Murayama, JHEP **0006**, 030 (2000) [arXiv:hep-th/9707133].

[27] G. Veneziano and S. Yankielowicz, Phys. Lett. B **113**, 231 (1982).

[28] T. Kugo and S. Uehara, Nucl. Phys. B **222**, 125 (1983).
E. Cremmer, S. Ferrara, L. Girardello and A. Van Proeyen, Phys. Lett. B **116**, 231 (1982).

[29] S. Ferrara and B. Zumino, Nucl. Phys. B **87**, 207 (1975).

[30] J. P. Derendinger, S. Ferrara, C. Kounnas and F. Zwirner, Nucl. Phys. B **372**, 145 (1992).

[31] S. Ferrara, D. Lust, A. D. Shapere and S. Theisen, Phys. Lett. B **225**, 363 (1989).
S. Ferrara, .. D. Lust and S. Theisen, Phys. Lett. B **233**, 147 (1989).
S. Ferrara, N. Magnoli, T. R. Taylor and G. Veneziano, Phys. Lett. B **245**, 409 (1990).

[32] B. de Carlos, J. A. Casas and C. Munoz, Nucl. Phys. B **399**, 623 (1993) [arXiv:hep-th/9204012].

[33] B. de Carlos, J. A. Casas and C. Munoz, Phys. Lett. B **263**, 248 (1991).
J. A. Casas, Z. Lalak, C. Munoz and G. G. Ross, Nucl. Phys. B **347**, 243 (1990).

[34] D. Lust and T. R. Taylor, Phys. Lett. B **253**, 335 (1991).

[35] A. Font, L. E. Ibanez, D. Lust and F. Quevedo, Phys. Lett. B **245**, 401 (1990).
M. Cvetic, A. Font, L. E. Ibanez, D. Lust and F. Quevedo, Nucl. Phys. B **361**, 194 (1991).

[36] K. A. Intriligator and N. Seiberg, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **45BC**, 1 (1996) [arXiv:hep-th/9509066].

[37] I. Affleck, M. Dine and N. Seiberg, Nucl. Phys. B **256**, 557 (1985).

[38] J. A. Casas, Phys. Lett. B **384**, 103 (1996) [arXiv:hep-th/9605180].
P. Binetruy, M. K. Gaillard and Y. Y. Wu, Phys. Lett. B **412**, 288 (1997) [arXiv:hep-th/9702105].
P. Binetruy, M. K. Gaillard and Y. Y. Wu, Nucl. Phys. B **481**, 109 (1996) [arXiv:hep-th/9605170].

[39] Z. Lalak, A. Niemeyer and H. P. Nilles, Nucl. Phys. B **453**, 100 (1995) [arXiv:hep-th/9503170].

Z. Lalak, A. Niemeyer and H. P. Nilles, Phys. Lett. B **349**, 99 (1995) [arXiv:hep-th/9410205].

[40] G. Aldazabal, A. Font, L. E. Ibanez and G. Violero, Nucl. Phys. B **536**, 29 (1998) [arXiv:hep-th/9804026].

[41] G. Aldazabal, S. Franco, L. E. Ibanez, R. Rabadan and A. M. Uranga, JHEP **0102**, 047 (2001) [arXiv:hep-ph/0011132].

G. Aldazabal, S. Franco, L. E. Ibanez, R. Rabadan and A. M. Uranga, J. Math. Phys. **42**, 3103 (2001) [arXiv:hep-th/0011073].

[42] L. E. Ibanez, arXiv:hep-ph/9905349.

[43] L. E. Ibanez, R. Rabadan and A. M. Uranga, Nucl. Phys. B **576**, 285 (2000) [arXiv:hep-th/9905098].

[44] K. Choi, H. B. Kim and C. Munoz, Phys. Rev. D **57**, 7521 (1998) [arXiv:hep-th/9711158].

[45] J. Polchinski, arXiv:hep-th/9611050.

D. Lust and T. R. Taylor, Phys. Lett. B **253**, 335 (1991).

[46] T. R. Taylor, Phys. Lett. B **252**, 59 (1990).

[47] D. Bailin and A. Love, Phys. Rept. **315** (1999) 285.