平成 14 年度

修士論文題目

Twistor theory による Harmonic map と Self-Dual Yang-Mills 方程式の関係付け およびパラメータ空間のトーラスへの拡張について

学生番号　45 - 16026

フリガナ　ナカタ フミノリ

氏　名　中田 文憲

論文の要旨

この論文は以下の四つの章により構成されている．各章の内容についてその要旨をまとめる．
第 1 章　Harmonic map
第 2 章　Regular Twistor theory
第 3 章　Indefinite Twistor theory
第 4 章　Real structure

第 1 章では, Atiyah による ”Real Category” を念頭に複素多様体の実構造を定義したのち, Riemann 面からユニタリー群への Harmonic map に関して知られていることをまとめる．具体的には, Uhrenbeck による Extended Harmonic map や, Dressing transformation と呼ばれる Extended Harmonic map の空間への Loop 群の作用についてである．

第 2 章では, Atiyah-Hitchin-Singer の Twistor 理論を $\mathbb{R}^4$ 上の場合に詳しく解説し, その周辺のことがらについてまとめる．具体的には以下の通りである．

前半では以下の手順によって $\mathbb{R}^4$ 上の Twistor 空間 $\mathcal{T}$ を構成する．これは一般に良く知られた内容であるが, 第 3 章においてそのアナロジーを展開するための準備として丁寧にまとめた．

- スタンダードな計量と向きを持つ四次元実ベクトル空間に対し, その計量と向きを保つ複素構造全体は等質空間 $\mathrm{SO}(4)/\mathrm{U}(2)$ でパラメトライズされることを見る．
- 四元数体を用いて構成される二つの表現 $\rho_\pm : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(4)$ を使った議論で, $\mathrm{SO}(4)/\mathrm{U}(2)$ が複素射影空間 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ と微分同相であることを見る．またこの空間の実構造について調べる．
- 上の結果を利用して直積空間 $\mathcal{T} = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ に複素構造を導入し, Twistor 空間を定義する．
- さらに, Atiyah-Ward による, 四元数体から直接 $\mathcal{T}$ を構成する方法について解説し, 両者が同じものであることを確認する．

次に, こうして構成した Twistor 空間の応用といえる, 以下の事柄についてまとめる．

- Atiyah-Hitchin-Singer による定理, すなわち $\mathbb{R}^4$ 上の Anti-Self-Dual Yang-Mills 方程式が, $\mathcal{T}$ 上へ引き戻すことで複素構造の可積分条件として表されることを具体的に見る．さらに, 具体的な表示を用いて, ”Extended solution” を定義する．
- 「Loop 群の分解」の立場から Extended solution への Loop 群の ”作用” を定義する．「Loop 群の分解」は一般には成立しない可能性があることと, 成立するとしてもなお ambiguity が残っているため, この ”作用” は不完全なものである．しかし, Crane によって既に指摘されている ”generalized solution” への作用は, この不定性を排除したものであることを示す．
- ASD Yang-Mills 方程式を二次元へ reduction すると, Hitchin の Self-Duality 方程式と呼ばれるものが現れることが知られている．そこで, Self-Duality 方程式に対する Extended solution を定義し, それは上で定義した ASD Yang-Mills 方程式に対する Extended solution から reduction によって得られることを見る．

第 3 章では, 符号 $(2,2)$ の不定値な計量を持つ Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{2,2}$ に対し, 第 2 章のアナロジーを展開する．まず, 以下の手順によって $\mathbb{R}^{2,2}$ 上の Twistor 空間 $\mathcal{T}$ を構成する．

- 符号 $(2,2)$ の不定値な計量と向きを持つ四次元実ベクトル空間に対し, 計量と向きを保つ複素構造全体は等質空間 $\mathrm{SO}(2,2)/\mathrm{U}(1,1)$ でパラメトライズされることを見る．

- 四元数体に類似した環を用いて構成される二つの表現 $\rho_\pm : \mathrm{SU}(1,1) \to \mathrm{SO}(2,2)$ を使った議論で, $\mathrm{SO}(2,2)/\,\mathrm{U}(1,1)$ が "二葉双曲面" $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 - S^1$ と微分同相であることを見る. またこの空間の実構造について調べる.
- 上の結果を利用して $T = \mathbb{R}^4 \times (\mathbb{C}\mathrm{P}^1 - S^1)$ に複素構造を導入し, Twistor 空間を定義する.
- さらに, 上で登場した四元数体に類似した環を用いると, Atiyah-Ward の構成をまねて, Twistor 空間 T を直接構成することもできることを示す.

なお, 四元数体に類似した環とは, $\mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(1,1)$ に自然な積構造を導入して得られるものであり, これは四元数体が $\mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(2)$ に自然な積構造を導入して得られることのアナロジーである.

次に, こうして構成した Twistor 空間の応用といえる, 以下の事柄についてまとめる. 議論は引き続き第 2 章のアナロジーである.

- $\mathbb{R}^{2,2}$ 上の Self-Dual Yang-Mills 方程式が, T 上へ引き戻すことで複素構造の可積分条件として表されることを具体的に見る. さらに, 具体的な表示を用いて, "Extended solution" を定義する.
- Loop 群の分解定理を用いて, Extended solution の空間への Loop 群の作用を定義する. 第 2 章の場合と異なり, Loop 群の分解定理が確立されているので, こちらは完全な作用を得る.
- 上で定義した SD Yang-Mills 方程式に対する Extended solution を二次元へ reduction することによって, Extended Harmonic map が得られることを見る. このとき上の Loop 群の作用は Dressing transformation に対応している.

Hitchin は, $\mathbb{R}^{2,2}$ 上の SD Yang-Mills 方程式を reduction すると Self-Duality 方程式を少し変形させた方程式が得られ, それが Harmonic map に対応することを指摘している. 上の事柄は, この Hitchin の指摘をパラメータつきの世界に持ち上げ, Loop 群の作用を構成したものであるといえる.

第 4 章では, 「実構造」というキーワードから出発し, 上記の事柄を再構築することを目標とした内容である. まず, 主ファイバー束およびベクトル束の (基点つき) 実構造を定義し, $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 上ではそれが自明なものしかないことを示す. 次に, 実構造を許容する Riemann 面の例として「長方形トーラス」T に注目し, T 上のバンドルの実構造の分類定理を与える. この分類定理は次の二段階で記述される.

- T 上の実構造を許容するベクトル束は, 特定の形の直線束の直和にかかれる.
- 実構造を許容するベクトルを指定したとき, そのバンドルに入る実構造のパラメーター空間は, 上の直和分解の成分に応じた旗多様体に等しい.

続いて, Loop 群と実構造の関係を調べる. まず, Loop 群の元をはりあわせ関数に用いて, 実構造をもつバンドルを構成する方法について, $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 上の場合を例に出して説明し, 先ほどの結果と合わせ, $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 上の Loop 群の分解定理の証明を与える. また長方形トーラス T の場合に, 特定のはりあわせ方法のもと, Loop 群とその元によって定まる実構造つきバンドルとの対応を調べる. 具体的には, 次の場合に対応する実構造を完全に決定した.

- 階数 1, すなわち直線束の場合
- Loop 群の元として定値なものを考えた場合

一般の Loop 群の元に対して定まる実構造つきバンドルを決定するのは極めて難しい問題であるが, そのかわりに, T 上のあらゆる実構造つきバンドルは, Loop によるはりあわせによって構成できること (Loop 群による実構造の実現定理) を証明した.

最後に, 底空間が $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ とは限らない一般の実構造つきバンドルを用いて, Extended Harmonic map の一般化をすることについて考察する. この枠組みはまだ完成していないが, 長方形トーラス上の自明でない実構造つきバンドルを用いて, $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 上では起きない例を構成した. それは, 二つの異なる Reality を持つ Harmonic map をつなぐという例である.

Twistor theory による Harmonic map と Self-Dual Yang-Mills 方程式の関係付け および パラメータ空間のトーラスへの拡張について

中田 文憲

平成 15 年 1 月

Introduction

Riemann 面から Lie 群 (特にユニタリー群) への Harmonic map は Uhrenbeck などによって詳しく研究されており, 特に参考文献 [13] において Self-Dual Yang-Mills 方程式との関係が指摘されている. 具体的には, 通常の四次元 Riemann 多様体上の Self-Dual Yang-Mills 方程式ではなく, 符号 (2,2) の不定値な計量を持つ四次元多様体上のそれを, 2 次元だけ reduction すると, すなわち 2 次元方向は平行移動で不変として, 残りの 2 次元方向に関する方程式を導くと, ([12] で導入されている) Extended Harmonic map が得られる, という内容である. これらの関係を見い出すための重要なポイントは, Self-Dual Yang-Mills 方程式と Harmonic map の方程式が, どちらも "スペクトルパラメータ" を含む Lax 方程式としてかかれるという点である.

一方, Atiyah-Hitchin-Singer は四次元 Riemann 多様体上の Twitor 空間を構成し, これを用いて Self-Dual Yang-Mills 方程式を Twistor 空間上の可積分条件として書き直すことを行っているが, これは上に述べた Lax 方程式に幾何学的な意味を与えている, と解釈することができる.

そこで, Uhrenbeck の仕事に対する幾何学的解釈を与え, その内容をより深く掘り下げるという立場に立ったとき, 以下のような課題が提起される:

1. 符号 (2,2) の不定値な計量を持つ多様体上の Self-Dual Yang-Mills 方程式に対して, Twistor 空間を構成し Lax 方程式に幾何学的な意味を与える. また, その reduction として Extended Harmonic map にも幾何学的な意味を与える.

2. 通常の Self-Dual Yang-Mills 方程式を reduction すると, Hitchin の Self-Duality 方程式とよばれる方程式が得られることが知られているが ([7]), 通常の (Atiyah らによる) Twistor 空間上の可積分条件を reduction して得られる "Extended Solution" と, Self-Duality 方程式との関係を明らかにする.

3. Atiyah-Hitchin-Singer の Twistor theory を用いると, (Anti-)Self-Dual 接続の空間への (ある意味で不完全な) Loop 群の作用が構成できることが知られている ([5]). 一方で Dressing transformation と呼ばれる Extended Harmonic map の空間への Loop 群の作用が存在することも知られている ([6],[12]). 上の枠組みのなかで, これらの作用の関係を調べる.

これらの課題を解決するとともに, 下の表にある各項目の関係を整理することがこの論文の一つ目の主題である. 結論を言うと, Euclid 平面に標準的な計量を入れた場合について, 上記の課題は解決された. このとき, Indefinite version の Twistor 空間は, 通常の場合のそれと完全に平行した, しかし興味深い相違点をもつ議論によって構成することが可能であることがわかる. そしてこれは一般の多様体上へ議論が拡張されるであろうことを強く感じさせるものである.

	Definite		Indefinite (符号 (2,2))	
パラメータつきの世界	Regular Twistor theory (4+2 次元)	"Extended solution" (2+2)	EH map (2+2)	Indefinite Twistor theory (4+2)
現象の起きる世界	SDYM 方程式 (4)	Hitchin の SD 方程式 (2)	Harmonic map 方程式 (2)	Indefinite SDYM 方程式 (4)

$\rightarrow$ reduction　　$\leftarrow$ reduction

ところで, この表における各「パラメータつきの世界」は「実構造」と呼ばれるべき involution を先天的に持っている. Definite/Indefinite の各ケースの違いはこの実構造の違いとして顕著に現れる. 具体的には, どちらのケースにおいてもパラメータは複素射影直線 $\mathbb{P}^1$ の点として捉えられるのであるが, Indefinite の場合では involution は固定点をもち, Definite の場合では固定点をもたない, というのがその違いである. Indefinite の場合においては固定点が存在することが, Harmonic map が登場する土壌を与えるという構図になっている.

また, Extended Harmonic map への Loop 群の作用を考える際において, この「実構造」は極めて重要な役割を果たす. 実構造に関する対称性を仮定することで, Loop 群の分解定理が得られ, これを用いて作用が定義されているからである.

この論文の二つ目の主題は, この実構造から出発して Twistor theory をみなおす, ということである. すなわち, Definite/Indefinite の二つの Twistor theory におけるパラメータはそれぞれ (複素構造のパラメータ空間であるという) 幾何学的な意味を持って導入される物であるが, その幾何的意味を一度忘れ, "実構造" に注目して議論を進めることで Twistor theory や Harmonic map, あるいはそれらへの Loop 群の作用に関する新しい情報を得ようということである.

ここで言う「実構造」とは, Atiyah ([2]) による "Real category" によって捉えられるものに他ならないのであるが, この論文では「基点つきの状況」を導入し, ここに重点をおいて議論を進める. 「実構造の定式化」は一般の Riemann 面上で行うが, それ以外の議論は基本的に複素射影直線 $\mathbb{P}^1$ およびある種の複素トーラス T に限り, それらの上での実構造をもつバンドルの分類定理や, Loop 群との対応などに関するいくつかの結果を得る. これらの結果は「二つ目の主題」を実行するための足掛かりとなるものであると考えているが, Twistor theory の一般化といったようなストーリーは, まだできあがっていない. しかし Harmonic map をめぐる一連の議論の拡張に関する考察を行い, いくつかの興味深い例が観察されたので, これらについても説明する.

以下, 論文の構成について簡単に説明する.

第 1 章では, Harmonic map に関して知られていることを, 実構造に注目してまとめる. 第 2 章では, 標準的な計量を持つ四次元 Euclid 空間上の Twistor 空間を, その幾何学的性質を前面に出しながら構成し, 実際に Anti-Self-Dual Yang-Mills 方程式が複素構造の可積分条件と同値であることを確認する. ここまでは既に知られている内容を (後の議論とフィットする形で) まとめたものであると言える. 第 2 章の残りでは, ASD Yang-Mills 方程式の $\mathbb{R}^4$ 上での具体的な表示をもとに Extended solution を定義し, Loop 群の作用や Hitchin の Self-Duality 方程式との関連を調べる.

第 3 章では, 第 2 章の流れに沿って, 符号 (2,2) の不定値な計量をもつ四次元 Minkowski 空間上の Twistor 空間を構成する. 興味深いことに, 議論は完全に平行しており, 通常の Twistor theory に登場するあらゆる対象に, ことごとく対応物が見つかる. その最も重要なものとして, Indefinite な Self-Dual Yang-Mills 方程式がやはり複素構造の可積分条件と同値になる, という定理を証明する. また, やはり具体的な表示をもとに Extended solution を定義し, Loop 群の作用を構成する. さらにこれを reduction することによって, Extended Harmonic map が得られることを見る.

ここまでが一つ目の主題に関する内容であり, 二つ目の主題に関して第 4 章で議論する. 内容は既に述べた通りであるが, まず主ファイバー束およびベクトル束の実構造について定式化した後, $\mathbb{P}^1$ および長方形トーラス T 上における, それらの分類定理を確立する. 続いて Loop 群とバンドルの実構造との対応を詳しく調べ, その応用として $\mathbb{P}^1$ 上での Loop 群の分解定理が証明されることも見る. 最後に T 上の実構造に関して得た結果を応用して Harmonic map の拡張にあたる概念を得る試みについて説明し, 実際に観察される例を示す. 特にこれまでの $\mathbb{P}^1$ での議論では起きなかった現象として, T 上の自明でないバンドルを用いると, 二つの異なる "Reality" をもつ Harmonic map をつなぐ, という例が構成できることを見る.

目 次

第1章　Harmonic map

Harmonic map について知られているいくつかの事柄 (c.f.[6][12]) は, Atiyah が参考文献 [2] において指摘している "Real Category" と非常に相性が良い. この章では, Harmonic map に関連して知られていることを, "Reality" というキーワードに基づいてまとめる. なお, Atiyah も指摘しているファイバー束の実構造については第 4 章で詳しく扱うことにする.

1.1　Reality condition と拡張された Loop 群

まず始めに, 実構造についてカテゴリカルにまとめることから始める.

Definition 1.1.1. **実構造をもつ複素多様体**とは, 複素多様体 X と, X の反正則な involution σ_X (すなわち反正則な自己同型であって ${\sigma_X}^2$ は恒等写像であるもの) の組 (X, σ_X) のことをいう. σ_X を X の**実構造 (real structure)** などと呼び, また σ_X によって不変な点を**実点 (real point)** と呼ぶ. さらに実点全体の集合を $X_{\mathbb{R}}$ と書き, X の**実部 (real part)** と呼ぶ. ($X_{\mathbb{R}}$ は空集合である場合もある.)

Definition 1.1.2. **基点つきの実構造をもつ複素多様体**とは, 実構造をもつ複素多様体 (X, σ_X) にさらに基点 $* \in X_{\mathbb{R}}$ を指定した組 $(X, \sigma_X, *)$ のことをいう. 従って, 基点つきで考える場合, 実構造 σ_X は常に固定点をもつとして考える.

Example 1.1.3. 次は, 実構造をもつ複素 Lie 群の例である.

$$\begin{array}{cccc} G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) & \sigma_G : G \longrightarrow G & \multirow{2}{*}{このとき} & G_{\mathbb{R}} = \mathrm{U}(n) \\ (\text{resp. } \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})) & g \longmapsto g^{*-1} & & (\text{resp. } \mathrm{SU}(n)) \end{array}$$

このとき, Lie 環にも以下の実構造が誘導される.

$$\begin{array}{cccc} \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) & \sigma_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} & \text{このとき} & \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{u}(n) \\ (\text{resp. } \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})) & X \longmapsto -X^* & & (\text{resp. } \mathfrak{su}(n)) \end{array}$$

特に $n = 1$ のとき $G = \mathbb{C}^*, G_{\mathbb{R}} = \mathrm{U}(1)$ となる.

Remark 1.1.4. 後に表立って使うことはないが, 複素 Lie 群に対する実構造といったとき, involution は群の自己同型となるものを考えると都合が良く, 上の例では実際にそうなっている. この場合, 単位元は常に不動点であるから実部は空でなく, 自然な基点として単位元がとれることがわかる. Lie 環についても同様である.

次に, 実構造をもつ 2 つの複素多様体 $(X, \sigma_X), (Y, \sigma_Y)$ の間の射について考える.

Definition 1.1.5. 正則写像 $f : X \to Y$ に対して, その双対 $f^\vee : X \to Y$ を次によって定める:

$$f^\vee(x) = \sigma_Y(f(\sigma_X(x))). \tag{1.1}$$

Remark 1.1.6. $f^\vee$ は [2] において $\bar{f}$ と表されているものに等しいが, ただの複素共役と紛らわしいので, この論文では $f^\vee$ の表記を用いる.

定義より $(f^\vee)^\vee = f$ であり, 双対写像をとる対応:

$$f \in \mathrm{Map}(X,Y) \longmapsto f^\vee \in \mathrm{Map}(X,Y) \tag{1.2}$$

は写像の空間 $\mathrm{Map}(X,Y)$ 上の実構造と考えることができる. 従って「Real な写像」を考えることができる.

Definition 1.1.7. 正則写像 $f : X \to Y$ が $f^\vee = f$, すなわち

$$f(\sigma_X(x)) = \sigma_Y(f(x)) \qquad {}^\forall x \in X \tag{1.3}$$

をみたすとき, f は **$\mathbb{R}$-condition** をみたす, とよぶことにする.

Definition 1.1.8. $(X, \sigma_X, *_X), (Y, \sigma_Y, *_Y)$ を, 基点つきの実構造をもつ二つの複素多様体とする. 正則写像 $f : X \to Y$ が**基点つき $\mathbb{R}$-condition** をみたすとは, f が $\mathbb{R}$-condition をみたし, さらに基点を保つこととする.

つまり (基点つきの) 実構造をもつ対象の間の射とは, (基点と) 実構造を保つものであると定め, この性質を (基点つき) $\mathbb{R}$-condition と呼ぶことにしたわけである. $f : X \to Y$ が (基点つき) $\mathbb{R}$-condition をみたすとき, 制限によって (基点を保つ) 写像 $f_\mathbb{R} : X_\mathbb{R} \to Y_\mathbb{R}$ が誘導される. この論文全体を貫くスローガンのひとつは, 実構造の実部に Harmonic な現象を捉えるということである.

Lie 群 G に対する loop 群を, $\Lambda G := \{\gamma : \mathrm{U}(1) \to G \mid C^\infty\text{-map}\}$ により定義する. ΛG は群をなし, その積は

$$(\gamma \cdot \delta)(\lambda) = \gamma(\lambda) \cdot \delta(\lambda) \qquad \gamma, \delta \in \Lambda G,\ \lambda \in \mathrm{U}(1)$$

で与えられる. また Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対する loop algebra を $\Lambda\mathfrak{g} := \{f : \mathrm{U}(1) \to \mathfrak{g} \mid C^\infty\text{-map}\}$ により定義する. 上と同様の方法で $\Lambda\mathfrak{g}$ は Lie 環の構造を持つ.

ここで loop 群の拡張として C^∞(resp. 複素)-多様体 X に対し

$$\Lambda_X G := \left\{\gamma : X \to G \;\middle|\; C^\infty(\text{resp. 正則})\text{-写像}\right\} \tag{1.4}$$

とおく. $\Lambda_X G$ も同様に群構造を持っている. この拡張された loop 群にさらに付加構造を考えよう.

まず, 多様体 X が基点をもっていたとする. G は単位元 I を自然な基点としてもっているので, 基点を保つ loop 群

$$\Lambda_X^1 G := \left\{\gamma \in \Lambda_X G \;\middle|\; \gamma \text{ は基点を保つ}\right\} \tag{1.5}$$

を考えることができる. $X = \mathrm{U}(n)$ の場合, これは通常 ΩG と表記されるものに等しい.

次に X, G がそれぞれ実構造をもつとき,

$$\Lambda_{X,\mathbb{R}} G := \left\{\gamma \in \Lambda_X G \;\middle|\; \gamma \text{ は } \mathbb{R}\text{-condition をみたす}\right\} \tag{1.6}$$

とおく. 先程の注意から, 制限によって定まる自然な写像

$$\Lambda_{X,\mathbb{R}} G \longrightarrow \Lambda_{X_\mathbb{R}} G_\mathbb{R} \tag{1.7}$$

が存在する. 特に $X=\mathbb{C}^*$ のときは, $X_{\mathbb{R}}=\mathrm{U}(1)$ となるので上の写像の target は通常の loop 群 $\Lambda G_{\mathbb{R}}$ となることに注意する.

上の二つの状況を組み合わせると, 基点つきの実構造の場合が得られる. すなわち, X, G がそれぞれ基点つきの実構造をもっているとき,

$$\Lambda^1_{X,\mathbb{R}}G := \left\{\gamma \in \Lambda_X G \;\middle|\; \gamma \text{ は基点つき } \mathbb{R}\text{-condition をみたす}\right\} \tag{1.8}$$

を考えることができる. 群 $\Lambda^1_{X,\mathbb{R}}G$ は I への定値写像を単位元としてもっているが, これは $\Lambda^1_{X,\mathbb{R}}G$ の基点と見なすことができる.

1.2 Extended Harmonic map

ここでは Harmonic map の研究において Uhrenbeck らによって導入された, Extended Harmonic map の概念を $\mathbb{R}$-condition を意識しながらまとめる. ([6][12])

以下, $G=\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ (または $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$) で考え, Example 1.1.3 と同じ実構造 σ_G を用いる. また, M を $\mathbb{C}$ の連結単連結領域とする. ($\mathbb{C}$ の座標として z を用いる.)

Definition 1.2.1. C^∞-写像 $\phi : M \to G_{\mathbb{R}}$ が **Harmonic** であるとは, 次をみたすこと:

$$\left(\phi^{-1}\phi_z\right)_{\bar{z}} + \left(\phi^{-1}\phi_{\bar{z}}\right)_z = 0. \tag{1.9}$$

今, 任意の C^∞-写像 $\phi : M \to G_{\mathbb{R}}$ をとり, C^∞-写像 $A, B : M \to \mathfrak{g}$ を,

$$A = \frac{1}{2}\,\phi^{-1}\phi_z, \qquad B = \frac{1}{2}\,\phi^{-1}\phi_{\bar{z}} \tag{1.10}$$

によって定めよう. 複素微分によって A, B の値域は $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ からはみだすが, ϕ が $G_{\mathbb{R}}$ 値であることから, 次の Reality condition が成り立つ:

$$B = \sigma_{\mathfrak{g}}(A), \tag{1.11}$$

実際

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathfrak{g}}(A) &= -\frac{1}{2}(\phi^{-1}\phi_z)^* = -\frac{1}{2}(\phi^*)_{\bar{z}}\cdot(\phi^{*-1})\\ &= -\frac{1}{2}(\phi^{-1})_{\bar{z}}\cdot\phi = \frac{1}{2}\phi^{-1}\phi_{\bar{z}}\\ &= B.\end{aligned}$$

一方, ϕ が Harmonic であるか否かに関わらず, 恒等式 $A_{\bar{z}} - B_z = 2[A, B]$ が成り立つことが, (1.10) から直接示される. 逆に, 与えられた A, B に対してこの方程式がなりたつとき, ある C^∞-写像 $\phi : M \to G$ が存在し (1.10) をみたす, ということを接続を用いた議論によって, 示すことができる. 特に (1.11) も成立するならば, ϕ は値が $\Gamma_{\mathbb{R}}$ に入るようにとれる (c.f.[6]).

したがって Harmonic equation は, (1.11) および次の連立方程式で特徴づけられる:

$$\begin{aligned}&A_{\bar{z}} + B_z = 0\\ &A_{\bar{z}} - B_z = 2\,[A, B].\end{aligned} \tag{1.12}$$

ここで, $\lambda \in \mathbb{C}^*$ をパラメータとする M 上の 1-form

$$\alpha_\lambda = \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) A\ dz + (1-\lambda) B\ d\bar{z} \tag{1.13}$$

を考えよう. 標準的な対応で $\{\alpha_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{C}^*}$ は自明な主 G 束 $M \times G$ の接続の族と考えることができ, また $\alpha_1 = 0$ である.

Remark 1.2.2. 方程式 (1.9) は複素座標の取り方によらず意味を持つため, 一般の Riemann 面上で Harmonic map を定義することができる. このとき, A, B は大域的に定義できないが, $Adz, Bd\bar{z}$ は大域的に定義できる. よって α_λ も大域的に定義できる.

Proposition 1.2.3. ϕ が *Harmonic* であることと次は同値 :

$$d\alpha_\lambda + \alpha_\lambda \wedge \alpha_\lambda = 0 \quad i.e. \quad \alpha_\lambda \text{ は } {}^\forall\lambda \in \mathbb{C}^* \text{ で } \textit{flat}.$$

証明は上の方程式が連立方程式 (1.12) と同値であることを言えば良く, 直接の計算で確かめられる. なお, d は M 上の微分形式に関する外微分作用素である. (つまり λ 方向の微分を含まない.)

Proposition 1.2.4. $\{\alpha_\lambda\}$ を $\alpha : \mathbb{C}^* \to \Omega^1(M, \mathfrak{g})$ とみたとき, α は以下の自然な実構造に対し $\mathbb{R}$-*condition* をみたしている.

$$\mathbb{C}^* \text{の実構造 ; } \sigma : \lambda \longmapsto \frac{1}{\bar{\lambda}}, \qquad \Omega^1(M, \mathfrak{g}) \text{ の実構造 ; } \sigma_{\mathfrak{g}} : \omega \longmapsto -\omega^*$$

Proof. $\alpha_{\sigma(\lambda)}(z) = \sigma_{\mathfrak{g}}(\alpha_\lambda(z))$ が成立することを見れば良く, (1.11) から直ちに出る. □

こうして Harmonic map ϕ から $\mathbb{R}$-condition をみたす接続の族 $\{\alpha_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{C}^*}$ を得たが, 逆に $\{\alpha_\lambda\}$ の積分として Extended Harmonic map (以後 EH map) を定義する.

Definition 1.2.5. 写像 $E : (z, \lambda) \in M \times \mathbb{C}^* \mapsto E_\lambda(z) \in G$ (M に対し C^∞ 級, $\mathbb{C}^*$ に対し正則) が Extended Harmonic map であるとは, 以下をみたすこと:

1. $E_1(z) \equiv I \qquad ({}^\forall z \in M)$
2. (標準的な実構造のもと) λ について $\mathbb{R}$-condition をみたす
3. $\dfrac{E^{-1}E_z}{1-\frac{1}{\lambda}}, \dfrac{E^{-1}E_{\bar{z}}}{1-\lambda}$ は λ について定数.

上の条件 1, 2 は, 次のように loop 群を用いて表現するとすっきりする:

$$E : M \to \Lambda^1_{\mathbb{C}^*, \mathbb{R}} G.$$

なお, 条件 1 は $\alpha_1 = 0$ に対応している. また E が $\mathbb{R}$-condition をみたすとき, 次が成立する:

$$\frac{E^{-1}E_z}{1-\frac{1}{\lambda}} \text{ は } \lambda \text{ について定数} \iff \frac{E^{-1}E_{\bar{z}}}{1-\lambda} \text{ は } \lambda \text{ について定数.}$$

従って Definition 1.2.5. の条件 3 は, 実はどちらか一方のみでよい. さらに, 条件 1 より, 例えば $\dfrac{E^{-1}E_{\bar{z}}}{1-\lambda}$ の定数性は $E^{-1}E_{\bar{z}}$ が λ に関して一次式であれば導出される. 以上のことから次が言える.

Proposition 1.2.6. $E : M \to \Lambda^1_{\mathbb{C}^*, \mathbb{R}} G$ が *EH map* であるための必要十分条件は, $E^{-1}E_{\bar{z}}$ が λ に関して一次式であることである.

EH map と Harmonic map の関係についてまとめよう.

Proposition 1.2.7. *E を EH map とするとき, $\phi(z) = E_{-1}(z)$ は Harmonic map である*

Proof. $\alpha = E^{-1}dE : \mathbb{C}^* \to \Omega^1(M, \mathfrak{g})$ とおくと, EH map の条件式よりこの α は (1.13) の形にかかれることがわかる. また定数性の条件などから $\phi = E_{-1}$ に対し

$$A = \frac{1}{2}\phi^{-1}\phi_z, \qquad B = \frac{1}{2}\phi^{-1}\phi_{\bar{z}}$$

となっている. α は作り方から任意の λ で flat である. Proposition 1.2.3. より, ϕ が Harmonic であることが従う. □

逆方向の対応については, 次の Uhrenbeck による定理を引用しておく.

Theorem 1.2.8. *$p \in M$ を一つ固定する. $\phi : M \to G_{\mathbb{R}}$ を $\phi(p) = I$ であるような Harmonic map とする. このとき, $\phi = E_{-1}$ となる EH map $E : M \to \Lambda^1_{\mathbb{C}^*,\mathbb{R}}G$ であって, 任意の $\lambda \in \mathbb{C}^*$ に対して $E_\lambda(p) \equiv I$ をみたすものが唯一存在する.*

Sketch. ϕ から (1.13) の形の α を作ると, 各 λ で α が flat であることから積分多様体を作ることができる. このとき $p \in M$ において I を通る, という初期条件を定めることで α の「積分」が一意かつ λ に対して正則に定まる. これをグラフとするような関数から EH map E が定まる. □

Remark 1.2.9. EH map の空間には, 以下のような群作用を構成することができる.

- $\Lambda^1_{\mathbb{C}^*,\mathbb{R}}G$ による左作用

  $\gamma \in \Lambda^1_{\mathbb{C}^*,\mathbb{R}}G,\ E :$ EH map に対し, γE も EH map となる. このとき, α は変化しない. E と γE の違いは, α を積分して EH map を得るときの初期条件の取り方の違いに対応している.

上の群作用に対し, 対応する Harmonic map は $\phi = E_{-1}$ から $\gamma(-1) \cdot \phi = (\gamma E)|_{-1}$ に変化する. 即ち上の群作用を Harmonic map で見れば, 左から定数行列をかける群作用におちる.

EH map は基点をもつ loop 群への写像であったが, 基点の情報を忘れることによって "Pre-Extended Harmonic map" を導入しよう. これによって Harmonic map との対応に曖昧さが増すが, 様々な群作用が見え, 状況も見やすくなる. また Twistor theory との対応において, 重要な結果を得ることとなる.

Definition 1.2.10. C^∞ 写像 $E : M \to \Lambda_{\mathbb{C}^*,\mathbb{R}}G$ が Pre-Extended Harmonic map (以下 PEH map) であるとは, 以下をみたすこと.

$$E^{-1}E_z = \lambda^{-1} \text{ について 1 次}$$
$$E^{-1}E_{\bar{z}} = \lambda \text{ について 1 次}$$

Remark 1.2.11. E を PEH map とするとき,

$$\begin{aligned} E^{-1}E_z &= U + \frac{1}{\lambda}V \\ E^{-1}E_{\bar{z}} &= X + \lambda Y \end{aligned} \tag{1.14}$$

とかけば, $\mathbb{R}$-condition より $X = -U^*,\ Y = -V^*$ が成立する.

Remark 1.2.12. PEH map が EH map と異なるのは, 基点を保つ条件:「1」がない点だけである. 実際, 任意の $z \in M$ で $E_1(z) = I$ となるならば, 式 (1.14) から EH map の条件が得られる. 従って PEH map E が EH map となる必要十分条件は, $E_1(z) = I$ すなわち, 基点を保つ loop 群に値をとることである.

PEH map E に対して, $E_{-1}(z)$ はもはや Harmonic ではない. しかし次が成立する.

Proposition 1.2.13 ([6]). *$E_\lambda(z)$ を PEH map とするとき, $H_\lambda(z) = E_\lambda(z) \cdot E_1(z)^{-1}$ は EH map となる.*

Proof. $H_1(z) \equiv I$ であるから, $H_\lambda(z)$ が PEH map であることを示せば良く, $H^{-1}H_z$ などを調べると, たしかに一次性の条件がみたされることがわかる. □

Corollary 1.2.14. *$E_\lambda(z)$ PEH map に対し, $\phi(z) = E_{-1}(z) \cdot E_1(z)^{-1}$ は Harmonic.*

PEH map E に対して, $\alpha_\lambda = E_\lambda^{-1} dE_\lambda$ とおくと, α_λ はやはり $\mathbb{R}$-condition をみたす. 以下 PEH map への群作用について考えるが, この α_λ を中心に考えると分かりやすい. 各々の証明は Proposition 1.2.13. とほぼ同様であるので省略する.

(P1) $\Lambda_{\mathbb{C}^*,\mathbb{R}}G$ による左作用

$\gamma \in \Lambda_{\mathbb{C}^*,\mathbb{R}}G,\ E$: PEH map に対し, γE も PEH map となる.

(P2) $C^\infty(M, G)$ による右作用

$h \in C^\infty(M, G),\ E$: PEH map に対し, Eh も PEH map となる. このとき α は変化するが, Proposition 1.2.13. によって得られる EH map は変化しない. したがって同じ Harmonic map を定めるわけであるから, この作用による α の軌道は,「同値類」と呼ぶべきものであるといえる. 一つの同値類の中で, $\alpha_1 = 0$ をみたすものがただ一つ存在する.

(P3) S^1 $(= \mathrm{U}(1))$ 作用

$u \in \mathrm{U}(1),\ E_\lambda(z)$: PEH map に対し, $E_{u\lambda}(z)$ も PEH map となる. このときは, α はパラメータのとりかえ : $\lambda \mapsto u\lambda$ がおきる.

以上の作用において, α は「本質的に」変化していない. その意味で, これらは単純な作用と言える. 次節では, より複雑な作用を見ることになる.

Remark 1.2.15. 以上ではパラメータ λ の定義域を $\mathbb{C}^*$ としたが, 帯状領域 $\mathrm{I} = \{\varepsilon \le |\lambda| \le \frac{1}{\varepsilon}\}$ $(0 < \varepsilon \le 1)$ としても, 議論は全く平行して進む. (ただし I 上正則とは, 内点で正則, 全体で C^∞ 級であることとする.) 極端な場合として, $\varepsilon = 1$ の場合, PEH map は $E : M \to \Lambda G_{\mathbb{R}}$ という real な状況に退化する. そしてこのときにも, $\phi(z) = E_{-1}(z) \cdot E_1(z)^{-1}$ は Harmonic となり, E は PEH map の役割を十分果たしている. しかし, 次節の議論では, 帯状領域に幅をもたせ, そこでの正則性を要請することで, 重要な結果を得ることになる.

1.3 Dressing transformation

Riemann 球面 $\mathbb{P}^1 \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ には, $\sigma : \lambda \mapsto 1/\bar{\lambda}$ によって自然な実構造がある. ここで $0 < \varepsilon < 1$ を一つ固定し,

$$\mathrm{I}_0 = \left\{\varepsilon \le |\lambda| \le \varepsilon^{-1}\right\},\ \mathrm{I}_1 = \left\{|\lambda| \le \varepsilon\right\} \cup \left\{\varepsilon^{-1} \le |\lambda|\right\}$$
$$\Gamma = \mathrm{I}_0 \cap \mathrm{I}_1 = \Gamma_\varepsilon \cup \Gamma_{1/\varepsilon} \quad \left(\Gamma_\varepsilon = \left\{|\lambda| = \varepsilon\right\},\ \Gamma_{1/\varepsilon} = \left\{|\lambda| = \varepsilon^{-1}\right\} \right)$$

とおく. $\mathrm{I}_0, \mathrm{I}_1, \Gamma$ には σ の制限によって実構造がそれぞれ定まる.

Theorem 1.3.1 ([6]). 次の分解が存在し, 分解は一意的かつ *smooth.*

$$\Lambda_{\Gamma,\mathbb{R}} G = \Lambda^1_{\mathrm{I}_0,\mathbb{R}} G \cdot \Lambda_{\mathrm{I}_1,\mathbb{R}} G \tag{1.15}$$

この定理については第 4 章でその証明を与える (smoothness については証明しない). これを用いて, EH map の空間への重要な作用が定義される. 以下では, 帯状領域 I_0 をパラメータ空間にもつ EH map $E : M \to \Lambda^1_{\mathrm{I}_0,\mathbb{R}} G$ について考える.

Theorem 1.3.2 ([6]). *EH map* $E : M \to \Lambda^1_{\mathrm{I}_0,\mathbb{R}} G$ および $\gamma \in \Lambda_{\Gamma,\mathbb{R}} G$ に対し, $\tilde{E} = \gamma \circ E := (\gamma E)_0$ は再び *EH map* であり, これは *EH map* 全体の空間への $\Lambda_{\Gamma,\mathbb{R}} G$ の作用を定める. (ここで, $(\gamma E)_0$ は $\gamma E \in \Lambda_{\Gamma,\mathbb{R}} G$ の (1.15) を用いた分解の第一成分を表す.)

上の定理で定義された作用を, **Dressing transformation** と呼ぶ.

Remark 1.3.3. この Dressing transformation は, EH map の空間への作用であり, これを Harmonic map の空間への作用に落とすためには, いくつかの問題がある. まず, 与えられた Harmonic map に対し, それに対応する EH map をどう定めれば良いかという曖昧さがある. どのように EH map をとったとしても作用による像が同じ Harmonic map を定めるのであれば良いが, これは成立しない. そこで Harmonic map に対して標準的に EH map を一つ対応させる方法を見つけて, これを用いて作用を定義しようという考えが浮かぶが, そのような方法を確立するのは Theorem 1.2.8. の特別な場合を除いて難しい. Harmonic map の, 定数行列による左剰余類を考えれば, その特別な状況を示す代表元が一意に存在し, 初めて作用による行き先を定義できる.

Remark 1.3.4. Theorem 1.3.2. の方法は, PEH map にも適応できる. 従って, 同じ方法により PEH map の空間への作用を考えることができるが, このとき作用による像は基点の条件をみたしているので, 常に EH map となる.

Theorem 1.3.1. の分解を考えると $\Lambda_{\Gamma,\mathbb{R}} G$ の作用は, $\Lambda^1_{\mathrm{I}_0,\mathbb{R}} G$ の作用と $\Lambda_{\mathrm{I}_1,\mathbb{R}} G$ の作用の二段階に分けて考えることができる. このうち, $\Lambda^1_{\mathrm{I}_0,\mathbb{R}} G$ の作用とは, 前節で扱った作用のうち (P-1) に対応している.

loop 群の分解で第一成分をとるということは, 第二成分の逆元を右からかけて消去する, ということと同じである. すなわち dressing transformation は, 左から $\Lambda_{\mathrm{I}_1,\mathbb{R}} G$ の元をかけ, それを右から消去して新しい写像を得る操作であるといえる. したがって, G の非可換性が重要であることがわかる.

第2章　Regular Twistor theory

四次元 Euclid 平面 $\mathbb{R}^4$ 上の Anti-Self-Dual 方程式を二次元へ reduction したものは Self-Duality 方程式とよばれ Hitchin によって詳しく研究されている ([7]). 一方, Atiyah-Hitchin-Singer による Twistor theory では, Twistor space へ引き戻して考えることで, ASD 方程式を複素構造の可積分性に関する条件として理解できることが示されている ([3]). そこで Twistor theory によって得られた情報を失わないようにしたまま二次元への reduction を行ったところ, Self-Duality 方程式の Extended solution と呼ぶべきものが得られた. そしてこれは Extended harmonic map に酷似していることが観察される. さらに, この類似性のもと Dressing transformation に対応するものについて考察すると, それが Crane によって指摘されたもの ([5]) に同等であることがわかる. この章では以上の内容についてまとめる.

なおこの章の内容の大半は, 既によく知られている事柄をまとめたものに過ぎないが, これは第 3 章において平行した議論を行う際のひな型となるものである.

2.1　Regular Twistor 空間の構成

一般に (Atiyah-Hitchin-Singer の意味で) Twistor space とは, 向きづけられた四次元 Riemann 多様体上のファイバーバンドルであり, 各点におけるファイバーはその点の接空間の計量と向きを保つ複素構造全体であるようなものである. (正確には計量の共形構造にのみ依存する.) 底空間の多様体が「自己双対的」であるとき, Twistor space の全空間には標準的な複素構造が入ることが知られている ([3]).

この節では標準的な計量をもつ $\mathbb{R}^4$ 上の Twistor space を, 上の内容を忠実に再現することによって構成する. そのためにまず, 「計量と向きを保つ複素構造」について考察する必要があり, そのための準備から始める.

2.1.1　SO(4) の構造

ここでは準備として, SO(4) の構造について考察する.

まず, 向きづけられた四次元ベクトル空間 V とその計量を次のように定める.

$$V = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle_{\mathbb{R}}, \quad \{e_i\} : \text{向きづけられた正規直交基底}$$

ベクトル空間 V の外積代数には, その計量と向きから Hodge の $*$-作用素が定義され, これに対応して二次の外積代数に関する, 次の直和分解を得る.

$$\wedge^2 V = \wedge^2_+ V \oplus \wedge^2_- V \tag{2.1}$$

ただし

$$
\begin{aligned}
\wedge^2_+ V &= \langle e_1\wedge e_2 + e_3\wedge e_4,\quad e_1\wedge e_4 + e_2\wedge e_3,\quad e_1\wedge e_3 + e_4\wedge e_2\rangle_{\mathbb{R}} \\
\wedge^2_- V &= \langle e_1\wedge e_2 - e_3\wedge e_4,\quad e_1\wedge e_4 - e_2\wedge e_3,\quad e_1\wedge e_3 - e_4\wedge e_2\rangle_{\mathbb{R}}
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

一方, $\wedge^2 V$ は自然に Lie 環 $\mathfrak{so}(4) = \{X \in \mathfrak{sl}(4,\mathbb{R}) \mid {}^tX + X = 0\}$ と同型である. 対応は $\wedge^2 V$ の元 $\xi\wedge\eta$ に対し, 次の線形写像で定まる行列を与えることで定まる:

$$
\zeta \in V \;\longmapsto\; \langle \eta,\zeta\rangle\xi - \langle\xi,\zeta\rangle\eta \;\in V.
$$

この対応によって, $\wedge^2_\pm V$ の元は次のように写される.

$$
\begin{array}{ccccc}
\wedge^2_\pm V & \longrightarrow & \mathfrak{so}(4) & \\
e_1\wedge e_2 \pm e_3\wedge e_4 & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm1 \\ 0 & 0 & \mp1 & 0 \end{pmatrix} & =: 2A_\pm \\
e_1\wedge e_4 \pm e_2\wedge e_3 & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \pm1 & 0 \\ 0 & \mp1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & =: 2B_\pm \\
e_1\wedge e_3 \pm e_4\wedge e_2 & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mp1 \\ \pm1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & =: 2C_\pm
\end{array}
$$

このとき bracket 積を計算すると

$$
\begin{array}{lll}
[A_+, B_+] = C_+ & [B_+, C_+] = A_+ & [C_+, A_+] = B_+ \\
[A_-, B_-] = -C_- & [B_-, C_-] = -A_- & [C_-, A_-] = -B_-
\end{array}
\tag{2.3}
$$

となり, $+$ と $-$ の組合わせは全て 0 となる. これより, 次の Lie 環としての分解を得る

$$
\begin{gathered}
\mathfrak{so}(4) = \mathfrak{h}^+ \oplus \mathfrak{h}^- \\
\text{ただし}\quad \mathfrak{h}^+ = \langle A_+, B_+, C_+\rangle_{\mathbb{R}},\quad \mathfrak{h}^- = \langle A_-, B_-, C_-\rangle_{\mathbb{R}}.
\end{gathered}
\tag{2.4}
$$

分解 (2.4) に対応するものを Lie 群上でつくる. まず, SU(2) の元は

$$
\begin{pmatrix} p & -\bar q \\ q & \bar p \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(2) \qquad \begin{cases} |p|^2 + |q|^2 = 1 \\ p = a + bi, \quad q = c + di \end{cases}
$$

とかかれることに注意する．この表記の下, 次の二つの忠実な表現が存在する．

$$\begin{array}{cccc} \rho_+ : & \mathrm{SU}(2) & \longrightarrow & \mathrm{SO}(4) \\ & \begin{pmatrix} p & -\bar{q} \\ q & \bar{p} \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix} \end{array} \tag{2.5}$$

$$\begin{array}{cccc} \rho_- : & \mathrm{SU}(2) & \longrightarrow & \mathrm{SO}(4) \\ & \begin{pmatrix} p & -\bar{q} \\ q & \bar{p} \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix} \end{array} \tag{2.6}$$

これら二つの表現は四元数体を用いて自然に導出することが出来るが, これについてはこの節の最後で触れることにする．

ρ_+, ρ_- は各々 Lie 環の準同型 $\mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{so}(4)$ を定める．$\mathfrak{su}(2) = \left\{ X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \mid {}^t X + \bar{X} = 0 \right\}$ の基底を

$$\alpha = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \beta = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

ととると

$$[\alpha, \beta] = \gamma, \qquad [\beta, \gamma] = \alpha, \qquad [\gamma, \alpha] = \beta \tag{2.8}$$

であり, ρ_+, ρ_- から誘導される写像は次のようになる：

$$\begin{array}{ccccc} \rho_+ : & \mathfrak{su}(2) & \xrightarrow{\sim} & \mathfrak{h}^+ & \subset \mathfrak{so}(4) \\ & \alpha & \longmapsto & -A_+ & \\ & \beta & \longmapsto & B_+ & \\ & \gamma & \longmapsto & -C_+ & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} \rho_- : & \mathfrak{su}(2) & \xrightarrow{\sim} & \mathfrak{h}^- & \subset \mathfrak{so}(4) \\ & \alpha & \longmapsto & -A_- & \\ & \beta & \longmapsto & -B_- & \\ & \gamma & \longmapsto & -C_- & \end{array}$$

以上の考察から, $\rho_+(\mathrm{SU}(2)), \rho_-(\mathrm{SU}(2))$ はどちらも SO(4) 内の正規部分群であり, また $\rho_+(\mathrm{SU}(2))$ の元と $\rho_-(\mathrm{SU}(2))$ の元は可換であることがわかる．これより準同型

$$\begin{array}{cccc} \rho_+ \cdot \rho_- : & \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) & \longrightarrow & \mathrm{SO}(4) \\ & (g_+, g_-) & \longmapsto & \rho_+(g_+) \cdot \rho_-(g_-) \end{array} \tag{2.9}$$

を得るが, $SO(4)$ が連結であることからこの準同型は全射である．直接計算すると $I \in \mathrm{SO}(4)$ の逆像は $\{(I, I), (-I, -I)\}$ となり, (2.9) は SO(4) の二重被覆を与えていることがわかる．ちなみに $\mathrm{SU}(2) \cong S^3 \subset \mathbb{C}^2$ であるから $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$ は単連結で, (2.9) は普遍被覆を与えている．

この節をしめくくる前に, (2.5),(2.6) で与えられる二つの表現 ρ_+, ρ_- を四元数体 $\mathbb{H}$ を用いて導出する方法について述べる．$\mathbb{H}$ の定義は

$$\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k, \qquad \begin{array}{c} i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\ ij = k, \ jk = i, \ ki = j \end{array}$$

であるが，これは

$$1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad i=\begin{pmatrix}\sqrt{-1}&0\\0&-\sqrt{-1}\end{pmatrix},\quad j=\begin{pmatrix}0&\sqrt{-1}\\\sqrt{-1}&0\end{pmatrix},\quad k=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

で張られるベクトル空間 (に通常の積構造を入れたもの) とみなすことができる．このとき i,j,k は $\mathfrak{su}(2)$ の基底に他ならない．

$$\mathrm{Sp}(1) := \left\{\alpha\in\mathbb{H}\ \middle|\ \|\alpha\|^2=1\right\}$$

は群をなし，Sp(1) は通常の左右からのかけ算によって $\mathbb{H}$ に対して二通りに作用する．$\mathbb{H}\cong\mathbb{R}^4$ の自然な同一視のもと，それら二つの作用から二つの表現 $\mathrm{Sp}(1)\to\mathrm{SO}(4)$ を得る．一方

$$\mathbb{H}\cong\mathbb{C}^2 : p+qj\ \leftrightarrow\ (p,q)$$

の同一視を用いると，Sp(1) の右からのかけ算が $\mathbb{C}^2$ への作用を定め，これが表現 $\mathrm{Sp}(1)\to\mathrm{SU}(2)$ を誘導し，これは同型になっていることが容易に確かめられる．(左からのかけ算は $\mathbb{C}^2$ の複素構造を保たない．)

以上を用いて，SU(2) の元を同型を用いて Sp(1) の元に写し，さらに左からのかけ算によって SO(4) に写すことにより，表現 ρ_+ が得られる．同様に右からのかけ算によって ρ_- が得られる．

2.1.2 V^4 上の複素構造の空間

ここでは，標準的な内積を持つ四次元ベクトル空間上の，計量と向きを保つ複素構造全体の空間に関して考察する．

四次元実ベクトル空間 V は前節の記号をそのまま用いる．また，二次元複素ベクトル空間 W とその計量を次のように定める．

$$W=\langle\theta_1,\theta_2\rangle_{\mathbb{C}},\quad \{\theta_i\}:\text{unitary 基底}$$

また W の underlying な実ベクトル空間を $W_{\mathbb{R}}$ とかくことにする．すなわち

$$W_{\mathbb{R}}=\langle\theta_1,i\theta_1,\theta_2,i\theta_2\rangle_{\mathbb{R}}\qquad \{\theta_1,i\theta_1,\theta_2,i\theta_2\}:\text{向きづけられた正規直交基底}$$

以上の表記の下，実計量空間としての同型 $V\cong W_{\mathbb{R}}$ を定めることによって V に計量と向きを保つ複素構造を入れることができる．つまり $g\in\mathrm{SO}(4)$ によって

$$(\theta_1\ i\theta_1\ \theta_2\ i\theta_2)=(e_1\ e_2\ e_3\ e_4)\cdot g \tag{2.10}$$

なる基底変換を導入すれば，これによって V に計量と向きを保つ複素構造が入る．

しかし，W の複素構造は unitary な変換を施すことに対して変化しない．すなわち，計量と向きを保つ複素構造全体の空間は $\mathrm{SO}(4)/\mathrm{U}(2)$ であることがわかる．ただし，U(2) は underlying な実変換と見ることによって SO(4) の部分群と見なす．具体的には次の自然な埋め込み写像を通して考えていることになる．

$$\rho:\begin{pmatrix}s&t\\u&v\end{pmatrix}\in\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})\longmapsto\begin{pmatrix}s_1&-s_2&t_1&-t_2\\s_2&s_1&t_2&t_1\\u_1&-u_2&v_1&-v_2\\u_2&u_1&v_2&v_1\end{pmatrix}\in\mathrm{GL}(4,\mathbb{R}) \tag{2.11}$$

ただし　$s=s_1+s_2i,\quad t=t_1+t_2i,\quad u=u_1+u_2i,\quad v=v_1+v_2i$

ρ を通して $\mathrm{U}(2) = \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) \cap \mathrm{SO}(4)$ となっていることに注意する. また, 第 1 節の (2.6) で定まる ρ_- は自然な埋め込み $\rho : \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(4,\mathbb{R})$ の制限になっている.

複素構造のパラメータ空間 $\mathrm{SO}(4)/\mathrm{U}(2)$ の具体的な形を知るために, (2.9) の二重被覆の底空間を $\mathrm{U}(2)$ に制限して得られるものについて考察する.

まず, かけ算で定まる自然な全射準同型

$$\mathrm{U}(1)\times\mathrm{SU}(2) \longrightarrow \mathrm{U}(2) \tag{2.12}$$

を考える. これは二重被覆であることに注意する. いま, $\rho : \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(4,\mathbb{R})$ を使うと

$$\rho(\mathrm{U}(2)) = \rho(\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})) \cap \mathrm{SO}(4)$$

となるのであった. $(\lambda, g) \in \mathrm{U}(1)\times\mathrm{SU}(2)$ について

$$\rho(\lambda g) = \rho(\lambda I)\cdot\rho(g) = \rho_+\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}\cdot\rho_-(g). \tag{2.13}$$

これらのことから, $S^1 = \left\{\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(2)\right\}$ とかくとき,

$$S^1\times\mathrm{SU}(2) \xrightarrow{\rho_+\cdot\rho_-} \rho(\mathrm{U}(2)) \cong \mathrm{U}(2) \tag{2.14}$$

は全射, 二重被覆でであり, 従って (2.14) は (2.9) の $\mathrm{U}(2)$ への制限である.

以上のことから,

$$\begin{aligned}\mathrm{SO}(4)/\mathrm{U}(2) &\cong \mathrm{SU}(2)\times\mathrm{SU}(2)\ /\ S^1\times\mathrm{SU}(2)\\ &\cong \mathrm{SU}(2)/S^1\\ &\cong \mathbb{C}\mathrm{P}^1\end{aligned} \tag{2.15}$$

となる. なお $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 = \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ として, 同型 $\mathrm{SU}(2)/S^1 \cong \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ は以下で与えられる.

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{SU}(2)/S^1 & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{C}\mathrm{P}^1\\ \left[\begin{pmatrix}p & -\bar{q}\\ q & \bar{p}\end{pmatrix}\right] & \longmapsto & \dfrac{q}{p}\end{array} \qquad \left(|p|^2+|q|^2=1\right) \tag{2.16}$$

2.1.3 $\mathrm{SO}(4)/\mathrm{U}(2)$ の実構造

複素構造のパラメータ空間 $\mathrm{SO}(4)/\mathrm{U}(2)$ には, 共役な複素構造に移ることによって定まる実構造がある. ここでは, この実構造について考察する.

複素共役をとる変換

$$\begin{pmatrix}w_1\\ w_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2 i\\ \alpha_3+\alpha_4 i\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}\bar{w}_1\\ \bar{w}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1-\alpha_2 i\\ \alpha_3-\alpha_4 i\end{pmatrix} \tag{2.17}$$

は, SO(4) の元としては,

$$J = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

によって与えられる. いま, $g, h \in \mathrm{SO}(4)$ が

$$\begin{aligned} (\theta_1\ i\theta_1\ \theta_2\ i\theta_2) &= (e_1\ e_2\ e_3\ e_4) \cdot g \\ (\theta_1\ i\theta_1\ \theta_2\ i\theta_2) \cdot J &= (e_1\ e_2\ e_3\ e_4) \cdot h \end{aligned} \tag{2.18}$$

をみたしているとき, g と h は互いに共役な複素構造を定めているといえる.

Definition 2.1.1 ($\mathrm{SO}(4)/\mathrm{U}(2)$ の実構造).

$$\begin{array}{cccc} \sigma: & \mathrm{SO}(4)/\mathrm{U}(2) & \longrightarrow & \mathrm{SO}(4)/\mathrm{U}(2) \\ & [g] & \longmapsto & [g \cdot J] \end{array} \tag{2.19}$$

$J \cdot \mathrm{U}(n) \cdot J = \mathrm{U}(n)$ に注意すれば, σ は well-defined であることがわかる.

Proposition 2.1.2. $\mathrm{SO}(4)/\mathrm{U}(2) \cong \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ の同型 (2.15) のもと,

$$\begin{array}{cccc} \sigma: & \mathbb{C}\mathrm{P}^1 & \longrightarrow & \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \\ & \zeta & \longmapsto & -\dfrac{1}{\zeta} \end{array} \tag{2.20}$$

Proof. まず

$$J = \begin{pmatrix} & & -1 & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \\ & -1 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & 1 & \\ & & & 1 \\ -1 & & & \\ & -1 & & \end{pmatrix} = \rho_+ \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} \rho_- \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

に注意すると, σ は次のようにかける

$$\sigma : [g] \longmapsto \left[g \cdot \rho_+ \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} \right] \tag{2.22}$$

したがって,

$$\begin{aligned} \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \ni \zeta = \frac{q}{p} \ \sim \ \left[\rho_+ \begin{pmatrix} p & -\bar{q} \\ q & \bar{p} \end{pmatrix} \right] &\overset{\sigma}{\longmapsto} \left[\rho_+ \left(\begin{pmatrix} p & -\bar{q} \\ q & \bar{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} \right) \right] \\ &= \left[\rho_+ \begin{pmatrix} -\bar{q} & -p \\ \bar{p} & -q \end{pmatrix} \right] \quad \sim \ -\frac{\bar{p}}{\bar{q}} = -\frac{1}{\bar{\zeta}} \ \in \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \end{aligned}$$

上の計算において p, q は $|p|^2 + |q|^2 = 1, \zeta = q/p$ をみたすものならば何でも良く, 例えば次のようにとれば実現される.

$$p = \frac{1}{\sqrt{1+|\zeta|^2}}, \qquad q = \frac{\zeta}{\sqrt{1+|\zeta|^2}}$$

□

2.1.4 $\mathbb{R}^4$ 上の Twistor 空間

標準的な計量の入った Euclid 空間 $\mathbb{R}^4$ 上の (計量と向きを保つ) Twistor 空間を構成する.

$\mathbb{R}^4$ 上の (計量と向きを保つ) 枠バンドル P を考える.

$$P \cong \mathbb{R}^4 \times \mathrm{SO}(4)$$

であるが, P の各点 (x,g) において, g は接空間 $\mathrm{T}_x\,\mathbb{R}^4$ の等長変換と見なすことができる.

$$\mathcal{T} := P/\,\mathrm{U}(2) \cong \mathbb{R}^4 \times \mathrm{SO}(4)/\,\mathrm{U}(2) \cong \mathbb{R}^4 \times \mathbb{C}\mathrm{P}^1$$

とおけば, $\mathcal{T}$ の点 (x,ζ) において $\zeta \in \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ は $\mathrm{T}_x\,\mathbb{R}^4$ の計量と向きを保つ複素構造を一つ与える.

$\mathcal{T}$ の各点の接空間には, 次のように複素構造を入れることができる. まず, 直積構造に由来する直和分解

$$\mathrm{T}_{(x,\zeta)}\,\mathcal{T} \cong \mathrm{T}_x\,\mathbb{R}^4 \oplus \mathrm{T}_\zeta\,\mathbb{C}\mathrm{P}^1$$

に注目して, $\mathrm{T}_\zeta\,\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 方向には $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ から定まる複素構造を入れる. また $\mathrm{T}_x\,\mathbb{R}^4$ 方向の複素構造は $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \cong \mathrm{SO}(4)/\,\mathrm{U}(2)$ によって ζ が定めるものをとる.

Proposition 2.1.3. 上で定めた $\mathcal{T}$ の各接空間での複素構造は, 可積分な概複素構造を定める. 従って $\mathcal{T}$ は自然に複素多様体である.

Proof. $\mathcal{T}$ に適当な複素構造を導入し, 各点の接空間における複素構造が先程定めたものと一致することを見る. いま,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & & \mathbb{C}^2 \\ (x_1,x_2,x_3,x_4) & \longleftrightarrow & (y,z) \end{array} \qquad \begin{cases} y = x_1 + x_2 i \\ z = x_3 + x_4 i \end{cases}$$

とみると, $\mathcal{T} = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ の直積構造を反映した C^∞-座標として (y,z,ζ) がとれる. いま

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_+ \cup \mathcal{T}_- \qquad \begin{array}{l} \mathcal{T}_+ := \left\{(y,z,\zeta) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \;\middle|\; \zeta \neq \infty\right\} \\ \mathcal{T}_- := \left\{(y,z,\zeta) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \;\middle|\; \zeta \neq 0\right\} \end{array} \tag{2.23}$$

によって $\mathcal{T}$ を二つの部分に分け, それぞれの複素座標 (w_1,w_2,μ) および (w_1',w_2',μ') を以下によって定める.

$$\begin{array}{cccc} \Psi_+ : & \mathcal{T}_+ & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C} \\ & (y,z,\zeta) & \longmapsto & (w_1,w_2,\mu) \end{array} \qquad \begin{cases} w_1 = y + \zeta\bar{z} \\ w_2 = -\zeta\bar{y} + z \\ \mu = -\zeta. \end{cases} \tag{2.24}$$

$$\begin{array}{cccc} \Psi_- : & \mathcal{T}_- & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C} \\ & (y,z,\zeta) & \longmapsto & (w_1',w_2',\mu') \end{array} \qquad \begin{cases} w_1' = \bar{y} - \dfrac{1}{\zeta}z \\ w_2' = \dfrac{1}{\zeta}y + \bar{z} \\ \mu' = -\dfrac{1}{\zeta}. \end{cases} \tag{2.25}$$

$\mathcal{T}_+ \cap \mathcal{T}_-$ 上の座標変換は次で与えられ, これより (2.24),(2.25) の二式で $\mathcal{T}$ に複素構造を与えることが可能であることがわかる.

$$w_1' = \frac{w_2}{\mu}, \qquad w_2' = -\frac{w_1}{\mu}, \qquad \mu' = \frac{1}{\mu} \tag{2.26}$$

こうして定めた $\mathcal{T}$ の複素座標が各点の接空間に誘導する複素構造と, 先程定めた接空間の複素構造が一致することをみる. まず $\mathcal{T}$ の $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 方向には通常の複素構造が入っていることが直ちにわかる. $\mathbb{R}^4$ 方向も期待されるものであることを以下で示す.

まずは $\mathcal{T}_+$ 上で考える. (2.24) を y, z について解くと,

$$y = \frac{1}{1+|\zeta|^2}\left(w_1 - \zeta\bar{w}_2\right), \qquad z = \frac{1}{1+|\zeta|^2}\left(\zeta\bar{w}_1 + w_2\right) \tag{2.27}$$

ここで

$$\begin{cases} \Delta = p = \dfrac{1}{\sqrt{1+|\zeta|^2}} \\ \quad\; q = \dfrac{\zeta}{\sqrt{1+|\zeta|^2}} \end{cases} \qquad\qquad \begin{pmatrix} |p|^2 + |q|^2 = 1 \\ \\ \dfrac{q}{p} = \zeta \end{pmatrix} \tag{2.28}$$

とおくと, (2.27) は次のようにかける:

$$y = \Delta \cdot \big(pw_1 - q\bar{w}_2\big), \qquad z = \Delta \cdot \big(q\bar{w}_1 + pw_2\big). \tag{2.29}$$

この式は

$$\begin{cases} w_1 = u_1 + u_2 i \\ w_2 = u_3 + u_4 i \end{cases} \qquad \begin{cases} p = a \qquad (p \in \mathbb{R}) \\ q = c + di \end{cases} \tag{2.30}$$

とおけば, 実座標の変換として次のようになる:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \Delta \begin{pmatrix} a & 0 & -c & -d \\ 0 & a & -d & c \\ c & d & a & 0 \\ d & -c & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \tag{2.31}$$

これより, 接ベクトルの変換公式は次のようになる:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} & \dfrac{\partial}{\partial u_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & \dfrac{\partial}{\partial x_4} \end{pmatrix} \cdot \Delta \begin{pmatrix} a & 0 & -c & -d \\ 0 & a & -d & c \\ c & d & a & 0 \\ d & -c & 0 & a \end{pmatrix} \tag{2.32}$$

スカラー Δ はスケール変換を与えており, 本質的な複素構造は (2.32) 内の変換行列によって与えられる. この行列は

$$\rho_+ \begin{pmatrix} a & -c + di \\ c + di & a \end{pmatrix} = \rho_+ \begin{pmatrix} p & -\bar{q} \\ q & \bar{p} \end{pmatrix} \tag{2.33}$$

に等しい. 従って $\mathrm{T}_x\,\mathbb{R}^4$ 方向の複素構造は,

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SO}(4)/\,\mathrm{U}(2) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \\ \left[\rho_+ \begin{pmatrix} p & -\bar{q} \\ q & \bar{p} \end{pmatrix}\right] & \longmapsto & \dfrac{q}{p} = \zeta \end{array}$$

により ζ が定めるものである.

同様の議論であるが, $\mathcal{T}_-$ について考える. (2.25) において w_1', w_2' の式に μ' を代入して y, z について解くと

$$y = \frac{1}{1+|\mu'|^2}\left(\bar{w}_1' - \bar{\mu}' w_2'\right), \qquad z = \frac{1}{1+|\mu'|^2}\left(\bar{\mu}' w_1' + \bar{w}_2'\right). \tag{2.34}$$

ここで

$$\begin{cases} \Delta' = p' = \dfrac{1}{\sqrt{1+|\mu'|^2}} \\ q' = \dfrac{\bar{\mu}}{\sqrt{1+|\mu'|^2}} \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} |p'|^2 + |q'|^2 = 1 \\ \dfrac{\bar{p'}}{\bar{q'}} = \dfrac{1}{\mu'} = -\zeta \end{pmatrix} \tag{2.35}$$

とおくと, (2.34) は次のようにかける:

$$y = \Delta' \cdot \left(p'\bar{w}_1' - q'w_2'\right), \qquad z = \Delta' \cdot \left(q'w_1' + p'\bar{w}_2'\right). \tag{2.36}$$

実座標を

$$\begin{cases} w_1' = u_1' + u_2' i \\ w_2' = u_3' + u_4' i \end{cases} \qquad \begin{cases} p' = a \qquad (p' \in \mathbb{R}) \\ q' = c + di \end{cases} \tag{2.37}$$

とおいて先程と同様の計算をすると, 次の接ベクトルの変換公式を得る.

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial u_1'} & \dfrac{\partial}{\partial u_2'} & \dfrac{\partial}{\partial u_3'} & \dfrac{\partial}{\partial u_4'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & \dfrac{\partial}{\partial x_4} \end{pmatrix} \cdot \Delta \begin{pmatrix} a & 0 & -c & d \\ 0 & -a & -d & -c \\ c & -d & a & 0 \\ d & c & 0 & -a \end{pmatrix} \tag{2.38}$$

複素構造は (2.38) 内の変換行列によって与えられ, この行列は

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & 0 & -c & d \\ 0 & a & -d & -c \\ c & -d & a & 0 \\ d & c & 0 & -a \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & 0 & -c & -d \\ 0 & a & -d & c \\ c & d & a & 0 \\ d & -c & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \\ &= \rho_+ \begin{pmatrix} a & -c+di \\ c+di & a \end{pmatrix} \cdot J = \rho_+ \begin{pmatrix} p' & -\bar{q'} \\ q' & \bar{p'} \end{pmatrix} \cdot J \end{aligned} \tag{2.39}$$

に等しい. 従って $\mathrm{T}_x\mathbb{R}^4$ 方向の複素構造は,

$$\begin{aligned} \mathrm{SO}(4)/\mathrm{SU}(2) \ni \left[\rho_+ \begin{pmatrix} p' & -\bar{q'} \\ q' & \bar{p'} \end{pmatrix} \cdot J\right] &= \left[\rho_+ \left(\begin{pmatrix} p' & -\bar{q'} \\ q' & \bar{p'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}\right)\right] \\ &= \left[\rho_+ \begin{pmatrix} -\bar{q'} & -p' \\ \bar{p'} & -q' \end{pmatrix}\right] \quad \longmapsto \quad -\frac{\bar{p'}}{\bar{q'}} = \zeta \in \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \end{aligned}$$

により ζ が定めるものである. □

Proposition 2.1.4 ($\mathcal{T}$ の実構造). $\mathcal{T}$ には各ファイバーの実構造から定まる次の自然な *involution* が存在するが, *Proposition 2.1.3.* によって定まる $\mathcal{T}$ の複素構造のもと, これは反正則である.

$$\begin{array}{rccc} \sigma: & \mathcal{T} \cong \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}\mathrm{P}^1 & \longrightarrow & \mathcal{T} \\ & (y, z, \zeta) & \longmapsto & \left(y, z, -\dfrac{1}{\zeta}\right) \end{array} \tag{2.40}$$

Proof. $\sigma|_{\mathcal{T}_+} : \mathcal{T}_+ \to \mathcal{T}_-$ についてみてみると (2.24),(2.25) の表記の下,

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \mu \end{pmatrix} = \Psi_+ \begin{pmatrix} y \\ z \\ \zeta \end{pmatrix} \overset{\sigma}{\longmapsto} \Psi_- \begin{pmatrix} y \\ z \\ -1/\bar{\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y} + \bar{\zeta} z \\ -\bar{\zeta} y + \bar{z} \\ \bar{\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \\ -\bar{\mu} \end{pmatrix} \tag{2.41}$$

よって σ は $\mathcal{T}_+$ 上, 反正則である. $\mathcal{T}_-$ 上も同様に示せる. □

2.2 四元数体を用いた Twistor 空間の構成

この節では, 四元数体を用いて S^4 上の Twistor 空間を構成する方法についてまとめる. また, これを $\mathbb{R}^4 = S^4 - \{\infty\}$ に制限したものが前節で構成した Twistor 空間と一致することを見る.

四元数体 $\mathbb{H}$ を, $\mathbb{C}$ に j を添加した体と考える. 即ち, $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j \cong \mathbb{C}^2$. これより

$$\mathbb{C}^4 \cong \mathbb{H}^2 : (\pi_1, \pi_2, \eta_1, \eta_2) \longleftrightarrow (\pi_1 + \pi_2 j, \eta_1 + \eta_2 j).$$

左から j をかけることにより, $\mathbb{C}^4$ に次の変換が定まる

$$j\times : (\pi_1, \pi_2, \eta_1, \eta_2) \longmapsto (-\bar{\pi}_2, \bar{\pi}_1, -\bar{\eta}_2, \bar{\eta}_1).$$

さらにこの写像は $\mathbb{C}\mathrm{P}^3 = \mathbb{C}^4 - \{0\} \ / \ \mathbb{C}^*$ 上の involution を誘導する. これを τ で表すこととし, $\mathbb{C}\mathrm{P}^3$ の実構造と呼ぶ. τ は固定点をもたない反正則な involution である.

$\mathbb{C}\mathrm{P}^3$ は $S^4 \cong \mathbb{H} \cup \{\infty\}$ でパラメトライズされる τ-不変な射影直線の族で埋め尽くされることをみよう. まず $\alpha \in S^4$ に対し

$$\mathbb{C}\mathrm{P}^1_\alpha = \left\{ [\pi_1 : \pi_2 : \eta_1 : \eta_2] \in \mathbb{C}\mathrm{P}^3 \ \middle| \ (\pi_1 + \pi_2 j) = (\eta_1 + \eta_2 j)\alpha \right\} \tag{2.42}$$

とおく. ただし, $\mathbb{C}\mathrm{P}^1_\infty = \{\eta_1 = \eta_2 = 0\}$ とする. なお $\alpha \neq \infty$ のとき, (2.42) の右辺の集合は $[\eta_1 : \eta_2]$ を斉次座標としてとれることから, この集合が $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ に等しいことがわかる. 特に $\lambda = \frac{\eta_2}{\eta_1}$ とおくことにする.

$\mathbb{C}\mathrm{P}^3 = \bigcup_\alpha \mathbb{C}\mathrm{P}^1_\alpha$ であり, 各 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1_\alpha$ が τ-不変であることは定義から明らかである. また, $\mathbb{C}\mathrm{P}^1_\alpha$ は互いに素であるから, 次の写像を得る:

$$\mathbb{C}\mathrm{P}^3 \longrightarrow S^4 : \zeta \longmapsto \alpha \qquad (\zeta \in \mathbb{C}\mathrm{P}^1_\alpha). \tag{2.43}$$

Remark 2.2.1. 詳しいことには触れないが, (2.43) は S^4 上の Twistor fibration になっている.

(2.43) を $\mathbb{R}^4 = S^4 - \{\infty\}$ に制限し, $\mathcal{T} = \mathbb{C}\mathrm{P}^3 - \mathbb{C}\mathrm{P}^1_\infty$ とおくと

$$p : \mathcal{T} \longrightarrow \mathbb{R}^4 : \zeta \longmapsto \alpha \qquad (\zeta \in \mathbb{C}\mathrm{P}^1_\alpha). \tag{2.44}$$

$\mathcal{T}$ は $\mathbb{C}\mathrm{P}^3$ に由来する複素構造を持っている. この複素構造のもと, 上の写像 p は C^∞ 級であるが, 正則ではない. なお, ここまでの構成から $\mathcal{T}$ の任意の点は $(\alpha, \lambda) \in \mathbb{H} \times \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ の組と一対一に対応することがわかる. すなわち可微分多様体として,

$$\mathcal{T} \cong \mathbb{H} \times \mathbb{C}\mathrm{P}^1. \tag{2.45}$$

以下, (2.44) が前節までで構成したものと一致することを見よう. $\mathbb{R}^4$ の座標を以下のように取り, これにより底空間に向きを入れる:

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{H} : (x_1, x_2, x_3, x_4) \longleftrightarrow (y, z) \longleftrightarrow \alpha \\ &y = x_1 + x_2 i, \quad z = x_3 + x_4 i, \quad \alpha = y + zj. \end{aligned} \tag{2.46}$$

このように定めると, $\zeta = [\pi_1 : \pi_2 : \eta_1 : \eta_2] \in \mathbb{CP}^3$ に対して $p(\zeta) = \alpha$, すなわち $(\pi_1 + \pi_2 j) = (\eta_1 + \eta_2 j)\alpha$ となるための必用十分条件は次の式で与えられる

$$\begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & -\bar{z} \\ z & \bar{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}. \tag{2.47}$$

$\mathbb{CP}^3$ の非斉次座標を用いて $\mathcal{T}$ に複素座標を導入しよう. まず全空間 $\mathcal{T} = \mathbb{CP}^3 - \mathbb{CP}^1_\infty$ は二枚の $\mathbb{C}^3$; $\{\eta_1 \neq 0\}, \{\eta_2 \neq 0\}$ によって覆われる.

$$\{\eta_1 \neq 0\} \cong \mathbb{C}^3 : [\pi_1 : \pi_2 : \eta_1 : \eta_2] \longleftrightarrow \left(\frac{\pi_1}{\eta_1}, \frac{\pi_2}{\eta_1}, \frac{\eta_2}{\eta_1} \right) =: (w_1, w_2, \mu) \tag{2.48}$$

$$\{\eta_2 \neq 0\} \cong \mathbb{C}^3 : [\pi_1 : \pi_2 : \eta_1 : \eta_2] \longleftrightarrow \left(\frac{\pi_1}{\eta_2}, \frac{\pi_2}{\eta_2}, \frac{\eta_1}{\eta_2} \right) =: (w'_2, w'_1, \mu') \tag{2.49}$$

と定めよう. いま (w_1, w_2, μ) に注目すると $\lambda = \frac{\eta_2}{\eta_1}$ とおいたから, (2.47) より

$$w_1 = \frac{\pi_1}{\eta_1} = y - \lambda\bar{z}, \qquad w_2 = \frac{\pi_2}{\eta_1} = \lambda\bar{y} + z, \qquad \mu = \lambda \tag{2.50}$$

となっている. こうして $\{\eta_1 \neq 0\}$ (あるいは $\{\lambda \neq \infty\}$) における複素座標として (w_1, w_2, μ) がとれる. ここで前節の (2.24) 式と上の式を比較してみると, $\zeta = -\lambda$ とおくことで両者は等しいものであることがわかる. (実は, 前節で導入した複素座標は, この節の構成法で得られるものをもとにつじつまが合うように調節したものである.) すなわち, $\{\eta_1 \neq 0\}$ は 2.1.4 節における $\mathcal{T}_+$ に等しい. 全く同様に, $\zeta = -\lambda$ のもと, (2.25) と (2.49) を比較すると座標 (w'_1, w'_2, μ') は一致し, $\{\eta_2 \neq 0\}$ は $\mathcal{T}_-$ に等しいことがわかる.

2.3 Self-Duality

この節では $\mathbb{R}^4$ 上の自明なベクトル束 $E = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{C}^r$ の接続の duality について考える. (Anti-)Self-Dual 接続を定義し, その方程式を書き下す. また二次元への reduction によって得られる Hitchin の Self-Duality 方程式についてまとめる.

まず, 標準的な方法に従って, $\mathrm{T}^*\mathbb{R}^4$ の全外積束には $*$ 作用素が誘導され, 2次の外積に対しては次の直和分解を得る

$$\wedge^2 \mathrm{T}^*\mathbb{R}^4 = \wedge^2_+ \mathrm{T}^*\mathbb{R}^4 \oplus \wedge^2_- \mathrm{T}^*\mathbb{R}^4. \tag{2.51}$$

ただし

$$\begin{aligned} \wedge^2_+ \mathrm{T}^*\mathbb{R}^4 &= \langle\, dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4, \quad dx_1 \wedge dx_4 + dx_2 \wedge dx_3, \quad dx_1 \wedge dx_3 + dx_4 \wedge dx_2 \,\rangle_{\mathbb{R}} \\ \wedge^2_- \mathrm{T}^*\mathbb{R}^4 &= \langle\, dx_1 \wedge dx_2 - dx_3 \wedge dx_4, \quad dx_1 \wedge dx_4 - dx_2 \wedge dx_3, \quad dx_1 \wedge dx_3 - dx_4 \wedge dx_2 \,\rangle_{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

以下, 簡単のため (2.51) の各項を次のように略記する.

$$\wedge^2 = \wedge^2_+ \oplus \wedge^2_- \tag{2.52}$$

ここで, $\mathbb{R}^4$ に次によって複素座標 (y, z) を導入しよう

$$y = x_1 + x_2 i \qquad z = x_3 + x_4 i. \tag{2.53}$$

このとき, $\wedge^2_\pm \otimes \mathbb{C}$ の基底は次のように与えられる

$$\wedge^2_+ \otimes \mathbb{C} = \langle\ dy \wedge d\bar{y} + dz \wedge d\bar{z}, \quad dy \wedge dz, \quad d\bar{y} \wedge d\bar{z}\ \rangle_{\mathbb{C}} \tag{2.54}$$

$$\wedge^2_- \otimes \mathbb{C} = \langle\ dy \wedge d\bar{y} - dz \wedge d\bar{z}, \quad dy \wedge d\bar{z}, \quad d\bar{y} \wedge dz\ \rangle_{\mathbb{C}}. \tag{2.55}$$

以上の議論に基づき自明なベクトル束 $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{C}^r$ の接続 A について, duality を定義することができる.

Definition 2.3.1. 接続 A の曲率 $F_A \in \Gamma(\wedge^2 \otimes \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}))$ が Self-Dual part : $\wedge^2_+ \otimes \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ に値を持つとき, A は Self-Dual connection (SD 接続) であるとよぶ. Anti-Self-Dual connection (ASD 接続) についても同様である.

A を標準的に 1-form $\mathrm{A}^1(\mathbb{R}^4, \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}))$ の元と見て, 次の表記を用いる:

$$A = A_y dy + A_{\bar{y}} d\bar{y} + A_z dz + A_{\bar{z}} d\bar{z}. \tag{2.56}$$

このとき, 次の命題は直ちに確かめられる.

Proposition 2.3.2.

$$A \text{ が } SD \iff \begin{cases} F_{y\bar{y}} - F_{z\bar{z}} = 0 \\ F_{y\bar{z}} = F_{\bar{y}z} = 0 \end{cases} \tag{2.57}$$

$$A \text{ が } ASD \iff \begin{cases} F_{y\bar{y}} + F_{z\bar{z}} = 0 \\ F_{yz} = F_{\bar{y}\bar{z}} = 0 \end{cases} \tag{2.58}$$

ただし, F_{yz} などは F_A のテンソル成分, すなわち $F_{yz} = (F_z)_y - (F_y)_z + [F_y, F_z]$ などである.

次に reduction によって得られる方程式について考える. 以下では A は Hermitian であると仮定する. これは

$$A_y^* = -A_{\bar{y}}, \qquad A_z^* = -A_{\bar{z}} \tag{2.59}$$

が成り立つということに他ならない.

ここで $A_y, A_{\bar{y}}, A_z, A_{\bar{z}}$ は全て z に対して定数であったと仮定する. この仮定の下, 自明な Hermite ベクトル束 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^r$ 上の接続 $\tilde{A}$ と, Higgs 場と呼ばれる 1-form $\Phi \in \Omega^{1,0}(\mathbb{R}^2, \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C}))$ を以下のように定める.

$$\tilde{A} = A_y dy + A_{\bar{y}} d\bar{y}, \qquad \Phi = A_{\bar{z}} dy \tag{2.60}$$

ここで $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ の座標として y を用いている. A が Hermite であることから, $\tilde{A}$ も Hermite である.

Proposition 2.3.3 ([7]). *A が ASD 接続であることと, $(\tilde{A}, \Phi)$ が次の方程式の解であることは同値*

$$\begin{cases} F_{\tilde{A}} = -[\Phi, \Phi^*] \\ \bar{\partial}_{\tilde{A}} \Phi = 0 \end{cases} \tag{2.61}$$

Proof. $\Phi^* = -A_z d\bar{y}$ であるから

$$\begin{aligned} F_{\tilde{A}} + [\Phi, \Phi^*] &= \left\{ F_{y\bar{y}} - [A_{\bar{z}}, A_z] \right\} dy \wedge d\bar{y} \\ &= \left\{ F_{y\bar{y}} + (A_{\bar{z}})_z - (A_z)_{\bar{z}} + [A_z, A_{\bar{z}}] \right\} dy \wedge d\bar{y} \\ &= (F_{y\bar{y}} + F_{z\bar{z}})\, dy \wedge d\bar{y} \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_{\tilde{A}} \Phi &= \left(\left(\frac{\partial}{\partial \bar{y}} + A_{\bar{y}} \right) \otimes d\bar{y} \right) \circ (A_{\bar{z}}) dy \\ &= \left\{ (A_{\bar{z}})_{\bar{y}} + [A_{\bar{y}}, A_{\bar{z}}] \right\} d\bar{y} \wedge dy \\ &= \left\{ (A_{\bar{z}})_{\bar{y}} - (A_{\bar{y}})_{\bar{z}} + [A_{\bar{y}}, A_{\bar{z}}] \right\} d\bar{y} \wedge dy \\ &= F_{\bar{z}\bar{y}}\, d\bar{y} \wedge dy \end{aligned}$$

したがって, $F_{zy} = -(F_{\bar{z}\bar{y}})^*$ に注意すれば

$$\begin{aligned} (\tilde{A}, \Phi) \text{ が } (2.61) \text{ の解} &\iff F_{y\bar{y}} + F_{z\bar{z}} = 0,\ F_{\bar{z}\bar{y}} = 0 \\ &\overset{(2.58)}{\iff} A \text{ が ASD 接続} \end{aligned}$$

□

(2.61) 式は Hitchin の Self-Duality 方程式と呼ばれ, 参考文献 [7] で詳しく研究されている. なお, Higgs 場 Φ の取り方を $\Phi = A_z dy$ に変えると (2.61) は A が SD 接続であることと同値となり, [7] においてはこの記法が用いられている.

2.4 Twistor theory

$E = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{C}^n$ を $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2$ 上の自明な Hermite ベクトル束とする. E の Hermite 接続 A を考えるが, 前節と同様に A を $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ 値 1-form

$$A = A_y dy + A_{\bar{y}} d\bar{y} + A_z dz + A_{\bar{z}} d\bar{z} \tag{2.62}$$

によって表すことにする. この節における当面の目的は, 次の定理を $X = \mathbb{R}^4$ のとき具体的に記述することである.

Fact 2.4.1 ([3],[4]). *X を Self-Dual 4-manifold, $p : \mathcal{T} \to X$ を Twistor fibration とする. このとき $\mathcal{T}$ には複素構造が入っている. $E \to X$ を Hermite ベクトル束, $F = p^* E$ とするとき, 次の対象には 1 対 1 対応が存在する.*

- *E の Self-Dual Hermitian connection*
- *F の 複素構造であって, 以下の条件をみたすもの.*
    1. *$^\forall x \in X$ について $p^{-1}(x)$ 上 F は正則ベクトル束として自明.*

2. 正則な同型 $\sigma : \tau^*\bar{F} \to F^*$ があり, σ は各 $p^{-1}(x)$ 上の *section* の空間に正定値な計量を定める. ここで, $\tau : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ は *real structure* である.

Remark 2.4.2. 上に紹介した Fact. においては, 多様体 X の向きを我々と逆にとっている. このため, 上の Fact. において Self-Dual と呼んでいるものは我々の記法では Anti-Self-Dual に置き換えて扱うべきものになっている.

E の ASD 接続 A が与えられたとき, 対応する F の複素構造は引き戻した接続 p^*A の $(0,1)$-part として与えられる. この $(0,1)$-part が可積分であることと, A が ASD であることは同値になる. これを $X = \mathbb{R}^4$ の場合で (2.62) の形の接続について確かめよう. 当然 $\mathcal{T}$ は 2.1 節および, 2.2 節において構成した Twistor 空間を用いるが, 座標は 2.2 節の表記法で統一することにする.

まずはしばらくの間 $\mathcal{T}_+ = \{\eta_1 \neq 0\}$ 上で考える. Twistor fibration (のファイバー) を制限したもの

$$\begin{array}{rccc} p: & \mathcal{T}_+ \simeq \mathbb{C}^3 & \longrightarrow & R^4 \simeq \mathbb{C}^2 \\ & (y,z,\lambda) & \longmapsto & (y,z) \end{array} \tag{2.63}$$

は, C^∞ に自明であるが, $\mathcal{T}$ の複素構造は次の式によって定まる座標 (w_1, w_2, μ) によって導入されていた:

$$w_1 = y - \lambda\bar{z}, \quad w_2 = \lambda\bar{y} + z, \quad \mu = \lambda. \tag{2.64}$$

(2.64) を (y,z,λ) について解くと

$$y = \frac{1}{1+|\mu|^2}(w_1 + \mu\bar{w}_2), \quad z = \frac{1}{1+|\mu|^2}(-\mu\bar{w}_1 + w_2), \quad \lambda = \mu \tag{2.65}$$

となる. これらの式から接ベクトルの変換公式を計算しておくと, まず (2.64) より

$$\frac{\partial}{\partial\bar{\lambda}} = \frac{\partial}{\partial\bar{\mu}} - z\frac{\partial}{\partial\bar{w}_1} + y\frac{\partial}{\partial\bar{w}_2} \tag{2.66}$$

また (2.65) より

$$\frac{\partial}{\partial\bar{w}_1} = \frac{1}{1+|\mu|^2}\left(\frac{\partial}{\partial\bar{y}} - \mu\frac{\partial}{\partial z}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial\bar{w}_2} = \frac{1}{1+|\mu|^2}\left(\mu\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial\bar{z}}\right). \tag{2.67}$$

を得る. (2.66) 式に現れる λ と μ の違いに注意しておく.

Lemma 2.4.3. $p^*(dy)$ などをやはり dy と略記するとき

$$\begin{aligned} (dy)^{0,1} &= \frac{\lambda}{1+|\lambda|^2}(\bar{\lambda}dy + d\bar{z}) & \qquad (d\bar{y})^{0,1} &= \frac{1}{1+|\lambda|^2}(d\bar{y} - \bar{\lambda}dz) \\ (dz)^{0,1} &= -\frac{\lambda}{1+|\lambda|^2}(d\bar{y} - \bar{\lambda}dz) & \qquad (d\bar{z})^{0,1} &= \frac{1}{1+|\lambda|^2}(\bar{\lambda}dy + d\bar{z}). \end{aligned} \tag{2.68}$$

Proof. (2.65) より,

$$\begin{aligned}
dy &= d\left(\frac{1}{1+|\mu|^2}\right)(w_1+\mu\bar{w}_2) + \frac{1}{1+|\mu|^2}d(w_1+\mu\bar{w}_2)\\
&= -\frac{\mu d\bar{\mu}+\bar{\mu}d\mu}{(1+|\mu|^2)^2}(w_1+\mu\bar{w}_2) + \frac{1}{1+|\mu|^2}(dw_1+\mu d\bar{w}_2+\bar{w}_2 d\mu)\\
(dy)^{0,1} &= -\frac{\mu d\bar{\mu}}{(1+|\mu|^2)^2}(w_1+\mu\bar{w}_2) + \frac{\mu}{1+|\mu|^2}d\bar{w}_2\\
&= -\frac{\lambda d\bar{\lambda}}{1+|\lambda|^2}y + \frac{\lambda}{1+|\lambda|^2}d(\bar{\lambda}y+\bar{z})\\
&= -\frac{\lambda d\bar{\lambda}}{1+|\lambda|^2}y + \frac{\lambda}{1+|\lambda|^2}(\bar{\lambda}dy+yd\bar{\lambda}+d\bar{z})\\
&= \frac{\lambda}{1+|\lambda|^2}(\bar{\lambda}dy+d\bar{z})
\end{aligned}$$

他も同様の計算で確かめられる. □

Definition 2.4.4. $(0,1)$-form $\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2$ と, (λ, y, z) に関する $\mathfrak{gl}(r,\mathbb{C})$ 値関数 $A_{\bar{w}_1}, A_{\bar{w}_2}$ を以下で定義する.

$$\bar{\theta}_1 = d\bar{y} - \bar{\lambda}dz \qquad \bar{\theta}_2 = \bar{\lambda}dy + d\bar{z} \tag{2.69}$$

$$A_{\bar{w}_1} = \frac{1}{1+|\lambda|^2}(A_{\bar{y}} - \lambda A_z) \qquad A_{\bar{w}_2} = \frac{1}{1+|\lambda|^2}(\lambda A_y + A_{\bar{z}}) \tag{2.70}$$

(2.62) の接続に対し, p^*A の共変外微分は $\nabla = d + A$ で表されるが, その $(0,1)$-part として定まる Dolbeault 作用素 $\bar{D} = \nabla^{0,1} = \bar{\partial} + A^{0,1}$ は, 次のように表される.

Proposition 2.4.5. $\mathcal{T}_+$ 上

$$\bar{D} = \frac{\partial}{\partial\bar{\lambda}} \otimes d\bar{\lambda} + \left(\frac{\partial}{\partial\bar{w}_1} + A_{\bar{w}_1}\right) \otimes \bar{\theta}_1 + \left(\frac{\partial}{\partial\bar{w}_2} + A_{\bar{w}_2}\right) \otimes \bar{\theta}_2. \tag{2.71}$$

ここで, 例えば $\dfrac{\partial}{\partial\bar{\lambda}} \otimes d\bar{\lambda}$ は次で定まる微分作用素を表す

$$f \in \Gamma(F) \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial\bar{\lambda}}d\bar{\lambda} \in \Gamma(F \otimes T^*\mathcal{T}).$$

Proof. まず $A^{0,1}$ に (2.68) を代入して整理すると

$$A^{0,1} = A_{\bar{w}_1}\bar{\theta}_1 + A_{\bar{w}_2}\bar{\theta}_2$$

を得る. さらに

$$\begin{aligned}
\bar{\partial} &= \frac{\partial}{\partial\bar{\mu}} \otimes d\bar{\mu} + \frac{\partial}{\partial\bar{w}_1} \otimes d\bar{w}_1 + \frac{\partial}{\partial\bar{w}_2} \otimes d\bar{w}_2\\
&= \frac{\partial}{\partial\bar{\mu}} \otimes d\bar{\lambda} + \frac{\partial}{\partial\bar{w}_1} \otimes d(\bar{y}-\bar{\lambda}z) + \frac{\partial}{\partial\bar{w}_2} \otimes d(\bar{\lambda}y+\bar{z})\\
&= \frac{\partial}{\partial\bar{\mu}} \otimes d\bar{\lambda} + \frac{\partial}{\partial\bar{w}_1} \otimes (\bar{\theta}_1 - zd\bar{\lambda}) + \frac{\partial}{\partial\bar{w}_2} \otimes (\bar{\theta}_2 + yd\bar{\lambda})\\
&= \left(\frac{\partial}{\partial\bar{\mu}} - z\frac{\partial}{\partial\bar{w}_1} + y\frac{\partial}{\partial\bar{w}_2}\right) \otimes d\bar{\lambda} + \frac{\partial}{\partial\bar{w}_1} \otimes \bar{\theta}_1 + \frac{\partial}{\partial\bar{w}_2} \otimes \bar{\theta}_2\\
&= \frac{\partial}{\partial\bar{\lambda}} \otimes d\bar{\lambda} + \frac{\partial}{\partial\bar{w}_1} \otimes \bar{\theta}_1 + \frac{\partial}{\partial\bar{w}_2} \otimes \bar{\theta}_2
\end{aligned}$$

最後の等式は (2.66) の変換公式を用いていることに注意する. 以上をまとめて, (2.71) を得る. □

ここまで $\mathcal{T}_+$ 上で考えてきたが, $\bar{D}$ はその定義から $\mathcal{T}$ 全体の上での微分作用素として定まっている. 実際 $\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2$ は $\lambda = \infty$ において定まらないが, $\dfrac{\partial}{\partial \bar{w}_1} \otimes \bar{\theta}_1$ や $A_{\bar{w}_1} \otimes \bar{\theta}_1$ などは $\lambda = \infty$ においても意味を持たせることができ, 従って, (2.71) の右辺は $\mathcal{T}_-$ 上でも意味をもつ. そして, $\lambda = \infty$ 上でも (2.71) 式が成立することは明らかである. (2.25) 式などから与えられる $\mathcal{T}_-$ の座標を用いて上と同様の議論を行うこともできるが, 記号の多用による混乱を避けるために, $\mathcal{T}_-$ 上にも (y, z, λ) の座標を使うことにする.

Theorem 2.4.6. *A が ASD 接続であることと, $\bar{D}$ が可積分, すなわち $\bar{D} \circ \bar{D} = 0$ となることは同値.*

Proof. (改訂版)

$$\bar{D} = \nabla_{\bar{\mu}} \otimes d\bar{\mu} + \nabla_{\bar{w}_1} \otimes d\bar{w}_1 + \nabla_{\bar{w}_2} \otimes d\bar{w}_2$$

$$\begin{cases} \nabla_{\bar{mu}} = \dfrac{\partial}{\partial \bar{mu}} + zA_{\bar{w}_1} - yA_{\bar{w}_2} \\ \nabla_{\bar{w}_1} = \dfrac{\partial}{\partial \bar{w}_1} + A_{\bar{w}_1} \\ \nabla_{\bar{w}_2} = \dfrac{\partial}{\partial \bar{w}_2} + A_{\bar{w}_2} \end{cases}$$

と書け, $\bar{D} \circ \bar{D} = 0$ となる必用十分条件が

$$[\nabla_{\bar{\mu}}, \nabla_{\bar{w}_1}] = 0 \tag{2.72}$$

$$[\nabla_{\bar{\mu}}, \nabla_{\bar{w}_2}] = 0 \tag{2.73}$$

$$[\nabla_{\bar{w}_1}, \nabla_{\bar{w}_2}] = 0 \tag{2.74}$$

であることは直ちにわかるが, 実は (2.74) 式のみで必要十分になっている. 実際 (2.74) から (2.72) は以下のようにして導かれる. ((2.73) も同様に (2.74) から導かれる.)

$$\begin{aligned} [\nabla_{\bar{\mu}}, \nabla_{\bar{w}_1}] &= \frac{\partial}{\partial \bar{\mu}}(A_{\bar{w}_1}) - \frac{\partial}{\partial \bar{w}_1}(zA_{\bar{w}_1} - yA_{\bar{w}_2}) - [zA_{\bar{w}_1} - yA_{\bar{w}_2}, A_{\bar{w}_1}] \\ &= \frac{\partial}{\partial \bar{\mu}}(A_{\bar{w}_1}) - \frac{\partial z}{\partial \bar{w}_1} A_{\bar{w}_1} - z\frac{\partial}{\partial \bar{w}_1}(A_{\bar{w}_1}) \\ &\quad + \frac{\partial y}{\partial \bar{w}_1} A_{\bar{w}_2} + y\frac{\partial}{\partial \bar{w}_1}(A_{\bar{w}_2}) + y[A_{\bar{w}_2}, A_{\bar{w}_1}] \end{aligned}$$

であるが,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{\mu}}(A_{\bar{w}_1}) &= \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} + z\frac{\partial}{\partial \bar{w}_1} - y\frac{\partial}{\partial \bar{w}_2}\right)(A_{\bar{w}_1}) \\ &= \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}}(A_{\bar{w}_1}) + z\frac{\partial}{\partial \bar{w}_1}(A_{\bar{w}_1}) - y\frac{\partial}{\partial \bar{w}_2}(A_{\bar{w}_1}) \\ &= -\frac{\lambda}{1+|\lambda|^2} A_{\bar{w}_1} + z\frac{\partial}{\partial \bar{w}_1}(A_{\bar{w}_1}) - y\frac{\partial}{\partial \bar{w}_2}(A_{\bar{w}_1}) \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \bar{w}_1} &= \frac{1}{1+|\lambda|^2}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{y}} - \lambda\frac{\partial}{\partial z}\right) z = -\frac{\lambda}{1+|\lambda|^2} \\ \frac{\partial y}{\partial \bar{w}_1} &= \frac{1}{1+|\lambda|^2}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{y}} - \lambda\frac{\partial}{\partial z}\right) y = 0 \end{aligned}$$

さらに (2.74) をみとめると

$$[A_{\bar{w}_2}, A_{\bar{w}_1}] = \frac{\partial}{\partial \bar{w}_2}(A_{\bar{w}_1}) - \frac{\partial}{\partial \bar{w}_1}(A_{\bar{w}_2})$$

以上を代入すると, きれいにキャンセルして $[\nabla_{\bar{\mu}}, \nabla_{\bar{w}_1}] = 0$ を得る.

次に, (2.74) が ASD 方程式 (2.58) と同値であることを示す.

$$\begin{aligned}
&(1+|\lambda|^2)^2 [\nabla_{\bar{w}_1}, \nabla_{\bar{w}_2}] \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial \bar{y}} - \lambda \frac{\partial}{\partial z}\right)(\lambda A_y + A_{\bar{z}}) - \left(\lambda \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)(A_{\bar{y}} - \lambda A_z) + [A_{\bar{y}} - \lambda A_z, \lambda A_y + A_{\bar{z}}] \\
&= \lambda^2 \left\{-(A_y)_z + (A_z)_y - [A_z, A_y]\right\} + \left\{(A_{\bar{z}})_{\bar{y}} - (A_{\bar{y}})_{\bar{z}} + [A_{\bar{y}}, A_{\bar{z}}]\right\} \\
&\quad + \lambda \left\{(A_y)_{\bar{y}} - (A_{\bar{y}})_y + [A_{\bar{y}}, A_y] - (A_{\bar{z}})_z + (A_z)_{\bar{z}} - [A_z, A_{\bar{z}}]\right\} \\
&= \lambda^2 F_{yz} + F_{\bar{y}\bar{z}} - \lambda(F_{y\bar{y}} + F_{z\bar{z}})
\end{aligned}$$

これより,

$$\begin{aligned}
\bar{D} \circ \bar{D} = 0 &\iff [\nabla_{\bar{w}_1}, \nabla_{\bar{w}_2}] = 0 \\
&\iff F_{yz} = F_{\bar{y}\bar{z}} = 0,\ F_{z\bar{z}} + F_{y\bar{y}} = 0 \\
&\iff A \text{ が ASD 接続}
\end{aligned}$$

□

以上で, ASD Yang-Mills 方程式が Twistor 空間上の可積分条件でかけるという, 目標の定理が証明できた. さらに「積分したもの」について考察する.

Lemma 2.4.7 ([5]). *A が ASD 接続であるとき, $\mathcal{T}_+ \simeq \mathbb{C}^3$ 上の $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 値関数 $\psi(y, z, \lambda)$ で次の 3 式をみたすものがとれる:*

$$\left.\begin{aligned}
(2.75.a):&\quad \left(\frac{\partial}{\partial \bar{y}} - \lambda \frac{\partial}{\partial z}\right)\psi = -(A_{\bar{y}} - \lambda A_z)\psi \\
(2.75.b):&\quad \left(\lambda \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\psi = -(\lambda A_y + A_{\bar{z}})\psi \\
(2.75.c):&\quad \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}}\psi = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{2.75}$$

Proof. (2.75) の 3 式は次の式と同値である:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{w}_i}\psi = -A_{\bar{w}_i}\psi \quad (i = 1, 2), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}}\psi = 0. \tag{2.76}$$

従って, (2.75) は単純に次と同値になる:

$$\bar{D}\psi = 0. \tag{2.77}$$

Theorem 2.4.6. より A が ASD であることと $\bar{D}$ が可積分となることは同値で, これは $\mathbb{C}^3$ 上においては (2.77) をみたす ψ がとれることと同値である[1]. (すなわち ψ はひとつの正則枠場を表している.) 従って (2.75) とも同値となる. □

Remark 2.4.8. Lemma 2.4.7. は $\mathcal{T}_-$ 上についても明らかに成立する. ただし $\lambda = \infty$ において (2.75) 式は (2.76) または (2.77) 式の意味で解釈されるべきである.

[1] $\mathbb{C}^3$ 上の正則ベクトル束は全て正則に自明であるという事実 (Grauert) を用いている. これは $\mathbb{C}^3$ が可縮かつ Stein であることから従う.

$\mathcal{T}$ 全体で定義された $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 値 C^∞ 関数 ψ であって, (2.75) をみたすようなものの存在は一般に期待できない. そのため, $\mathcal{T}_+, \mathcal{T}_-$ の各々の上で定義された関数の組 ψ, ψ' を考える必要が生じる. このような関数の組については, Twistor 空間の実構造とマッチする対称性を考えると見通しがよい. $\mathcal{T}$ の適当な領域で定義された関数 ψ に対し,

$$\psi^\vee(y,z,\lambda) := \psi\left(y,z,-\frac{1}{\bar{\lambda}}\right)^{*-1} \tag{2.78}$$

によって $\psi^\vee$ を定義しよう. このとき $(\psi^\vee)^\vee = \psi$ であり, ψ が $\mathcal{T}_+$ 上の関数であったら $\psi^\vee$ は $\mathcal{T}_-$ 上の, ψ が $\mathcal{T}_-$ 上の関数であったら $\psi^\vee$ は $\mathcal{T}_+$ 上の関数となる.

以下では断らない限り A は Hermite 接続であるとする.

Lemma 2.4.9. $\mathcal{T}$ の適当な領域で定義された関数 ψ について

$$\begin{aligned}
(2.75.a) \quad &\Longleftrightarrow \quad (2.75.b)^\vee: \quad \left(\lambda\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\psi^\vee = -(\lambda A_y + A_{\bar{z}})\psi^\vee \\
(2.75.b) \quad &\Longleftrightarrow \quad (2.75.a)^\vee: \quad \left(\frac{\partial}{\partial \bar{y}} - \lambda\frac{\partial}{\partial z}\right)\psi^\vee = -(A_{\bar{y}} - \lambda A_z)\psi^\vee.
\end{aligned}$$

Proof. $\nu = -\dfrac{1}{\bar{\lambda}}$ の変換を用いると,

$$\begin{aligned}
\left(\lambda\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\psi^\vee(\lambda) &= \left(-\frac{1}{\bar{\nu}}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\psi(\nu)^{*-1} \\
&= -\psi(\nu)^{*-1}\left\{\left(-\frac{1}{\bar{\nu}}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\psi(\nu)^*\right\}\psi(\nu)^{*-1} \\
&= \frac{1}{\nu}\psi(\nu)^{*-1}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial \bar{y}} - \nu\frac{\partial}{\partial z}\right)\psi(\nu)\right\}^*\psi(\nu)^{*-1} \\
&= \frac{1}{\nu}\left[\psi(\nu)^{-1}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial \bar{y}} - \nu\frac{\partial}{\partial z}\right)\psi(\nu)\right\}\psi(\nu)^{-1}\right]^*
\end{aligned}$$

また,
$$\begin{aligned}
(\lambda A_y + A_{\bar{z}})\,\psi^\vee &= \left(-\frac{1}{\bar{\nu}}A_y + A_{\bar{z}}\right)\psi(\nu)^{*-1} \\
&= \frac{1}{\nu}\left\{\psi(\nu)^{-1}\left(A_{\bar{y}} - \nu A_z\right)\right\}^*
\end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned}
(2.75.b)^\vee \quad &\Longleftrightarrow \quad \left\{\left(\frac{\partial}{\partial \bar{y}} - \nu\frac{\partial}{\partial z}\right)\psi(\nu)\right\}\psi(\nu)^{-1} = (A_{\bar{y}} - \nu A_z) \\
&\Longleftrightarrow \quad (2.75.a)
\end{aligned}$$

二番目も同様である. □

Corollary 2.4.10. $\mathcal{T}_+$ または $\mathcal{T}_-$ 上で定義された $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 値 C^∞ 関数 ψ について, ψ が (2.75) をみたすならば $\psi^\vee$ もみたす.

Corollary 2.4.11. 実構造で不変な $\mathcal{T}$ の領域で定義された関数 ψ が, $\mathbb{R}$-*condition* をみたす, すなわち $\psi = \psi^\vee$ ならば, (2.75) の a, b は同値. したがって (2.75) 式が成立するためには a, b のどちらかと c が成立すれば十分である.

以上をまとめて次の定理を得る. 証明は明らかであろう.

Theorem 2.4.12. $\mathbb{R}^4$ 上の自明な *Hemite* ベクトル束 $E = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{C}^n$ の *Hermite* 接続 A が *ASD* 接続であることと, $\mathcal{T}_+, \mathcal{T}_-$ 上の $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 値関数の組 (ψ_+, ψ_-) であって, どちらも方程式 (2.75) をみたし, かつ次の *Reality condition* をみたすものが存在することは同値である*:*

$$\textbf{$\mathbb{R}$-condition:} \qquad \psi_- = \psi_+^{\vee}.$$

Remark 2.4.13. 接続 A が通常の Hermite(=Unitary) 性ではなく, 符号 (p, q) に対応する Hermite 性をもち, かつ ASD であったとする. ただし符号 (p, q) に対応する Hermite 性とは A を $\Omega^1\left(\mathbb{R}^4, \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})\right)$ の元とみたときに,

$$A = -J_{(p,q)} \cdot A^* \cdot J_{(p,q)}, \qquad J_{(p,q)} = \begin{pmatrix} I_p & \\ & I_q \end{pmatrix} \tag{2.79}$$

をみたすことである. ($(p, q) = (n, 0)$ のときは通常の場合である.) このとき, Theorem 2.4.12. と同様にして, $\mathcal{T}_+, \mathcal{T}_-$ 上の $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 値関数の組 (ψ_+, ψ_-) であって, どちらも方程式 (2.75) をみたし, 次の不定値な Reality condition をみたすものが存在する. また逆も成立する.

$$\textbf{$\mathbb{R}(p,q)$-condition:} \qquad \psi_- = J_{(p,q)} \cdot \psi_+^{\vee}.$$

ここまでの話の流れと逆に, $\mathcal{T}_+, \mathcal{T}_-$ 上の $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 値関数の組 (ψ, ψ') から ASD 接続を構成する方法について考えよう. ここで,

$$\partial_1 = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{y}} - \lambda \frac{\partial}{\partial z}\right), \qquad \partial_2 = \left(\lambda \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) \tag{2.80}$$

などの表記を用いることにするとき, まず次が成立する.

Lemma 2.4.14. $\mathcal{T}_+, \mathcal{T}_-$ 上の $\mathbb{R}$*-condition* をみたす $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 値関数の組 (ψ_+, ψ_-) に対して

$$(\partial_1 \psi_+) \cdot \psi_+^{-1} = (\partial_1 \psi_-) \cdot \psi_-^{-1} \quad \Longleftrightarrow \quad (\partial_2 \psi_+) \cdot \psi_+^{-1} = (\partial_2 \psi_-) \cdot \psi_-^{-1} \tag{2.81}$$

Proof. Lemma 2.4.9. の証明と同様にして

$$\begin{aligned} (\partial_2 \psi_+) \cdot \psi_+^{-1} &= \lambda \left\{(\partial_1 \psi_-) \cdot \psi_-^{-1}\right\}^{\vee} \\ (\partial_2 \psi_-) \cdot \psi_-^{-1} &= \lambda \left\{(\partial_1 \psi_+) \cdot \psi_+^{-1}\right\}^{\vee} \end{aligned} \tag{2.82}$$

が成立し, これより明らかである. ただし, 関数 $f : \mathbb{P}^1 \to \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ に対し,

$$f^{\vee}(\lambda) = -f\left(-\frac{1}{\bar{\lambda}}\right)^* \tag{2.83}$$

とし, (2.82) の右辺の $\vee$ はこの意味である. □

Theorem 2.4.15. *Lemma 2.4.14.* の同値な条件をみたす (ψ_+, ψ_-) をとり*,* $\psi_\pm$ は λ について正則とする. このとき

$$(\partial_i \psi_+)\, \psi_+^{-1} = (\partial_i \psi_-)\, \psi_-^{-1} = -A_i \qquad (i = 1, 2) \tag{2.84}$$

とおくと, A_1, A_2 は λ について一次式である. よって y, z についての関数 $A_y, A_{\bar{y}}, A_z, A_{\bar{z}}$ を

$$A_1 = A_{\bar{y}} - \lambda A_z, \qquad A_2 = \lambda A_y + A_{\bar{z}} \tag{2.85}$$

によって定めることができるが, このとき $\mathbb{R}^4$ 上の *1*-形式

$$A = A_y dy + A_{\bar{y}} d\bar{y} + A_z dz + A_{\bar{z}} d\bar{z}$$

は $\mathbb{R}^4$ 上の自明な *Hermite* ベクトル束の *ASD Hermitian* 接続を与える.

Proof. (2.84) 式から λ に関する有理性をみれば, A_i は $\lambda = \infty$ に一位の極を持ち, それ以外では正則であることがわかる. よって A_i は λ について一次式となり, (2.85) のようにかける. (2.82) 式に A_i を代入して比較すると, $A_{\bar{y}} = -A_y^*, A_{\bar{z}} = -A_z^*$ が成立することがわかるので A は Hermitian 接続となる. A が ASD であることは Theorem 2.4.12. より明らかである. □

Remark 2.4.16. Theorem 2.4.15. において (ψ_+, ψ_-) の Reality condition を $\mathbb{R}$-condition ではなく $\mathbb{R}(p,q)$-condition に代えても同様の定理を得るが, このとき得られる接続 A は符号 (p,q) に対応する Hermite 性をもつものとなる.

2.5 Loop 群の作用

この節では, 前節までの結果をもとに, ASD Yang-Mills 方程式に対する Extended solution を定義し, そこへの Loop 群の作用について考察する. その際, 第 1 章 1.3 節において用いた次の記号を再び用いることにする. すなわち $0 < \varepsilon < 1$ を一つ固定し, $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を次の領域にわける:

$$\begin{aligned} &\mathrm{I}_0 = \left\{\varepsilon \le |\lambda| \le \varepsilon^{-1}\right\},\ \mathrm{I}_1 = \left\{|\lambda| \le \varepsilon\right\} \cup \left\{\varepsilon^{-1} \le |\lambda|\right\} \\ &\Gamma = \mathrm{I}_0 \cap \mathrm{I}_1 = \Gamma_\varepsilon \cup \Gamma_{1/\varepsilon} \quad \left(\ \Gamma_\varepsilon = \left\{|\lambda| = \varepsilon\right\},\ \Gamma_{1/\varepsilon} = \left\{|\lambda| = \varepsilon^{-1}\right\}\ \right). \end{aligned}$$

まずは前節で登場した (ψ_+, ψ_-) に対して, Loop 群を用いて新しい $\left(\tilde{\psi}_+, \tilde{\psi}_-\right)$ を構成する方法について述べる. これは後で説明する Crane の Loop 群作用と, さらにその後に定義する Extended solution との中間的な位置にある命題である.

Proposition 2.5.1. $\mathbb{R}^4$ 上の自明な *Hermite* ベクトル束 $E = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{C}^n$ の *ASD Hermite* 接続 A を任意にとる. *Theorem 2.4.12.* によって得られる (ψ_+, ψ_-) を一つ選ぶ. ここで, *Loop* 群 $\Lambda_{\mathrm{I}_0} G$ の元 γ に対して次式をみたす $f, \tilde{\psi}_+$ が存在したとする:

$$\psi_+ \cdot \gamma^{-1} = f^{-1} \cdot \tilde{\psi}_+, \qquad (\lambda \in \mathrm{I}_0) \tag{2.86}$$

$$\text{ただし} \quad \begin{cases} f : \mathbb{R}^4 \times \mathrm{I}_0 \text{ 上の } C^\infty \text{ 関数で}, \lambda \text{ について正則かつ } \ f^\vee = f \\ \tilde{\psi} : \mathcal{T}_+ \text{上の } C^\infty \text{ 関数で}, \lambda \text{ について正則}. \end{cases}$$

このとき, $\tilde{\psi}_- = \tilde{\psi}_+^\vee$ とおけば $\left(\tilde{\psi}_+, \tilde{\psi}_-\right)$ は *Theorem 2.4.15.* の条件をみたす.

Proof. (2.86) より $\tilde{\psi}_+ = f \cdot \psi_+ \cdot \gamma^{-1}$ であるから,

$$\begin{aligned} \left(\partial_1 \tilde{\psi}_+\right) \cdot \psi_+^{-1} &= \left\{\partial_1 f \cdot \psi_+ \cdot \gamma^{-1} + f \cdot (\partial_1 \psi_+) \cdot \gamma^{-1}\right\} \gamma \cdot \psi_+^{-1} \cdot f^{-1} \\ &= (\partial_1 f) f^{-1} + f \cdot (\partial_1 \psi_+) \psi_+^{-1} \cdot f^{-1} \end{aligned}$$

一方,

$$\tilde{\psi}_+^\vee = f \cdot \psi_+^\vee \cdot \gamma^{\vee -1} = f \cdot \psi_- \gamma^{\vee -1}$$

より, 同様の計算によって,

$$\left(\partial_1 \tilde{\psi}_-\right) \cdot \psi_-^{-1} = \left(\partial_1 \tilde{\psi}_+^\vee\right) \cdot \psi_+^{\vee -1} = (\partial_1 f)\, f^{-1} + f \cdot (\partial_1 \psi_-)\, \psi_-^{-1} \cdot f^{-1}$$

を得る. 仮定より $(\partial_1 \psi_+) \cdot \psi_+^{-1} = (\partial_1 \psi_-) \cdot \psi_-^{-1}$ が成立しているから,

$$\left(\partial_1 \tilde{\psi}_+\right) \cdot \tilde{\psi}_+^{-1} = \left(\partial_1 \tilde{\psi}_-\right) \cdot \tilde{\psi}_-^{-1} \tag{2.87}$$

が成立する. □

Remark 2.5.2. 後にしばしば用いる Loop 群の表記を用いれば, 例えば Proposition 2.5.1. 内の f の条件は次のように表すこともできる.

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \Lambda_{\mathrm{I}_0,\mathbb{R}} G = \left\{ g \in \Lambda_{I_0} G \;\middle|\; g^\vee = g \right\} \tag{2.88}$$

今の構成が, Crane ([5]) によって指摘されたものと本質的に同じであることを簡単に見ておく. (ψ_+, ψ_-) を, $\mathcal{T}_+, \mathcal{T}_-$ 上で定義された関数の組で, $\mathbb{R}(p,q)$-condition: $\psi_- = J_{(p,q)} \cdot \psi_+^\vee$ をみたすものとする. これに対する「変換関数」G を次によって定める:

$$G = \psi_-^{-1} \psi_+ : \mathbb{R}^4 \times \mathrm{I}_0 \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \tag{2.89}$$

このとき, G は

$$G\left(-\frac{1}{\bar{\lambda}}\right) = G(\lambda)^* \tag{2.90}$$

をみたしている. 次の事実の証明は決して難しくないが, ここでは省略する.

Fact 2.5.3 ([5]). (2.90) *をみたす G であって, かつ変換関数として正則に自明なバンドルを定めるようなものをとる. このとき, ある符号 (p,q) に対する $\mathbb{R}(p,q)$-condition をみたす関数の組 (ψ_+, ψ_-) が存在し, $G = \psi_-^{-1} \psi_+$ となる.*

Remark 2.5.4. G が正則に自明なバンドルを定める, というのは別の言葉では G は Riemann-Hilbert 問題を解く, と言うこともでき, そのような G は "generic" に存在する.

Remark 2.5.5. 上の事実は, G は generic な場合にある符号に対する ASD Hermite 接続に対応するものであることを示している. Crane はこの G を "generalized solution to (A)SD Yang-Mills equation" とよび, 参考文献 [5] においてこの "generalized solution" の空間への Loop 群の作用を以下に示すように定義している. これは, Loop 群の ASD 接続の空間へのある意味で不完全な作用と言えるだろう.

"generalized solution" G への Loop 群の作用は次によって与えられるものである.

Definition 2.5.6. $g \in \Lambda_{\mathrm{I}_0} \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ に対し"generalized slution" の変換 T_g を以下で定める.

$$T_g(G)(\lambda) = g(\lambda) G(\lambda)\, g\left(-\frac{1}{\bar{\lambda}}\right)^* \tag{2.91}$$

少々強い仮定であるが, 上の状況で符号が $(n,0)$ しか現れない場合には, それはこの節のはじめの構成と本質的に同じであることを見よう. $\mathbb{R}$-condition をみたす (ψ_+, ψ_-) をとり, $G = \psi_-^{-1} \psi_+$ とおく. さらに $g \in \Lambda_{\mathrm{I}_0} \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ を適当にとって $T_g(G)$ を作ったとき,

$$T_g(G) = \tilde{\psi}_-^{-1} \tilde{\psi}_+, \qquad \left(\tilde{\psi}_+, \tilde{\psi}_-\right) \text{ は } \mathbb{R}\text{-condition をみたす} \tag{2.92}$$

と書かれたとしよう. T_g および G の定義より,

$$\begin{aligned} & g\cdot\psi_-^{-1}\psi_+\cdot g^{\vee -1} = \tilde{\psi}_-^{-1}\tilde{\psi}_+ \\ \therefore \quad & \tilde{\psi}_-\cdot g\cdot\psi_-^{-1} = \tilde{\psi}_+\cdot g^{\vee}\cdot\psi_+^{-1} \end{aligned} \tag{2.93}$$

ここで, $\gamma = g^{\vee}$ とおくとともに, (2.93) の両辺の値を f と定めよう. すると

$$\psi_+\cdot\gamma^{-1} = f^{-1}\cdot\tilde{\psi}_+ \tag{2.94}$$

となり, これは (2.86) 式と同じである. さらに,

$$f^{\vee} = \left(\tilde{\psi}_+\cdot g^{\vee}\cdot\psi_+^{-1}\right)^{\vee} = \tilde{\psi}_+^{\vee}\cdot g\cdot\psi_+^{\vee -1} = \tilde{\psi}_-\cdot g\cdot\psi_-^{-1} = f$$

より, f が Reality condition をみたすことがわかる. これで Proposition 2.5.1. が再現できた.

本題にもどる. Proposition 2.5.1. において関数の組 (ψ_+,ψ_-) を考えたが, もしそれぞれの関数を互いに交わらない領域に制限したならば, それらは一つの関数と考えることができる. Proposition 2.5.1. の内容が意味をもつぎりぎりのところまで (ψ_+,ψ_-) を制限しようとすると, 次の対象が自然に発想される.

Definition 2.5.7. $\psi:\mathbb{R}^4\to\Lambda_{\mathrm{I}_1,\mathbb{R}}G$ が **(ASD Yang-Mills 方程式に対する)** I_1 **上の Extended solution** であるとは, $i=1,2$ について $(\partial_i\psi)\,\psi^{-1}$ が λ についての一次式に (各ファイバー上) 解析接続されるときをいう.

Remark 2.5.8. 上の定義において I_1 を I_0 に変えることもできる, この場合がまさに Extended Harmonic map のアナロジーである.

Theorem 2.5.9. *ψ を I_1 上の Extended solutioin とし, また $\gamma\in\Lambda_{\Gamma,\mathbb{R}}G$ をとる. いま, $\tilde{\psi}:\mathbb{R}^4\to\Lambda_{\mathrm{I}_1}G$ および $f:\mathbb{R}^4\to\Lambda_{\mathrm{I}_0,\mathbb{R}}G$ によって*

$$\psi\cdot\gamma^{-1} = f^{-1}\cdot\tilde{\psi} \qquad (\lambda\in\Gamma) \tag{2.95}$$

とかけたとする. このとき, $\tilde{\psi}$ は I_1 上の Extended solution となる.

証明は Proposition 2.5.1. と完全に同様である. (I_1 上の Extended solution ψ が $\mathcal{T}_{\pm}$ 上の関数の組に拡張するとは限らないので, 二つの Propsition が同値とは言えない.)

Remark 2.5.10. 上の Proposition は I_0 と I_1 をそっくりそのまま入れ替えても同様に成立する.

Theorem 2.5.9. は Extended solution の空間への Loop 群の作用の存在を暗示しているように思われるが, 作用を well defined にさせない障害が二つある. 一つは分解 (2.95) が存在するかどうかであり, もう一つは, その分解ができたとしても一意でない, という点である. いずれの曖昧さも, その原因は Loop 群の分解 (あるいは分類) 定理が確立されていない, ということであり, これは改善されるべき課題であると考えている. 事実, 第 3 章においては第 1 章で言及した Loop 群の分解定理 Theorem 1.3.1. を用いて, Extended solution の空間への well defined な Loop 群の作用を見ることとなる. なお, Crane の "generalized solution" は, 上に挙げた二つの曖昧さをうまく回避したものであるといえる.

続いて, Extended solution と ASD 接続の関係を調べ, 上で述べた Extended solution の空間への Loop 群の（不完全な) 作用が ASD 接続の空間への Loop 群の作用を引き起こす可能性について考察する. まず前者から後者への対応は次のようにして与えられる. これは Theorem 2.4.15. の言い換えである.

Theorem 2.5.11. ψ を *Extended solution* とする. y, z についての関数 $A_y, A_{\bar{y}}, A_z, A_{\bar{z}}$ を

$$(\partial_1\psi)\,\psi^{-1} = -\left(A_{\bar{y}} - \lambda A_z\right), \qquad (\partial_2\psi)\,\psi^{-1} = -\left(\lambda A_y + A_{\bar{z}}\right) \tag{2.96}$$

によって定めることができるが, このとき $\mathbb{R}^4$ 上の 1-形式 : $A = A_y dy + A_{\bar{y}} d\bar{y} + A_z dz + A_{\bar{z}} d\bar{z}$ は $\mathbb{R}^4$ 上の自明な *Hermite* ベクトル束の *ASD Hermite* 接続を与える.

Extended solution ψ が与えられたとき, 上の定理によって定まる ASD Hermite 接続 A のことを, ψ によって定まる接続, などと呼ぶことにする.

逆の対応, すなわち ASD 接続から Extended solution への対応は少々込み入っている. これを整理するために Extended solution の「同値性」に関する定義を二つ与えよう. (以下しばらく, Extended solution は I_0 上でも I_1 上でもどちらでもよい. I_i として統一して考える.)

Definition 2.5.12. 二つの Extended solution ψ, ψ' が**正則同値**であるとは, ψ, ψ' が同じ接続を定めることとする.

Definition 2.5.13. 二つの Extended solution ψ, ψ' が**ゲージ同値**であるとは, $\lambda \in \mathbb{P}^1$ によらない関数 $h : \mathbb{R}^4 \to G$ が存在して, $\psi' = h\psi$ となることとする.

Proposition 2.5.14. 二つの *Extended solution* ψ, ψ' が正則同値であるための必要十分条件は, $\gamma : R^4 \to \Lambda_{\mathrm{I}_i, \mathbb{R}} G$ であって $\psi' = \psi \cdot \gamma$ かつ $\partial_l \gamma = 0$ $(l = 1, 2)$ をみたすものが存在することである.

Proof. $\mathbb{R}^4 \times \mathrm{I}_i$ 上の G 値関数 γ であって $\psi' = \psi \cdot \gamma$ なるものはいつでもとれる. ψ, ψ' が $\lambda \in \mathrm{I}_i$ について正則であるから, γ も λ について正則となる. また, ψ, ψ' が正則同値となるには

$$(\partial_l\psi)\psi^{-1} = (\partial_l'\psi')\,\psi'^{-1} \quad (l = 1, 2)$$

が必要十分であるが, これは $\partial_l \gamma = 0$ $(l = 1, 2)$ と同値である. □

これらのことと関連して, Extended solution の空間への次の二つの群作用が定義される.

(E1) 群 $\mathcal{G} := \left\{\gamma : R^4 \to \Lambda_{\mathrm{I}_i, \mathbb{R}} G \;\middle|\; \partial_l \gamma = 0 \quad (l = 1, 2)\right\}$ による右作用

$\gamma \in \mathcal{G}$, ψ : Extended solution に対し, $\psi \cdot \gamma$ も Extended solution となる. この群作用による軌道は正則同値な元全体に等しい.

(E2) $C^\infty(R^4, G)$ による左作用

$h \in C^\infty(R^4, G)$, ψ : Extended solution に対し, $\psi \cdot \gamma$ も Extended solution となる. この群作用による軌道はゲージ同値な元全体に等しい.

第 1 章 1.2 節で見た PEH map への作用と比較すると, (E1) と (P1), (E2) と (P2) がちょうど対応していることがわかる. 右作用と左作用が逆転しているが, これは次節で明らかになる通り PEH map に対応するものは ψ ではなく ψ^{-1} である, という事情によるものである.

Proposition 2.5.15. 二つの *Extended solution* ψ, ψ' がゲージ同値であるとき, これらの定める接続はゲージ同値である.

Proof. $\psi' = h\psi$ とし, ψ が定める接続を $A = A_y dy + A_{\bar{y}} d\bar{y} + A_z dz + A_{\bar{z}} d\bar{z}$ とおけば,

$$\begin{aligned}
(\partial_1\psi')\,\psi'^{-1} &= \{\partial_1(h\psi)\} \cdot \psi^{-1} h^{-1} \\
&= (\partial_1 h)h^{-1} + h(\partial_1\psi)\psi^{-1}h^{-1} \\
&= -\left\{\left(-h_{\bar{y}}h^{-1} + hA_{\bar{y}}h^{-1}\right) - \lambda\left(-h_z h^{-1} + hA_z h^{-1}\right)\right\}
\end{aligned}$$

などから, ψ' が定める接続は,

$$A' = -(dh)h^{-1} + hAh^{-1} \tag{2.97}$$

とかかれ, 二つの接続がゲージ同値であることが従う. □

上の証明を見れば明らかなように, (ES2) の作用はゲージ変換の自然な持ち上げになっている.

Proposition 2.5.16. *ψ を Extended solution とする. Loop 群の元 $\gamma \in \Lambda_{\Gamma,\mathbb{R}}G$ に対し, (2.95) に対応する分解が, 次のように二通りにできたとする:*

$$\begin{aligned} \psi \cdot \gamma^{-1} &= f^{-1} \cdot \tilde{\psi} \\ \psi \cdot \gamma^{-1} &= f'^{-1} \cdot \tilde{\psi}' \end{aligned} \qquad (\lambda \in \Gamma). \tag{2.98}$$

このとき, $\tilde{\psi}$ と $\tilde{\psi}'$ はゲージ同値な Extended solution となる.

Proof. 二式から, $\lambda \in \Gamma$ において

$$f' \cdot f^{-1} = \tilde{\psi}' \cdot \tilde{\psi}^{-1}. \tag{2.99}$$

この式の値を h とおくと, 両辺を見比べて h は λ に関して正則な, $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{P}^1$ 上の関数であることがわかる. したがって h は λ について定数で, $\tilde{\psi}' = h\tilde{\psi}$ となるので, $\tilde{\psi}'$ と $\tilde{\psi}$ がゲージ同値であることがわかる. □

Corollary 2.5.17. *Extended solution ψ と $\gamma \in \Lambda_{\Gamma,\mathbb{R}}G$ に対して (2.95) の分解を仮定すると, 新しい接続のゲージ同値類が, $\tilde{\psi}$ が定めるもの, として一意的に定まる.*

上の Corollary によって, Loop 群の分解から生じる作用の不定性は排除できた. 残っているのは, 接続 A に対して A を定める Extended solution をどうとるか, という不定性である. ここで, もしも次が成立するならば, やはりこの不定性も排除できることになる.

問題 正則同値な二つの Extended solution ψ, ψ' と Loop 群の元 $\gamma \in \Lambda_{\Gamma,\mathbb{R}}G$ に対して, $\psi \cdot \gamma^{-1}, \psi' \cdot \gamma^{-1}$ がいずれも (2.95) の形に分解できたとする. このとき, 新しく定まる二つの接続はゲージ同値.

しかし, 残念ながらこの命題は成立しない. そこで妥協策として考えられるのは, 接続 A に対して A を定める Extended solution を標準的に与える方法を決める, という方針であが, 今のところそのような方法も見つかっていない.

2.6 二次元への reduction

Extended solution ψ を用いて Twistor theory の reduction について考える. ψ は

$$\bar{D}\psi = 0 \qquad \bar{D} = \bar{\partial} + A^{0,1} \tag{2.100}$$

の解であるが A が z に対して定値であるならば,

$$\bar{\partial}\psi \cdot \psi^{-1} = -A^{0,1} \tag{2.101}$$

の両辺は z に対して定値である. この条件は特に ψ が z について定数関数であるならば満たされる. そこで (2.75) において ψ が z について定数であったとすると,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\psi = -(A_{\bar{y}} - \lambda A_z)\psi, \qquad \lambda\frac{\partial}{\partial y}\psi = -(\lambda A_y + A_{\bar{z}})\psi, \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}}\psi = 0. \tag{2.102}$$

これより偏微分を略記して

$$-\psi_{\bar{y}}\psi^{-1} = A_{\bar{y}} - \lambda A_z, \qquad -\psi_y\psi^{-1} = A_y + \frac{1}{\lambda}A_{\bar{z}}, \qquad \psi_{\bar{\lambda}} = 0. \tag{2.103}$$

さらに $\phi = \psi^{-1}$ と変換して,

$$\phi^{-1}\phi_{\bar{y}} = A_{\bar{y}} - \lambda A_z, \qquad \phi^{-1}\phi_y = A_y + \frac{1}{\lambda}A_{\bar{z}}, \qquad \phi_{\bar{\lambda}} = 0. \tag{2.104}$$

(2.104) を見ると ϕ が (Pre-)Extended Harmonic map の類似物であることがわかる.

ここで ψ に関する $\mathbb{R}$-condition を仮定しているので, Theorem 2.5.11. より A は ASD Hermite 接続である. 2.3 節で扱ったように, z に対して定数であるような関数 $A_y, A_{\bar{y}}, A_z, A_{\bar{z}}$ は次によって Hitchin の Self-Duality 方程式 (2.61) の解 $(\tilde{A}, \Phi)$ を与える:

$$\tilde{A} = d + A_y dy + A_{\bar{y}} d\bar{y}, \quad \Phi = A_{\bar{z}} dy. \tag{2.105}$$

すなわち, ϕ は Self-Duality 方程式に対する "Extended solution" であるといえる. Extended Harmonic map にならって, 明確な定義を与えよう. ここで i は $0, 1$ のどちらでも良い.

Definition 2.6.1. $\phi : \mathbb{C} \to \Lambda_{\mathrm{I}_i, \mathbb{R}} G$ が **(Self-Duality 方程式に対する)** I_i **上の Extended solution** であるとは, $\phi^{-1}\phi_y$ が $\frac{1}{\lambda}$ についての一次式であるときをいう. $(y \in \mathbb{C}, \lambda \in \mathrm{I}_i)$

上の定義において $i = 1$ のときは二つの連結成分の上の一次式が一致する, すなわち $\mathbb{P}^1$ 上の同一の一次式に解析接続される必要がある.

この節の始めに述べた考察から, 以下の二つの命題が得られる.

Proposition 2.6.2. $\phi(y, \lambda)$ を I_i 上の *Extended solution* とする. このとき, y についての $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ 値関数 B, C を用いて

$$\phi^{-1}\phi_y = B + \frac{1}{\lambda}C \ , \quad \phi^{-1}\phi_{\bar{y}} = -B^* + \lambda C^* \tag{2.106}$$

とかけるが, このとき $\tilde{A} = d + Bdy - B^* d\bar{y}$, $\Phi = Cdy$ は *Hitchin* の *Self-Duality* 方程式 (2.61) の解となる.

Proposition 2.6.3. $\psi(y, z, \lambda)$ を *ASD Yang-Mills* 方程式に対する I_i 上の *Extemded solution* とする. もし, ψ が z に対して定値であったならば, $\phi(y, \lambda) = \psi(y, z, \lambda)^{-1}$ は *Self-Duality* 方程式に対する I_i 上の *Extended solution* となる.

上で定義した, Self-Duality 方程式に対する Extended solution は, (文献などで直接見かけたことはないが) それほど奇抜なアイデアではない. というのは, 次の事実が知られているからである.

Fact 2.6.4. $(\tilde{A}, \Phi)$ が *Hitchin* の *Self-Duality* 方程式の解であることと, 次は同値:

$$\alpha_\lambda := \tilde{A} + \frac{1}{\lambda}\Phi - \lambda\Phi^* \quad \text{が任意の } \lambda \in \mathbb{C}^* \text{ で } \textit{flat} \tag{2.107}$$

証明は直接計算すればよく, ここでは省略する. Extended Harmonic map のときと同様に, 各 λ で α_λ の「積分」をおこなえば, Extended solution が得られる. 実際, Proposition 2.6.2. の記号の下, ϕ の「全微分」を計算すると以下のようになる:

$$\begin{aligned} \phi^{-1}d\phi &= \phi^{-1}\phi_y dy + \phi^{-1}\phi_{\bar{y}} d\bar{y} \\ &= \left(B + \frac{1}{\lambda}C\right) dy + \left(-B^* + \lambda C^*\right) d\bar{y} \\ \therefore\ d + \phi^{-1}d\phi &= \tilde{A} + \frac{1}{\lambda}\Phi - \lambda\Phi^*. \end{aligned} \tag{2.108}$$

すなわち, ϕ は α の積分になっている.

最後に Loop 群の作用について考察する. 今 Theorem 2.5.9. において, ψ が z について定値であったとしよう. loop 群の元 g は y, z とは無関係であったから, $\psi \cdot \gamma^{-1}$ は z について定値である. したがって (2.95) 式をみたす $\tilde{\psi}, h$ が存在したならば, それらは z について定数であるとしてよい. 実際, そうでなかった場合には適当な z_0 を固定して, $\tilde{\psi}(y, z_0, \lambda)$ などを改めて $\tilde{\psi}$ とおけばよい. このようにして, 得られた $\tilde{\psi}$ は Propsition 2.6.3. より, Self-Duality 方程式に対する Extended solution になっている. すなわち, 2.5 節で扱った Loop 群の (不完全な) 作用は Self-Duality 方程式に対する作用におちることがわかる. 定理の形にまとめておこう. ここで $\{i, j\} = \{0, 1\}$ とする.

Theorem 2.6.5. ψ を *Self-Duality* 方程式に対する I_i 上の *Extended solutioin* とし, また $\gamma \in \Lambda_{\Gamma,\mathbb{R}} G$ をとる. いま, $\tilde{\psi} : \mathbb{R}^4 \to \Lambda_{\mathrm{I}_i} G$ および $h : \mathbb{R}^4 \to \Lambda_{\mathrm{I}_j,\mathbb{R}} G$ によって

$$\psi \cdot \gamma^{-1} = h^{-1} \cdot \tilde{\psi} \qquad (\lambda \in \Gamma) \tag{2.109}$$

とかけたとする. このとき, $\tilde{\psi}$ は I_i 上の *Extended solution* となる.

第3章　Indefinite Twistor theory

第 2 章では, $\mathbb{R}^4$ 上の ASD 方程式の reduction として Self-Duality 方程式が登場した. これに対し Hitchin は参考文献 [7] において次のように指摘している. すなわち, 符号 $(2,2)$ の不定値な計量をもつ四次元 Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{2,2}$ 上の ASD 方程式を二次元へ reduction すると, Self-Duality 方程式と類似の方程式が得られる. また, それは局所的には Harmonic map の方程式として解釈出来る.

一方, 第 2 章の最後に触れた Extended solution と Extended harmonic map は酷似していた. これらのことは「$\mathbb{R}^{2,2}$ 上の Twister theory であって, reduction すると Extended harmonic map が得られるもの」の存在を予想させる.

実際, $\mathbb{R}^4$ 及び $\mathbb{R}^{2,2}$ 上の ASD 方程式は類似の Lax 表示を持ち, 特に $\mathbb{R}^{2,2}$ 上のものを reduction すると Harmonic map 方程式に対応する Lax 方程式が得られ, それはまさに Extended harmonic map の存在を示している, という事柄が Uhlenbeck により指摘されている ([13]).

この章では, 以上の信念に基づき, $\mathbb{R}^{2,2}$ 上の Twister theory を構築するが, その方法は完全に第 2 章のアナロジーである. そのため, 記号はあえて第 2 章と同じものを用いている.

ところで, Self-Duality 方程式およびその類似の方程式については参考文献 [10] 等で詳しく研究されており, 二つの方程式の性質が様々な点で類似していることが認められている. 不定値な Twister theory が, 通常の Twister theory の完全なアナロジーで構成できるということは, これらの類似性を統一的に解釈したり, あるいは一方の結果を他方に応用したりすることができる可能性を示唆しているように思われる.

3.1　不定値な計量をもつベクトル空間

符号 (2,2) の不定値な計量をもつベクトル空間についての考察から始める.

$V = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle_{\mathbb{R}}$ を四次元実ベクトル空間で, 次式によって定まる不定値な計量をもつものとする

$$\text{metric tenser}: \ g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle \qquad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}.$$

このとき, V の体積要素は $v = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$ によって与えられる. また V の二次の外積代数 $\wedge^2 V$ には次式によって符号 (2,4) の不定値な計量が誘導される

$$\langle e_i \wedge e_j, e_k \wedge e_l \rangle := \begin{vmatrix} \langle e_i, e_k \rangle & \langle e_i, e_l \rangle \\ \langle e_j, e_k \rangle & \langle e_j, e_l \rangle \end{vmatrix}.$$

具体的には, $\wedge^2 V$ の直交基底が

$$e_1 \wedge e_2, \quad e_1 \wedge e_3, \quad e_1 \wedge e_4, \quad e_2 \wedge e_3, \quad e_2 \wedge e_4, \quad e_3 \wedge e_4$$

によって与えられ, 各基底の "ノルムの二乗" は $e_1 \wedge e_2$ と $e_3 \wedge e_4$ が 1 で, 残りは -1 となる. 同様の方法で外積代数 $\wedge^* V$ 全体に計量を入れることができ, この計量は (8,8) の符号を持っていることがわかる.

外積代数 $\wedge^* V$ 上には, 次式によって Hodge の $*$ 作用素が定義される.

$$\alpha \wedge *\beta = \langle \alpha, \beta \rangle\, v \qquad (v: \text{体積要素}) \tag{3.1}$$

特に $*$ は $\wedge^2 V$ 上の変換を定め, それは具体的には次で与えられることが分かる.

$$\begin{aligned} e_1 \wedge e_2 &\longleftrightarrow e_3 \wedge e_4 \\ e_1 \wedge e_3 &\longleftrightarrow e_2 \wedge e_4 \\ e_1 \wedge e_4 &\longleftrightarrow e_3 \wedge e_2 \end{aligned} \tag{3.2}$$

このことから, $\wedge^2 V$ を $*$ の固有値 ± 1 に対して固有分解することができる. 具体的には

$$\wedge^2 V = \wedge^2_+ V \oplus \wedge^2_- V \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} \wedge^2_+ V &= \langle e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4, \quad e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4, \quad e_1 \wedge e_4 + e_3 \wedge e_2 \rangle_{\mathbb{R}} \\ \wedge^2_- V &= \langle e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4, \quad e_1 \wedge e_3 - e_2 \wedge e_4, \quad e_1 \wedge e_4 - e_3 \wedge e_2 \rangle_{\mathbb{R}}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

これらは標準的な内積の場合と完全にアナロジカルであるが, 微妙に符号が異なっていることに注意する.

3.2 Indefinite Twistor 空間の構成

この節では, 不定値な計量を持つ空間上の Twistor theory を構成する. 構成の方法は第 2 章の通常の Twistor 空間のときと完全に平行している. 第 2 章に登場するあらゆる対象に対してことごとく対応するものが存在するというのは興味深い事実である.

3.2.1 SO(2, 2) の構造

ここでは準備として SO(2, 2) の構造について考察する. またこの節の最後に, 四元数体に類似した環を導入するが, この環はいくつかの興味深い性質をもっており, 注目されるべきものであると考えている.

V を前節のものと同じ, 向きづけられた四次元実ベクトル空間で符号 (2,2) の不定値な計量をもつものとする. このとき, $\wedge^2 V$ は自然に Lie 環

$$\mathfrak{so}(2,2) = \left\{ X \in \mathfrak{sl}(4,\mathbb{R}) \;\middle|\; {}^t X \begin{pmatrix} I & O \\ O & -I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I & O \\ O & -I \end{pmatrix} X = 0 \right\} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と同型である. 対応は $\wedge^2 V$ の元 $\xi \wedge \eta$ に対し, 次の線形写像で定まる行列を与えることで定まる:

$$\zeta \in V \;\longmapsto\; \langle \eta, \zeta \rangle \xi - \langle \xi, \zeta \rangle \eta \;\in V.$$

この対応によって, $\wedge^2_{\pm} V$ の元は次のように写される.

$$
\begin{array}{ccc}
\wedge^2_{\pm} V & \longrightarrow & \mathfrak{so}(2,2) \\
e_1 \wedge e_2 \pm e_3 \wedge e_4 & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mp 1 \\ 0 & 0 & \pm 1 & 0 \end{pmatrix} =: 2A_{\pm} \\
e_1 \wedge e_4 \pm e_3 \wedge e_2 & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: 2B_{\pm} \\
e_1 \wedge e_3 \pm e_2 \wedge e_4 & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mp 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mp 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: 2C_{\pm}
\end{array}
$$

このとき bracket 積を計算すると

$$
\begin{array}{lll}
[A_+, B_+] = -C_+ & [B_+, C_+] = A_+ & [C_+, A_+] = -B_+ \\
[A_-, B_-] = C_- & [B_-, C_-] = -A_- & [C_-, A_-] = B_-
\end{array} \tag{3.5}
$$

となり, $+$ と $-$ の組合わせは全て 0 となる. これより, 次の Lie 環としての分解を得る

$$
\mathfrak{so}(2,2) = \mathfrak{m}^+ \oplus \mathfrak{m}^- \tag{3.6}
$$

$$
\text{ただし} \quad \mathfrak{m}^+ = \langle A_+, B_+, C_+ \rangle_{\mathbb{R}}, \quad \mathfrak{m}^- = \langle A_-, B_-, C_- \rangle_{\mathbb{R}}.
$$

分解 (3.6) に対応するものを Lie 群上でつくる. まず SU(1,1) の元は

$$
\begin{pmatrix} p & \bar{q} \\ q & \bar{p} \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(1,1) \qquad \begin{cases} |p|^2 - |q|^2 = 1 \\ p = a + bi, \quad q = c + di \end{cases}
$$

とかかれることに注意する. このことから SU(1,1) は連結であることがわかるが, 詳しくは 3.8 節で扱う. この表記の下, 次の二つの忠実な表現が存在する.

$$
\begin{array}{rccc}
\rho_+ : & \mathrm{SU}(1,1) & \longrightarrow & \mathrm{SO}(2,2) \\
& \begin{pmatrix} p & \bar{q} \\ q & \bar{p} \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} a & -b & c & d \\ b & a & -d & c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}
\end{array} \tag{3.7}
$$

$$
\begin{array}{rccc}
\rho_- : & \mathrm{SU}(1,1) & \longrightarrow & \mathrm{SO}(2,2) \\
& \begin{pmatrix} p & \bar{q} \\ q & \bar{p} \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} a & -b & c & d \\ b & a & d & -c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}
\end{array} \tag{3.8}
$$

これら二つの表現は四元数体に類似した環を導入することにより, 2.1.1 節の最後に述べた方法と同様の方法で導くことが出来る. これについてはこの節の最後で触れることにする.

なお, ρ_+ は自然な埋め込み $\rho : \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(4,\mathbb{R})$ の制限である.

Remark 3.2.1. $\rho : \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(4,\mathbb{R})$ の $\mathrm{SU}(2)$ への制限 ($= \rho_-$ in (2.6)) は "Anti-Self-Dual part" に値をとっているのに対し, $\mathrm{SU}(1,1)$ への制限 ($= \rho_+$) は "Self-Dual part" に値をとっている. これは Twistor theory を作ろうとするとき, 二つの状況で対象とすべき duality が逆転している, ということを示唆している.

ρ_+, ρ_- はそれぞれ Lie 環の準同型 $\mathfrak{su}(1,1) \to \mathfrak{so}(2,2)$ を定める.

$$\mathfrak{su}(1,1) = \left\{ X \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \;\middle|\; {}^tX \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \bar{X} = 0 \right\}$$

の基底を

$$\alpha = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \beta = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

ととると

$$[\alpha,\beta] = \gamma, \qquad [\beta,\gamma] = -\alpha, \qquad [\gamma,\alpha] = \beta \tag{3.10}$$

であり, ρ_+, ρ_- から誘導される写像は次のようになる :

$$\begin{array}{ccccccc} \rho_+ : & \mathfrak{su}(1,1) & \xrightarrow{\sim} & \mathfrak{m}^+ & \subset & \mathfrak{so}(2,2) \\ & \alpha & \longmapsto & -A_+ & & \\ & \beta & \longmapsto & -B_+ & & \\ & \gamma & \longmapsto & -C_+ & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} \rho_- : & \mathfrak{su}(1,1) & \xrightarrow{\sim} & \mathfrak{m}^- & \subset & \mathfrak{so}(2,2) \\ & \alpha & \longmapsto & -A_- & & \\ & \beta & \longmapsto & B_- & & \\ & \gamma & \longmapsto & -C_- & & \end{array}$$

以上から, $\rho_+(\mathrm{SU}(1,1)), \rho_-(\mathrm{SU}(1,1))$ はどちらも $\mathrm{SO}(2,2)$ 内の正規部分群で, また $\rho_+(\mathrm{SU}(1,1))$ の元と $\rho_-(\mathrm{SU}(1,1))$ の元は可換であることがわかる. これより準同型

$$\begin{array}{cccc} \rho_+ \cdot \rho_- : & \mathrm{SU}(1,1) \times \mathrm{SU}(1,1) & \longrightarrow & \mathrm{SO}(2,2) \\ & (g_+, g_-) & \longmapsto & \rho_+(g_+) \cdot \rho_-(g_-) \end{array} \tag{3.11}$$

を得るが, これは $\mathrm{SO}(2,2)$ の単位元 I を含む連結成分 $\mathrm{SO}(2,2)_0$ への全射である. 直接計算すると $I \in \mathrm{SO}(2,2)$ の逆像は $\{(I,I),(-I,-I)\}$ となり, (3.11) は $\mathrm{SO}(2,2)_0$ の二重被覆を与えていることがわかる.

この節をしめくくる前に, (3.7),(3.8) で与えられる二つの表現 ρ_+, ρ_- を 2.1.1 節と同様の方法で導出する方法について述べる. 四元数体に類似した環 $\mathbb{K}$ を次のように定義する:

$$\mathbb{K} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k, \qquad \begin{array}{c} i^2 = -1,\ j^2 = k^2 = 1 \\ ij = k,\ jk = -i,\ ki = j \end{array}$$

関係式から i, j, k は互いに反可換であることが従う. この環は

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で張られるベクトル空間 (に通常の積構造を入れたもの) とみなすことができる. このとき i, j, k は $\mathfrak{su}(1,1)$ の基底に他ならない.

Definition 3.2.2. $\mathbb{K} \ni \alpha = a+bi+cj+dk$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$ に対し, その共役 $\bar{\alpha}$ を $\bar{\alpha} = a-bi-cj-dk$ で定める. また, $\|\alpha\|^2 := q \cdot \bar{q} = a^2+b^2-c^2-d^2$ とおく ($\|\alpha\|^2$ は正とは限らないので, $\|\alpha\|$ は定義しない).

Proposition 3.2.3. *$\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ に対して次が成立する.*

1. $\overline{\alpha\beta} = \bar{\beta} \cdot \bar{\alpha}$
2. $\|\alpha \cdot \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 \|\beta\|^2$

証明は直接計算すればよいので省略する.

$$\mathrm{Sp}(\mathbb{K}) := \left\{ \alpha \in \mathbb{K} \;\middle|\; \|\alpha\|^2 = 1 \right\}$$

と定めるとこれは群をなし, $\mathrm{Sp}(\mathbb{K})$ は通常の左右からのかけ算によって $\mathbb{K}$ に対して二通りに作用する.

$$\mathbb{K} \cong \mathbb{R}^{2,2} : a+bi+cj+dk \;\leftrightarrow\; (a,b,c,d)$$

の自然な同一視のもと, それら二つの作用から二つの表現 $\mathrm{Sp}(\mathbb{K}) \to \mathrm{SO}(2,2)$ を得る. 一方

$$\mathbb{K} \cong \mathbb{C}^{1,1} : p+qj \;\leftrightarrow\; (p,q)$$

の同一視を用いると, $\mathrm{Sp}(\mathbb{K})$ の右からのかけ算が $\mathbb{C}^{1,1}$ への作用を定め, これが表現 $\mathrm{Sp}(\mathbb{K}) \to \mathrm{SU}(1,1)$ を誘導し, これは同型になっていることが容易に確かめられる. (左からのかけ算は $\mathbb{C}^{1,1}$ の複素構造を保たない.)

以上を用いて, $\mathrm{SU}(1,1)$ の元を同型を用いて $\mathrm{Sp}(\mathbb{K})$ の元に写し, さらに左からのかけ算によって $\mathrm{SO}(2,2)$ に写すことにより, 表現 ρ_+ が得られる. 同様に右からのかけ算によって ρ_- が得られる.

Remark 3.2.4. $\mathbb{K}$ の環構造から定まる次の二つの集合に注目しよう:

$$\mathbb{K}^\times = \left\{ \alpha \in \mathbb{K} \;\middle|\; \|\alpha\|^2 \neq 0 \right\} \tag{3.12}$$

$$\mathcal{I} := \mathbb{K} - \mathbb{K}^\times = \left\{ \alpha \in \mathbb{K} \;\middle|\; \|\alpha\|^2 = 0 \right\}. \tag{3.13}$$

$\mathcal{I}$ は Propositon 3.2.3. の二番目の性質により $\mathbb{K}$ の両側イデアルになっている. この $\mathcal{I}$ の存在が Indefinite Twistor theory を通常の場合よりも扱いにくく, また面白いものにしている. 実際, この $\mathcal{I}$ に当たる部分に Harmonic map が現れる, ということを後に指摘する.

3.2.2 $V^{2,2}$ 上の複素構造の空間

不定値な計量をもつ四次元ベクトル空間 V は前節の記号をそのまま用いる. また, 二次元複素ベクトル空間 $W = \langle \theta_1, \theta_2 \rangle_{\mathbb{C}}$ の計量 (sesqui-linear form) を以下で定める.

$$\begin{array}{l} \text{metric tenser} \\ h_{i\bar{j}} = \langle \theta_i, \theta_j \rangle \end{array} \qquad (h_{i\bar{j}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

W の underlying な実ベクトル空間を $W_{\mathbb{R}}$ とかくことにすると, $W_{\mathbb{R}}$ には符号 $(2,2)$ の不定値な計量が入っていることになる. 2.1.2 節と全く同様に, 計量を保つ同型 $V \cong W_{\mathbb{R}}$ を定めることにより, V に計量と向きを保つ複素構造を入れることができる. 実計量空間としての同型の定め方が

SO(2, 2) だけあるのに対し, 複素計量空間としての同型が U(1, 1) だけあるので, 結局 V の計量と向きを保つ複素構造全体の空間は SO(2, 2)/ U(1, 1) であることがわかる. ただし

$$\mathrm{SO}(2,2) = \left\{ g \in \mathrm{SL}(4,\mathbb{R}) \;\middle|\; {}^t g \begin{pmatrix} I & O \\ O & -I \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} I & O \\ O & -I \end{pmatrix} \right\} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\mathrm{U}(1,1) = \left\{ h \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) \;\middle|\; {}^t h \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \bar{h} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

であって, 自然な埋め込み $\rho : \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(4,\mathbb{C})$ のもと次が成立している.

$$\mathrm{SU}(1,1) = \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) \cap \mathrm{SO}(2,2)$$

複素構造のパラメータ空間 SO(2, 2)/ U(1, 1) の具体的な形を知るために, (3.11) の二重被覆の底空間を U(1, 1) に制限して得られるものについて考察する.

まず, かけ算で定まる自然な準同型

$$\mathrm{U}(1) \times \mathrm{SU}(1,1) \longrightarrow \mathrm{U}(1,1) \tag{3.14}$$

を考える. U(1), SU(1, 1) は連結であり, またこの写像は明らかに全射であるから, U(1, 1) が連結であることがわかる. これは二重被覆であることに注意する. いま, $\rho : \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(4,\mathbb{R})$ を使うと

$$\rho(\mathrm{U}(1,1)) = \rho(\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})) \cap \mathrm{SO}(2,2)$$

となるのであった. $(\lambda, g) \in \mathrm{U}(1) \times \mathrm{SU}(1,1)$ について,

$$\rho(\lambda g) = \rho(g) \cdot \rho(\lambda I) = \rho_+(g) \cdot \rho_- \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}. \tag{3.15}$$

これらのことから, $S^1 = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(1,1) \right\}$ とかくとき,

$$\mathrm{SU}(1,1) \times S^1 \xrightarrow{\rho_+ \cdot \rho_-} \rho(\mathrm{U}(1,1)) \cong \mathrm{U}(1,1) \tag{3.16}$$

は全射, 二重被覆であり, 従って (3.16) は (3.11) の U(1, 1) への制限である.

以上のことから,

$$\begin{aligned} \mathrm{SO}(2,2)_0/\,\mathrm{U}(1,1) &\cong \mathrm{SU}(1,1) \times \mathrm{SU}(1,1) \;/\; \mathrm{SU}(1,1) \times S^1 \\ &\cong \mathrm{SU}(1,1)/S^1 \\ &\cong D \end{aligned} \tag{3.17}$$

となる. なお $D = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < 1\}$ として, 同型 $\mathrm{SU}(1,1)/S^1 \cong D$ は以下で与えられる.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SU}(1,1)/S^1 & \xrightarrow{\sim} & D \\ \left[\begin{pmatrix} p & \bar{q} \\ q & \bar{p} \end{pmatrix}\right] & \longmapsto & \dfrac{q}{p} \qquad \left(|p|^2 - |q|^2 = 1\right) \end{array} \tag{3.18}$$

ここで, 以下の命題を認めよう. これについては 3.8 節で証明する.

Proposition 3.2.5. SO(2, 2) の連結成分に関して次が成立する.

1. $\mathrm{SO}(2,2)$ は二つの連結成分を持っている.

2. $J := \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ とおくとき, $J \notin \mathrm{SO}(2,2)_0$.

この命題と, (3.17) の事実により, $\mathrm{SO}(2,2)/\,\mathrm{U}(1,1)$ は二枚の D に同相であることがわかる. 特に $\mathrm{SO}(2,2)$ の I を含まない連結成分を $\mathrm{SO}(2,2)_1$ とかくことにし,

$$\mathrm{SO}(2,2)_0/\,\mathrm{U}(1,1) \cong D_+, \qquad \mathrm{SO}(2,2)_1/\,\mathrm{U}(1,1) \cong D_-$$

と定義すれば, 全体としては次の同型が成立する

$$\mathrm{SO}(2,2)/\,\mathrm{U}(1,1) \cong D_+ \sqcup D_- \qquad \text{(disjoint union)}.$$

より詳細な座標の取り方については次節で議論する.

3.2.3 $\mathrm{SO}(2,2)/\,\mathrm{U}(1,1)$ の実構造

2.1.3 節と同様に, $\mathrm{SO}(2,2)/\,\mathrm{U}(1,1)$ には複素共役から定まる involution が存在し, それは次の Definition によって与えられる. これは 2.1.3 節と同様に well defined である.

Definition 3.2.6 ($\mathrm{SO}(2,2)/\,\mathrm{U}(1,1)$ **の実構造).**

$$\begin{array}{rccc} \sigma: & \mathrm{SO}(2,2)/\,\mathrm{U}(1,1) & \longrightarrow & \mathrm{SO}(2,2)/\,\mathrm{U}(1,1) \\ & [g] & \longmapsto & [g \cdot J] \end{array} \tag{3.19}$$

一方, Proposition 3.2.5. により, σ は $\mathrm{SO}(2,2)/\,\mathrm{U}(1,1)$ の二つの連結成分を入れ替える変換であることがわかる. σ をより具体的に理解するために, $\mathrm{SO}(2,2)/\,\mathrm{U}(1,1)$ の座標を定めよう. まず,

$$\begin{aligned} D_+ &= \left\{ \lambda \in \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \;\middle|\; |\lambda| < 1 \right\} \\ D_- &= \left\{ \lambda \in \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \;\middle|\; |\lambda| > 1 \right\} \end{aligned} \tag{3.20}$$

とおくことにし, 以下によって座標を入れる.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SO}(2,2)_0/\,\mathrm{U}(1,1) & \xrightarrow{\sim} & D_+ \\ \left[\rho_- \begin{pmatrix} p & \bar{q} \\ q & \bar{p} \end{pmatrix}\right] & \longmapsto & \dfrac{q}{p} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{SO}(2,2)_1/\,\mathrm{U}(1,1) & \xrightarrow{\sim} & D_- \\ \left[\rho_- \begin{pmatrix} p & \bar{q} \\ q & \bar{p} \end{pmatrix} \cdot J\right] & \longmapsto & \dfrac{\bar{p}}{\bar{q}} \end{array}$$

Proposition 3.2.7. $\mathrm{SO}(2,2)/\,\mathrm{U}(1,1) \cong D_+ \sqcup D_-$ の同型のもと,

$$\begin{array}{rccc} \sigma: & D_+ \sqcup D_- & \longrightarrow & D_+ \sqcup D_- \\ & \lambda & \longmapsto & \dfrac{1}{\bar{\lambda}} \end{array} \tag{3.21}$$

Proof. 定義から直ちに従う. □

3.2.4 $\mathbb{R}^{2,2}$ 上の Twistor 空間

$\mathbb{R}^{2,2} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)\}$ を, 不定値な計量 $dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2 - dx_4^2$ を持つ Minkowski 空間とし, その上の (計量と向きを保つ) 枠バンドル P を考える.

$$P \cong \mathbb{R}^{2,2} \times \mathrm{SO}(2,2)$$

であるが, P の各点 (x, g) において, g は接空間 $\mathrm{T}_x \mathbb{R}^{2,2}$ の等長変換と見なすことができる.

$$\mathcal{T} := P / \mathrm{U}(1,1) \cong \mathbb{R}^{2,2} \times \mathrm{SO}(2,2) / \mathrm{U}(1,1) \cong \mathbb{R}^{2,2} \times (D_+ \sqcup D_-)$$

とおけば, $\mathcal{T}$ の点 (x, ζ) において $\zeta \in D_+ \sqcup D_-$ は $\mathrm{T}_x \mathbb{R}^{2,2}$ の計量と向きを保つ複素構造を一つ与える. 以下, $\mathcal{T}$ を二つの連結成分に分け, 以下のようにおく:

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_+ \sqcup \mathcal{T}_- \qquad \mathcal{T}_\pm := \mathbb{R}^{2,2} \times D_\pm.$$

$\mathcal{T}$ の各点の接空間には, 次のように複素構造を入れることができる. 例えば $(x, \zeta) \in \mathcal{T}_+$ のとき, 直積構造に由来する直和分解

$$\mathrm{T}_{(x,\zeta)} \mathcal{T}_+ \cong \mathrm{T}_x \mathbb{R}^{2,2} \oplus \mathrm{T}_\zeta D_+$$

に注目して, $\mathrm{T}_\zeta D_+$ 方向には D_+ から定まる複素構造を入れる. また $\mathrm{T}_x \mathbb{R}^{2,2}$ 方向の複素構造は $D_+ \cong \mathrm{SO}(2,2)_0 / \mathrm{U}(1,1)$ によって ζ が定めるものをとる. $\mathcal{T}_-$ についても同様である.

Proposition 3.2.8. 上で定めた $\mathcal{T}$ の各接空間での複素構造は, 可積分な概複素構造を定める. 従って $\mathcal{T}$ は自然に複素多様体である.

Proof. $\mathcal{T}$ に適当な複素構造を導入し, 各点の接空間における複素構造が先程定めたものと一致することを見る. いま,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{2,2} & & \mathbb{C}^{1,1} \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) & \longleftrightarrow & (y, z) \end{array} \qquad \begin{cases} y = x_1 + x_2 i \\ z = x_3 + x_4 i \end{cases}$$

とみると, $\mathcal{T}_+ = \mathbb{R}^{2,2} \times (D_+ \sqcup D_-)$ の直積構造を反映した C^∞-座標として (y, z, ζ) がとれる. いま, $\mathcal{T}_+, \mathcal{T}_-$ のそれぞれの複素座標 (w_1, w_2, μ) および (w_1', w_2', μ') を以下によって定める.

$$\begin{array}{cccc} \Psi_+ : & \mathcal{T}_+ & \longrightarrow & \mathbb{C}^{1,1} \times D \\ & (y, z, \zeta) & \longmapsto & (w_1, w_2, \mu) \end{array} \qquad \begin{cases} w_1 = y - \zeta \bar{z} \\ w_2 = -\zeta \bar{y} + z \\ \mu = -\zeta. \end{cases} \tag{3.22}$$

$$\begin{array}{cccc} \Psi_- : & \mathcal{T}_- & \longrightarrow & \mathbb{C}^{1,1} \times D \\ & (y, z, \zeta) & \longmapsto & (w_1', w_2', \mu') \end{array} \qquad \begin{cases} w_1' = \bar{y} - \dfrac{1}{\zeta} z \\ w_2' = -\dfrac{1}{\zeta} y + \bar{z} \\ \mu' = -\dfrac{1}{\zeta}. \end{cases} \tag{3.23}$$

このとき $\mathcal{T}_\pm$ の $D_\pm$ 方向には通常の複素構造が入っていることが直ちにわかる. $\mathbb{R}^{2,2}$ 方向も期待されるものであることを以下で示す.

まずは $\mathcal{T}_+$ について考える. (3.22) を y, z について解くと,

$$y = \frac{1}{1 - |\zeta|^2} (w_1 + \zeta \bar{w}_2), \qquad z = \frac{1}{1 - |\zeta|^2} (\zeta \bar{w}_1 + w_2) \tag{3.24}$$

ここで

$$\begin{cases} \Delta = p = \dfrac{1}{\sqrt{1-|\zeta|^2}} \\ q = \dfrac{\zeta}{\sqrt{1-|\zeta|^2}} \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} |p|^2 - |q|^2 = 1 \\ \dfrac{q}{p} = \zeta \end{pmatrix} \tag{3.25}$$

とおくと, (3.24) は次のようにかける:

$$y = \Delta \cdot \big(pw_1 + q\bar{w}_2\big)\,, \qquad z = \Delta \cdot \big(q\bar{w}_1 + pw_2\big)\,. \tag{3.26}$$

さらに

$$\begin{cases} w_1 = u_1 + u_2 i \\ w_2 = u_3 + u_4 i \end{cases} \qquad \begin{cases} p = a \qquad (p \in \mathbb{R}) \\ q = c + di \end{cases} \tag{3.27}$$

とおくと, 実座標の変換として次式を得る:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \Delta \begin{pmatrix} a & 0 & c & d \\ 0 & a & d & -c \\ c & d & a & 0 \\ d & -c & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \tag{3.28}$$

これより, 接ベクトルの変換公式は次のようになる:

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\ \frac{\partial}{\partial u_2}\ \frac{\partial}{\partial u_3}\ \frac{\partial}{\partial u_4} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\ \frac{\partial}{\partial x_2}\ \frac{\partial}{\partial x_3}\ \frac{\partial}{\partial x_4} \right) \cdot \Delta \begin{pmatrix} a & 0 & c & d \\ 0 & a & d & -c \\ c & d & a & 0 \\ d & -c & 0 & a \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

スカラー Δ はスケール変換を与えており, 本質的な複素構造は (3.29) 式内の変換行列によって与えられる. この行列は

$$\rho_- \begin{pmatrix} a & c - di \\ c + di & a \end{pmatrix} = \rho_- \begin{pmatrix} p & \bar{q}_2 \\ q & \bar{p}_1 \end{pmatrix} \tag{3.30}$$

に等しい. 従って $\mathrm{T}_x\,\mathbb{R}^{2,2}$ 方向の複素構造は,

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SO}(2,2)_0/\,\mathrm{U}(1,1) & \xrightarrow{\sim} & D_+ \\ \left[\rho_- \begin{pmatrix} p & \bar{q} \\ q & \bar{p} \end{pmatrix} \right] & \longmapsto & \dfrac{q}{p} = \zeta \end{array}$$

により ζ が定めるものである.

同様の議論であるが, $\mathcal{T}_- = \mathbb{R}^{2,2} \times D_-$ について考える. (3.23) において w_1', w_2' の式に μ' を代入して y, z について解くと

$$y = \frac{1}{1-|\mu'|^2}\left(\bar{w}_1' - \mu' w_2'\right), \qquad z = \frac{1}{1-|\mu'|^2}\left(-\mu' w_1' + \bar{w}_2'\right). \tag{3.31}$$

ここで

$$\begin{cases} \Delta' = p = \dfrac{1}{\sqrt{1-|\mu'|^2}} \\ q' = -\dfrac{\bar{\mu}'}{\sqrt{1-|\mu'|^2}} \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} |p|^2 - |q'|^2 = 1 \\ \dfrac{\bar{p}'}{\bar{q}'} = -\dfrac{1}{\mu'} = \zeta \end{pmatrix} \tag{3.32}$$

とおくと, (3.31) は次のようにかける:

$$y = \Delta' \cdot \left(p w_1' + q' \bar{w}_2'\right), \qquad z = \Delta' \cdot \left(q' \bar{w}_1' + p w_2'\right). \tag{3.33}$$

実座標を

$$\begin{cases} w_1' = u_1' + u_2' i \\ w_2' = u_3' + u_4' i \end{cases} \qquad \begin{cases} p = a \qquad (p \in \mathbb{R}) \\ q' = c + di \end{cases} \tag{3.34}$$

とおいて先程と同様の計算をすると, 次の接ベクトルの変換公式を得る.

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_1'}\ \frac{\partial}{\partial u_2'}\ \frac{\partial}{\partial u_3'}\ \frac{\partial}{\partial u_4'}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\ \frac{\partial}{\partial x_2}\ \frac{\partial}{\partial x_3}\ \frac{\partial}{\partial x_4}\right) \cdot \Delta \begin{pmatrix} a & 0 & c & -d \\ 0 & -a & d & c \\ c & -d & a & 0 \\ d & c & 0 & -a \end{pmatrix} \tag{3.35}$$

複素構造を与える行列は,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & 0 & c & -d \\ 0 & -a & d & c \\ c & -d & a & 0 \\ d & c & 0 & -a \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & 0 & c & d \\ 0 & a & d & -c \\ c & d & a & 0 \\ d & -c & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \\ &= \rho_- \begin{pmatrix} a & c - di \\ c + di & a \end{pmatrix} \cdot J = \rho_- \begin{pmatrix} p & \bar{q}' \\ q' & \bar{p} \end{pmatrix} \cdot J \end{aligned} \tag{3.36}$$

従って $\mathrm{T}_x \mathbb{R}^{2,2}$ 方向の複素構造は,

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SO}(2,2)_1 / \mathrm{U}(1,1) & \xrightarrow{\sim} & D_- \\ \left[\rho_- \begin{pmatrix} p & \bar{q}' \\ q' & \bar{p}' \end{pmatrix} \cdot J\right] & \longmapsto & \dfrac{\bar{p}'}{\bar{q}'} = \zeta \end{array}$$

により ζ が定めるものである. □

Proposition 3.2.9 ($\mathcal{T}$ の実構造). *$\mathcal{T}$ には各ファイバーの実構造から定まる次の自然な involution が存在するが, Proposition 3.2.8. によって定まる $\mathcal{T}$ の複素構造のもと, これは反正則である.*

$$\begin{array}{rcccc} \sigma: & \mathcal{T} \cong & \mathbb{C}^{1,1} \times (D_+ \sqcup D_-) & \longrightarrow & \mathcal{T} \\ & & (y, z, \zeta) & \longmapsto & \left(y, z, \dfrac{1}{\bar{\zeta}}\right) \end{array} \tag{3.37}$$

Proof. $\sigma|_{\mathcal{T}_+} : \mathcal{T}_+ \to \mathcal{T}_-$ についてみてみると (3.22),(3.23) の表記の下,

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \mu \end{pmatrix} = \Psi_+ \begin{pmatrix} y \\ z \\ \zeta \end{pmatrix} \overset{\sigma}{\longmapsto} \Psi_- \begin{pmatrix} y \\ z \\ 1/\bar{\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y} - \bar{\zeta} z \\ -\bar{\zeta} y + \bar{z} \\ -\bar{\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \\ -\bar{\mu} \end{pmatrix} \tag{3.38}$$

よって σ は $\mathcal{T}_+$ 上, 反正則である. $\mathcal{T}_-$ 上も同様に示せる. □

3.3 四元数体に類似した環を用いた Twistor 空間の構成

3.2.1 節の最後に述べた四元数体に類似した環 $\mathbb{K}$ を用いることで, 2.2 節のアナロジーを展開することができる. この節ではこの方法によって $\mathbb{R}^{2,2}$ 上の Twistor 空間を構成する方法を述べる.

環 $\mathbb{K}$ を, $\mathbb{C}$ に j を添加した環と考える. 即ち, $\mathbb{K} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j \cong \mathbb{C}^2$. これより

$$\mathbb{C}^4 \cong \mathbb{K}^2 : (\pi_1, \pi_2, \eta_1, \eta_2) \longleftrightarrow (\pi_1 + \pi_2 j, \eta_1 + \eta_2 j).$$

左から j をかけることにより, $\mathbb{C}^4$ に次の変換が定まる

$$j\times : (\pi_1, \pi_2, \eta_1, \eta_2) \longmapsto (\bar{\pi}_2, \bar{\pi}_1, \bar{\eta}_2, \bar{\eta}_1).$$

さらにこの写像は $\mathbb{C}\mathrm{P}^3 = \mathbb{C}^4 - \{0\} \ / \ \mathbb{C}^*$ 上の involution を誘導する. これを τ で表すこととし, $\mathbb{C}\mathrm{P}^3$ の実構造と呼ぶ. τ は固定点をもつ反正則な involution である.

ここで, 任意の $\alpha \in \mathbb{K}$ に対して次の集合を考えよう:

$$\mathbb{C}\mathrm{P}^1_\alpha = \left\{ [\pi_1 : \pi_2 : \eta_1 : \eta_2] \in \mathbb{C}\mathrm{P}^3 \ \middle| \ (\pi_1 + \pi_2 j) = (\eta_1 + \eta_2 j)\alpha \right\}. \tag{3.39}$$

第 2.2 節のときと同様に, $\mathbb{C}\mathrm{P}^1_\alpha$ は τ 不変な射影直線を定めていて, $[\eta_1 : \eta_2]$ を斉次座標として, $\lambda = \frac{\eta_2}{\eta_1}$ を非斉次座標としてそれぞれ取れる.

いま, 点 $[\pi_1 : \pi_2 : \eta_1 : \eta_2] \in \mathbb{C}\mathrm{P}^3$ をひとつ定めたとき, この点がどの $\mathbb{C}\mathrm{P}^1_\alpha$ に属するか考えたい. まず, $\mathcal{I} = \mathbb{K} - \mathbb{K}^\times$ は $\mathbb{K}$ のイデアルをなすことに注意すると, $\pi_1 + \pi_2 j \in \mathbb{K}^\times, \eta_1 + \eta_2 j \in \mathcal{I}$ のとき, この点はいかなる $\alpha \in \mathbb{K}$ に対しても $\mathbb{C}\mathrm{P}^1_\alpha$ に属さない. また, $\eta_1 + \eta_2 j \in \mathbb{K}^\times$ のときは,

$$\alpha = (\eta_1 + \eta_2 j)^{-1} \cdot (\pi_1 + \pi_2 j) \tag{3.40}$$

によって α は一意的に定まる. $\eta_1 + \eta_2 j \in \mathbb{K} - \mathbb{K}^\times$ のときは一般に一意に決まらない. そこで $\mathbb{C}\mathrm{P}^1_\alpha$ を制限して次の集合を考える:

$$\mathcal{T}_\alpha := \left\{ [\pi_1 : \pi_2 : \eta_1 : \eta_2] \in \mathbb{C}\mathrm{P}^3 \ \middle| \ (\pi_1 + \pi_2 j) = (\eta_1 + \eta_2 j)\alpha, \eta_1 + \eta_2 j \in \mathbb{K}^\times \right\}. \tag{3.41}$$

ここで,

$$\eta_1 + \eta_2 j \in \mathbb{K}^\times \Longleftrightarrow |\eta_1|^2 - |\eta_2|^2 \neq 0 \Longleftrightarrow |\lambda| = \left| \frac{\eta_2}{\eta_1} \right| \neq 1 \tag{3.42}$$

より, $\mathcal{T}_\alpha$ は $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 - S^1$ に等しいことが分かる. ここで $\mathcal{T} = \bigcup_\alpha \mathcal{T}_\alpha$ とおこう. 以上のことから次のファイブレーションを得る:

$$p : \mathcal{T} \longrightarrow \mathbb{K} : \zeta \longmapsto \alpha \qquad (\zeta \in \mathcal{T}_\alpha). \tag{3.43}$$

$\mathcal{T}$ は $\mathbb{C}\mathrm{P}^3$ の開集合であり, 自然な複素構造を持っている. この複素構造のもと, 上の写像 p は C^∞ であるが, 正則ではない. なお, ここまでの構成から $\mathcal{T}$ の任意の点は $(\alpha, \lambda) \in \mathbb{K} \times (\mathbb{C}\mathrm{P}^1 - S^1)$ の組と一対一に対応することがわかる. すなわち可微分多様体として,

$$\mathcal{T} \cong \mathbb{K} \times (\mathbb{C}\mathrm{P}^1 - S^1). \tag{3.44}$$

以下, (3.43) が前節までで構成したものと一致することを見よう. $\mathbb{R}^{2,2}$ の座標を以下のように取り, これにより底空間に向きを入れる

$$\begin{gathered} \mathbb{R}^{2,2} \cong \mathbb{C}^{1,1} \cong \mathbb{K} : (x_1, x_2, x_3, x_4) \longleftrightarrow (y, z) \longleftrightarrow \alpha \\ y = x_1 + x_2 i, \quad z = x_3 + x_4 i, \quad \alpha = y + zj. \end{gathered} \tag{3.45}$$

このように定めると, $\zeta = [\pi_1 : \pi_2 : \eta_1 : \eta_2] \in \mathbb{C}\mathrm{P}^3$ に対して $p(\zeta) = \alpha$, すなわち $(\pi_1 + \pi_2 j) = (\eta_1 + \eta_2 j)\alpha$ となるための必用十分条件は次の式で与えられる

$$\begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & \bar{z} \\ z & \bar{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \tag{3.46}$$

ここでもやはり $\mathbb{C}\mathrm{P}^3$ の非斉次座標を用いて $\mathcal{T}$ に複素座標を導入しよう. (3.42) に注意して, $\lambda := \frac{\eta_2}{\eta_1}$ の絶対値が 1 より大きいところと小さいところに $\mathcal{T}$ を分けることができる.

$$\{|\lambda| < 1\} : [\pi_1 : \pi_2 : \eta_1 : \eta_2] \longleftrightarrow \left(\frac{\pi_1}{\eta_1}, \frac{\pi_2}{\eta_1}, \frac{\eta_2}{\eta_1} \right) =: (w_1, w_2, \mu) \tag{3.47}$$

$$\{|\lambda| > 1\} : [\pi_1 : \pi_2 : \eta_1 : \eta_2] \longleftrightarrow \left(\frac{\pi_1}{\eta_2}, \frac{\pi_2}{\eta_2}, \frac{\eta_1}{\eta_2} \right) =: (w_2', w_1', \mu') \tag{3.48}$$

と定めよう. いま (w_1, w_2, μ) に注目すると $\lambda := \frac{\eta_2}{\eta_1}$ とおいたから, (3.46) より,

$$w_1 = \frac{\pi_1}{\eta_1} = y + \lambda \bar{z}, \qquad w_2 = \frac{\pi_2}{\eta_1} = \lambda \bar{y} + z, \qquad \mu = \lambda \tag{3.49}$$

となっている. こうして $\{|\lambda| < 1\}$ における複素座標として (w_1, w_2, μ) がとれる. ここで前節の (3.22) 式と上の式を比較してみると, $\zeta = -\lambda$ とおくことで両者は等しいものであることがわかる.

$\{|\lambda| > 1\}$ について同様にみてみると, やはり (3.46) より,

$$w_1' = \bar{y} + \frac{1}{\lambda} z, \qquad w_2' = \frac{1}{\lambda} y + \bar{z}, \qquad \mu' = \frac{1}{\lambda} \tag{3.50}$$

となり, やはり (w_1', w_2', μ') は前節の (3.23) 式で定まるものと等しい. したがってこの節の構成法で得られた $\mathcal{T}$ は前節で得られたものと一致していることが示された.

Remark 3.3.1. $\{|\lambda| < 1\}$ における座標を定義する式 (3.49) は $\{1 < |\lambda| < \infty\}$ においても座標を定めている. ($|\lambda| = 1$ のときは可逆でない.) ここにおける (w_1', w_2', μ') との座標変換は

$$w_1' = \frac{w_2}{\lambda}, \qquad w_2' = \frac{w_1}{\lambda}, \qquad \mu' = \frac{1}{\lambda} \tag{3.51}$$

となり, したがって (w_1, w_2, μ) は (3.49) 式により $\{1 < |\lambda| < \infty\}$ においても正則な座標として用いることができる.

3.4 Self-Duality

この節では $\mathbb{R}^{2,2}$ 上の自明なベクトル束 $\mathbb{R}^{2,2} \times \mathbb{C}^r$ の接続の duality について考える. (Anti-)Self-Dual 接続を定義し, その方程式を書き下す. また二次元への reduction によって得られる Hitchin の Self-Duality 方程式についてまとめる.

まず, 3.1 節の方法に従って, $\mathrm{T}^* \mathbb{R}^{2,2}$ の全外積束には $*$ 作用素が誘導され, 2 次の外積に対しては次の直和分解を得る

$$\wedge^2 \mathrm{T}^* \mathbb{R}^{2,2} = \wedge^2_+ \mathrm{T}^* \mathbb{R}^{2,2} \oplus \wedge^2_- \mathrm{T}^* \mathbb{R}^{2,2}. \tag{3.52}$$

ただし

$$\wedge^2_+ \mathrm{T}^* \mathbb{R}^{2,2} = \langle\, dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4, \quad dx_1 \wedge dx_3 + dx_2 \wedge dx_4, \quad dx_1 \wedge dx_4 + dx_3 \wedge dx_2 \,\rangle_{\mathbb{R}}$$
$$\wedge^2_- \mathrm{T}^* \mathbb{R}^{2,2} = \langle\, dx_1 \wedge dx_2 - dx_3 \wedge dx_4, \quad dx_1 \wedge dx_3 - dx_2 \wedge dx_4, \quad dx_1 \wedge dx_4 - dx_3 \wedge dx_2 \,\rangle_{\mathbb{R}}.$$

以下, 簡単のため (3.52) の各項を次のように略記する.

$$\wedge^2 = \wedge^2_+ \oplus \wedge^2_- \tag{3.53}$$

ここで, $\mathbb{R}^{2,2}$ に次によって複素座標 (y, z) を導入しよう

$$y = x_1 + x_2 i \qquad z = x_3 + x_4 i. \tag{3.54}$$

このとき, $\wedge^2_\pm \otimes \mathbb{C}$ の基底は次のように与えられる

$$\wedge^2_+ \otimes \mathbb{C} = \langle\ dy \wedge d\bar{y} + dz \wedge d\bar{z}, \quad dy \wedge d\bar{z}, \quad d\bar{y} \wedge dz\ \rangle_{\mathbb{C}} \tag{3.55}$$

$$\wedge^2_- \otimes \mathbb{C} = \langle\ dy \wedge d\bar{y} - dz \wedge d\bar{z}, \quad dy \wedge dz, \quad d\bar{y} \wedge d\bar{z}\ \rangle_{\mathbb{C}}. \tag{3.56}$$

自明なベクトル束 $\mathbb{R}^{2,2} \times \mathbb{C}^r$ の接続 A について, 通常の計量の場合と同様にして, duality を定義することができる.

Definition 3.4.1. 接続 A の曲率 $F_A \in \Gamma(\wedge^2 \otimes \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}))$ が Self-Dual part : $\wedge^2_+ \otimes \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ に値を持つとき, A は Self-Dual connection (SD 接続) であるとよぶ. Anti-Self-Dual connection (ASD 接続) についても同様である.

A を標準的に 1-form $\mathrm{A}^1(\mathbb{R}^{2,2}, \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}))$ の元と見て, 次の表記を用いる:

$$A = A_y dy + A_{\bar{y}} d\bar{y} + A_z dz + A_{\bar{z}} d\bar{z}. \tag{3.57}$$

このとき, 次の命題は直ちに確かめられる.

Proposition 3.4.2.

$$A \text{ が } SD \quad \Longleftrightarrow \begin{cases} F_{y\bar{y}} - F_{z\bar{z}} = 0 \\ F_{yz} = F_{\bar{y}\bar{z}} = 0 \end{cases} \tag{3.58}$$

$$A \text{ が } ASD \Longleftrightarrow \begin{cases} F_{y\bar{y}} + F_{z\bar{z}} = 0 \\ F_{y\bar{z}} = F_{\bar{y}z} = 0 \end{cases} \tag{3.59}$$

ただし, F_{yz} などは F_A のテンソル成分である.

次に reduction によって得られる方程式について考える. 以下では A は Hermite 接続であると仮定する. これは

$$A^*_y = -A_{\bar{y}}, \qquad A^*_z = -A_{\bar{z}}$$

が成り立つということに他ならない.

ここで $A_y, A_{\bar{y}}, A_z, A_{\bar{z}}$ は全て z に対して定数であったと仮定する. この仮定の下, 自明な Hermite ベクトル束 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^r$ 上の接続 $\tilde{A}$ と, Higgs 場 $\Phi \in \Omega^{1,0}(\mathbb{R}^2, \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C}))$ を以下のように定める.

$$\tilde{A} = A_y dy + A_{\bar{y}} d\bar{y}, \qquad \Phi = A_{\bar{z}} dy \tag{3.60}$$

ここで $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ の座標として y を用いている. A が Hermite であることから, $\tilde{A}$ も Hermite である.

Proposition 3.4.3. A が SD 接続であることと, $(\tilde{A}, \Phi)$ が次の方程式の解であることは同値

$$\begin{cases} F_{\tilde{A}} = [\Phi, \Phi^*] \\ \bar{\partial}_{\tilde{A}} \Phi = 0. \end{cases} \tag{3.61}$$

Proof. $\Phi^* = -A_z d\bar{y}$ であるから

$$\begin{aligned} F_{\tilde{A}} - [\Phi, \Phi^*] &= \left\{F_{y\bar{y}} + [A_{\bar{z}}, A_z]\right\} dy \wedge d\bar{y} \\ &= \left\{F_{y\bar{y}} + (A_z)_{\bar{z}} - (A_{\bar{z}})_z + [A_{\bar{z}}, A_z]\right\} dy \wedge d\bar{y} \\ &= (F_{y\bar{y}} + F_{\bar{z}z})\, dy \wedge d\bar{y} \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_{\tilde{A}} \Phi &= \left(\left(\frac{\partial}{\partial \bar{y}} + A_{\bar{y}}\right) \otimes d\bar{y}\right) \circ (A_{\bar{z}}) dy \\ &= \left\{(A_{\bar{z}})_{\bar{y}} + [A_{\bar{y}}, A_{\bar{z}}]\right\} d\bar{y} \wedge dy \\ &= \left\{(A_{\bar{z}})_{\bar{y}} - (A_{\bar{y}})_{\bar{z}} + [A_{\bar{y}}, A_{\bar{z}}]\right\} d\bar{y} \wedge dy \\ &= F_{\bar{z}\bar{y}}\, d\bar{y} \wedge dy \end{aligned}$$

したがって, $F_{zy} = -(F_{\bar{z}\bar{y}})^*$ に注意すれば

$$\begin{aligned} (\tilde{A}, \Phi) \text{ が } (3.61) \text{ の解} &\iff F_{y\bar{y}} - F_{z\bar{z}} = 0,\ F_{\bar{z}\bar{y}} = 0 \\ &\overset{(3.58)}{\iff} A \text{ が SD 接続} \end{aligned}$$

□

3.5 Twistor theory

3.2 節および, 3.3 節で構成した Twistor 空間 $\mathcal{T}$ を用いて, 2.4 節,2.6 節と平行した議論を行う.

まず, Indefinite version の Twistor theory について考える. 2.4 節にならい, $\mathcal{T} = \mathcal{T}_+ \cup \mathcal{T}_-$ の座標としては 3.3 節の表記法で統一することにする.

以下しばらく $\mathcal{T}_+ \simeq \mathbb{C}^{1,1} \times D_+$ 上で考える. $\mathcal{T}_+$ 上の複素座標は次式によって与えられていた.

$$w_1 = y + \lambda \bar{z}, \quad w_2 = \lambda \bar{y} + z, \quad \mu = \lambda. \tag{3.62}$$

なお, この式を (y, z, λ) について解くと

$$y = \frac{1}{1 - |\mu|^2}(w_1 - \mu \bar{w}_2), \quad z = \frac{1}{1 - |\mu|^2}(-\mu \bar{w}_1 + w_2), \quad \lambda = \mu \tag{3.63}$$

となる.

以下, 2.4 節で行った議論に合わせて話を進めるが, 計算方法などはほとんど同じであるので主なものを除いて証明は省略する. A は Hermite 接続とする.

Proposition 3.5.1. 接ベクトルの変換公式は次によって与えられる.

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \bar{\mu}} + z \frac{\partial}{\partial \bar{w}_1} + y \frac{\partial}{\partial \bar{w}_2} \tag{3.64}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{w}_1} = \frac{1}{1 - |\mu|^2}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{y}} - \mu \frac{\partial}{\partial z}\right) \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{w}_2} = \frac{1}{1 - |\mu|^2}\left(-\mu \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right). \tag{3.65}$$

Lemma 3.5.2. $p^*(dy)$ などをやはり dy と略記するとき, 次が成立する.

$$\begin{aligned}(dy)^{0,1} &= -\frac{\lambda}{1-|\lambda|^2}(\bar{\lambda}dy + d\bar{z}) & (d\bar{y})^{0,1} &= \frac{1}{1-|\lambda|^2}(d\bar{y} + \bar{\lambda}dz) \\ (dz)^{0,1} &= -\frac{\lambda}{1-|\lambda|^2}(d\bar{y} + \bar{\lambda}dz) & (d\bar{z})^{0,1} &= \frac{1}{1-|\lambda|^2}(\bar{\lambda}dy + d\bar{z}).\end{aligned} \tag{3.66}$$

Definition 3.5.3. $(0,1)$-form $\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2$ と, (y,z,λ) に関する $\mathfrak{gl}(r,\mathbb{C})$ 値関数 $A_{\bar{w}_1}, A_{\bar{w}_2}$ を以下で定義する.

$$\bar{\theta}_1 = d\bar{y} + \bar{\lambda}dz \qquad \bar{\theta}_2 = \bar{\lambda}dy + d\bar{z} \tag{3.67}$$

$$A_{\bar{w}_1} = \frac{1}{1-|\lambda|^2}(A_{\bar{y}} - \lambda A_z) \qquad A_{\bar{w}_2} = \frac{1}{1-|\lambda|^2}(-\lambda A_y + A_{\bar{z}}) \tag{3.68}$$

接続 A に対し, p^*A の共変外微分は $\nabla = d + A$ で表されるが, その $(0,1)$-part として定まる Dolbeault 作用素 $\bar{D} = \nabla^{0,1} = \bar{\partial} + A^{0,1}$ は, 次のように表される.

Proposition 3.5.4. $\mathcal{T}_+$ 上に

$$\bar{D} = \frac{\partial}{\partial\bar{\lambda}} \otimes d\bar{\lambda} + \left(\frac{\partial}{\partial\bar{w}_1} + A_{\bar{w}_1}\right) \otimes \bar{\theta}_1 + \left(\frac{\partial}{\partial\bar{w}_2} + A_{\bar{w}_2}\right) \otimes \bar{\theta}_2 \tag{3.69}$$

Remark 3.5.5. 3.3 節の最後に Remark 3.3.1. として指摘したように, (w_1, w_2, μ) は $\{1 < |\lambda| < \infty\}$ における座標としても用いることができるから (3.69) の意味を $\mathcal{T}_-$ 上へも拡張することができる. ただし, $\lambda = \infty$ に関しては注意が必要であるが, このときにも (3.69) の右辺は意味を持ち, これが $\bar{D}$ に等しいことが示される. 以下では記号の多用による混乱を避けるために, $\mathcal{T}_-$ 上にも (y,z,λ) の座標を使うことにする.

Theorem 3.5.6. *A が SD 接続であることと, $\bar{D}$ が可積分, すなわち $\bar{D} \circ \bar{D} = 0$ となることは同値.*

Proof. (改訂版) Theorem 2.4.6. と同様にして, $\bar{D} \circ \bar{D} = 0$ となる必用十分条件は,

$$[\nabla_{\bar{w}_1}, \nabla_{\bar{w}_2}] = 0 \quad \text{ただし} \quad \begin{cases} \nabla_{\bar{w}_1} = \dfrac{\partial}{\partial\bar{w}_1} + A_{\bar{w}_1} \\ \nabla_{\bar{w}_2} = \dfrac{\partial}{\partial\bar{w}_2} + A_{\bar{w}_2} \end{cases}$$

であることが示される. また

$$\begin{aligned} &(1-|\lambda|^2)^2\,[\nabla_{\bar{w}_1}, \nabla_{\bar{w}_2}] \\ =\ &\left(\frac{\partial}{\partial\bar{y}} - \lambda\frac{\partial}{\partial z}\right)(-\lambda A_y + A_{\bar{z}}) - \left(-\lambda\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial\bar{z}}\right)(A_{\bar{y}} - \lambda A_z) + [A_{\bar{y}} - \lambda A_z, -\lambda A_y + A_{\bar{z}}] \\ =\ &\lambda^2\left\{(A_y)_z - (A_z)_y + [A_z, A_y]\right\} + \left\{(A_{\bar{z}})_{\bar{y}} - (A_{\bar{y}})_{\bar{z}} + [A_{\bar{y}}, A_{\bar{z}}]\right\} \\ &+ \lambda\left\{-(A_y)_{\bar{y}} + (A_{\bar{y}})_y - [A_{\bar{y}}, A_y] - (A_{\bar{z}})_z + (A_z)_{\bar{z}} - [A_z, A_{\bar{z}}]\right\} \\ =\ &\lambda^2 F_{zy} + F_{\bar{y}\bar{z}} - \lambda(F_{y\bar{y}} + F_{\bar{z}z}). \end{aligned}$$

これより,

$$\begin{aligned} \bar{D} \circ \bar{D} = 0 &\iff [\nabla_{\bar{w}_1}, \nabla_{\bar{w}_2}] = 0 \\ &\iff F_{yz} = F_{\bar{y}\bar{z}} = 0,\ F_{y\bar{y}} = F_{z\bar{z}} \\ &\iff A \text{ が SD 接続} \end{aligned}$$

□

Lemma 3.5.7. *A が SD 接続であるとき, $\mathcal{T}_+ \simeq \mathbb{C}^{1,1} \times D_+$ 上の $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 値関数 $\psi(y,z,\lambda)$ で次の 3 式をみたすものがとれる:*

$$
\left.\begin{aligned}
&(3.70.a): && \left(\frac{\partial}{\partial \bar{y}} - \lambda\frac{\partial}{\partial z}\right)\psi = -(A_{\bar{y}} - \lambda A_z)\psi \\
&(3.70.b): && \left(-\lambda\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\psi = -(-\lambda A_y + A_{\bar{z}})\psi \\
&(3.70.c): && \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}}\psi = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{3.70}
$$

Proof. (3.70) の 3 式は次の式と同値である.

$$
\frac{\partial}{\partial \bar{w}_i}\psi = -A_{\bar{w}_i}\psi \quad (i=1,2), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}}\psi = 0. \tag{3.71}
$$

従って, (2.75) は単純に次と同値になる:

$$
\bar{D}\psi = 0. \tag{3.72}
$$

従って Proposition 3.5.6. より A が SD 接続であることと $\bar{D}$ が可積分となることは同値で, これは $\mathbb{C}^{1,1} \times D_+$ 上においては (3.70) をみたす ψ がとれることと同値である[1]. (すなわち ψ はひとつの正則枠場を表している.) □

Remark 3.5.8. Lemma 3.5.7. は $\mathcal{T}_-$ 上についても明らかに成立する. ただし $\lambda = \infty$ において (3.70) 式は (3.71) または (3.72) 式の意味で解釈されるべきである.

次に実構造とマッチする対称性について考える. $\mathcal{T}$ の適当な領域で定義された $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 値関数 ψ に対し,

$$
\psi^\vee(y,z,\lambda) := \psi\left(y,z,\frac{1}{\bar{\lambda}}\right)^{*-1} \tag{3.73}
$$

によって $\psi^\vee$ を定義しよう. このとき $(\psi^\vee)^\vee = \psi$ であり, ψ が $\mathcal{T}_+$ 上の関数であったら $\psi^\vee$ は $\mathcal{T}_-$ 上の, ψ が $\mathcal{T}_-$ 上の関数であったら $\psi^\vee$ は $\mathcal{T}_+$ 上の関数となる.

以下では断らない限り A は Hermite 接続であるとする.

Lemma 3.5.9. *$\mathcal{T}$ の適当な領域で定義された関数 ψ について*

$$
\begin{aligned}
&(3.70.a) \iff (3.70.b)^\vee: && \left(-\lambda\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\psi^\vee = -(-\lambda A_y + A_{\bar{z}})\psi^\vee \\
&(3.70.b) \iff (3.70.a)^\vee: && \left(\frac{\partial}{\partial \bar{y}} - \lambda\frac{\partial}{\partial z}\right)\psi^\vee = -(A_{\bar{y}} - \lambda A_z)\psi^\vee.
\end{aligned}
$$

Proof. $\nu = \dfrac{1}{\bar{\lambda}}$ の変換を用いると,

$$
\begin{aligned}
\left(-\lambda\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\psi^\vee(\lambda) &= \left(-\frac{1}{\bar{\nu}}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\psi(\nu)^{*-1} \\
&= -\psi(\nu)^{*-1}\left\{\left(-\frac{1}{\bar{\nu}}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\psi(\nu)^*\right\}\psi(\nu)^{*-1} \\
&= \frac{1}{\nu}\,\psi(\nu)^{*-1}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial \bar{y}} - \nu\frac{\partial}{\partial z}\right)\psi(\nu)\right\}^*\psi(\nu)^{*-1} \\
&= \frac{1}{\nu}\left[\psi(\nu)^{-1}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial \bar{y}} - \nu\frac{\partial}{\partial z}\right)\psi(\nu)\right\}\psi(\nu)^{-1}\right]^*
\end{aligned}
$$

[1] $\mathbb{C}^2 \times D$ 上の正則ベクトル束は全て正則に自明であるという事実 (Grauert) を用いている. これは $\mathbb{C}^2 \times D$ が可縮かつ Stein であることから従う.

また,

$$
\begin{aligned}
(-\lambda A_y + A_{\bar z})\,\psi^{\vee} &= \left(-\frac{1}{\bar\nu}A_y + A_{\bar z}\right)\psi(\nu)^{*-1} \\
&= \frac{1}{\nu}\left\{\psi(\nu)^{-1}\left(A_{\bar y} - \nu A_z\right)\right\}^{*}
\end{aligned}
$$

したがって,

$$
\begin{aligned}
(3.70.b)^{\vee} \quad &\Longleftrightarrow \quad \left\{\left(\frac{\partial}{\partial\bar y} - \nu\frac{\partial}{\partial z}\right)\psi(\nu)\right\}\psi(\nu)^{-1} = -\left(A_{\bar y} - \nu A_z\right) \\
&\Longleftrightarrow \quad (3.70.a)
\end{aligned}
$$

二番目も同様である. □

Corollary 3.5.10. $\mathcal{T}_+$ または $\mathcal{T}_-$ 上で定義された $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 値 C^∞ 関数 ψ について, ψ が (3.70) をみたすならば $\psi^{\vee}$ もみたす.

Corollary 3.5.11. 実構造で不変な $\mathcal{T}$ の領域で定義された関数 ψ が, $\mathbb{R}$-*condition* をみたす, すなわち $\psi = \psi^{\vee}$ ならば, (3.70) の a, b は同値. したがって (3.70) 式が成立するためには a, b のどちらかと c が成立すれば十分である.

以上をまとめて次の定理を得る.

Theorem 3.5.12. $\mathbb{R}^{2,2}$ 上の自明な *Hemite* ベクトル束 $E = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{C}^r$ の *Hermite* 接続 A が *SD* 接続であることと, $\mathcal{T}_+, \mathcal{T}_-$ 上の $\mathrm{GL}(r,\mathbb{C})$ 値関数の組 (ψ_+, ψ_-) であって, どちらも方程式 (3.70) をみたし, かつ次の *Reality condition* をみたすものが存在することは同値である*:*

$$
\textbf{$\mathbb{R}$-condition:} \qquad \psi_- = \psi_+^{\vee}.
$$

ここで極めて重要な注意をする. それは (3.70) 式は $|\lambda| = 1$ において意味をもつ, ということである. したがって (3.70) 式を任意の $\lambda \in \mathbb{P}^1$ に対して考えることが可能となる. (もっとも, 任意の $(y, z, \lambda) \in \mathbb{C}^{1,1} \times \mathbb{P}^1$ に対して定義された関数 ψ であって (3.70) をみたすものの存在は期待できない.) $D_+ \sqcup D_-$ の実構造は自然に $\mathbb{P}^1$ へ拡張され, それは次で表される:

$$
\lambda \in \mathbb{P}^1 \longmapsto \frac{1}{\bar\lambda} \in \mathbb{P}^1. \tag{3.74}
$$

新しく加わった $\{|\lambda| = 1\}$ はこの実構造における $\mathbb{P}^1$ の実部 (Real part) になっている. さらに, $\{|\lambda| = 1\}$ において (3.70) 式は "Real" な振る舞いをし, これが Extended Harmonic map の現れるための舞台を与えていると考えられるわけであるが, これについては 3.7 節でまとめる.

ここまでの話の流れと逆に, (ψ_+, ψ_-) から ASD 接続を構成する方法についても, 第 2 章と全く同様に議論できる.

$$
\partial_1 = \left(\frac{\partial}{\partial\bar y} - \lambda\frac{\partial}{\partial z}\right), \qquad \partial_2 = \left(-\lambda\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial\bar z}\right) \tag{3.75}
$$

などの表記を用いることにすると次が成立する.

Lemma 3.5.13. $\mathcal{T}_+, \mathcal{T}_-$ 上の $\mathbb{R}$-*condition* をみたす $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 値関数の組 (ψ_+, ψ_-) に対して

$$
(\partial_1\psi_+)\cdot\psi_+^{-1} = (\partial_1\psi_-)\cdot\psi_-^{-1} \quad \Longleftrightarrow \quad (\partial_2\psi_+)\cdot\psi_+^{-1} = (\partial_2\psi_-)\cdot\psi_-^{-1} \tag{3.76}
$$

Theorem 3.5.14. *Lemma 3.5.13.* の同値な条件をみたす (ψ_+, ψ_-) をとり, $\psi_\pm$ は λ について正則とする. このとき

$$(\partial_i \psi_+)\, \psi_+^{-1} = (\partial_i \psi_-)\, \psi_-^{-1} = -A_i \qquad (i = 1, 2) \tag{3.77}$$

とおくと, A_1, A_2 は λ について一次式である. よって y, z についての関数 $A_y, A_{\bar{y}}, A_z, A_{\bar{z}}$ を

$$A_1 = A_{\bar{y}} - \lambda A_z, \qquad A_2 = -\lambda A_y + A_{\bar{z}} \tag{3.78}$$

によって定めることができるが, このとき $\mathbb{R}^4$ 上の *1*-形式

$$A = A_y dy + A_{\bar{y}} d\bar{y} + A_z dz + A_{\bar{z}} d\bar{z}$$

は $\mathbb{R}^4$ 上の自明な *Hermite* ベクトル束の *ASD Hermitian* 接続を与える.

これらの証明は第 2 章と同様であるから省略する.

3.6 Loop 群の作用 および 二次元への reduction

第 2 章 2.5 節に対応して, $\mathbb{R}^{2,2}$ 上の SD Yang-Mills 方程式に対する Extended solution を定義し, そこへの Loop 群の作用を構成する. 第 2 章の状況では不完全な作用しか得られなかったが, この章で扱っている不定値なバージョンでは, 第 1 章の Theorem 1.3.1. にある Loop 群の分解定理が使えるため, 完全な作用が得られる. そしてこれを reduction したものは第 1 章の Dressing transformation に他ならないことが分かる. この節では以上の内容をまとめる.

いつものように次の記号を用いることにする. すなわち $0 < \varepsilon < 1$ を一つ固定し, $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を次の領域にわける:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{I}_0 = \left\{ \varepsilon \le |\lambda| \le \varepsilon^{-1} \right\},\ \mathrm{I}_1 = \left\{ |\lambda| \le \varepsilon \right\} \cup \left\{ \varepsilon^{-1} \le |\lambda| \right\} \\
&\Gamma = \mathrm{I}_0 \cap \mathrm{I}_1 = \Gamma_\varepsilon \cup \Gamma_{1/\varepsilon} \quad \left(\Gamma_\varepsilon = \left\{ |\lambda| = \varepsilon \right\},\ \Gamma_{1/\varepsilon} = \left\{ |\lambda| = \varepsilon^{-1} \right\} \right).
\end{aligned}$$

Definition 3.6.1. $\psi : \mathbb{R}^{2,2} \to \Lambda_{\mathrm{I}_1, \mathbb{R}} G$ が **(SD Yang-Mills 方程式に対する)** I_1 **上の Extended solution** であるとは, $i = 1, 2$ について $(\partial_i \psi)\, \psi^{-1}$ は λ についての一次式に (各ファイバー上) 解析接続されるときをいう.

Remark 3.6.2. 上の定義において I_1 を I_0 に変えることもできる, さらに I_0 上の Extended solution ψ に対して

$$\psi'(y, z, \lambda) = \psi(y, z, \lambda) \cdot \psi(y, z, 1)^{-1} \tag{3.79}$$

が Extended solution であることは容易にわかるので, この方法により $\psi : \mathbb{R}^{2,2} \to \Lambda^1_{\mathrm{I}_0, \mathbb{R}} G$ となるように正規化できることがわかる. この場合がまさに Extended Harmonic map に対応する.

Theorem 3.6.3. ψ を I_1 上の *Extended solutioin* とし, また $\gamma \in \Lambda_{\Gamma, \mathbb{R}} G$ をとる. このとき $\psi \cdot \gamma^{-1} \in \Lambda_{\Gamma, \mathbb{R}} G$ であるが, ここで *Loop* 群の分解定理 *(Theorem 1.3.1.)* を用いると $\tilde{\psi} : \mathbb{R}^{2,2} \to \Lambda_{\mathrm{I}_1, \mathbb{R}} G$ および $h : \mathbb{R}^{2,2} \to \Lambda^1_{\mathrm{I}_0, \mathbb{R}} G$ によって

$$\psi \cdot \gamma^{-1} = h^{-1} \cdot \tilde{\psi} \qquad (\lambda \in \Gamma) \tag{3.80}$$

とかくことができる. このとき, $\tilde{\psi}$ は I_1 上の *Extended solution* となる.

Proof. 証明はいつもの通りである. (3.80) より $\tilde{\psi} = h \cdot \psi \cdot \gamma^{-1}$ であるから,

$$\begin{aligned}\left(\partial_i \tilde{\psi}\right) \cdot \tilde{\psi}^{-1} &= \left\{\partial_i h \cdot \psi \cdot \gamma^{-1} + h \cdot (\partial_i \psi) \cdot \gamma^{-1}\right\} \gamma \cdot \psi^{-1} \cdot h^{-1} \\ &= (\partial_i h)\, h^{-1} + h \cdot (\partial_i \psi)\, \psi_+^{-1} \cdot h^{-1}\end{aligned}$$

λ に関する有理性を見れば, 右辺は I_0 上正則, 左辺は $\lambda = \infty$ に一位の極をもち, それ以外では正則, ゆえに $\left(\partial_i \tilde{\psi}\right) \cdot \tilde{\psi}^{-1}$ は λ についての一次式に解析接続され, $\tilde{\psi}$ が Extended solution であることがわかる. □

続いて, Extended solution と ASD 接続の関係を調べる.

Theorem 3.6.4. *ψ を Extended solution とする. y, z についての関数 $A_y, A_{\bar{y}}, A_z, A_{\bar{z}}$ を*

$$(\partial_1 \psi)\, \psi^{-1} = -\left(A_{\bar{y}} - \lambda A_z\right), \qquad (\partial_2 \psi)\, \psi^{-1} = -\left(-\lambda A_y + A_{\bar{z}}\right) \tag{3.81}$$

によって定めることができるが, このとき $\mathbb{R}^4$ 上の 1-形式 : $A = A_y dy + A_{\bar{y}} d\bar{y} + A_z dz + A_{\bar{z}} d\bar{z}$ は $\mathbb{R}^4$ 上の自明な Hermite ベクトル束の ASD Hermite 接続を与える.

Extended solution ψ が与えられたとき, 上の定理によって定まる ASD Hermite 接続 A のことを, ψ によって定まる接続, などと呼ぶことにする.

Definition 3.6.5. 二つの Extended solution ψ, ψ' が**正則同値**であるとは, ψ, ψ' が同じ接続を定めることとする.

Definition 3.6.6. 二つの Extended solution ψ, ψ' が**ゲージ同値**であるとは, $\lambda \in \mathbb{P}^1$ によらない関数 $h : \mathbb{R}^4 \to G$ が存在して, $\psi' = h\psi$ となることとする.

第 2 章のときと同様に次の Propsition が成立する.

Proposition 3.6.7. *二つの Extended solution ψ, ψ' が正則同値であるための必要十分条件は, $\gamma : R^4 \to \Lambda_{\mathrm{I}_i, \mathbb{R}} G$ であって $\psi' = \psi \cdot \gamma$ かつ $\partial_l \gamma = 0$ $(l = 1, 2)$ をみたすものが存在することである.*

ここでも Extended solution の空間への次の二つの群作用が定義される.

(E1)' 群 $\mathcal{G} := \left\{\gamma : R^4 \to \Lambda_{\mathrm{I}_i, \mathbb{R}} G \;\middle|\; \partial_l \gamma = 0 \quad (l = 1, 2)\right\}$ による右作用

$\gamma \in \mathcal{G}$, ψ : Extended solution に対し, $\psi \cdot \gamma$ も Extended solution となる. この群作用による軌道は正則同値な同値類に等しい.

(E2)' $C^\infty(R^4, G)$ による左作用

$h \in C^\infty(R^4, G)$, ψ : Extended solution に対し, $\psi \cdot \gamma$ も Extended solution となる. この群作用による軌道はゲージ同値な同値類に等しい.

Proposition 3.6.8. *二つの Extended solution ψ, ψ' がゲージ同値であるとき, これらの定める接続はゲージ同値である. より強く, 作用 (E2)' はゲージ変換の持ち上げになっている.*

第 2 章の場合と違い, ここでは Extended solution の空間への Loop 群の作用を構成することができたが, これを SD Hermite 接続 (のゲージ同値類) の空間への作用に落とすためには, やはり「正則同値」な元の分だけ不定性があり, 今のところうまく回避できない状況である。

最後に reduction について考察する．Extended solution ψ が z について定数であったと仮定すると, $\phi = \psi^{-1}$ とおくとき (3.70) 式から次の方程式を得る:

$$\begin{cases} \phi^{-1}\phi_{\bar{y}} = A_{\bar{y}} - \lambda A_z \\ \phi^{-1}\phi_y = A_y - \dfrac{1}{\lambda} A_{\bar{z}} \\ \qquad \phi_{\bar{\lambda}} = 0. \end{cases} \tag{3.82}$$

これは "Pre-Extended Harmonic map" の方程式に他ならない． 特に ψ が I_0 上の Extended solution の場合は, ψ は第 1 章で扱った (Pre-)Extended Harmonic map そのものである．命題の形にまとめておこう．

Proposition 3.6.9. $\psi(y, z, \lambda)$ を *SD Yang-Mills* 方程式に対する I_0 上の *Extemded solution* とする．もし, ψ が z に対して定値であったならば, $\phi(y, \lambda) = \psi(y, z, \lambda)^{-1}$ は *Extended Harmonic map* となる．

3.7 実平面と複素構造の極限

3.5 節および 3.6 節における重要なポイントは, Twistor 空間を構成する時には排除した $S^1 = \{|\lambda| = 1\}$ まで方程式の解釈を拡張することで, SD Yang-Mills 方程式と Harmonic map との関係付けがなされた, という点である．3.3 節 (3.42) で見た通り, この $S^1 = \{|\lambda| = 1\}$ における特殊性は四元数体に類似した環 $\mathbb{K}$ の構造に由来するものであり, これは indefinite version における特有の現象であると言えよう．この節ではこの S^1 に注目し, Real な状況についてさらに一歩踏み込んだ観察をする．

I_0 上の SD Yang-Mills 方程式に対する Extended solution ψ をとる．それは,

$$\psi : \mathbb{R}^{2,2} \longrightarrow \Lambda_{\mathrm{I}_0,\mathbb{R}} G \tag{3.83}$$

であって, 次の方程式をみたすものであった:

$$\begin{aligned} (3.70.a): &\quad \left(\frac{\partial}{\partial \bar{y}} - \lambda \frac{\partial}{\partial z}\right)\psi = -(A_{\bar{y}} - \lambda A_z)\psi \\ (3.70.b): &\quad \left(-\lambda \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\psi = -(-\lambda A_y + A_{\bar{z}})\psi. \end{aligned}$$

Corollary 3.5.11. から, 上の二式は互いに同値である．

さて, この状況の下 $\left(\mathbb{P}^1\right)_{\mathbb{R}} = \left\{|\lambda| = 1\right\}$ 上の現象について考察する．$\mathbb{R}$-condition より ψ は実部 $G_{\mathbb{R}}$ に値をもつ．従って方程式 (3.70.a) は実部と虚部に分解することができる．実際

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}\right) \qquad & A_{\bar{y}} &= \frac{1}{2}\left(A_{x_1} + iA_{x_2}\right) \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_3} - i\frac{\partial}{\partial x_4}\right) \qquad & A_z &= \frac{1}{2}\left(A_{x_3} - iA_{x_4}\right) \end{aligned} \tag{3.84}$$

であったから, (後で使う記号と合わせて) $\lambda = -e^{i\theta}$ とすると (3.70.a) は次の二式に分解される:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \cos\theta \frac{\partial}{\partial x_3} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial x_4}\right)\psi = -\left(A_{x_1} + \cos\theta A_{x_3} + \sin\theta A_{x_4}\right)\psi \tag{3.85}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_2} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial x_3} - \cos\theta \frac{\partial}{\partial x_4}\right)\psi = -\left(A_{x_2} + \sin\theta A_{x_3} - \cos\theta A_{x_4}\right)\psi. \tag{3.86}$$

これは ψ に関する条件が, $|\lambda|=1$ の場合実二次元の方向のみに関する条件に退化することを意味している. その二次元方向とは, (3.85), (3.86) 式の左辺の微分作用素を接ベクトルとみたとき, それら二つのベクトルによって張られる部分空間に他ならない. この二次元部分空間は**実平面 (real plane)** と呼ばれ, Uhrenbeck によって既に注目されている ([13]).

ちなみに, 上のことは ($\mathbb{P}^1$ 上へ拡張された) 実構造が固定点を持っていたために, 実部の上で Real な現象が生じたと解釈することができる. 実際, 実構造が固定点を持たない第 2 章の状況では, このようなことは起こらなかった.

上で観察された現象を, 3.2.2 節の複素構造の視点から考え直してみよう. まず, $V=\langle e_1,e_2,e_3,e_4\rangle_{\mathbb{R}}$ の複素構造が, $g\in \mathrm{SO}(2,2)$ を用いて

$$(e_1,e_2,e_3,e_4)\cdot g=(\theta_1,i\theta_1,\theta_2,i\theta_2) \tag{3.87}$$

として定まる θ_1,θ_2 を基底とする複素座標によって定まっていたとしよう. 興味があるのは, 複素構造を定めるパラメータ: $\zeta=-\lambda\in D_+\sqcup D_-$ が極限 $\zeta=e^{i\theta}$ に近づくとき, V の複素構造がどのような振る舞いを見せるかということである. そこで $\zeta=re^{i\theta}$ とおき, r が上下から 1 に近づく状況を考える.

まず, r が下から 1 に近づく状況 ($\zeta\in D_+$) について考えよう.

$$\cosh\varphi=\frac{1}{\sqrt{1-r^2}},\qquad \sinh\varphi=\frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \tag{3.88}$$

によって $\varphi\in\mathbb{R}$ を定めると φ は一意的で, $\tanh\varphi=r$ などが成立する. また $r\to 1$ のとき $\varphi\to+\infty$ である. さらに $p,q\in\mathbb{C}$ を

$$p=\cosh\varphi,\qquad q=e^{i\theta}\sinh\varphi \tag{3.89}$$

として定めよう. このとき

$$|p|^2-|q|^2=1,\qquad \frac{q}{p}=re^{i\theta}=\zeta \tag{3.90}$$

が成立する. 3.2.2 節で与えた対応から,

$$\begin{array}{ccccc} D_+ & \longleftrightarrow & \mathrm{SU}(1,1)/S^1 & \longleftrightarrow & \mathrm{SO}(2,2)_0/\,\mathrm{U}(1,1) \\ \zeta & \longleftrightarrow & \left[\begin{pmatrix} p & \bar{q} \\ q & \bar{p}\end{pmatrix}\right] & \longleftrightarrow & \left[\rho_-\begin{pmatrix} p & \bar{q} \\ q & \bar{p}\end{pmatrix}\right] \end{array} \tag{3.91}$$

となる. したがって ζ が定める複素構造とは, $\mathrm{SO}(2,2)$ の元

$$g:=\rho_-\begin{pmatrix} p & \bar{q} \\ q & \bar{p}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cosh\varphi & & \cos\theta\sinh\varphi & -\sin\theta\sinh\varphi \\ & \cosh\varphi & -\sin\theta\sinh\varphi & -\cos\theta\sinh\varphi \\ \cos\theta\sinh\varphi & -\sin\theta\sinh\varphi & \cosh\varphi & \\ \sin\theta\sinh\varphi & \cos\theta\sinh\varphi & & \cosh\varphi \end{pmatrix} \tag{3.92}$$

によって定まるものである.

まずは簡単のため $\theta=0$ のときについて考えよう. このとき

$$g=\begin{pmatrix} \cosh\varphi & & \sinh\varphi & \\ & \cosh\varphi & & -\sinh\varphi \\ \sinh\varphi & & \cosh\varphi & \\ & -\sinh\varphi & & \cosh\varphi \end{pmatrix} \tag{3.93}$$

である. (3.87) から

$$\begin{cases}\theta_1 = \cosh\varphi\cdot e_1 + \sinh\varphi\cdot e_3 \\ \theta_2 = \sinh\varphi\cdot e_1 + \cosh\varphi\cdot e_3\end{cases} \qquad \begin{cases} i\theta_1 = \cosh\varphi\cdot e_2 - \sinh\varphi\cdot e_4 \\ i\theta_2 = -\sinh\varphi\cdot e_2 + \cosh\varphi\cdot e_4\end{cases} \tag{3.94}$$

となるが, このことから

$$\langle\theta_1,\theta_2\rangle_{\mathbb{R}} = \langle e_1, e_3\rangle_{\mathbb{R}} \qquad \langle i\theta_1, i\theta_2\rangle_{\mathbb{R}} = \langle e_2, e_4\rangle_{\mathbb{R}} \tag{3.95}$$

を得る. $\langle\theta_1,\theta_2\rangle_{\mathbb{R}}$ は「実ベクトル全体」, $\langle i\theta_1, i\theta_2\rangle_{\mathbb{R}}$ は「純虚ベクトル全体」のなす部分空間である.

ここで, $\varphi\to\infty$ の極限を考えるわけであるが, (3.94) の各ベクトルの成分は発散してしまうのでこれらを有限に収まるよう, $\cosh\varphi$ で割って考えてみる. すなわち $(\theta'_1, i\theta'_1, \theta'_2, i\theta'_2)$ を

$$\begin{cases}\theta'_1 = e_1 + \tanh\varphi\cdot e_3 \\ \theta'_2 = \tanh\varphi\cdot e_1 + e_3\end{cases} \qquad \begin{cases} i\theta'_1 = e_2 - \tanh\varphi\cdot e_4 \\ i\theta'_2 = -\tanh\varphi\cdot e_2 + e_4\end{cases} \tag{3.96}$$

と定めよう. 当然

$$\langle\theta_1,\theta_2\rangle_{\mathbb{R}} = \langle\theta'_1, \theta'_2\rangle_{\mathbb{R}} \qquad \langle i\theta_1, i\theta_2\rangle_{\mathbb{R}} = \langle i\theta'_1, i\theta'_2\rangle_{\mathbb{R}} \tag{3.97}$$

であるが, $\varphi\to\infty$ のとき

$$\theta'_1,\, \theta'_2 \longrightarrow e_1 + e_3, \qquad i\theta'_1,\, -i\theta'_2 \longrightarrow e_2 - e_4. \tag{3.98}$$

つまり, 「実ベクトル全体」の部分空間の基底 θ_1, θ_2 は, $\varphi\to\infty$ の極限によって平行になり, この部分空間は一次元の直線 $\langle e_1 + e_3\rangle_{\mathbb{R}}$ に退化する. 「純虚数ベクトル全体」についても同様であり, こちらは $\langle e_2 - e_4\rangle_{\mathbb{R}}$ に退化する. 従って V 全体についてはその中の二次元部分空間

$$\langle e_1 + e_3, e_2 - e_4\rangle_{\mathbb{R}} \tag{3.99}$$

に退化して見える.

$\theta\neq 0$ のときも同様であり, 行儀の悪い書き方であるがこの場合は以下の通りになる:

$$\begin{aligned} \langle\theta_1,\theta_2\rangle_{\mathbb{R}} &\longrightarrow \langle e_1 + \cos\theta\cdot e_3 + \sin\theta\cdot e_4\rangle_{\mathbb{R}} \\ \langle i\theta_1, i\theta_2\rangle_{\mathbb{R}} &\longrightarrow \langle e_2 + \sin\theta\cdot e_3 - \cos\theta\cdot e_4\rangle_{\mathbb{R}} \\ \therefore \qquad V &\longrightarrow \langle e_1 + \cos\theta\cdot e_3 + \sin\theta\cdot e_4,\ e_2 + \sin\theta\cdot e_3 - \cos\theta\cdot e_4\rangle_{\mathbb{R}}. \end{aligned} \tag{3.100}$$

(3.85) および (3.86) に現れた二つのベクトルは上の式に現れているものに他ならない.

$\zeta = re^{i\theta}$ の r が上から 1 に近づく場合についても考察しておこう. この場合にも先ほどと同様の議論を進めることもできるが, その必要はない. 実際, $\mathrm{SO}(2,2)/\,\mathrm{U}(1,1)$ の実構造の議論から, ζ の定める複素構造は,

$$\frac{1}{\bar\zeta} = r^{-1}e^{i\theta} \tag{3.101}$$

の定める複素構造と共役であることがわかる. 共役な複素構造をとっても「実ベクトル全体」および「純虚ベクトル全体」のなす部分空間は変化しないことから, この場合の極限にも先ほどと同じ real plane が現れることが分かる.

Remark 3.7.1. V の不定値な計量を思い出すと, (3.100) 式に現れるベクトルは全てノルムが 0 になっている. すなわち,

$$V_\theta = \langle e_1 + \cos\theta \cdot e_3 + \sin\theta \cdot e_4,\ e_2 + \sin\theta \cdot e_3 - \cos\theta \cdot e_4 \rangle_{\mathbb{R}}. \tag{3.102}$$

とおき, またノルムが 0 であるようなベクトル全体の集合を M とすれば, $V_\theta \subset M$ である. そればかりか, 以下が成立していることも簡単に確かめられる:

$$V_\theta \cap V_{\theta'} = \{0\} \qquad (\text{if } \ \theta \not\equiv \theta' \mod 2\pi) \tag{3.103}$$

$$\bigcup_{\theta \in [0,2\pi)} V_\theta = M. \tag{3.104}$$

3.8 SO(2, 2) の連結成分

この節では Proposition 3.2.5. の証明を行う.

Proposition 3.8.1.

$$J = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \notin \mathrm{SO}(2,2)_0$$

Proof. 3.2.1 節 (3.11) の準同型が $\mathrm{SO}(2,2)_0$ への全射であったことを思いだせば, $J \notin \mathrm{SO}(2,2)_0$ を示すには, どんな $g_+, g_- \in \mathrm{SU}(1,1)$ をとっても $J = \rho_+(g_+) \cdot \rho_-(g_-)$ とかけないことを言えばよい.

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b & c & d \\ b & a & -d & c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & -v & x & y \\ v & u & y & -x \\ x & y & u & -v \\ y & -x & v & u \end{pmatrix} \tag{3.105}$$

とおいて実際に 16 個の式を書き下して計算すると

$$a = b = d = u = v = y = 0\,, \quad c\,x = 1 \tag{3.106}$$

を得る. すなわち, J が (3.105) のように分解するならば

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & c & \\ & & & c \\ c & & & \\ & c & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & c^{-1} & \\ & & & -c^{-1} \\ c^{-1} & & & \\ & -c^{-1} & & \end{pmatrix} \tag{3.107}$$

となるしかないが, 右辺の二つの行列は $c \in \mathbb{R}$ に対して $\mathrm{SO}(2,2)$ の元にはなり得ない. よって J は分解しない. □

次に $\mathrm{SO}(2,2)$ の連結成分が二つであることを示す. まず次の二つの多様体を用意する.

$$M_1 := \left\{ {}^t(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1 \right\}$$
$$M_2 := \left\{ {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 1 \right\}$$

Lemma 3.8.2. *1.* M_1 は二つの連結成分を持つ．*2.*M_2 は連結．

Proof. 回転に対する対称性などに注目すれば明らか． □

Lemma 3.8.3.

$$\mathrm{SO}(1,2)/\,\mathrm{SO}(2) \simeq M_1 \qquad \textit{(diffeo.)}$$

ただし, 次の埋め込みの下 SO(2) を SO(1,2) の部分群とみなす

$$A \in \mathrm{SO}(2) \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & \\ & A \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(1,2).$$

Proof. 自然な作用 $\mathrm{SO}(1,2) \curvearrowright M_1$ が推移的であり, ${}^t(1,0,0) \in M_1$ における固定部分群が SO(2) に等しいことをいえば良い．作用が well defined であることと, 固定部分群が SO(2) に等しいことは直ちに分かるので, 作用が推移的であることをみる．

まず, 任意の点 ${}^t(a,b,c) \in M_1$ は, 適当な実数 θ, ϕ を用いて

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\cosh\theta\cdot\cosh\phi \\ \sinh\theta\cdot\cosh\phi \\ \sinh\phi \end{pmatrix}$$

と表せることに注意する．このとき

$$\begin{pmatrix} \pm\cosh\theta\cdot\cosh\phi & \sinh\theta & \pm\cosh\theta\cdot\sinh\phi \\ \sinh\theta\cdot\cosh\phi & \pm\cosh\theta & \sinh\theta\cdot\sinh\phi \\ \sinh\phi & 0 & \cosh\phi \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(1,2)$$

は ${}^t(1,0,0) \in M_1$ を ${}^t(a,b,c)$ に写す．よって作用は推移的である． □

Corollary 3.8.4. SO(1,2) は二つの連結成分をもつ．

Proof. $\mathrm{SO}(2) \simeq S^1$ が連結で M_1 が二つの連結成分をもっていることから, Lemma 3.8.3. により SO(1,2) の連結成分は二つである． □

Lemma 3.8.5.

$$\mathrm{SO}(2,2)/\,\mathrm{SO}(1,2) \simeq M_2 \qquad \textit{(diffeo.)}$$

ただし, 次の埋め込みの下 SO(1,2) を SO(2,2) の部分群とみなす

$$A \in \mathrm{SO}(1,2) \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & \\ & A \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(2,2).$$

Proof. 自然な作用 $\mathrm{SO}(2,2) \curvearrowright M_2$ が推移的であり, ${}^t(1,0,0,0) \in M_2$ における固定部分群が SO(1,2) に等しいことをいえば良いが, 作用が推移的であることについてのみ示す．

任意の点 ${}^t(a,b,c,d) \in M_2$ に対し, 例えば ((3.7) 参照)

$$\begin{pmatrix} a & -b & c & d \\ b & a & -d & c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(2,2)$$

は ${}^t(1,0,0,0) \in M_2$ を ${}^t(a,b,c,d)$ に写す．よって作用は推移的である． □

Corollary 3.8.6. $\mathrm{SO}(2,2)$ は二つの連結成分をもつ.

Proof. $\mathrm{SO}(1,2)$ は二つの連結成分をもち, また M_2 が連結であることから Lemma 3.8.5. により $\mathrm{SO}(2,2)$ の連結成分は二つ以下でなければならない.

一方 Proposition 3.8.1. により $\mathrm{SO}(2,2)$ が連結でないことは分かっているので, 結局 $\mathrm{SO}(2,2)$ の連結成分は二つであると結論される. □

第4章　Real structure

二つの Twistor theory においては, (固定点をもつとは限らない) 実構造をもつ $\mathbb{P}^1$ とその上の自明なベクトル束が現れた．この $\mathbb{P}^1$ 上の実構造は, Twistor 空間の幾何学的対称性という美しさを演出しているわけであるが, 数学的にどういった性質がこの実構造から得られるのか, というのは興味のある研究対象である．そこで, 前節までの Twistor theory におけるファイバー $\mathbb{P}^1$ の幾何学的意味, すなわちそれが複素構造のパラメータ空間であるということを忘れ, 実構造を前面に押し出して議論を再構成しよう, という発想にいたる.

この章では, Atiyah の Real Category (c.f.[2]) に登場する「ベクトル束の実構造」を特に基点つきの状況で考え, $\mathbb{P}^1$ および「長方形トーラス」上でその分類定理を与える．また Loop 群との関係を調べ, これらの内容が前節までの内容にどのように応用されるか, について考察する.

4.1　主 G 束の実構造

この節では, (固定点のある実構造を持つ複素多様体上の) 主 G 束およびベクトル束に対する実構造を定義する．また $\mathbb{P}^1$ 上では, それが一意的であることを証明する．ちなみにここで扱う実構造とは, Atiyah の Real Category におけるベクトル束を基点つきで考えたものに等しい.

(X, σ_X, λ_0) を $\lambda_0 \in X_{\mathbb{R}}$ を基点とする, 基点つき実構造をもつ複素多様体とする．従って $X_{\mathbb{R}}$ は空でないとする．また基点つき実構造をもつ複素 Lie 群 (G, σ_G, I) として

$$G := \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}), \quad \sigma_G : G \to G : g \mapsto g^{*-1} \quad \text{従って} \quad G_{\mathbb{R}} = \mathrm{U}(n)$$

を考える．なお, この章の内容は $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ の場合でもほぼそのままで通用するが, Loop 群の分解定理に関する事柄などには少々注意が必要である．簡単のため議論は $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ に限って進める.

(X, σ_X, λ_0) 上の主 G 束 $\pi : P \to X$ に関するいくつかの性質を定義しよう.

Definition 4.1.1. P が**正則**であるとは, 正則な変換関数による局所自明化がとれることをいう.

以下では主 G 束といえば正則なもののみを考えるため, いちいち断らない.

Definition 4.1.2. **マークつき主 G 束**とは, 主 G 束 P と, 右 G-同変な写像 $\varphi_P : G \to P_{\lambda_0} = \pi^{-1}(\lambda_0)$ の組 (P, φ_P) のことをいう．また φ_P を P の**マーキング**という.

Remark 4.1.3. 主 G 束 P に対して, マーキング φ_P を決めることと値 $\varphi_P(I) \in P_{\lambda_0}$ を決めることは同等である．すなわち主 G 束においてマーキングを与えることと基点を定めることは同等である.

Definition 4.1.4. 主 G 束 P の**実構造**とは, マーキング φ_P と P の反正則な involution σ_P の組 (σ_P, φ_P) であって以下の条件をみたすようなものをいう.

1. σ_P は σ_X をカバーする. すなわち任意の $u \in P$ について $\pi(\sigma_P(u)) = \sigma_X(\pi(u))$.
2. σ_P は右 G-作用に対して次の意味で自然である. すなわち任意の $u \in P, g \in G$ について $\sigma_P(ug) = \sigma_P(u) \cdot \sigma_G(g)$
3. φ_P は実部を保つ. すなわち φ_P は σ_G および $\sigma_P|_{\lambda_0}$ に対して同変.

組 (P, σ_P, φ_P) を, 実構造をもつ主 G 束などと呼ぶ.

Remark 4.1.5. Atiyah および第 1 章の言葉に従えば, (P, σ_P, φ_P) は「基点つき実構造をもつ主 G 束」と呼ぶべきものであるが, 以下では常に基点=マーキングのある状況を考えるため, 単に「実構造をもつ主 G 束」と呼ぶことにする. また上の条件 3 は, $\sigma_P|_{\lambda_0}$ の固定点集合 ($=P_{\lambda_0}$ の実部) から基点を一つ定める, ということと同値である.

Definition 4.1.6. $(P, \varphi_P), (Q, \varphi_Q)$ をマークつき主 G 束とする. $\iota : P \to Q$ が以下をみたすとき, ι は**マークつきバンドルの同型**であるという.

1. ι は正則ベクトル束の同型
2. $\varphi_Q = \iota \circ \varphi_P$

Definition 4.1.7. $(P, \sigma_P, \varphi_P), (Q, \sigma_Q, \varphi_Q)$ を実構造をもつ主 G 束とする. $\iota : P \to Q$ がマークつきバンドルの同型であり, さらに σ_P, σ_Q に対して同変であるとき, ι は**実構造をもつバンドルの同型**, あるいは単純に**実構造の同型**という.

次に, ベクトル束の実構造を定義する. 以下では $\pi : V \to X$ を (X, σ_X, λ_0) 上の階数 n の正則ベクトル束とする.

Definition 4.1.8. V の**実構造**とは, 複素線形写像 $\varphi_V : \mathbb{C}^n \to V_{\lambda_0}$ と, 非退化な Hermite 形式 $\langle\cdot,\cdot\rangle_\lambda : V_\lambda \times V_{\sigma(\lambda)} \to \mathbb{C}$ の族 $\{\langle\cdot,\cdot\rangle_\lambda\}_{\lambda \in X}$ の組 $(\langle\cdot,\cdot\rangle, \varphi_V)$ であって, 以下をみたすものをいう

1. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は写像 $V \otimes \overline{\sigma_X^*(V)} \to \mathbb{C}$ とみて正則.
2. 任意の $\lambda \in X$ および任意の $\xi \in V_\lambda, \eta \in V_{\sigma(\lambda)}$ に対して $\langle\xi,\eta\rangle = \overline{\langle\eta,\xi\rangle}$
3. $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\lambda_0}$ は正定値, よって V_{λ_0} の Hermite 計量を定める.
4. $\varphi_V : \mathbb{C}^n \to V_{\lambda_0}$ は計量を保つ. ただし, $\mathbb{C}^n$ には標準的な Hermite 計量を, V_{λ_0} には $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\lambda_0}$ から定まる Hermite 計量を, それぞれ入れる.

Proposition 4.1.9. 主 G 束およびベクトル束に関する実構造の定義は, 次の意味で同値である.

1. (P, σ_P, φ_P) を実構造をもつ主 G 束とするとき, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ のスタンダードな表現によって P に同伴する正則ベクトル束 V は標準的な実構造をもつ.

2. $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, \varphi_V)$ を実構造をもつ正則ベクトル束とするとき, V の枠バンドル P は標準的な実構造をもつ.

Proof. 1. $V = P \times_G \mathbb{C}^n$ に注意して実構造 $(\langle\cdot,\cdot\rangle, \varphi_V)$ を以下のように定めればよい

$$\begin{array}{rcl} \varphi_V : \mathbb{C}^n & \longrightarrow & V_{\lambda_0} = P_{\lambda_0} \times_G \mathbb{C}^n \\ v & \longmapsto & [\varphi_P(1), v] \end{array} \qquad \begin{array}{c} \langle [u,v], [\sigma_P(u), w] \rangle = {}^t v \cdot \bar{w} \\ \left({}^\forall u \in P, {}^\forall v, w \in \mathbb{C}^n \right) \end{array}$$

2. $\{e_1, \cdots, e_n\}$ を $\mathbb{C}^n$ の標準基底とする. $\varphi_P(1) = (\varphi_V(e_1) \cdots \varphi_V(e_n))$ とおき, G-同変に拡張することで φ_P が定まる. また, σ_P は $\langle\cdot,\cdot\rangle$ に関する双対基底をとる写像として定まる. $\square$

Remark 4.1.10. 上の証明で分かる通り, V が実構造をもつとき自然な同型 $V^* \simeq \overline{\sigma_X^*(V)}$ が成立し, この同型は λ_0 上のファイバーの Hermite 計量を定める. 従ってこのとき次の条件が成立する.

(★) Hom $\left(V^*, \overline{\sigma_X^*(V)}\right)$ の (大域的) 正則切断で, λ_0 で Hermite な変換に値をもつものが存在する

Remark 4.1.11. Proposition 4.1.9 により, 主 G 束の実構造を調べることとベクトル束の実構造を調べることは本質的に同じである. 以後, 単に「実構造をもつバンドル」と言ったら, 両者を同時に考えているものとする.

Proposition 4.1.12. $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, \varphi_V)$ を実構造をもつ正則ベクトル束とする. $X_{\mathbb{R}}$ の λ_0 を含む連結成分を $(X_{\mathbb{R}})_0$ で表すことにするとき, ${}^\forall\lambda \in (X_{\mathbb{R}})_0$ に対し $\langle\cdot,\cdot\rangle_\lambda$ は正定値.

Proof. P を V の枠バンドルとし, その λ_0 の近傍における自明化 $U \times G \xrightarrow{\simeq} P|_U$ をとる. このとき, 実構造の性質により, σ_P は $(\lambda, h) \mapsto (\sigma_X(\lambda), \Phi(\lambda)h^{*-1})$ と表される. ここで $\Phi\colon U \to G$ は反正則な写像であり, 条件 $\Phi(\sigma_X(\lambda)) \cdot \Phi(\lambda)^{*-1} = I$ をみたす. 故に $\lambda \in X_{\mathbb{R}}$ のとき $\Phi(\lambda)$ は Hermite 行列である. λ_0 において Φ は正定値であることと, Φ が連続であることから, $(X_{\mathbb{R}})_0 \cap U$ の任意の λ に対し, Φ は正定値となる. 同様の議論で範囲を広げていけば, 任意の $\lambda \in (X_{\mathbb{R}})_0$ について Φ が正定値であることがわかる. □

主 G 束や正則ベクトル束はいつでも実構造を入れられるとは限らず, 逆にそのようなものは非常に限られている. そこで, どのようなバンドルが実構造をもつのかについて考察する.

Definition 4.1.13. 主 G 束 P が**実構造を許容する**とは, 適当な φ_P, σ_P が存在して (σ_P, φ_P) が P の実構造を定めるときをいう. ベクトル束についても同様である.

Remark 4.1.14. 明らかに Remark 4.1.10. の条件 (★) は, V が実構造を許容するための必要条件である. この条件は次節においてトーラス上のバンドルで実構造を許容するものの分類を行う際, しばしば用いることになる.

Proposition 4.1.15. 正則ベクトル束 V が実構造を許容するならば, $\deg V = 0$.

Proof. σ_X が反正則な involution であることから, $\sigma_X^*(c_1(V)) = -c_1(V)$. また, $c_1\left(\bar{V}\right) = -c_1(V)$ ゆえ,

$$c_1\left(\overline{\sigma_X^*(V)}\right) = -c_1\left(\sigma_X^*(V)\right) = -\sigma_X^*\left(c_1(V)\right) = c_1(V).$$

一方, $c_1(V^*) = -c_1(V)$ である. V が実構造を許容するならば自然な同型 $V^* \simeq \overline{\sigma_X^*(V)}$ が存在するので,

$$-c_1(V) = c_1(V) \qquad \therefore\ c_1(V) = 0.$$

よって $\deg V = 0$ となる. □

以下では Riemann 球面 $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上のベクトル束の実構造について考察する. ただし固定点をもつ $\mathbb{P}^1$ の実構造 σ としては次のものを考える

$$\sigma : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1 : \lambda \longmapsto \frac{1}{\bar{\lambda}}. \tag{4.1}$$

このとき $(\mathbb{P}^1)_{\mathbb{R}} = \mathrm{U}(1)$ となるが, 基点として $\lambda_0 = 1$ をとることにする.

Propsition 4.1.15. より次が従う.

Corollary 4.1.16. $\mathbb{P}^1$ 上の正則直線束で実構造を持つものは, 自明なベクトル束しかない.

Proof. $\mathbb{P}^1$ 上の正則 k 直線束が degree で分類できることから直ちに従う. すなわち, $\deg V = 0$ なる直線束は自明なもののみである. □

$\mathbb{P}^1$ 上の階数 2 以上の正則ベクトル束についても Corollary 4.1.16. と同様の結果が成り立つが, その証明のために次の事実を引用する.

Fact 4.1.17 (Grothendieck, [1]). $\mathbb{P}^1$ 上の任意の正則ベクトル束は, 正則直線束の直和に *(*正則に*)* 分解できる. 分解は並べ替えを除いて一意的.

Lemma 4.1.18. $\mathbb{P}^1$ 上の正則ベクトル束で実構造を許容するものは, 自明なベクトル束しかない.

Proof. まず階数 2 のときを証明する. V を $\mathbb{P}^1$ 上の階数 2 の正則ベクトル束で, 実構造を許容するとする. Fact 4.1.17. により, $V = L_1 \oplus L_2$ と分解される. Prop 4.1.15. より $0 = \deg V = \deg L_1 + \deg L_2 \ \therefore \deg L_1 = -\deg L_2$.
$\deg L_1 = \deg L_2 = 0$ のときは OK であるから, $\deg L_1 < 0 < \deg L_2$ とする.

$$V^* = L_1^* \oplus L_2^*, \quad \overline{\sigma_X^*(V)} = \overline{\sigma_X^*(L_1)} \oplus \overline{\sigma_X^*(L_2)}$$

などから,

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}\left(V^*, \overline{\sigma_X^*(V)}\right) &= \mathrm{Hom}\left(L_1^* \oplus L_2^*, \overline{\sigma_X^*(L_1)} \oplus \overline{\sigma_X^*(L_2)}\right) \\ &= \quad \mathrm{Hom}\left(L_1^*, \overline{\sigma_X^*(L_1)}\right) \oplus \mathrm{Hom}\left(L_1^*, \overline{\sigma_X^*(L_2)}\right) \\ &\quad \oplus \mathrm{Hom}\left(L_2^*, \overline{\sigma_X^*(L_1)}\right) \oplus \mathrm{Hom}\left(L_2^*, \overline{\sigma_X^*(L_2)}\right) \end{aligned}$$

となるが, $\deg L_1 < 0$ より, $\deg L_1^* > 0 > \deg \overline{\sigma_X^*(L_1)}$ ゆえ, $\Gamma^{\mathrm{hol}}\left(X, \mathrm{Hom}\left(L_1^*, \overline{\sigma_X^*(L_1)}\right)\right) = \{0\}$. すると, $\mathrm{Hom}\left(V^*, \overline{\sigma_X^*(V)}\right)$ の任意の正則切断に対し, X の任意の点の上での値は, 0 固有値をもつ行列となる. よって λ_0 上で正定値とならず, 実構造を許容するための条件はみたされない. したがって $\deg L_1 = \deg L_2 = 0$ となり, V は自明である.

階数が r のときも, $V = L_1 \oplus \cdots \oplus L_r$ と分解して同様の議論をすれば, どの L_i の degree も負でないことがわかり, V は自明となる.

なお, 自明なバンドルが実構造を許容することは明らかである. □

Theorem 4.1.19. $\mathbb{P}^1$ 上の実構造をもつバンドルは, 全て同型である.

Proof. (P, σ_P, φ_P) を実構造をもつ任意の主 G 束とする. Lemma 4.1.18. により P は自明である. 特にマーキング φ_P に対応して, 自明化を次のようにとれる:

$$P \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1 \times G \qquad \begin{aligned} \varphi_P : G &\longrightarrow \{\lambda_0\} \times G \\ g &\longmapsto (\lambda_0, g). \end{aligned} \tag{4.2}$$

この自明化の下で involution σ は,

$$\begin{aligned} \sigma_P : \quad \mathbb{P}^1 \times G &\longrightarrow \quad \mathbb{P}^1 \times G \\ (\lambda, h) &\longmapsto (\sigma(\lambda), Z(\lambda, h)) \end{aligned} \tag{4.3}$$

のように, 反正則な写像 $Z : \mathbb{P}^1 \times G \to G$ によって表示できる. σ_P の右 G-作用に関する自然性より

$$\sigma_P(\lambda, h) = \sigma_P(\lambda, I) \cdot h^{*-1} = (\sigma(\lambda), Z(\lambda, I)) \cdot h^{*-1} = \big(\sigma(\lambda), Z(\lambda, I) \cdot h^{*-1}\big) \tag{4.4}$$

従って σ_P は反正則な写像 $Z(\cdot, I) : \mathbb{P}^1 \to G$ によって定まるが, そのようなものは定数しかない. $Z(\lambda, I) \equiv \Phi$ とおくと結局

$$\begin{array}{cccc} \sigma_P : & \mathbb{P}^1 \times G & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \times G \\ & (\lambda, h) & \longmapsto & \big(\sigma(\lambda), \Phi h^{*-1}\big) \end{array} \tag{4.5}$$

とかかれることがわかった. ところで, マーキングは実部を保つことから, $I \in G_{\mathbb{R}}$ の φ_P による像 (λ_0, I) は σ_P について不変である. よって

$$(\lambda_0, I) = \sigma_P(\lambda_0, I) = (\sigma(\lambda_0), \Phi) \tag{4.6}$$

したがって $\Phi = I$ でなければならない. まとめると P の実構造は適当な自明化を取ることにより常に決まった形にかけることがわかった. これは任意の実構造つきのバンドルが同型であることを意味している. □

Remark 4.1.20. 上の証明は, より一般的な次の状況でもそのまま適用できる. すなわち, 基点つきの実構造をもつ一般の Riemann 面 上の自明なバンドルに対して, その実構造は同型を除いて一意である.

4.2 長方形トーラス上の実構造を許容するバンドルの分類

前節では $\mathbb{P}^1$ 上のバンドルの実構造がただひとつしか存在しないことを示した. この節と次節ではトーラス上のバンドルの実構造およびその分類について考察する. 技術的な理由により詳しい内容については「長方形トーラス」T に限って議論を進めることとし, この節では T 上の実構造を許容するバンドルを分類し, 4.3 節においてそれらのバンドルに入れることが可能な実構造の同型類がどれくらいあるかを決定する.

τ を $\operatorname{Im}\tau > 0$ なる複素数とし, $\{1, \tau\}$ を基底とする格子 $\mathcal{L} = \{m + n\tau \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ をとる. 以下では複素トーラス $T = \mathbb{C}/\mathcal{L}$ とその上のベクトル束について考察する. 興味があるのは実構造であるから, Proposition 4.1.15. をかんがみて degree が 0 のものに限って議論を進める. ベクトル束 V は, $V = V_1 \oplus V_2$ と部分束の直和としてかけるとき分解可能 (decomposable), そうでないとき分解不可能 (indecomposable) とよぶことにする.

Definition 4.2.1. $\alpha, \beta \in \mathrm{U}(1)$ に対し T 上の直線束 $L_{(\alpha,\beta)}$ を次式で定義する.

$$L_{(\alpha,\beta)} = \mathbb{C} \times \mathbb{C}/\sim \qquad \text{ただし } (z + m + n\tau, v) \sim (z, \alpha^m \beta^n v) \qquad m, n \in \mathbb{Z} \tag{4.7}$$

Remark 4.2.2. $L_{(\alpha,\beta)}$ が 0 でない正則切断を持つのは $\alpha = \beta = 1$ のとき, すなわち自明な直線束の場合だけであり, 正則切断は定数関数に限る.

Fact 4.2.3 (c.f.[9]). T 上の *degree* 0 の任意の正則直線束は, ${}^{\exists!}(\alpha, \beta) \in \mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(1)$ に対し, $L_{(\alpha,\beta)}$ と同型. 特に, $(\alpha, \beta) \neq (\alpha', \beta') \Longleftrightarrow L_{(\alpha,\beta)} \not\cong L_{(\alpha',\beta')}$

T 上の階数 r, degree d の正則ベクトル束で分解不可能なもの全体を $\mathcal{E}(r, d)$ とかくことにする.

Fact 4.2.4 ([1]). $\mathcal{E}(r,0)$ の中で 0 でない正則切断をもつものが唯一存在する．それを F_r とすると，任意の $V\in\mathcal{E}(r,0)$ は ${}^\exists(\alpha,\beta)\in \mathrm{U}(1)\times\mathrm{U}(1)$ によって，$V=L_{(\alpha,\beta)}\otimes F_r$ とかかれる．

Proposition 4.2.5. F_r は次のように具体的に書かれる．

$$\begin{aligned}&F_r=\mathbb{C}\times\mathbb{C}^r/\sim\\&(z+m+n\tau,v)\sim(z,J_r^n v)\end{aligned}\qquad \text{ただし}\qquad J_r=\begin{pmatrix}1&1&&\\&1&1&\\&&\ddots&1\\&&&1\end{pmatrix}\tag{4.8}$$

Proof. 上で定義された F_r が分解不可能で, 0 でない正則切断を持つことを示す．まず, 任意の r で上の F_r は 0 でない正則切断を一次元だけ持ち, それはいたるところ 0 にならないことがすぐに確かめられる．また, このことから自然に次の完全系列を得る．

$$0\longrightarrow\mathbb{C}\longrightarrow F_r\longrightarrow F_{r-1}\longrightarrow 0\tag{4.9}$$

ただし, $\mathbb{C}$ は自明な直線束を表す．これを用いて F_r が分解不可能であることを, 帰納法によって示す．帰納法の仮定により F_{r-1} は分解不可能．これより F_r が分解可能であるとすると, $F_r\simeq\mathbb{C}\oplus F_{r-1}$ となるが, 左辺は 0 でない正則切断を一次元だけ持つのに対し, 右辺は二次元持っている．よって矛盾となり, F_r も分解不可能でなければならない． □

次に実構造を考える．まず, 底空間 T の反正則な involution σ を定める必要があるが, 任意の T がそのようなものをもつとは限らない (平行四辺形が一般に線対称でないからである)．実際, 固定点のある反正則な involution を持つトーラスは, 次のものに限られることが知られている．

- 「長方形」の場合：$\tau=i\,b\ (b>0),\quad \sigma:[z]\in T\ \longmapsto[\bar z]\in T$
  このとき, $T_{\mathbb{R}}$ は二つの連結成分をもち, それぞれ以下のように表される:
  $$(T_{\mathbb{R}})_0:=\left\{\,[z]\in T\ \middle|\ z\in\mathbb{R}\right\}\qquad (T_{\mathbb{R}})_1:=\left\{\left[z+\frac{\tau}{2}\right]\in T\ \middle|\ z\in\mathbb{R}\right\}.$$
- 「ひし形」の場合：$\tau=\frac{1}{2}+i\,b\ (b>0),\quad \sigma:[z]\in T\ \longmapsto[\bar z]\in T$
  このとき, $T_{\mathbb{R}}$ の連結成分は一つで, それは以下のように表される:
  $$T_{\mathbb{R}}:=\left\{\,[z]\in T\ \middle|\ z\in\mathbb{R}\right\}.$$

以下では, 前者, すなわち τ が純虚数であるような長方形のトーラス T を考え, また T の基点は $[0]$ にとることとする．なお, 長方形トーラスをこのように格子による商空間として表す方法を, 以後長方形モデルと呼ぶことにする．

Lemma 4.2.6. *T 上の degree 0, 階数 2 以上の分解不可能な正則ベクトル束は* ($\bigstar$) *をみたさない．従って実構造を許容しない．*

Proof. 簡単のため $r=2$ で証明する．$\mathcal{E}(2,0)$ の任意の元 $V=L_{(\alpha,\beta)}\otimes F_2\ (\alpha,\beta\in\mathrm{U}(1))$ が実構造をもたないことを言えば良い．

$$V=\mathbb{C}\times\mathbb{C}^2/\sim\qquad (z+m+n\tau,v)\sim(z,\alpha^m\beta^n J_2^n v)$$

とかけるから, $\overline{\sigma_X^*(V)} = \mathbb{C}\times\mathbb{C}^2/\sim$ における同値関係は

$$\begin{aligned}
&(\overline{z+m+n\tau}, \bar{v}) \sim \left(\bar{z}, \overline{\alpha^m\beta^n J_2^n v}\right) \\
\therefore\quad &(\bar{z}+m-n\tau, \bar{v}) \sim \left(\bar{z}, \alpha^{-m}\beta^{-n} J_2^n \bar{v}\right) \\
\therefore\quad &(z+m+n\tau, v) \sim \left(z, \alpha^{-m}\beta^{n} J_2^{-n} v\right)
\end{aligned}$$

また, V^* では,

$$(z+m+n\tau, v) \sim \left(z, \alpha^{-m}\beta^{-n}\cdot {}^tJ_2^{-n} v\right)$$

ここで $\mathrm{Hom}\left(V^*, \overline{\sigma^*(V)}\right)$ の正則切断で, λ_0 上正定値なものが存在したとする. この切断は, T 上から $\mathbb{C}$ 上へ引き戻すことで $\Phi : \mathbb{C} \to \mathrm{End}(\mathbb{C}^2)$ によって表される. これを

$$\Phi(z) = \begin{pmatrix} \varphi_1(z) & \varphi_2(z) \\ \varphi_3(z) & \varphi_4(z) \end{pmatrix}$$

とかくとき, 各 φ_i は正則で, Φ はバンドルを定める同値関係に対して整合的でなければならない. たとえば, 下の図式において右下のものは一致しなければならない.

$$\begin{array}{ccc}
V^* & & \overline{\sigma^*(V)} \\
(z+\tau, v) & \xrightarrow{\Phi(z+\tau)} & (z+\tau, \Phi(z+\tau)v) \\
\Big\| & & \Big\| \\
\Big\| & & (z, \beta J_2^{-1}\Phi(z+\tau)v) \\
(z, \beta^{-1}\cdot {}^tJ_2^{-1}v) & \xrightarrow{\Phi(z)} & (z, \Phi(z)\beta^{-1}\cdot {}^tJ_2^{-1}v)
\end{array} \tag{4.10}$$

したがって,

$$\begin{aligned}
&\beta J_2^{-1}\Phi(z+\tau) = \Phi(z)\beta^{-1}\cdot {}^tJ_2^{-1} \\
\therefore\quad &\beta^2\Phi(z+\tau) = J_2\cdot\Phi(z)\cdot {}^tJ_2^{-1}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

同様のことを $z+1$ の方向についてもおこなうと,

$$\begin{aligned}
&\alpha^{-1}\Phi(z+1) = \Phi(z)\alpha^{-1} \\
\therefore\quad &\Phi(z+1) = \Phi(z)
\end{aligned} \tag{4.12}$$

(4.11) の右辺は,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_1(z) & \varphi_2(z) \\ \varphi_3(z) & \varphi_4(z) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1-\varphi_2+\varphi_3-\varphi_4 & \varphi_2+\varphi_4 \\ \varphi_3-\varphi_4 & \varphi_4 \end{pmatrix}(z)$$

であるから, 特に (4.11) 式の (2,2) 成分から,

$$\beta^2\varphi_4(z+\tau) = \varphi_4(z) \tag{4.13}$$

一方, (4.12) 式の (2,2) 成分から,

$$\varphi_4(z+1) = \varphi_4(z) \tag{4.14}$$

(4.13), (4.14) を見ると, φ_4 は T 上の正則直線束 $L_{(1,\beta^{-2})}$ の正則切断を定めることがわかる. したがって,「$\varphi_4 \equiv 0$」または「$\beta^2 = 1$ かつ $\varphi_4 \equiv \mathrm{const.} \neq 0$」のいずれかが成り立つ. しかし, $\varphi_4 \equiv 0$

とすると, 正定値性に反するので「$\beta^2 = 1$ かつ $\varphi_4 \equiv \text{const.} \neq 0$」である. このとき, 今度は (4.11), (4.12) 式の (2,1) 成分から,

$$\varphi_3(z+\tau) = \varphi_3(z) - \varphi_4 \tag{4.15}$$

$$\varphi_3(z+1) = \varphi_3(z) \tag{4.16}$$

を得る. この 2 式を微分して, φ_3' が T 上の正則関数であることがわかるから, φ_3' は定数. よって φ_3 は一次式となる. (4.16) よりその一次の係数は 0, すなわち φ_3 は定数. すると (4.15) より $\varphi_4 = 0$ となるが, これは矛盾である. したがって全ての可能性は排除され, 条件をみたす $\mathrm{Hom}\left(V^*, \overline{\sigma_X^*(V)}\right)$ の正則切断は存在しないことがわかった. $\square$

Lemma 4.2.7. *$V = V_1 \oplus V_2$ が $\deg V = 0$ であって, かつ $(\bigstar)$ をみたすならば (特に実構造を許容するならば), V_1, V_2 は $\deg V_i = 0$ $(i = 1, 2)$ であって $(\bigstar)$ をみたす.*

Proof. V が実構造をもつことから,

$$\mathrm{Hom}\left(V^*, \overline{\sigma^*(V)}\right) = \bigoplus_{i,j} \mathrm{Hom}\left(V_i^*, \overline{\sigma^*(V_j)}\right)$$

の正則切断 s で λ_0 上正定値 Hermite なものがある. 上の直和分解に対応して, $s = \oplus s_{ij}$ とかくとき, s_{11}, s_{22} は λ_0 上正定値 Hermite である. よって V_1, V_2 は $(\bigstar)$ をみたす. ここで, $\deg V_i = 0$ を示すため次の Claim を用いる.

Claim E, F : T 上の正則ベクトル束, $\mathrm{rank}\, E = \mathrm{rank}\, F = r$
$\Phi : E \to F$: 射影と可換な正則写像, maximal rank $(= \max_\lambda \mathrm{rank}\, \Phi(\lambda)) = r$
このとき $\deg E \leq \deg F$.

$(\because)$ Φ は有限個の点 $\{p_i\}_{i=1,\ldots,k}$ を除いてファイバーの同型を与えている. $n_i = r - \mathrm{rank}\, \Phi(p_i)$ とおくとこれは正の整数で, 次の層の短完全系列を得る.

$$0 \to E \to F \to \bigoplus_i \mathbb{C}_{p_i}^{n_i} \to 0$$

ただし $\mathbb{C}_{p_i}^{n_i}$ は, p_i に台を持つ階数 n_i の摩天楼層 (skyscraper sheaf) である. これより得られるコホモロジーの長完全系列から,

$$0 \to \mathrm{H}^0(E) \to \mathrm{H}^0(F) \to \mathbb{C}^{\Sigma n_i} \to \mathrm{H}^1(E) \to \mathrm{H}^1(F) \to 0$$

したがって次元を調べると,

$$h^0(E) - h^0(F) + \sum n_i - h^1(E) + h^1(F) = 0 \tag{4.17}$$

ここで, ベクトル束に対する Riemann-Roch の定理から

$$h^0(E) - h^1(E) = \deg E + \mathrm{rank}\, E\ (1-g) \tag{4.18}$$

$$h^0(F) - h^1(F) = \deg F + \mathrm{rank}\, F\ (1-g) \tag{4.19}$$

g は底空間の種数で, 今はトーラスであるから $g = 1$ である. (4.17) に代入すると

$$\deg E - \deg F + \sum n_i = 0 \qquad \therefore \quad \deg E \leq \deg F.$$

(claim 終)

claim を $E=V_1^*$, $F=\overline{\sigma^*(V_1)}$, $\Phi=s_{11}$ として適用して, $\deg V_1^* \leq \deg \overline{\sigma^*(V_1)} \quad \therefore\ \deg V_1 \geq 0$. ($s_{11}$ は $T_{\mathbb{R}}$ 上正定値, 特に同型であるから maximal rank の条件をみたしている.) 同様に $\deg V_2 \geq 0$ となるが, $\deg V_1 + \deg V_2 = \deg V = 0$ であるから, $\deg V_1 = \deg V_2 = 0$ を得る. □

Remark 4.2.8. 上の証明は底空間がトーラスであることを用いていない. よって Lemma 4.2.7. は一般の実構造をもつ Riemann 面に対して成立する.

Corollary 4.2.9. *T 上の実構造を許容する正則ベクトル束は, degree 0 かつ (★) をみたす直線束の直和としてかける.*

Proof. ベクトル束 V が実構造を許容するとする. このとき V は $\deg V=0$ かつ (★) をみたす. $V=V_1\oplus\cdots\oplus V_k$ と分解不可能な部分束の直和に書いたとき, 一つでも rank 2 以上のものがあったとする. 例えば V_1 がそうであったとしよう. Lemma 4.2.7. より V_1 は $\deg V_1 = 0$ かつ (★) をみたすことがわかるが, これは Lemma 4.2.6. に矛盾する. □

Lemma 4.2.10. *degree 0 の正則直線束 $L_{(\alpha,\beta)}$ が (★) をみたすならば $\beta=\pm 1$. またこのとき, $L_{(\alpha,\beta)}$ は実構造を許容する. 従って $L_{(\alpha,\beta)}$ が実構造を許容するための必用十分条件は $\beta=\pm1$ となることである.*

Proof. 証明は Lemma 4.2.6. とほぼ同様であるが, こちらの方が易しい. 定義により,

$$L_{(\alpha,\beta)} = \mathbb{C}\times\mathbb{C}/\sim \ \text{の同値関係は} \qquad (z+m+n\tau, v) \sim (z, \alpha^m\beta^n v)$$

であったから, 注意深く調べれば,

$$\overline{\sigma^*(L_{(\alpha,\beta)})} = \mathbb{C}\times\mathbb{C}/\sim \ \text{の同値関係は} \qquad (z+m+n\tau, v) \sim (z, \alpha^{-m}\beta^n v)$$
$$L^*_{(\alpha,\beta)} = \mathbb{C}\times\mathbb{C}/\sim \ \text{の同値関係は} \qquad (z+m+n\tau, v) \sim (z, \alpha^{-m}\beta^{-n} v)$$

となることが確かめられる. よって Fact 4.2.3. に注意して,

$$\overline{\sigma^*(L_{(\alpha,\beta)})} \simeq L_{(\alpha^{-1},\beta)} \tag{4.20}$$
$$L^*_{(\alpha,\beta)} \simeq L_{(\alpha^{-1},\beta^{-1})} \tag{4.21}$$

(4.20), (4.21) より, $L_{(\alpha,\beta)}$ が実構造を許容するためには $(\alpha^{-1},\beta)=(\alpha^{-1},\beta^{-1})$ すなわち $\beta=\pm1$ が必要.

逆に $L_{(\alpha,\beta)}$, $\beta\in\{\pm1\}$ が実構造を許容することをみる. $L_{(\alpha,\beta)}$ に同伴する主 $\mathbb{C}^*$ 束 $P_{(\alpha,\beta)}$ は,

$$P_{(\alpha,\beta)} = \mathbb{C}\times\mathbb{C}^*/\sim \qquad (z+m+n\tau, h) \sim (z, \alpha^m\beta^n h)$$

とかけるが, この $P_{(\alpha,\beta)}$ に実構造を定めることができればよい. まず, 反正則な involution を

$$\sigma : [z,h] \longmapsto \left[\bar{z}, \bar{h}^{-1}\right] \tag{4.22}$$

によって定義する. このとき,

$$(z+m+n\tau, h) \overset{\sigma}{\longmapsto} \left(\bar{z}+m-n\tau, \bar{h}^{-1}\right) = \left(\bar{z}, \alpha^m\beta^{-n}\bar{h}^{-1}\right) \tag{4.23}$$
$$(z, \alpha^m\beta^n h) \overset{\sigma}{\longmapsto} \left(\bar{z}, \alpha^m\beta^n\bar{h}^{-1}\right) \tag{4.24}$$

において $\beta \in \{\pm 1\}$ であるから, σ が well-defined であることがわかる. これに伴いマーキング φ は例えば

$$\varphi : \mathbb{C}^* \longrightarrow \{[0]\}\times\mathbb{C}^* : g \longmapsto [0, g] \tag{4.25}$$

と自然に定めることができる. (σ, φ) が実構造の条件をみたすことは定義よりほぼ明らかである. □

Remark 4.2.11. 上で定めた $L = L_{(\alpha,\beta)}$ の実構造は, (定義によって) $(T_{\mathbb{R}})_0$ 上は L の正定値な Hermite 内積を定める. $T_{\mathbb{R}}$ のもう一つの連結成分 $(T_{\mathbb{R}})_1$ 上でも非退化な Hermite 形式が定まるが, これは $\beta = 1$ のとき正定値, $\beta = -1$ のとき負定値となる. $\mathrm{Hom}\left(L^*, \overline{\sigma_X^*(L)}\right)$ は自明な直線束となることから σ の不定性はスカラー倍ほどしかないので, L の実構造は常にこの性質をもつことがわかる. 一般の階数のバンドルに関しては次節において詳しく扱う.

以上の Lemma をまとめて, 次を得る.

Theorem 4.2.12. *T 上の実構造を許容するベクトル束 V は, 次の形のバンドルと同型.*

$$L_{(\alpha_1,\varepsilon_1)} \oplus L_{(\alpha_2,\varepsilon_2)} \oplus \ldots \oplus L_{(\alpha_r,\varepsilon_r)} \qquad \alpha_i \in \mathrm{U}(1), \quad \varepsilon_i \in \{\pm 1\}$$

また, この形のバンドルは実構造を許容する.

Proof. Corollary 4.2.9. Lemma 4.2.10. より直ちに従う. なお, 各直和成分 $L_{(\alpha_i,\varepsilon_i)}$ は実構造を許容することから, この形の V はいつでも実構造を許容することが従う. □

Remark 4.2.13. バンドル $L_{(\alpha_1,\varepsilon_1)} \oplus L_{(\alpha_2,\varepsilon_2)} \oplus \ldots \oplus L_{(\alpha_r,\varepsilon_r)}$ は, 添字の取り方が異なるとき同型にならない (ただし並べ替えを除く). したがって例えば次のように $\mathrm{U}(1)\times\{\pm 1\}$ に全順序を入れておけば, Theorem 4.2.12. にあるバンドルを一意的に定めることができる.

$$\begin{cases} (\alpha, 1) < (\alpha', -1) & {}^\forall \alpha, \alpha' \in \mathrm{U}(1) \\ (\alpha, \varepsilon) < (\alpha', \varepsilon) & \text{if} \quad \alpha < \alpha' \quad (\,\mathrm{U}(1) \simeq [0, 2\pi) \text{ とみて}) \end{cases}$$

Remark 4.2.14. T 上の実構造を許容するバンドルの同型類全体の集合を $\bar{\mathcal{M}}_T$ と表すことにする. Theorem 4.2.12. により $\bar{\mathcal{M}}_T$ の元は $\varepsilon = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ の符号に応じて分類されるが, 符号 (p, q) に対応する部分を $\bar{\mathcal{M}}_T(p, q)$ とかけば,

$$\bar{\mathcal{M}}_T = \bigcup_{p+q=n} \mathcal{M}_T(p, q)$$

となる. また, k 次トーラス

$$\mathcal{T}^k = \mathrm{U}(1)\times\cdots\times\mathrm{U}(1) \qquad (k \text{ 個の積})$$

及び, 並べ替えによって $\mathcal{T}^k$ に自然に作用する k 次置換群 $\mathfrak{S}_k$ を導入すれば, 自然な一対一対応

$$\bar{\mathcal{M}}_T(p, q) \simeq \mathcal{T}^p/\mathfrak{S}_p \times \mathcal{T}^q/\mathfrak{S}_q$$

が存在する. $\bar{\mathcal{M}}_T(p, q)$ の点は, 置換群の作用がどれくらい自由であるかに応じて特異性をもっていると見なすことができ, 最も特異性の高いのは $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 1$ で表される自明な場合であると言える. この見方は, 次節で実構造の不定性を考えるときに重要となる.

4.3 実構造の不定性

この節では, 前節に引き続き長方形トーラス上の実構造つきバンドルの分類, 特にマーキングの不定性について議論する.

T 上の実構造つきのバンドルの同型類を $\mathcal{M}_T$ とおこう, 実構造を忘れる写像

$$\mathcal{F} : \mathcal{M}_T \longrightarrow \bar{\mathcal{M}}_T$$

が考えられるが, この節では $\bar{\mathcal{M}}_T$ の任意の点の逆像がどのような集合であるかを決定する. これは, 実構造を許容するバンドルを固定したとき, そのバンドルに入る実構造の同型類がどれくらいあるかを決定することに他ならない. なお, Remark 4.2.14. に注意すると, $\mathcal{M}_T$ を符号 (p,q) に対応した部分の和集合に分解することができる:

$$\mathcal{M}_T = \bigcup_{p+q=n} \mathcal{M}_T(p,q) \qquad \mathcal{M}_T(p,q) := \mathcal{F}^{-1}\left(\bar{\mathcal{M}}_T(p,q)\right).$$

Lemma 4.3.1. *T 上の実構造を許容する主 G 束 P を固定する. このとき P 上の***マーキングのない実構造***は同型を除いて一意的. すなわち, P の二つの反正則な involution σ_P, σ'_P (であって T の involution σ をカバーし, 右 G 作用について自然なもの) が与えられたとき, P の正則な自己同型 ι であって, σ_P と σ'_P について同変であるものが存在する.*

Proof. P に同伴する正則ベクトル束を V とする. Theorem 4.2.12. により,

$$V = L_{(\alpha_1,\varepsilon_1)} \oplus L_{(\alpha_2,\varepsilon_2)} \oplus \ldots \oplus L_{(\alpha_r,\varepsilon_r)} \qquad \alpha_i \in \mathrm{U}(1), \quad \varepsilon_i \in \{\pm 1\}$$

とかかれている. 以下では簡単のため $\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_n = 1$ とし, また $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ は $j_1, \cdots, j_k$ 個ずつの相異なるものの組に分けられていたとする. つまり

$$\begin{aligned}
\nu_1 &:= \alpha_1 = \cdots = \alpha_{j_1} \\
\nu_2 &:= \alpha_{j_1+1} = \cdots = \alpha_{j_1+j_2} \\
&\cdots \\
\nu_k &:= \alpha_{j_1+\cdots+j_{k-1}+1} = \cdots = \alpha_n \qquad (j_1 + \cdots + j_k = n)
\end{aligned}$$

と仮定する. ($\varepsilon = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ の符号が (p,q) のときにも, $(\alpha_i, \varepsilon_i)$ たちを相異なるものの組に分ければ, 以下同様に証明される.)

このとき, このベクトル束 V は

$$V = V_{\nu_1} \oplus \cdots \oplus V_{\nu_k} \qquad V_{\nu_i} = \left(L_{(\nu_i,1)}\right)^{\oplus j_k} \tag{4.26}$$

と表される. より具体的には

$$V = \mathbb{C}\times\mathbb{C}^n/\sim \qquad (z+m+n\tau, v) \sim (z, A^m v)$$

$$\text{ただし} \quad A = \begin{pmatrix} \nu_1 I_{j_1} & & & \\ & \nu_2 I_{j_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \nu_k I_{j_k} \end{pmatrix}.$$

これより, もとの主 G 束 P は,

$$P = \mathbb{C}\times G/\sim \qquad (z+m+n\tau, h) \sim (z, A^m h) \tag{4.27}$$

と表される. この表記を用いて, involution σ_P の可能性について考えよう. σ_P は $\mathbb{C}$ 上に引き戻すことで, 次の形の反正則な写像として表現することができる:

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\sigma}_P: & \mathbb{C}\times G & \longrightarrow & \mathbb{C}\times G \\ & (z,h) & \longmapsto & (\bar{z}, Z(z,h)). \end{array} \tag{4.28}$$

ただし, $Z:\mathbb{C}\times G \to G$ はしかるべき性質をもつ反正則な写像である. その性質の一つめとして, $\tilde{\sigma}_P$ は右 G-作用に関して自然だから,

$$\tilde{\sigma}_P(z,h) = \tilde{\sigma}_P((z,1)\cdot h) = \tilde{\sigma}_P(z,1)\cdot h^{*-1} = \left(\bar{z}, Z(z,1)\cdot h^{*-1}\right)$$

したがって $\Phi(z) = Z(z,1)$ とおけば, この Φ が σ_P に関する全ての情報を担うことになる. ここで $\Phi:\mathbb{C}\to G$ は反正則な写像である.

σ_P が involution となることから,

$$(z,h) = \tilde{\sigma}_P^2(z,h) = \tilde{\sigma}_P\left(\bar{z}, \Phi(z)\cdot h^{*-1}\right) = \left(z, \Phi(\bar{z})\cdot\Phi(z)^{*-1}\cdot h\right)$$

$$\therefore \quad \Phi(\bar{z})\cdot\Phi(z)^{*-1} = I \tag{4.29}$$

特に $\Phi(0)\cdot\Phi(0)^{*-1} = I$ であるから, $\Phi(0)$ は Hermite 行列である.

最後に $\tilde{\sigma}_P$ が σ_P の引き戻しとなっている条件を見る.

$$\begin{array}{ccc} (z+m+n\tau, h) & \xrightarrow{\tilde{\sigma}_P} & \left(\bar{z}+m-n\tau, \Phi(z+m+n\tau)h^{*-1}\right) \\ \| & & \| \\ \| & & \left(\bar{z}, A^m\Phi(z+m+n\tau)h^{*-1}\right) \\ (z, A^m h) & \xrightarrow{\tilde{\sigma}_P} & \left(z, \Phi(z)A^m h^{*-1}\right) \end{array} \tag{4.30}$$

上の図式において右下のものが一致する必要があるが, 特に次が必要十分である:

$$A\cdot\Phi(z+1) = \Phi(z)\cdot A \tag{4.31}$$

$$\Phi(z+\tau) = \Phi(z). \tag{4.32}$$

Φ を $j_1,\cdots,j_k$ に応じてブロック分けし,

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{k1} & \cdots & \varphi_{kk} \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{r} \varphi_{ab}:\mathbb{C}\to M(j_a, j_b;\mathbb{C}) \\ a,b = 1,\cdots,k \end{array} \tag{4.33}$$

とおけば, (4.31),(4.32) 式から次式を得る:

$$\varphi_{ab}(z+1) = \nu_a^{-1}\nu_b\cdot\varphi_{ab}(z) \tag{4.34}$$

$$\varphi_{ab}(z+\tau) = \varphi_{ab}(z). \tag{4.35}$$

このことから φ_{ab} の各成分は degree 0 の直線束の反正則な切断を定める. これより $\nu_1, \cdots, \nu_k$ が相異なることに注意して,

$$\varphi_{ab} = \begin{cases} 0 & (a \neq b) \\ \text{定数} & (a = b). \end{cases} \tag{4.36}$$

よって Φ は定数で,

$$\begin{pmatrix} \varphi_{11} & & & \\ & \varphi_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi_{kk} \end{pmatrix} \qquad \varphi_{ii} \in \mathrm{GL}(j_i, \mathbb{C}) \quad (i = 1, \cdots, k) \tag{4.37}$$

という形である. $\Phi(0)$ は Hermite 行列であったから, Φ は (4.37) の形であってさらに Hermite である. 逆に (4.37) の形の Hermite 行列を与えると, (4.28) によって P の involution σ_P が定まる.

ところで, 一般に (4.37) の形の行列は A と可換であるから, (4.27) の表記の下, P の各点に左からこの行列をかけるゲージ変換を定めることができる. これによって, $\Phi(\lambda_0)$ の値が I であるように, (4.27) の表記をいつでも取り替えることができる. すなわち, σ_P はどの取り方をしても同型類において一意的である. □

Remark 4.3.2. 上の証明中で, (4.37) の形の行列が P の正則なゲージ変換を定めることを見たが, 逆に P の正則なゲージ変換はこうして与えられるものしかない. これは (4.27) の表記の下, ゲージ変換を $\mathbb{C}$ 上へ引き戻して議論することによって, 上の証明と同じ道筋で示すことができる.

Corollary 4.3.3. *$(V, \varphi_V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ を実構造つき正則ベクトル束で符号 (p, q) に対応するものとする. (すなわち V の同型類は $\mathcal{M}_T(p, q)$ に属する.) このとき, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $T_{\mathbb{R}}$ 上で各ファイバーの Hermite 形式を定めるが, $(T_{\mathbb{R}})_0$ 上は正定値で, $(T_{\mathbb{R}})_1$ 上は符号 (p, q) をもつものである.*

Proof. $(T_{\mathbb{R}})_0$ 上正定値であることは実構造の定義および Proposition 4.1.12. そのものである.

V の実構造のうち, マーキング φ_V は Hermite 形式の符号とは無関係であるから, このマーキングを忘れて考えても差し支えない. すると, Lemma 4.3.1. より $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は本質的に一意的である. そしてそれは, Remark 4.2.11. において指摘した直線束上のものの直和にほかならない. 以上の考察から $(T_{\mathbb{R}})_1$ 上で $\langle\cdot,\cdot\rangle$ の符号が (p, q) となることは直ちに従う. □

Theorem 4.3.4. 実構造を許容する正則ベクトル束

$$V_{(\alpha,\varepsilon)} = L_{(\alpha_1,\varepsilon_1)} \oplus \cdots \oplus L_{(\alpha_n,\varepsilon_n)} \qquad \alpha_i \in \mathrm{U}(1), \quad \varepsilon_i \in \{\pm 1\}$$

を固定する. $\{(\alpha_i, \varepsilon_i)\}$ たちが $j_1, j_2, \cdots, j_k$ 個ずつの互いに異なる組にわけられるとき, $V_{(\alpha,\varepsilon)}$ 上の実構造の同型類の集合は, $\mathrm{U}(n)$ の左剰余類全体

$$\left(\prod_{i=1}^{k} \mathrm{U}(j_i)\right) \Big\backslash \mathrm{U}(n) = F_{j_1, j_1+j_2, \cdots, j_1+\cdots+j_k} \qquad \textit{(flag manifold)}$$

と一対一に対応がつく.

Proof. P は ($\mathbb{C}$ の平行移動に関する適当な同値関係 $\sim$ のもと)

$$P = \mathbb{C} \times G / \sim$$

とかかれているが, Lemma 4.3.1. により P の involution σ_P としては

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\sigma_P}: & \mathbb{C}\times G & \longrightarrow & \mathbb{C}\times G \\ & (z,h) & \longmapsto & (\bar{z}, h^{*-1}) \end{array} \tag{4.38}$$

から誘導されるもののみを考えれば良い. この表記の下, マーキングは

$$\begin{array}{rccc} \varphi_P: & G & \longrightarrow & \{[0]\}\times G \\ & g & \longmapsto & [0,\psi(g)] \end{array} \tag{4.39}$$

の形で表されるが, φ_P は $\psi(I)\in G$ のみ定めれば, あとは G-同変に拡張することで一意に定まる. さらに φ_P が σ_G と σ_P について同変となるためには, $\psi(I)\in \mathrm{U}(n)$ となることが必要十分である. したがって,$\mathrm{U}(n)$ の元をひとつとって $\psi(I)$ とみなすことで, P のマーキングが定まる.

次に, $\psi_1(I),\psi_2(I)\in\mathrm{U}(n)$ を取ったとき, それぞれから定まる実構造が同型となる条件を考える. Remark 4.3.2. の証明から, P の正則なゲージ変換 ι は, (4.37) の形の行列 Φ によって,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\times G & \longrightarrow & \mathbb{C}\times G \\ (z,h) & \longmapsto & (z,\Phi h) \end{array} \tag{4.40}$$

として表されるものしかない. 二つのマーキングが同型なものとなるには次の図式で右下のものが一致することが必要十分である:

$$\begin{array}{ccc} G\ni I & \xrightarrow{\varphi_1} & [0,\psi_1(I)]\in\{[0]\}\times G \\ \Big\| & & \Big\downarrow \iota \\ \Big\| & & [0,\Phi\cdot\psi_1(I)] \\ G\ni I & \xrightarrow{\varphi_2} & [0,\psi_2(I)]\in\{[0]\}\times G. \end{array} \tag{4.41}$$

知りたいのはこのような Φ が存在するための条件であったが, これは結局 $\psi_2(I),\psi_1(I)^{-1}$ が (4.37) の形の行列であるという条件に等しい. この条件は, $\psi_1(I)$ と $\psi_2(I)$ が $\mathrm{U}(j_1)\oplus\cdots\oplus\mathrm{U}(j_k)$ を法とする $\mathrm{U}(n)$ の左剰余類に入っているということと同値である. したがって, マーキングの不定性は $F_{j_1,j_1+j_2,\cdots,j_1+\cdots+j_k}=(\prod_i \mathrm{U}(j_i))\setminus\mathrm{U}(n)$ に一致する. □

4.4 実構造と Loop 群の分解定理

loop 群の元をはりあわせ関数と考えることで, Riemann 面上の (実構造つき) 正則ベクトル束を自然に定めることができる. この節では $\mathbb{P}^1$ 上でこの対応を与え, さらにその応用として第 1 章の Theorem 1.3.1. の loop 群の分解定理を証明する.

まずは $\mathbb{P}^1=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ を次のようにいくつかの部分に分ける

$$S=\left\{\lambda\in\mathbb{P}^1 \;\middle|\; |\lambda|=1\right\} \qquad \mathrm{I}_+=\{|\lambda|\le 1\} \quad \mathrm{I}_-=\{|\lambda|\ge 1\}.$$

$\gamma\in\Lambda_S G=\Lambda G$ をはりあわせ関数とみて, $\mathbb{P}^1$ 上のベクトル束 V を以下のように定めることができる.

$$\begin{aligned} V &= \mathrm{I}_-\times\mathbb{C}^n \bigcup_{\gamma} \mathrm{I}_+\times\mathbb{C}^n \\ &= \mathrm{I}_-\times\mathbb{C}^n \bigsqcup \mathrm{I}_+\times\mathbb{C}^n \Big/ \sim \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\text{ただし} \\ &\mathrm{I}_-\times\mathbb{C}^n\ni(\lambda,v_-)\sim(\lambda,v_+)\in\mathrm{I}_+\times\mathbb{C}^n \\ &\quad\Longleftrightarrow\ v_-=\gamma(\lambda)v_+ \quad \lambda\in S \end{aligned} \tag{4.42}$$

γ をどちらから掛けるかを指定する必要があるが, それは深刻な問題ではない. 実際, 上のはりあわせを $v_+ = \gamma(\lambda) v_-$ にとりかえると, これは γ ではなく γ^{-1} を考えていることになる.

上の定義によって定まった V は $\mathbb{P}^1 - S$ 上自明であるから, そこでは正則な構造が入っている. ここで, この正則構造が S 上へも自然に拡張されることを見るために, 次の事実を引用する.

Fact 4.4.1 (Birkhoff 分解, [11]).

$$\Lambda G = \Lambda_- G \cdot \hat{T} \cdot \Lambda_+ G \tag{4.43}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
\Lambda_- G &= \{\gamma \in \Lambda G \mid \mathrm{I}_- \text{へ正則に拡張可能}\} \\
\Lambda_+ G &= \{\gamma \in \Lambda G \mid \mathrm{I}_+ \text{へ正則に拡張可能}\} \\
\hat{T} &= \left\{ \left. \begin{pmatrix} \lambda^{a_1} & & & \\ & \lambda^{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda^{a_n} \end{pmatrix} \right| \; a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z} \right\}
\end{aligned}$$

Fact 4.4.1 を用いて $\gamma = \gamma_- \gamma_0 \gamma_+$ と分解したとすると, (4.42) のはりあわせは,

$$\gamma_-(\lambda)^{-1} v_- = \gamma_0(\lambda) \gamma_+(\lambda) v_+ \qquad \lambda \in S \tag{4.44}$$

とかける. すなわち, I_- 上の自明化を $\gamma_-(\lambda)^{-1}$ 倍で, I_+ 上の自明化を $\gamma_+(\lambda)$ 倍で, それぞれとりかえると, V のはりあわせは γ から γ_0 にかわる. γ_0 は S の近傍へ正則に拡張できることから, V に自然な正則構造が定まることがわかる.

以上で, loop 群の元により正則ベクトル束が定まることがわかったが, これに伴って正則な主 G 束が定まることもわかる. 両者をまとめて単に $\mathbb{P}^1$ 上の正則なバンドル, などと呼ぶことにする.

Remark 4.4.2. Birkhoff 分解は Grothendieck の定理 (Fact 4.1.17.) の loop 版であるといえる. Atiyah によるトーラス上の正則ベクトル束の分類 (c.f.[1]) の loop 版と言うべきものは一般に知られていないようであるが, 後の節で述べる事柄は少なからずこれらのことと関係しているように思われる.

上では「赤道」におけるはりあわせを考えたが, 同じ形の座標がとれさえすれば, 赤道に限らず loop 群の元を用いて正則なベクトル束がつくれる. そこで Theorem 1.3.1. に合わせ, $\mathbb{P}^1$ を次のように分割する ($0 < \varepsilon < 1$ を固定)

$$\begin{aligned}
&\mathrm{I}_0 = \left\{\varepsilon \le |\lambda| \le \varepsilon^{-1}\right\},\ \mathrm{I}_1 = \left\{|\lambda| \le \varepsilon\right\} \cup \left\{\varepsilon^{-1} \le |\lambda|\right\} \\
&\Gamma = \mathrm{I}_0 \cap \mathrm{I}_1 = \Gamma_\varepsilon \cup \Gamma_{1/\varepsilon} \quad \left(\Gamma_\varepsilon = \left\{|\lambda| = \varepsilon\right\},\ \Gamma_{1/\varepsilon} = \left\{|\lambda| = \varepsilon^{-1}\right\} \right).
\end{aligned}$$

これまで同様 $\mathbb{P}^1$ の実構造 σ は (4.1) で定まる自然なものとし, また $1 \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ を基点にとる. $\Lambda_\Gamma G = \{\gamma : \Gamma \to G \,|\, C^\infty \text{級}\}$ の元に対して $\mathbb{R}$-condition が意味をもつから, loop 群 $\Lambda_{\Gamma,\mathbb{R}} G$ などを考えることができるのであった.

Proposition 4.4.3. $\Lambda_{\Gamma,\mathbb{R}} G$ の元によって定まる $\mathbb{P}^1$ 上のバンドルはは, 標準的な実構造をもつ.

Proof. 主 G 束を用いて実構造を構成する. $\gamma \in \Lambda_{\Gamma,\mathbb{R}} G$ が定める主 G 束 P とは

$$\begin{aligned}
P &= \mathrm{I}_0 \times G \bigcup_\gamma \mathrm{I}_1 \times G \\
&= \mathrm{I}_0 \times G \bigsqcup \mathrm{I}_1 \times G \Big/ \sim
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&\text{ただし} \\
&\mathrm{I}_0 \times G \ni (\lambda, h_0) \sim (\lambda, h_1) \in \mathrm{I}_1 \times G \\
&\qquad \iff h_0 = \gamma(\lambda) h_1 \quad \lambda \in \Gamma
\end{aligned}
\tag{4.45}$$

とかかれるもののことである. P が正則な主 G 束となることはすでに見ている. involution σ_P とマーキング φ_P を定めよう. まずマーキングは, 自明化を用いて

$$\begin{aligned} \varphi_P : G &\longrightarrow \{1\}\times G \\ g &\longmapsto \ (1,g) \end{aligned} \tag{4.46}$$

によって定める. 次に σ_P を各 $\mathrm{I}_i\ (i=0,1)$ 上で,

$$\begin{aligned} \sigma_P|_{\mathrm{I}_i} : \mathrm{I}_i\times G &\longrightarrow \qquad \mathrm{I}_i\times G \\ (\lambda,h) &\longmapsto \big(\sigma(\lambda),h^{*-1}\big) \end{aligned} \tag{4.47}$$

と定める. $\lambda\in\Gamma$ に対しこの定義が整合的であることをみる.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{I}_0\times G \ni (\lambda,h_0) & \xrightarrow{\ \ \sigma\ \ } & \big(\sigma(\lambda),h_0^{*-1}\big)\in \mathrm{I}_0\times G \\ h_0=\gamma(\lambda)h_1 \Big\| & & ???\Big\| \\ \mathrm{I}_1\times G \ni (\lambda,h_1) & \xrightarrow{\ \ \sigma\ \ } & \big(\sigma(\lambda),h_1^{*-1}\big)\in \mathrm{I}_1\times G \end{array} \tag{4.48}$$

ここで,

$$\begin{aligned} h_0^{*-1} &= \gamma(\lambda)^{*-1}\cdot h_1^{*-1} \\ \therefore\quad h_0^{*-1} &= \gamma(\sigma(\lambda))\cdot h_1^{*-1} \end{aligned} \tag{4.49}$$

となるから, 確かに (4.48) の右側の二つの元は一致することがわかる. よって σ_P は well-defined となる. σ_P は $\mathrm{I}_0,\mathrm{I}_1$ 上それぞれ反正則であり, これより σ ははりあって $\mathbb{P}^1$ 全体で反正則な写像を定める. こうして得られた (σ_P,φ_P) が実構造の 3 つの条件を満すことは定義から直ちに確かめられる. □

Remark 4.4.4. 上の証明中で, 主 G 束 P に対してその実構造の取り方は上の方法に限らない. しかし, (loop 群のはりあわせで与えられたバンドルに対して)「標準的な実構造」といったらこの方法で定まるものを指すこととする.

Proposition 4.4.3. より, 任意の $\gamma\in\Lambda_{\Gamma,\mathbb{R}}G$ は $\mathbb{P}^1$ 上の実構造をもつ正則ベクトル束を定めるが, Theorem 4.1.19. よりこれは自明なものと同型である. このことを用いて, Theorem 1.3.1. を証明することができる. 定理を再記しておこう.

Theorem 4.4.5. 次の分解が存在し, 分解は一意的.

$$\Lambda_{\Gamma,\mathbb{R}}G=\Lambda^1_{\mathrm{I}_1,\mathbb{R}}G\cdot\Lambda_{\mathrm{I}_2,\mathbb{R}}G \tag{4.50}$$

Proof. $\gamma\in\Lambda_{\Gamma,\mathbb{R}}G$ をひとつとり, γ が定める実構造つき主 G 束を (P,σ_P,φ_P) とする. それらは具体的には (4.45), (4.46), (4.47) によって与えられるものであった.

一方, $\mathbb{P}^1$ 上の自明な実構造つき主 G 束とは, 以下によって定まる (P_0,σ_0,φ_P) のことである. (Theorem 4.1.19. 参照)

$$\begin{aligned} &P_0=\mathbb{P}^1\times G \\ &\begin{aligned} \sigma_0 : \mathbb{P}^1\times G &\longrightarrow \ \ \mathbb{P}^1\times G \\ (\lambda,g) &\longmapsto (\lambda,g^{*-1}) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \varphi_0 : G &\longrightarrow \ \ P_0 \\ g &\longmapsto (\lambda_0,g) \end{aligned} \end{aligned} \tag{4.51}$$

すでに述べた注意から, 実構造つき主 G 束としての同型

$$\iota : P \xrightarrow{\sim} P_0$$

が存在する. この ι は各自明化の下, 次のように具体的に書かれる:

$$\begin{aligned} \iota|_{\mathrm{I}_i} : \mathrm{I}_i \times G &\longrightarrow \quad \mathrm{I}_i \times G \\ (\lambda, h_i) &\longmapsto (\lambda, \delta_i(\lambda) \cdot h_i) \end{aligned} \qquad (i = 0, 1) \tag{4.52}$$

ここで, ソースは P の, ターゲットは P_0 の自明化であり, $\delta_i : \mathrm{I}_i \to G$ は正則な写像である. ここで, $\gamma \in \Gamma$ のときにはりあわせと整合的でなければならない. すなわち,

$$h_0 = \gamma(\lambda)h_1 \quad \text{のとき} \quad \delta_0(\lambda)h_0 = \delta_1(\lambda)h_1 \qquad (\lambda \in \Gamma) \tag{4.53}$$

が成立しなければならない. これより

$$\gamma(\lambda) = \delta_0(\lambda)^{-1} \cdot \delta_1(\lambda) \qquad (\lambda \in \Gamma) \tag{4.54}$$

として γ の分解を得る.

次に, ι が実構造を保つという条件から $\gamma_0 \in \Lambda^1_{\mathrm{I}_0,\mathbb{R}}G, \gamma_1 \in \Lambda_{\mathrm{I}_1,\mathbb{R}}G$ となることを示そう. まず, ι が involution について同変, すなわち $\iota \circ \sigma_P = \sigma_0 \circ \iota$ であることより, $i = 0, 1$ に対して

$$\begin{aligned} \iota \circ \sigma_P(\lambda, h_i) &= \iota\left(\sigma(\lambda), h_i^{*-1}\right) = \left(\sigma(\lambda), \delta_i(\sigma(\lambda)) \cdot h_i^{*-1}\right) \\ \sigma_0 \circ \iota(\lambda, h_i) &= \sigma_0\left(\lambda, \delta_i(\lambda) \cdot h_i\right) = \left(\sigma(\lambda), \delta_i(\lambda)^{*-1} \cdot h_i^{*-1}\right) \end{aligned} \qquad \left({}^\forall(\lambda, h_i) \in \mathrm{I}_i \times G\right)$$

$$\therefore \quad \delta_i(\sigma(\lambda)) = \delta_i(\lambda)^{*-1}. \tag{4.55}$$

従って, δ_0, δ_1 が $\mathbb{R}$-condition をみたすことがわかった.

さらに $\varphi_0 = \iota \circ \varphi_P$ より

$$\begin{aligned} (\lambda_0, I) = \varphi_0(I) = \iota \circ \varphi_P(I) = \iota(\lambda_0, I) = (\lambda_0, \delta_0(\lambda_0)) \\ \therefore \quad \delta_0(\lambda_0) = I \end{aligned} \tag{4.56}$$

以上により, $\gamma_0 \in \Lambda^1_{\mathrm{I}_0,\mathbb{R}}G, \gamma_1 \in \Lambda_{\mathrm{I}_1,\mathbb{R}}G$ となることがわかった.

最後に一意性をみておく. いま

$$\gamma = \gamma_0 \cdot \gamma_1 = \gamma_0' \cdot \gamma_1' \qquad (\lambda \in \Gamma) \tag{4.57}$$

と書かれたとしよう. このとき,

$$\gamma_0'^{-1} \cdot \gamma_0 = \gamma_1' \cdot \gamma_1^{-1} \qquad (\lambda \in \Gamma) \tag{4.58}$$

となるが, この式において左辺は I_0 上の, 右辺は I_1 上の正則関数をそれぞれ定めるから, はりあって $\mathbb{P}^1$ 上の正則関数を得る. $\mathbb{P}^1$ 上の正則関数は定数のみであるから上の両辺は定数であり, また左辺の λ_0 における値は I であるから, 定数の値は I. よって $\gamma_0 = \gamma_0', \gamma_1 = \gamma_1'$ となり, 分解の一意性が示された. □

最後に一般のコンパクト Riemann 面 X の場合について考察しておこう. X の一次元部分多様体 Γ があり, Γ の各連結成分 ($\simeq S^1$) の近傍において $\mathbb{P}^1$ の例と同様にシリンダー状の座標がとれるとき (このとき, Γ は X に対し標準的とよぶことにする.), やはり loop 群 $\Lambda_\Gamma G = \{\gamma : \Gamma \to G\}$ の元によって X 上の正則ベクトル束を一つ定めることができる.

さらに X が (固定点のある) 実構造 σ_X と基点 λ_0 をもち, また Γ が σ_X 不変で $\Gamma \cap X_{\mathbb{R}}$ は空である場合には, 以下のように同様のことが成り立つ.

Proposition 4.4.6. Γ によって X はいくつかの σ_X 不変な閉集合に分割される. $\gamma \in \Lambda_{\Gamma,\mathbb{R}}G$ の定めるベクトル束が自明であるとき, またそのときに限り, γ は各閉集合上で $\mathbb{R}$-*condition* をみたす正則関数たちの積として表現される. X の基点 λ_0 上での関数の値を固定しておけば, その表現は一意的である. *(*Γ で分断された両側が同じ閉集合に入ることもあるが *(*境界は重複して認識される*)*, このときも全く問題なく今のことが言える*.)*

一般の Riemann 面においては Theorem 4.1.19. が成立しない. (実際長方形トーラス上で実構造をもつ自明でないベクトル束が存在していた.) このため Theorem 1.3.1. のように任意の loop 群の元を上の形に分解することはできない.

4.5 Loop で定まる長方形トーラス上の実構造

前節では, Loop 群の元によるはりあわせで $\mathbb{P}^1$ 上の実構造つきバンドルを構成したが, この節では, 長方形トーラス T 上で同様のことを行う. T 上の実構造つきバンドルは全て分類が出来ているので, Loop 群とどのように対応しているかを見るのが 4.5 節と 4.6 節の目標である.

まずこの節では, Loop が定めるバンドルが完全に書き下せる場合を扱う. つづいて 4.6 節では一般的な状況に関する定理として, あらゆる実構造つきバンドルが, Loop によるはりあわせで実現されることを示す.

なお, 今まで通り $G = \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ として議論を進めるが, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ に対しても議論は通用することを注意しておく.

4.5.1 長方形トーラス上で分解可能な loop 群の元

長方形トーラス T 上の σ 不変な標準的部分多様体 Γ を具体的に定め, loop 群の分解に対応する事柄について考察する. 4.2 節などで用いた「長方形モデル」とは少し異なる以下の記法を用いよう. こちらは「同心円モデル」と呼ぶことにする. ($R > 1$ は定数)

$$\tilde{\mathrm{I}}_0 = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; R^{-2} \leq |\lambda| \leq 1\right\} \qquad \tilde{\mathrm{I}}_1 = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; 1 \leq |\lambda| \leq R^2\right\}$$

$$\sigma_{\tilde{\mathrm{I}}_0} : \lambda \in \tilde{\mathrm{I}}_0 \longmapsto \frac{1}{R^2\bar{\lambda}} \in \tilde{\mathrm{I}}_0 \qquad \sigma_{\tilde{\mathrm{I}}_1} : \lambda \in \tilde{\mathrm{I}}_1 \longmapsto \frac{R^2}{\bar{\lambda}} \in \tilde{\mathrm{I}}_1$$

$$\left((\tilde{\mathrm{I}}_1)_{\mathbb{R}} = \left\{|\lambda| = R^{-1}\right\} \right) \qquad \left((\tilde{\mathrm{I}}_2)_{\mathbb{R}} = \{|\lambda| = R\} \right)$$

$$\tilde{T} = \tilde{\mathrm{I}}_0 \cup \tilde{\mathrm{I}}_1 / \sim \qquad \text{ただし} \begin{cases} |\lambda| = R^{-2} \text{ のとき} \\ \lambda \in \tilde{\mathrm{I}}_0 \sim R^4\lambda \in \tilde{\mathrm{I}}_1 \end{cases}$$

$$\sigma = \sigma_{\tilde{\mathrm{I}}_0} \cup \sigma_{\tilde{\mathrm{I}}_1}$$

$$\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}_0 \cup \tilde{\Gamma}_0^* \qquad \begin{cases} \tilde{\Gamma}_0 \text{ は } \{|\lambda| = 1\} \text{ で代表される部分} \\ \tilde{\Gamma}_0^* \text{ は } \left\{|\lambda| = R^2\right\} \text{ で代表される部分} \end{cases}$$

$\Lambda_{\tilde{\Gamma},\mathbb{R}}G$ の元は, $\tilde{\Gamma}$ 上の写像であるが, $\mathbb{R}$-condition により $\tilde{\Gamma}_0$ 上での値を定めれば $\tilde{\Gamma}_0^*$ 上での値も定まる. つまり, $\Lambda_{\tilde{\Gamma},\mathbb{R}}G \simeq \Lambda_{\tilde{\Gamma}_0}G$. さらに, $\Lambda_{\tilde{\Gamma}_0}G = \Lambda G$. このように, 上の表記は loop 群の元をそのまま表示できるという利点を持っており, Laurent 展開とも相性がよい.

$\Lambda_{\tilde{\Gamma},\mathbb{R}}G$ の各元は $\tilde{T}$ 上の実構造をもつ正則ベクトル束を定める. この対応がどのようになっているか, 特に自明なバンドルを定める loop はどのように特徴づけられるか, について考察することにする. まずは次を示す.

Theorem 4.5.1. 任意の *loop* $\gamma \in \Lambda G \simeq \Lambda_{\tilde{\Gamma},\mathbb{R}} G$ は, $\gamma = \gamma_0 \tilde{\gamma} \gamma_1$ と分解できる. ただし, $\gamma_0 \in \Lambda_{\tilde{\mathrm{I}}_0,\mathbb{R}} G, \gamma_1 \in \Lambda_{\tilde{\mathrm{I}}_1,\mathbb{R}} G, \tilde{\gamma}$ は $\{R^{-1} \le |\lambda| \le R\}$ まで正則に拡張できる ΛG の元.

証明には, Birkhoff 分解 (Fact 4.4.1.) および次を用いる.

Fact 4.5.2 (loop 群の Iwasawa 分解, [6][11]).

$$\Lambda\,\mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) = \Lambda^1\,\mathrm{U}(n) \cdot \Lambda_+ \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \tag{4.59}$$

Proof of Theorem. まず Birkhoff 分解によって次の分解をする:

$$\gamma = \delta_- \delta_0\, \delta_+ \qquad \begin{cases} \delta_\pm \in \Lambda_\pm\,\mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \\ \delta_0 : \mathbb{C}^* \text{へ拡張可能.} \end{cases} \tag{4.60}$$

ここで δ_+ に注目し, $(\tilde{\mathrm{I}}_2)_\mathbb{R} = \big\{|\lambda| = R\big\}$ において Fact 4.5.2. の分解を (転置して) 用いて,

$$\delta_+ = \theta_R \theta_u \qquad \begin{cases} \theta_R : \{|\lambda| \le R\} \text{ へ正則に拡張可能} \\ \theta_u : (\tilde{\mathrm{I}}_2)_\mathbb{R} \text{上ユニタリー.} \end{cases} \tag{4.61}$$

この式を用いると θ_u は $\big\{1 \le |\lambda| \le R\big\}$ へ拡張でき, さらに $R < |\lambda| < R^2$ なる λ に対して,

$$\theta_u(\lambda) = \theta\left(\sigma_{\tilde{\mathrm{I}}_1}(\lambda)\right)^{*-1}$$

と定めることで $\big\{1 \le |\lambda| \le R^2\big\}$ まで正則に拡張でき, $\theta_u \in \Lambda_{\tilde{\mathrm{I}}_1,\mathbb{R}} G$ となる. このとき $\gamma = \delta_- \delta_0 \theta_R \cdot \theta_u$ で, 作り方から $\delta_0 \theta_R$ は $\big\{0 < |\lambda| \le R\big\}$ で正則. これで半分で, δ_- についても同様のことをすれば良い. □

以下では, $\Lambda G, \Lambda\mathfrak{g}$ と書いたら $\{R^{-1} \le |\lambda| \le R\}$ まで正則に拡張できる元についてのみ考えていることとし, それらの元とベクトル束の関係について考察する. 以下しばらく $n = 1$ のとき, 即ち $G = \mathbb{C}^*$ の時の状況ついて述べ, $n > 1$ については 4.5.3 節以降で述べる. まずは $n = 1$ のときの loop 群 $\Lambda\mathbb{C}^*$ に関する性質について列挙するが, これらの証明は容易であるから省略する.

Proposition 4.5.3. $\Lambda\mathbb{C}^*$ は可算個の連結成分をもつ. 単位元 I を含む連結成分を $(\Lambda\mathbb{C}^*)_0$ とすると, 次の完全系列が存在する.

$$1 \longrightarrow (\Lambda\mathbb{C}^*)_0 \xrightarrow{\ i\ } \Lambda\mathbb{C}^* \xrightarrow{\ p\ } \mathbb{Z} \longrightarrow 1$$

$\Lambda\mathbb{C}^*$ の各連結成分の代表として標準的な loop λ^j がとれるが, p は $p(\lambda^j) = j$ として定まる.
$\Lambda\mathbb{C}^*$ を無限次元の Lie 群とみたとき, その Lie 環は loop algebra $\Lambda\mathbb{C}$ で与えられる. 両者を関係づける指数写像については次が成立する.

Proposition 4.5.4. $f \in \Lambda\mathbb{C} \longmapsto e^f \in (\Lambda\mathbb{C}^*)_0$ は全射

なお, この指数写像は単射にはなっておらず, 純虚数方向に周期 $2\pi\sqrt{-1}$ で巻き付くような covering になっている. 以上 2 つの Proposition をまとめると次を得る.

Proposition 4.5.5. $\Lambda\mathbb{C}^*$ の任意の元は ${}^\exists j \in \mathbb{Z}, {}^\exists f \in \Lambda\mathbb{C}$ によって, $\lambda^j e^{f(\lambda)}$ とかかれる.

Definition 4.5.6. $G = \mathbb{C}^*, \mathfrak{g} = \mathbb{C}$

1. $\gamma \in \Lambda G$ が定める直線束を L_γ とかく

2. $\Lambda H := \{\gamma \in \Lambda G \mid L_\gamma$は自明$\}$

3. $\Lambda\mathfrak{h} := \{f \in \Lambda\mathfrak{g} \mid f_0 \in \mathfrak{g}_\mathbb{R}\,(=$純虚数$)\}$　ただし, $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k\lambda^k$.

記号 ΛH は, loop 群の部分集合であることを明示するためにこの表現を選んだ. "H" だけでは意味をもたない記号である. $\Lambda\mathfrak{h}$ についても同様である.

Theorem 4.5.7.

$$\Lambda H = \left\{ R^i\lambda^j e^{f(\lambda)} \;\middle|\; i,j \in \mathbb{Z},\ i+j = even,\ f \in \Lambda\mathfrak{h} \right\} \tag{4.62}$$

以下, この定理をいくつかの補題に分解して証明する. また, ΛH に含まれない ΛG の元がどのようなバンドルを定めるかについては, 次節で説明する. ところで, 上の Theorem 4.5.7. は ΛH と $\Lambda\mathfrak{h}$ がちょうど Lie 群と Lie 環の関係になっていることを示唆している.

Lemma 4.5.8. $\gamma, \delta \in \Lambda G$ に対し $L_{\gamma\delta} = L_\gamma \otimes L_\delta$

Proof. L_γ の定義を考えれば明らかである. □

Corollary 4.5.9. ΛH は群をなす.

Lemma 4.5.10. ${}^\forall f \in \Lambda\mathfrak{h}$ に対し, $e^{f(\lambda)} \in \Lambda H$

Proof. Remark 4.4.6 に注意する. $\gamma_0 \in \Lambda_{\tilde{\mathrm{I}}_0}G, \gamma_1 \in \Lambda_{\tilde{\mathrm{I}}_1}G$ が存在し, 次をみたすことを言えばよい.

$$\gamma_0(\lambda) = e^{f(\lambda)} \cdot \gamma_1(\lambda) \qquad |\lambda| = 1 \tag{4.63}$$

$$\gamma_0\left(R^{-4}\lambda\right) = e^{-\overline{f(R^2/\bar\lambda)}} \cdot \gamma_1(\lambda) \qquad |\lambda| = R^2 \tag{4.64}$$

この 2 式から出発して, 実際に γ_0, γ_1 を構成する. (4.63) に注目して, $\tilde{\mathrm{I}}_0 \cup \tilde{\mathrm{I}}_1$ 上の正則関数 σ を,

$$\sigma(\lambda) = \begin{cases} \gamma_0(\lambda) & \lambda \in \tilde{\mathrm{I}}_0 \\ e^{f(\lambda)} \cdot \gamma_1(\lambda) & \lambda \in \tilde{\mathrm{I}}_1 \end{cases} \tag{4.65}$$

によって定める. $|\lambda| = R^2$ のとき (4.64) 式を用いると,

$$\sigma(\lambda) = e^{f(\lambda)} \cdot \gamma_1(\lambda) = e^{f(\lambda)} \cdot e^{\overline{f(R^2/\bar\lambda)}} \cdot \gamma_0\left(R^{-4}\lambda\right)$$

$$\therefore \qquad \sigma(\lambda) = e^{f(\lambda) + \overline{f(R^2/\bar\lambda)}} \cdot \sigma\left(R^{-4}\lambda\right) \tag{4.66}$$

(この式を用いると, σ が $\mathbb{C}^*$ 上へ拡張されることがわかる.) さて, (4.66) をみたす σ が, $\sigma(\lambda) = e^{g(\lambda)}$ として実現されることを期待する. 代入すると, 次式が期待される.

$$g(\lambda) - g\left(R^{-4}\lambda\right) = f(\lambda) + \overline{f\left(R^2/\bar\lambda\right)} \tag{4.67}$$

$f(\lambda) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k\lambda^k,\ g(\lambda) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k\lambda^k$ と Laurent 展開すると,

$$\sum \left(1 - R^{-4k}\right) g_k\lambda^k = \sum f_k\lambda^k + \sum R^{2k}\bar f_k\bar\lambda^{-k} \tag{4.68}$$

各 k について係数を比較して,

$$\begin{aligned} &k = 0 \text{ のとき}, & 0 &= f_0 + \bar f_0 \qquad (f \in \Lambda\mathfrak{h} \text{ より O.K.}) \\ &k \neq 0 \text{ のとき}, & (1 - R^{-4k})g_k &= f_k + R^{2k}\bar f_{-k} \\ & & \therefore \quad g_k &= \frac{R^{4k}}{R^{4k}-1}f_k + \frac{R^{2k}}{R^{4k}-1}\bar f_{-k} \end{aligned}$$

$g(\lambda) = \sum g_k\lambda^k$ を上で定義すれば (g_0 は任意でよい), これは収束し σ が実現される. これに伴って $\gamma_i\ (i = 0, 1)$ がそれぞれ実現されることがわかる. □

${}^\forall\gamma \in (\Lambda\mathbb{C}^*)_0$ は $\gamma(\lambda) = e^{f(\lambda)}$ とかかれるが, $f(\lambda)$ を直和分解 $\Lambda\mathbb{C} = \Lambda\mathfrak{h} \oplus \mathbb{R}$ に応じて分解すると,

$$\gamma(\lambda) = g \cdot e^{\tilde{f}(\lambda)} \qquad g: \text{正の実数},\ \tilde{f} \in \Lambda\mathfrak{h}.$$

$e^{\tilde{f}(\lambda)} \in \Lambda H$ であるから, $L_\gamma \simeq L_g$ となる. そこで, 正の実数 g で定まるバンドルを調べる必要があるが, これは少し手間がかかるので次節にまわす. 結果は次の通りである.

Lemma 4.5.11. 正の実数 g が定めるバンドルが自明となるのは, $g = R^{2k}$ $(k \in \mathbb{Z})$ のときで, そのときに限る.

最後に, $(\Lambda\mathbb{C}^*)_0$ に含まれない loop について知る必要があるが, (Lemma 4.5.8. を考慮すれば,) それには次の事実だけで十分である.

Lemma 4.5.12. $R\lambda \in \Lambda H$

Proof. $\gamma(\lambda) = R\lambda$ が $\gamma_i \in \Lambda_{\tilde{\mathrm{I}}_i}\mathbb{C}^*\ (i = 0, 1)$ の積に分解することを言えば良い.

$$\begin{cases} \gamma_0(\lambda) = 1 \\ \gamma_1(\lambda) = R^{-1}\lambda^{-1} \end{cases} \quad \text{とおくと,} \quad \begin{cases} \gamma_0(\lambda) = R\lambda \cdot \gamma_1(\lambda) & |\lambda| = 1 \\ \gamma_0(\lambda) = \overline{R(R^2/\bar{\lambda})}^{-1} \cdot \gamma_1(R^{-4}\lambda) & |\lambda| = R^2 \end{cases}$$

となって分解が実現される. □

以上の Lemma から, Theorem 4.5.7. は直ちに得られる.

4.5.2 階数 1 の constant loop で定まる実構造

前節の設定において, loop 群 ΛG の元がどのようなバンドルを定めるかを知るには, 正の実数 g に値をとる constant loop についてのみ調べればよいことが, すでに分かっている. この節でも前節と同じ複素トーラス T で考えるが, 「長方形モデル」による表現が必要となる. 再び次のように設定する. (τ は純虚数)

$$\begin{aligned} &T = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}) && \sigma: [z] \in T \longmapsto [\bar{z}] \in T \\ &\mathrm{I}_0 = \left\{ [z] \in T \;\middle|\; \frac{\tau}{4} \leq \mathrm{Im}\, z \leq \frac{3}{4}\tau \right\} && \mathrm{I}_1 = \left\{ [z] \in T \;\middle|\; -\frac{\tau}{4} \leq \mathrm{Im}\, z \leq \frac{\tau}{4} \right\} \\ &\Gamma_0 = \left\{ [z] \in T \;\middle|\; \mathrm{Im}\, z = \frac{\tau}{4} \right\} && \Gamma_0^* = \left\{ [z] \in T \;\middle|\; \mathrm{Im}\, z = -\frac{\tau}{4} \right\} \end{aligned}$$

上の T と前節の $\tilde{T}$ が双正則同型となるのは, $\tau = \frac{2\log R}{\pi}\sqrt{-1}$ のときである. 実際このとき, T の基本領域を $\left\{ 0 \geq \mathrm{Re}\, z \geq 1,\ -\frac{\tau}{4} \geq \mathrm{Im}\, z \leq \frac{3}{4}\tau \right\}$ ととると, 同型写像は,

$$T \ni [z] \longmapsto \left[e^{2\pi\sqrt{-1}\left(z - \frac{\tau}{4}\right)} \right] \in \tilde{T}$$

で与えられる. 定理を述べよう.

Theorem 4.5.13. 正の実数に値をとる *constant loop* $g \in \Lambda G \simeq \Lambda_{\Gamma,\mathbb{R}}G$ によって定まるバンドルは

$$L_{(\alpha,1)} \qquad \text{ただし,} \quad \alpha = e^{-\frac{2\log g}{\tau}}$$

ここで g で定まるバンドルとは, 具体的には次のはりあわせで定まるバンドルのことである.

$$\begin{aligned} V &= \mathrm{I}_0 \times \mathbb{C} \bigcup_{(g,g^{-1})} \mathrm{I}_1 \times \mathbb{C} & \mathrm{I}_0 \times \mathbb{C} \ni (z, v_0) \sim (z, v_1) \in \mathrm{I}_1 \times \mathbb{C} \\ &= \mathrm{I}_0 \times \mathbb{C} \bigsqcup \mathrm{I}_1 \times \mathbb{C} \Big/ \sim & \iff \begin{cases} v_0 = g\, v_1 & z \in \Gamma_0 \\ v_0 = g^{-1} v_1 & z \in \Gamma_0^* \end{cases} \end{aligned} \tag{4.69}$$

Theorem 4.5.13. を用いて Lemma 4.5.11. はすぐに証明される. 実際, $\alpha = 1$ とすると $\tau = \frac{2 \log R}{\pi} \sqrt{-1}$ から $g = R^{2k}$ $(k \in \mathbb{Z})$ が得られる.

Proof of Theorem. (4.69) 式からパラメータを変換して, $L_{(\alpha,1)}$ の表示に持ち込む. まず $g\, v_1 = \tilde{v}_1$ と変換して,

$$\begin{cases} v_0 = \tilde{v}_1 & z \in \Gamma_0 \\ v_0 = g^{-2} \tilde{v}_1 & z \in \Gamma_0^* \end{cases} \tag{4.70}$$

したがってこのバンドル L は, 次のようにかける.

$$\begin{gathered} L = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \; / \sim \\ (z + m + n\tau, v) \sim \left(z, g^{2n} v\right) \end{gathered} \tag{4.71}$$

さらに, $v = e^{\mu z} w \quad \left(\mu = \frac{2 \log g}{\tau}\right)$ と変換すると,

$$\begin{aligned} \left(z + m + n\tau, e^{\mu(z+m+n\tau)} w\right) &\sim \left(z, e^{\mu z} g^{2n} w\right) \\ (z + m + n\tau, w) &\sim \left(z, e^{-\mu(m+n\tau)} g^{2n} w\right) \\ \therefore \quad (z + m + n\tau, w) &\sim \left(z, e^{-\mu m} w\right) \end{aligned} \tag{4.72}$$

したがって $L = L_{(\alpha,1)} \quad (\alpha = e^{-\mu})$ となる. □

Remark 4.5.14. (4.69) のはりあわせを

$$\begin{cases} v_0 = g\, v_1 & z \in \Gamma_0 \\ v_0 = -g^{-1} v_1 & z \in \Gamma_0^* \end{cases} \tag{4.73}$$

にかえると $L_{(\alpha,-1)}$ が得られる. ここで α は Theorem 4.5.13. 中のものと同じで, 証明も同様である.

4.5.3 一般の階数の場合

$n \geq 2$ での $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ (および $n \geq 3$ での $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$) において, 前節までの議論はそのまま通用しない. 群の非可換性が, その主な理由である. しかし, loop 群によって定まるバンドルは直線束の直和としてかかれることが, 既に Theorem 4.2.12. などから分かっている. 直線束に関しては前節, 前々節で決着がついているので, 原理的にはだいたい様子が分かっていることになる.

Definition 4.5.15. $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}),\ \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n \mathbb{C}$

1. $\gamma \in \Lambda G$ が定めるベクトル束を V_γ とかく.
2. $\Lambda H := \{\gamma \in \Lambda G \mid V_\gamma \text{は自明}\}$

3. $\Lambda\mathfrak{h} := \{f \in \Lambda\mathfrak{g} \mid f_0 \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}\}$ ただし, $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k\lambda^k,\ f_k \in \mathfrak{g}$

前とは違い, ΛH は ΛG の部分群にはなっていない. $\Lambda\mathfrak{h}$ は I における ΛH の「接空間」になっているだろうと予想しているが, これはまだ解決していない.

G が可換の場合, 実質的にバンドルを決定するのは「constant loop の部分」であった. 非可換の場合でも constant については以下のようにバンドルが決定される. 以下では前節と同様に 「長方形モデル」T の表記を用いている.

Theorem 4.5.16. $G = \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}),\quad g \in G \subset \Lambda G$: *constant map.* このとき $g\,g^*$ の固有値は正の実数であるが, それらを $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ とすると,

$$V_g = L_{(\alpha_1,1)} \oplus \ldots \oplus L_{(\alpha_n,1)} \qquad \text{ただし,}\quad \alpha_j = e^{-\frac{2\log\lambda_j}{\tau}}$$

Proof. g によって定まるバンドル V_g は次のはりあわせでかかれる.

$$\begin{aligned} &\mathrm{I}_0\times\mathbb{C} \ni (z,v_0) \sim (z,v_1) \in \mathrm{I}_1\times\mathbb{C} \\ \Longleftrightarrow &\begin{cases} v_0 = g\,v_1 & z \in \Gamma_0 \\ v_0 = g^{*-1}v_1 & z \in \Gamma_0^* \end{cases} \end{aligned} \tag{4.74}$$

$g\,v_1 = \tilde{v}_1$ と変換して,

$$\begin{cases} v_0 = \tilde{v}_1 & z \in \Gamma_0 \\ v_0 = g^{*-1}g^{-1}v_1 & z \in \Gamma_0^* \end{cases} \tag{4.75}$$

これは, 次のように表現できる.

$$\begin{aligned} &V_g = \mathbb{C}\times\mathbb{C}^n/\sim \\ &(z+m+n\tau, v) \sim (z,v') \qquad \text{when} \quad v = (g\,g^*)^n v' \end{aligned} \tag{4.76}$$

$g\,g^*$ は正定値 Hermite 行列であるから, 適当なユニタリー行列 U によって

$$U^{-1}g\,g^*U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \lambda_1,\ldots,\lambda_n > 0 \tag{4.77}$$

とかかれる. 右辺の対角行列を A とかくことにし, (4.76) の fiber 座標を $v = Uw$ と変換して, はりあわせは

$$\begin{aligned} (z+m+n\tau, w) \sim (z,w') \qquad \text{when} \quad Uw &= (g\,g^*)^n Uw' \\ \therefore \quad w &= A^n w' \end{aligned} \tag{4.78}$$

したがって, $V_g = L_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus L_{\lambda_n}$. あとは Theorem 4.5.13. を用いれば求める結果を得る. □

定数でない一般の loop 群の元に対して, 与えられた元からどのようなバンドルが定まるか判別するのは難しい.

4.6 Loop 群による実構造の実現

この節では前節の続きとして長方形トーラス T 上において, $\mathbb{R}$-condition をみたす一般の loop 群の元から定まる実構造について考察し, これによって得られる実構造つきバンドルは常に $\mathcal{M}_T(n,0)$ に属することをみる. またこれまでと異なる Reality condition を考えることで, $\mathcal{M}_T(p,q)$ に対しても同様の議論が成立することを示す. さらにこの対応は全射である, すなわちあらゆる実構造つきバンドルが Loop によるはりあわせで実現されることを示す.

なお, 記号は 4.5 節と同じものを使うが, 「長方形モデル」か「同心円モデル」かについては (本質的に使うことはないので) あまりこだわらず, T の座標には記号 λ を用いることにする.

まずは前節の結果を整理するために次の集合を考える:

$$\mathcal{D}=\left\{\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} \;\middle|\; d_i>0\right\}. \tag{4.79}$$

$\mathcal{D}$ の元はその対角成分を用いて $\operatorname{diag}(d_1,\cdots,d_n)$ などと表すことにする. $\mathcal{D}$ から loop 群 $\Lambda_{\Gamma,\mathbb{R}}G$ (内の局所定数な loop のなす部分群) への写像 i を次のように定める:

$$\begin{array}{cccc} i: & \mathcal{D} & \longrightarrow & \Lambda_{\Gamma,\mathbb{R}}G \\ & \operatorname{diag}(d_1,\cdots,d_n) & \longmapsto & \begin{cases}\Gamma_0 \to \operatorname{diag}(d_1,\cdots,d_n) \\ \Gamma_0^* \to \operatorname{diag}(d_1^{-1},\cdots,d_n^{-1}).\end{cases}\end{array} \tag{4.80}$$

i は $\mathcal{D}\hookrightarrow \Lambda G\simeq\Lambda_{\Gamma,\mathbb{R}}G$ の合成に他ならない. また, 標準的な方法で loop 群 $\Lambda_{\Gamma,\mathbb{R}}G$ から実構造つきのバンドルを作る対応を $\rho:\Lambda_{\Gamma,\mathbb{R}}G\longrightarrow\mathcal{M}_T$ によって表そう. さらに, 実構造を忘れる写像 $\mathcal{F}:\mathcal{M}_T\to\bar{\mathcal{M}}_T$ を用いると, 前節の結果から次が成立する.

Proposition 4.6.1. 写像

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{F}\circ\rho\circ i: & \mathcal{D} & \longrightarrow & \bar{\mathcal{M}}_T \\ & D & \longmapsto & \mathrm{I}_0\times G\bigcup_{i(D)}\mathrm{I}_1\times G \end{array} \tag{4.81}$$

は, $\bar{\mathcal{M}}_T(n,0)$ への全射.

Proof. $\bar{\mathcal{M}}_T(n,0)$ の元は の形の直線束の直和でかけるのであった. Theorem 4.5.13. よりどんな α に対しても, $L_{(\alpha,1)}$ は適当な正の定数 g (に対応する loop) によるはりあわせで書ける. 逆にこのはりあわせによって得られるのは常に $L_{(\alpha,1)}$ の形の直線束だけであるから, 上の写像が $\bar{\mathcal{M}}_T(n,0)$ への全射であることがわかる. □

Remark 4.6.2. 上の写像による自明束の引き戻しは $\mathcal{D}$ の格子をなし, これは次の形の元の有限個の積としてかかれるもの全体である.

$$\Theta=\operatorname{diag}(1,\cdots,1,\theta,1,\cdots,1)\qquad(\theta=e^{\pi\cdot\mathrm{Re}(\tau)})$$

ただし τ は T の複素構造を定める純虚数.

Propsiton 4.6.1. から次の命題の成立が期待され, これは確かに成立する.

Proposition 4.6.3. 写像

$$\rho : \Lambda_{\Gamma,\mathbb{R}}G \longrightarrow \mathcal{M}_T \tag{4.82}$$

は $\mathcal{M}_T(n,0)$ への全射.

上の命題は, $\Lambda_{\Gamma,\mathbb{R}}G$ の元で定まるバンドルがいつでも $\mathcal{M}_T(n,0)$ に属すること, および $\mathcal{M}_T(n,0)$ の任意の元がこうして得られることを主張している. 全射性は Propostion 4.6.1. から明らかなように見えるが, マーキングの不定性が残っているので証明が必要である. この命題は後に述べる Theorem 4.6.7 の特別な場合であるので, ここでは証明しない.

今までと異なる Reality condition を導入してここまでのストーリーの拡張を考える. loop 群 $\Lambda_\Gamma G$ の元 γ に対して, 次の条件を考えよう:

$$\mathbb{R}(p,q)\textbf{-condition}: \qquad \gamma(\sigma(\lambda)) = \gamma(\lambda)^{*-1}\cdot J_{(p,q)} \qquad \text{ただし } J_{(p,q)} = \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix}.$$

この条件は, G に今まで考えていたものと異なる involution

$$G \longrightarrow G : g \longmapsto g^{*-1}J_{(p,q)}$$

を考えた場合の involution-同変性に他ならない. なお, この involution は固定点を持っていない.

新しい条件のもと, 次の loop 群を考える:

$$\Lambda_{\Gamma,\mathbb{R}(p,q)}G := \left\{\gamma\in\Lambda_\Gamma G \;\middle|\; \gamma \text{ は } \mathbb{R}(p,q)\text{-condition をみたす}\right\}.$$

Lemma 4.6.4. $\Lambda_{\Gamma,\mathbb{R}(p,q)}G$ の元は T 上のバンドルを定めるが, これは標準的な実構造をもつ.

Proof. 証明は Propstion 4.4.3. とほぼ同様である. $\gamma\in\Lambda_{\Gamma,\mathbb{R}(p,q)}G$ に対して定まる主 G 束 P とは

$$\begin{aligned} P &= \mathrm{I}_0\times G \bigcup_\gamma \mathrm{I}_1\times G & &\text{ただし} \\ & & &\mathrm{I}_0\times G \ni (\lambda,h_0)\sim(\lambda,h_1)\in\mathrm{I}_1\times G \\ &= \mathrm{I}_0\times G \bigsqcup \mathrm{I}_1\times G \Big/ \sim & &\iff h_0=\gamma(\lambda)h_1 \quad \lambda\in\Gamma \end{aligned} \tag{4.83}$$

とかかれるもののことである. マーキングは I_0 上の自明化を用いて自明に導入する. また σ_P を

$$\begin{aligned} &\mathrm{I}_0 \text{ 上}: \mathrm{I}_0\times G \longrightarrow \mathrm{I}_0\times G : (\lambda,h)\longmapsto \big(\sigma(\lambda), h^{*-1}\big) \\ &\mathrm{I}_1 \text{ 上}: \mathrm{I}_1\times G \longrightarrow \mathrm{I}_1\times G : (\lambda,h)\longmapsto \big(\sigma(\lambda), J_{(p,q)}h^{*-1}\big) \end{aligned} \tag{4.84}$$

と定める. $\lambda\in\Gamma$ に対しこの定義が整合的であることをみる.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{I}_0\times G\ni(\lambda,h_0) & \xrightarrow{\ \sigma\ } & \big(\sigma(\lambda),h_0^{*-1}\big)\in\mathrm{I}_0\times G \\ h_0=\gamma(\lambda)h_1 \Big\| & & ???\Big\| \\ \mathrm{I}_1\times G\ni(\lambda,h_1) & \xrightarrow{\ \sigma\ } & \big(\sigma(\lambda),J_{(p,q)}\cdot h_1^{*-1}\big)\in\mathrm{I}_1\times G \end{array} \tag{4.85}$$

ここで,

$$\begin{aligned} h_0^{*-1} &= \gamma(\lambda)^{*-1}\cdot h_1^{*-1} \\ h_0^{*-1} &= \gamma(\lambda)^{*-1}J_{(p,q)}\cdot J_{(p,q)}\cdot h_1^{*-1} \\ \therefore\quad h_0^{*-1} &= \gamma(\sigma(\lambda))\cdot J_{(p,q)}\cdot h_1^{*-1} \end{aligned} \tag{4.86}$$

となるから, 確かに (4.85) の右側の二つの元は一致することがわかる. よって σ_P は well-defined となる. 以上で P の実構造が定まる. □

Lemma 4.6.5. $\Lambda_{\Gamma,\mathbb{R}(p,q)}G$ の元で定まる実構造つきバンドルは, $\mathcal{M}_T(p,q)$ に属する.

Proof. (4.84) 式で定められた σ_P をベクトル束の立場から見たとき, $(I_2)_\mathbb{R}$ 上で符号 (p,q) の非退化 Hermite 形式が定まることをみる. $\lambda \in (I_2)_\mathbb{R}$ のとき

$$\begin{array}{rcl} V_\lambda = P_\lambda \times_G \mathbb{C}^n \simeq & (\{\lambda\}\times G)\times_G \mathbb{C}^n & \overset{\sim}{\longleftrightarrow} & \mathbb{C}^n \\ & [(\lambda, I), v] & \longleftrightarrow & v \end{array} \tag{4.87}$$

の対応の下, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ の定義に従って,

$$\begin{aligned} \langle v, v\rangle &= \big\langle [(\lambda, I), v], [(\lambda, I), v]\big\rangle \\ &= \Big\langle [(\lambda, I), v], [\sigma_P(\lambda, I)\cdot J_{(p,q)}^{-1},\, v]\Big\rangle \\ &= \big\langle [(\lambda, I), v], [\sigma_P(\lambda, I),\, J_{(p,q)}\cdot v]\big\rangle \\ &= {}^t v \cdot J_{(p,q)} \cdot \bar{v} \end{aligned} \tag{4.88}$$

従って, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ の符号は (p,q) であることがわかる. □

以上二つの Lemma によって, 次の写像を定めることができる.

$$\rho_{(p,q)} : \Lambda_{\Gamma,\mathbb{R}(p,q)}G \longrightarrow \mathcal{M}_T(p,q) \tag{4.89}$$

$(p,q) = (n,0)$ のときは, この節の前半で述べた状況になっている. $i : \mathcal{D} \to \Lambda_{\Gamma,\mathbb{R}}G$ の一般化として次の写像を考えよう:

$$\begin{array}{rccc} i_{(p,q)} : & \mathcal{D} & \longrightarrow & \Lambda_{\Gamma,\mathbb{R}(p,q)}G \\ & \mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_n) & \longmapsto & \begin{cases} \Gamma_0 \to \mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_n) \\ \Gamma_0^* \to \mathrm{diag}(d_1^{-1},\cdots,d_p^{-1},-d_{p+1}^{-1},\cdots,-d_n^{-1}). \end{cases} \end{array} \tag{4.90}$$

Proposition 4.6.6. 次の写像は全射

$$\mathcal{F}\circ\rho_{(p,q)}\circ i_{(p,q)} : \mathcal{D} \longrightarrow \bar{\mathcal{M}}_T(p,q). \tag{4.91}$$

Proof. Remark 4.5.14. に注意すれば, Proposition 4.6.1 と全く同様である. □

Theorem 4.6.7. $\rho_{(p,q)}$ は全射.

Proof. 実構造つき主 G 束 (P,σ_P,φ_P) を任意に与える. Propositon 4.6.6. および σ_P の取り方は本質的に一意であることにより, (P,σ_P) は $\mathcal{D}$ の元 D によって実現されているとしてよい. すなわち,

$$P = \mathrm{I}_0\times G \bigcup_{i(D)} \mathrm{I}_1\times G \tag{4.92}$$

$$\sigma_P : \begin{cases} \mathrm{I}_0 \text{ 上}: \mathrm{I}_0\times G \longrightarrow \mathrm{I}_0\times G : (\lambda, h) \longmapsto \big(\sigma(\lambda), h^{*-1}\big) \\ \mathrm{I}_1 \text{ 上}: \mathrm{I}_1\times G \longrightarrow \mathrm{I}_1\times G : (\lambda, h) \longmapsto \big(\sigma(\lambda), J_{(p,q)}h^{*-1}\big). \end{cases} \tag{4.93}$$

このとき, マーキング φ_P は

$$\begin{array}{rcccl} \varphi_P : & G & \longrightarrow & \{\lambda_0\}\times G & \subset \mathrm{I}_0\times G \\ & I & \longmapsto & (\lambda_0, \psi(I)) & \end{array} \tag{4.94}$$

として $\psi(I)\in \mathrm{U}(n)$ によって決まっている．そこで, I_0 上の自明化を $\psi(I)^{-1}$ 倍で取り替える．すなわち

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{I}_0\times G & \longrightarrow & \mathrm{I}_0\times G \\ (\lambda,h_0) & \longmapsto & (\lambda,\tilde{h}_0) \end{array} \qquad \tilde{h}_0=\psi(I)^{-1}\cdot h_0. \tag{4.95}$$

すると, この新しい自明化に対して,

$$\varphi_P:\ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \{\lambda_0\}\times G \\ I & \longmapsto & (\lambda_0,\tilde{h}_0) \end{array} \qquad \tilde{h}_0=g. \tag{4.96}$$

一方このとき, $\psi(I)\in \mathrm{U}(n)$ に注意すると, $\psi(I)^{-1}i(D)\in \Lambda_{\Gamma,\mathbb{R}(p,q)}G$ が成立し,

$$P=\mathrm{I}_0\times G \bigcup_{\psi(I)^{-1}i(D)} \mathrm{I}_1\times G \tag{4.97}$$

となる．また σ_P の表示は変化しない．つまり, $\psi(I)^{-1}i(D)$ によるはりあわせで (P,σ_P,φ_P) が実現される． □

4.7 Extended Harmonic map の一般化の試み

前節まで長方形トーラス上の実構造に関して調べてきたが, これらのことが Twistor theory や Harmonic map の研究にどのように絡んでくるか, 今のところまだはっきりとした形で捉えられていない．しかし, Extended Harmonic map (EH map) の概念の拡張と言えるであろういくつかの例が観察されたので, 4.7 節および 4.8 節でそれらの例について説明する．

この節では, 一般的な状況で EH map の一つの拡張といえる概念を定式化し, $\mathbb{P}^1$ およびトーラス上で具体的な例を見る．

第 1 章で扱った EH map E や, その微分として現れる接続の族 α の一般化に当たる概念を考える．第 1 章での α は, Lie 環 $\mathfrak{g}$ に値を持つ M 上の 1-形式 $\Omega^1(M,\mathfrak{g})$ の, $\lambda\in\mathbb{P}^1$ をパラメータとする族であった．Lie 環をファイバーとする自明なバンドル $F=\mathbb{P}^1\times\mathfrak{g}$ を用いると, $\alpha\in\Gamma\left(F\otimes\Omega^1(M,\mathfrak{g})\right)$ と見なすことができる．この F は $\mathbb{P}^1$ 上の自明な主 G 束の Adjoint 束と見なすのが自然である．以上の発想の下, 一般の Riemann 面上で α に相当するものを考えよう．また, その積分として EH map の一般化 E を考える．

(X,σ_X,λ_0) を基点つき実構造をもつ Riemann 面, (P,σ_P,φ_P) をその上の, 実構造をもつ主 G 束とする．このとき, G の Adjoint 作用を用いて P から自然に得られる二つのバンドル

$$\mathrm{Ad}(P)=P\underset{G}{\times}G,\qquad \mathrm{ad}(P)=P\underset{G}{\times}\mathfrak{g}$$

には, 以下のように自然な実構造が定まる．

$$\sigma_{\mathrm{Ad}(P)}:\ \begin{array}{ccc} P\underset{G}{\times}G & \longrightarrow & P\underset{G}{\times}G \\ [u,g] & \longmapsto & [\sigma_P(u),\sigma_G(g)] \end{array} \qquad \left(\sigma_G(g)=g^{*-1}\right) \tag{4.98}$$

$$\sigma_{\mathrm{ad}(P)}:\ \begin{array}{ccc} P\underset{G}{\times}\mathfrak{g} & \longrightarrow & P\underset{G}{\times}\mathfrak{g} \\ [u,X] & \longmapsto & [\sigma_P(u),\sigma_{\mathfrak{g}}(X)] \end{array} \qquad (\sigma_{\mathfrak{g}}(X)=-X^*) \tag{4.99}$$

なお, これらが well-defined であることは定義から容易に確かめられる．

$\mathrm{ad}(P)$ は, Lie 環 $\mathfrak{g}$ をファイバーとするバンドルであるが, このファイバーに M 上の $\mathbb{C}$ 値 i-形式 $\Omega^i(M)$ をテンソル積して, $\mathrm{ad}(P)\otimes\Omega^i(M)$ を考える. これは「無限次元ベクトル空間 $\Omega^i(M,\mathfrak{g})$ をファイバーとするバンドル」とみなすことができ, 次によって定まる自然な実構造を持っている:

$$\begin{array}{rccc} \sigma: & \mathrm{ad}(P)\otimes\Omega^i(M) & \longrightarrow & \mathrm{ad}(P)\otimes\Omega^i(M) \\ & v\otimes\omega & \longmapsto & \sigma_{\mathrm{ad}(P)}(v)\otimes\bar{\omega}. \end{array} \tag{4.100}$$

以上の準備の下 "α の一般化" として, 次の条件をみたす対象を考えよう.

[**条件**]

1. $\alpha\in\Gamma^{Mero}\left(\mathrm{ad}(P)\otimes\Omega^1(M)\right)$　(ここで "Γ^{Mero}" は有理的切断の意味)
2. (Reality) α は $\mathbb{R}$-condition をみたす. すなわち $\alpha\left(\sigma_X(\lambda)\right)=\sigma(\alpha(\lambda))$.
3. (Flatness) α は (極でない) 各 $\lambda\in X$ に対して Flat. すなわち $d\alpha+\alpha\wedge\alpha=0$.
4. (b.p. preserving) 基点 λ_0 において $\alpha(\lambda_0)=0$.

条件 1,2,4 を合わせて, $\alpha\in\Gamma^{Mero,1}_{\mathbb{R}}\left(\mathrm{ad}(P)\otimes\Omega^1(M)\right)$ などと表すことができる. 上の条件に関して以下でいくつか補足をしておく.

Remark 4.7.1. 第三の条件である Flatness の方程式は Adjoint 作用に対して不変であることから, P の自明化の取り方によらず意味を持っている. なお, d は $z\in M$ に関する外微分作用素である.

Remark 4.7.2. 上の [**条件**] は, EH map に対応する α の性質を一般化したものであるが, 第四の基点の条件をはずすと PEH map に対応するものの一般化が得られる.

Remark 4.7.3. α は $(1,0)$,$(0,1)$-形式に分解することで, 以下のように表示できる:

$$\alpha=Adz+Bd\bar{z},\qquad A,B\in\Gamma^{Mero}\left(\mathrm{ad}(P)\otimes\Omega^0(M)\right). \tag{4.101}$$

この表示の下, 第二の条件である Reality condition は次のように表される:

$$B=A^\vee\qquad \text{ただし}\quad A^\vee(\lambda)=\sigma\left(A(\sigma_X(\lambda))\right). \tag{4.102}$$

Flatness の条件により, 「α の積分」を考えることができる. 具体的には次の命題が成り立つ.

Proposition 4.7.4. [**条件**] *をみたす* α *に対し, 以下をみたす* E *が唯一存在する. ただし,* $p\in M$ *は基点とする.*

1. $E:M\to\Gamma^{Mero}\left(\mathrm{Ad}(P)\right)$
2. *(Reality)* 任意の $z\in M$ に対し $E(z)$ は $\mathbb{R}$-*condition* をみたす. すなわち $\mathrm{Ad}(P)$ の大域的有理切断とみて $E(z)^\vee=E(z)$
3. *(*初期値*)* $E(p)=I$
4. *(b.p. preserving)* $E(z)$ は $\mathrm{Ad}(P)$ の切断とみて λ_0 上 I に値を持つ.

α と同様に上の *1,2,4* をあわせて $E:M\to\Gamma^{Mero,1}_{\mathbb{R}}\left(\mathrm{Ad}(P)\right)$ などとかく. 証明は, 局所的に見れば EH map を構成したときの証明をそのまま用いることができるので, 省略する.

Remark 4.7.5. $\mathrm{Ad}(P)$ が自明な切断 I を常に持っていることから Proposition 4.7.4. の第三の条件は意味を持つ.

Remark 4.7.6. 上の E は EH map の一般化と言えるが, α の [**条件**] から四番目の条件をはずしたものに対しては, やはり Proposition 4.7.4. の四番目の条件をはずしたものが得られ, これは PEH map の一般化と言える.

Remark 4.7.7. Proposition 4.7.4. によって EH map の一般化と呼ぶべきものが構成できたわけであるが, この命題から, EH map の値域は「有理的ゲージ変換」と見なすべきものであるといえよう.

Remark 4.7.8. 第 1 章で扱った (EH map に対する) α は, $\mathbb{P}^1$ 上で **[条件]** をみたすものであって, さらに一次性の条件

$$\alpha^{0,1} = Bd\bar{z} \quad \text{は } \lambda \text{ に関して一次式} \tag{4.103}$$

を課すことで得られる. このことから, 上の三つの条件に加えて, 「λ に関する有理性が, "単純なもの" である」という条件を考えると, これがちょうど α の一般の Riemann 面への拡張になっていると考えられる. 一般の状況 (あるいは長方形トーラス上) でこの「単純な有理性」を適切に定め, Harmonic map の拡張として興味深いものが得られる, というような例は残念ながら今のところ見つかっていない. しかし, その研究の中で得られたいくつかの特別な例について, この論文の残りの部分で説明する.

以上の内容に対する例として, この節では $\mathbb{P}^1$ の引き戻しとして得られる, 自明なバンドル上の対象について述べる.

(X, σ_X, λ_0) を基点つき実構造をもつ Riemann 面とし, さらに λ_0 と異なる点 $\lambda_1 \in X_{\mathbb{R}}$ をとり, 固定する. いま, X 上の有理型関数 $\mathfrak{f}$ であって次の性質を持つものが存在したと仮定しよう:

$$\mathfrak{f}(\lambda_0) = 1, \quad \mathfrak{f}(\lambda_1) = -1, \quad \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{f}^\vee = 1 \quad \left(\text{ただし } \mathfrak{f}^\vee(\lambda) = \overline{\mathfrak{f}(\sigma_X(\lambda))}\right). \tag{4.104}$$

三番目の条件は,

$$\mathfrak{f}(\sigma_X(\lambda)) = \overline{\mathfrak{f}(\lambda)}^{-1} \tag{4.105}$$

とかくこともでき, これは $\mathfrak{f}$ が $(\mathbb{P}^1, \sigma)$ への involution 同変な写像であるという条件に他ならない (すなわち, $\mathfrak{f}$ に対する $\mathbb{R}$-condition である). また $\mathfrak{f}(\lambda_0) = 1$ は基点を保つ条件である.

第 1 章で扱った, $\lambda \in \mathbb{P}^1$ をパラメータとする Flat な接続の族

$$\alpha_\lambda = \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) Adz + (1 - \lambda) Bd\bar{z} \tag{4.106}$$

および, その積分によって得られる EH map

$$E : M \longrightarrow \Lambda^1_{\mathbb{C}^*, \mathbb{R}} G \tag{4.107}$$

を考える. ここで $\Lambda^1_{\mathbb{C}^*, \mathbb{R}} G$ は, $\Gamma^{Mero,1}_{\mathbb{R}}(\mathrm{Ad}(P))$ に対応している. いまこれらのパラメータを, (4.104) をみたす $\mathfrak{f}$ を用いて引き戻すことができる. すなわち,

$$\tilde{\alpha} := \mathfrak{f}^*(\alpha) = \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{f}(\lambda)}\right) Adz + (1 - \mathfrak{f}(\lambda)) Bd\bar{z} \tag{4.108}$$

$$\tilde{E} := \mathfrak{f}^*(E) = E_{\mathfrak{f}(\lambda)} \tag{4.109}$$

とおく. $\mathfrak{f}$ が「実構造を保つ」写像であることから $\tilde{\alpha}$ が前述の **[条件]** をみたすことは明らかであり, これらはちょうどこの節で扱っていたものに他ならない. そしてこの場合は

$$\phi := \tilde{E}_{\lambda_1} = E_{\mathfrak{f}(\lambda_1)} = E_{-1} \tag{4.110}$$

は Harmonic map であることが従う.

この節の残りの部分では, (4.104) の条件をみたす関数 $\mathfrak{f}$ の例を, $\mathbb{P}^1$ 上および長方形トーラス T 上で与える. まず $\mathbb{P}^1$ 上では次が成立する.

Proposition 4.7.9. *$\mathbb{P}^1$ 上で条件 (4.104) を満たす $\mathfrak{f}$ は $\mathfrak{f}(\lambda) = \lambda^s$ $(s \in \mathbb{Z})$ のみである. このとき λ_1 は -1 の $|s|$ 乗根にとればよい. (特に $s = 1$ のときが通常の EH map の状況である.)*

Proof. $\mathfrak{f}$ を Fourier 展開して $\mathfrak{f}(\lambda) = \sum_i f_i \lambda^i$ とかけば, $\mathfrak{f}$ は $\mathbb{P}^1$ 上の有理型関数であることから, $\{f_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ は有限個を除いて 0 となる. また定義より $\mathfrak{f}^\vee(\lambda) = \sum_i \bar{f}_{-i} \lambda^i$ となるから, $\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{f}^\vee \equiv 1$ より

$$\sum_i \left(\sum_{p-q=i} f_p \cdot \bar{f}_q \right) \lambda^i \equiv 1$$

$$\therefore \quad \sum_{p-q=i} f_p \cdot \bar{f}_q = \begin{cases} 1 & (i = 0) \\ 0 & (i \neq 0) \end{cases} \tag{4.111}$$

いま, $f_i = 0$ とならない i のうち最大のものを s, 最小のものを t としよう. $s - t \neq 0$ と仮定すると (4.111) で $i = s - t$ とした場合の式より,

$$\cdots + f_{s-1}\bar{f}_{t-1} + f_s \bar{f}_t + f_{s+1}\bar{f}_{t+1} \cdots = 0 \tag{4.112}$$

よって $f_s \bar{f}_t = 0$ となるが, これは s, t の取り方に矛盾する. ゆえに $s - t = 0$ であり, $|f_s|^2 = 1$ となる. よって $\mathfrak{f}(\lambda) = f_s \lambda^s$. $\mathfrak{f}(1) = 1$ より $\mathfrak{f}(\lambda) = \lambda^s$ を得る. ☐

続いて長方形トーラス T で考える. 正確には τ を $\operatorname{Im}\tau > 0$ なる純虚数として

$$T = \mathbb{C}/\mathcal{L} \qquad \mathcal{L} = \{m + n\tau \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

として考えているのであった. 具体的に $\mathfrak{f}$ を構成するために, 以下で若干準備をする.

まず任意の格子 $\mathcal{L} = \{mw_1 + nw_2\}$ に対して定まる $\mathbb{C}$ 上の次の二つの, 良く知られた関数を考える:

$$\wp(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2} + \sum_{\omega \in \mathcal{L}'} \left(\frac{1}{(\lambda - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \tag{4.113}$$

$$\sigma(\lambda) = \lambda \prod_{\omega \in \mathcal{L}'} \left(1 - \frac{\lambda}{\omega} \right) e^{\frac{\lambda}{\omega} + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\omega}\right)^2}. \tag{4.114}$$

ここで $\mathcal{L}' = \mathcal{L} - \{0\}$ であり, $\wp$ は $\mathcal{L}$ を周期に持つ楕円関数である. $\wp$ は偶関数, σ は奇関数であり, また σ は次の周期性をもっている:

$$\begin{aligned} \sigma(\lambda + w_1) &= -\sigma(\lambda) e^{\eta_1 \left(\lambda + \frac{w_1}{2}\right)} \\ \sigma(\lambda + w_2) &= -\sigma(\lambda) e^{\eta_2 \left(\lambda + \frac{w_2}{2}\right)}. \end{aligned} \tag{4.115}$$

ただし η_i $(i = 1, 2)$ は, w_i 方向に格子ひとつ分だけ進む道にそって $\wp$ を積分した値であり, Legendre の関係式と呼ばれる次の式が成立する.

$$\eta_1 w_2 - \eta_2 w_1 = 2\pi i \qquad (\operatorname{Im}(w_2/w_1) > 0 \text{ のとき}) \tag{4.116}$$

格子 $\mathcal{L}$ が, 念頭においていた長方形トーラスの場合, すなわち $w_1 = 1, w_2 = \tau$ の場合には上の事柄に加えて, $\wp\left(\bar{\lambda}\right) = \overline{\wp(\lambda)}$ がなりたつ. このことと $\wp$ が偶関数であることから, $\wp$ は

$$2\,\mathrm{Re}\,\lambda = \mathbb{Z} \quad \text{または} \quad 2\,\mathrm{Im}\,\lambda = \mathbb{Z}$$

であるような λ に対して実数値であることが従う. ゆえに, 常に実数値であるような道にそって積分することができるから, η_i $(i = 1, 2)$ はどちらも実数であることが分かる. (4.116) により, 結局次を得る:

$$\eta_1 = \frac{2\pi i}{\tau}, \qquad \eta_2 = 0. \tag{4.117}$$

したがってこの場合 (4.115) 式は次のようにかける:

$$\begin{aligned} \sigma(\lambda+1) &= -\sigma(\lambda)e^{\frac{2\pi i}{\tau}\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)} \\ \sigma(\lambda+\tau) &= -\sigma(\lambda). \end{aligned} \tag{4.118}$$

以上で準備を終えて実際に関数を構成する.

Definition 4.7.10. 以下によって, $\mathbb{C}$ 上の有理系関数 $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2$ を定める.

$$\mathfrak{f}_1(\lambda) := \frac{\sigma\left(\frac{\tau}{4}-\lambda\right)^2}{\sigma\left(\frac{\tau}{4}+\lambda\right)^2} \tag{4.119}$$

$$\mathfrak{f}_2(\lambda) := \frac{\sigma\left(\frac{\tau}{3}-\lambda\right)^3}{\sigma\left(\frac{\tau}{3}+\lambda\right)^3} \tag{4.120}$$

Proposition 4.7.11. $\mathfrak{f}_1$ は $\mathcal{L}$ を周期とし, $\frac{\tau}{4}$ に 2 位の零, $-\frac{\tau}{4}$ に 2 位の極を持つ楕円関数であり, さらに次が成立する*:*

$$\mathfrak{f}_1(0) = \mathfrak{f}_1\left(\frac{\tau}{2}\right) = 1, \qquad \mathfrak{f}_1\left(\frac{1}{2}\right) = \mathfrak{f}_1\left(\frac{1+\tau}{2}\right) = -1, \qquad \mathfrak{f}_1 \cdot \mathfrak{f}_1^{\vee} \equiv 1 \tag{4.121}$$

Proof. (4.118) 式や, σ が奇関数であることに注意すると,

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}_1(\lambda+1) = \frac{\sigma\left(\frac{\tau}{4}-\lambda-1\right)^2}{\sigma\left(\frac{\tau}{4}+\lambda+1\right)^2} &= \frac{\left(-\sigma\left(\frac{\tau}{4}-\lambda\right)e^{-\frac{2\pi i}{\tau}\left(\frac{\tau}{4}-\lambda-\frac{1}{2}\right)}\right)^2}{\left(-\sigma\left(\frac{\tau}{4}+\lambda\right)e^{\frac{2\pi i}{\tau}\left(\frac{\tau}{4}+\lambda+\frac{1}{2}\right)}\right)^2} \\ &= \frac{\sigma\left(\frac{\tau}{4}-\lambda\right)^2}{\sigma\left(\frac{\tau}{4}+\lambda\right)^2}e^{2\pi i} = \mathfrak{f}_1(\lambda) \end{aligned}$$

などから, $\mathfrak{f}_1$ が $\mathcal{L}$ を周期とする楕円関数であることがわかる. σ は原点に 1 位の零を持っていたことから, $\frac{\tau}{4}$ に 2 位の零, $-\frac{\tau}{4}$ に 2 位の極を持つことがわかる. (4.121) の各値も, 同様の計算から導くことが出来る. □

Proposition 4.7.12. $\mathfrak{f}_2$ は $\mathcal{L}$ を周期とし, $\frac{\tau}{3}$ に 3 位の零, $-\frac{\tau}{3}$ に 3 位の極を持つ楕円関数であり, さらに次が成立する*:*

$$\mathfrak{f}_2(0) = 1, \qquad \mathfrak{f}_2\left(\frac{1}{2}\right) = \mathfrak{f}_2\left(\frac{\tau}{2}\right) = \mathfrak{f}_2\left(\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}\right) = -1, \qquad \mathfrak{f}_2 \cdot \mathfrak{f}_2^{\vee} \equiv 1 \tag{4.122}$$

証明は Proposition 4.7.11. と全く同様である.

4.8 ふたつの Harmonic map をつなぐ例

前節では, EH map およびその微分を一般化した対象を定義するための条件を提示し, 自明なバンドル上での例を示した. この節では長方形トーラス上の自明でないバンドル上での現象を考察する. 前節の例は本質的に新しい事柄を含んでいなかったが, この節の例は興味深い新しい性質を持っており, それは「二つの異なる Reality をもつ loop をつなぐ」と形容されるものである.

まず 4.6 節の記号に合わせ,

$$J_{(p,q)} = \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix} \tag{4.123}$$

とおく. また, (p,q) に応じた Reality condition をもつ loop $\gamma \in \Lambda_{\Gamma,\mathbb{R}(p,q)}G$ をひとつ固定する. 以下では, この γ によって定まる実構造つきの主 G 束 (P, σ_P, φ_P) のみを対象として話を進める. 具体的には

$$\begin{aligned} P &= \mathrm{I}_0 \times G \bigcup_{\gamma} \mathrm{I}_1 \times G && \text{ただし} \\ & && \mathrm{I}_0 \times G \ni (\lambda, h_0) \sim (\lambda, h_1) \in \mathrm{I}_1 \times G \\ &= \mathrm{I}_0 \times G \bigsqcup \mathrm{I}_1 \times G \Big/ \sim && \iff h_0 = \gamma(\lambda) h_1 \quad \lambda \in \Gamma \end{aligned} \tag{4.124}$$

$$\sigma_P : \begin{cases} \mathrm{I}_0 \text{ 上}: \mathrm{I}_0 \times G \longrightarrow \mathrm{I}_0 \times G : (\lambda, h) \longmapsto \big(\sigma(\lambda), h^{*-1}\big) \\ \mathrm{I}_1 \text{ 上}: \mathrm{I}_1 \times G \longrightarrow \mathrm{I}_1 \times G : (\lambda, h) \longmapsto \big(\sigma(\lambda), J_{(p,q)} h^{*-1}\big) \end{cases} \tag{4.125}$$

$$\begin{array}{rccccc} \varphi_P : & G & \longrightarrow & \{\lambda_0\} \times G & \subset & \mathrm{I}_0 \times G \\ & g & \longmapsto & (\lambda_0, g) & & \end{array} \tag{4.126}$$

によって与えられている. 前節で指摘した通り, $\mathrm{Ad}(P)$ および $\mathrm{ad}(P)$ にもこれに対応した実構造が定まり, 例えば $\mathrm{ad}(P)$ 上は次のように具体的に書かれる:

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}(P) &= \mathrm{I}_0 \times \mathfrak{g} \bigcup_{\gamma} \mathrm{I}_1 \times \mathfrak{g} && \text{ただし} \\ & && \mathrm{I}_0 \times \mathfrak{g} \ni (\lambda, X_0) \sim (\lambda, X_1) \in \mathrm{I}_1 \times \mathfrak{g} \\ &= \mathrm{I}_0 \times \mathfrak{g} \bigsqcup \mathrm{I}_1 \times \mathfrak{g} \Big/ \sim && \iff X_0 = \gamma(\lambda)^{-1} X_1 \gamma(\lambda) \quad \lambda \in \Gamma \end{aligned} \tag{4.127}$$

$$\sigma_{\mathrm{ad}(P)} : \begin{cases} \mathrm{I}_0 \text{ 上}: \mathrm{I}_0 \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{I}_0 \times \mathfrak{g} : (\lambda, X) \longmapsto \big(\sigma(\lambda), X^{*-1}\big) \\ \mathrm{I}_1 \text{ 上}: \mathrm{I}_1 \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{I}_1 \times \mathfrak{g} : (\lambda, X) \longmapsto \big(\sigma(\lambda), -J_{(p,q)} X^* J_{(p,q)}\big) \end{cases} \tag{4.128}$$

$$\begin{array}{rccccc} \varphi_{\mathrm{ad}(P)} : & \mathfrak{g} & \longrightarrow & \{\lambda_0\} \times \mathfrak{g} & \subset & \mathrm{I}_0 \times \mathfrak{g} \\ & X & \longmapsto & (\lambda_0, X) & & \end{array} \tag{4.129}$$

今, involution

$$\begin{aligned} G \longrightarrow G :\ g &\longmapsto J_{(p,q)} \cdot g^{*-1} \cdot J_{(p,q)} \\ \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} : X &\longmapsto -J_{(p,q)} \cdot X^* \cdot J_{(p,q)} \end{aligned}$$

によって固定される部分群および部分 Lie 環を $G_{\mathbb{R}(p,q)}, \mathfrak{g}_{\mathbb{R}(p,q)}$ とかくことにしよう. 今までの表記では,

$$G_{\mathbb{R}} = G_{\mathbb{R}(n,0)}, \qquad \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{g}_{\mathbb{R}(n,0)}$$

である. また, 特に $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ の場合には $G_{\mathbb{R}(p,q)} = \mathrm{U}(p, q)$ などとなることに注意しておく. この表記の下, $\sigma_{\mathrm{ad}(P)}$ の固定点集合は,

$$\begin{aligned} &(T_{\mathbb{R}})_0 \times \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} && (= (I_0)_{\mathbb{R}} \times \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}) \\ &(T_{\mathbb{R}})_1 \times \mathfrak{g}_{\mathbb{R}(p,q)} && \big(= (I_1)_{\mathbb{R}} \times \mathfrak{g}_{\mathbb{R}(p,q)}\big) \end{aligned} \tag{4.130}$$

であり, 同様に $\sigma_{\mathrm{Ad}(P)}$ の固定点集合は,

$$\begin{aligned} &(T_{\mathbb{R}})_0 \times G_{\mathbb{R}} && (= (I_0)_{\mathbb{R}} \times G_{\mathbb{R}}) \\ &(T_{\mathbb{R}})_1 \times G_{\mathbb{R}(p,q)} && \big(= (I_1)_{\mathbb{R}} \times G_{\mathbb{R}(p,q)}\big) \end{aligned} \tag{4.131}$$

となる.

さて, 前節の [**条件**] をみたす α およびその積分 E が与えられたとしよう.

$$E : M \longrightarrow \Gamma^{Mero}_{\mathbb{R}}(\mathrm{Ad}(P))$$

であるが, 特に Reality condition から $\lambda \in \mathrm{T}_{\mathbb{R}}$ 上では, $E_\lambda(z) = E(z)(\lambda)$ の値は $\sigma_{\mathrm{Ad}(P)}$ の固定点集合に入る. すなわちこれまでの自明化の下,

$$\begin{aligned} E|_{(T_{\mathbb{R}})_0} &: M \longrightarrow \Lambda^1_{(T_{\mathbb{R}})_0} G_{\mathbb{R}} \\ E|_{(T_{\mathbb{R}})_1} &: M \longrightarrow \Lambda_{(T_{\mathbb{R}})_1} G_{\mathbb{R}(p,q)} \end{aligned} \tag{4.132}$$

となることがわかる. 従って, E は異なる二つの Reality をもつ loop をつないだものであると見なすことができる.

Remark 4.8.1. 前節でも述べた通り, 有理性に適当な条件をつけて, $T_{\mathbb{R}}$ 内の特定の点で Harmonic map あるいはそれに準じた性質を持つ写像が観察されるような現象が期待されるが, 今のところそれらしいものは分かっていない.

最後に, ここまでの議論に沿って実際に計算出来る例について述べる. バンドルのはりあわせを定める $\gamma \in \Lambda_{\Gamma, \mathbb{R}(p,q)} G$ としては, (4.90) の記号のもと $i_{(p,q)}(I)$ によって与えられるもの, すなわち

$$\gamma : \begin{cases} \Gamma_0 \longrightarrow I \\ \Gamma_0^* \longrightarrow J_{(p,q)} \end{cases} \tag{4.133}$$

として定まるものを考える. このとき, γ によって定まるベクトル束が

$$V_\gamma = \underbrace{L_{(1,1)} \oplus \cdots \oplus L_{(1,1)}}_{p\text{ 個}} \oplus \underbrace{L_{(1,-1)} \oplus \cdots \oplus L_{(1,-1)}}_{q\text{ 個}}. \tag{4.134}$$

の形であることは容易にわかる. $\alpha \in \Gamma^{Mero,1}_{\mathbb{R}}\big(\mathrm{ad}(P) \otimes \Omega^1(M)\big)$ は Remark 4.7.3. にあるように

$$\alpha = Adz + Bd\bar{z}, \qquad \begin{aligned} &A, B \in \Gamma^{Mero}\big(\mathrm{ad}(P) \otimes \Omega^0(M)\big) \\ &B = A^\vee, \quad A(\lambda_0) = 0 \end{aligned} \tag{4.135}$$

として与えられるので, A のみを定めれば α が定まる. このとき, $J_{(p,q)}$ に応じて

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \tag{4.136}$$

とブロック分けして A を表示することができる. ただし, A_{11}, A_{12} の各成分は T 上の有理型関数であるのに対し, A_{12}, A_{21} の各成分は $L_{(1,-1)}$ の有理切断である. あるいは, 適当な $L_{(1,-1)}$ の有理切断 $\mathfrak{q}$ を固定し,

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \mathfrak{q}A_{12} \\ \mathfrak{q}A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad A_{ij} : \text{行列値有理関数} \tag{4.137}$$

とかくこともできる. このように表示すれば, α が Flat であるという条件はかなり具体的に表示することができる. そのようにして得られた方程式の解を見つけることは一般に難しいが, 例えば $(p,q) = (1,1)$ のとき, 次のような例が存在する.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \qquad \text{ただし} \begin{cases} a : T \text{ 上の有理型関数で } a(\lambda_0) = 0, \\ b : L_{(1,-1)} \text{の有理切断で } b(\lambda_0) = 0 \end{cases} \tag{4.138}$$

実際このとき, $A_{\bar{z}}, B_z, [A,B]$ はいずれも 0 となり, $\alpha = Adz + Bd\bar{z}$ はたしかに Flat となる. α, β が $z \in M$ に対して正則に変化する場合でも今の議論は成立する.

今の例のように $[A,B] = 0$ が成立する場合, α の積分 $E : M \to \Gamma^{Mero,1}(\mathrm{Ad}(P))$ は具体的に計算でき,

$$E = \exp(zA + \bar{z}B) \tag{4.139}$$

となる. なお, ねじれたバンドルで考えているため, 上の表示は自明化のもとでしか意味をもたないが, 指数写像が Adjoint 作用と可換であることに注意すると, $\mathrm{ad}(P)$ と $\mathrm{Ad}(P)$ とで対応する自明化をとることで, 上の式で E を定義することが可能であることがわかる. 既に見ている通り,

$$E(\cdot)(\lambda) : M \longrightarrow G_{\mathbb{R}(n,0)} : z \longmapsto \exp(zA(\lambda) + \bar{z}B(\lambda)) \qquad \lambda \in (T_{\mathbb{R}})_0 \tag{4.140}$$
$$E(\cdot)(\lambda) : M \longrightarrow G_{\mathbb{R}(p,q)} : z \longmapsto \exp(zA(\lambda) + \bar{z}B(\lambda)) \qquad \lambda \in (T_{\mathbb{R}})_1 \tag{4.141}$$

となるが, (4.140) の形の写像は $M \to G_{\mathbb{R}}$ の Harmonic map の, 自明でない最も簡単な例になっている (c.f.[6]). 同様に, (4.141) の形の写像は, Harmonic map equation

$$\left(\phi^{-1}\phi_z\right)_{\bar{z}} + \left(\phi^{-1}\phi_{\bar{z}}\right)_z = 0$$

をみたす. そして, この方程式をみたす $\phi : M \to G_{\mathbb{R}(p,q)}$ は, $G_{\mathbb{R}}$ に対する通常の Harmonic map がそうであるのと同様に, M 上のエネルギー関数の臨界点としての性質を持っていることが確かめられる.

参考文献

[1] Atiyah,M.: *Vector Bundles over an Elliptic Curve*, Proc. London Math. Soc. 7, 414-452 (1957)

[2] Atiyah,M.: *K-theory and Realrity*, Quart. J. Math. Oxford (2) 17, 367-386 (1966)

[3] Atiyah,M., Hitchin,N., Singer,I.: *Self-duality in Four-dimensional Riemannian Geometry*, Proc. R. Soc. Lond. A.362, 425-461 (1978)

[4] Atiyah,M., Ward,R.: *Instantons and Algebraic Geometry*, Comm. Math. Phys. 55, 117-124 (1977)

[5] Crane,L.: *Actions of the Loop Group on the Self Dual Yang-Mills Equation*, Comm. Math. Phys. 110, 391-414 (1987)

[6] Guest,M.: *Harmonic Maps, Loop Groups, and Integrable Systems*, London Math. Soc. Student Texts 38, Cambridge Univ. Press, (1997)

[7] Hitchin,N.: *The Self-duality Equations on a Riemann Surface*, Proc. Lond. Math. Soc. (3)55, 59-126 (1987)

[8] 小林 昭七: 接続の微分幾何とゲージ理論, 裳華房 (1989)

[9] 小林 昭七: 複素幾何 *1・2*, 岩波講座 現代数学の基礎, 岩波書店 (1998)

[10] Mukai,M.,Ohnita,Y.: *Geometry of the Moduli Spaces of Harmonic Maps into Lie Groups via Gauge Theory over Riemann Surfaces*, Int. J. of Math. 12, No.3 339-371 (2001)

[11] Pressley,A.,Segal,G.: *Loop Groups*, Oxford Univ. Prss (1986)

[12] Uhrenbeck,K.: *Harmonic Maps into Lie Groups (Classical Solutions of the Chiral Model)*, J. Differential Geom. 30, 1-50 (1989)

[13] Uhrenbeck,K.: *On the connection between harmonic maps and the self-dual Yang-Mills and sine-Gordon equations*, J. of Geom. Phys. 8, 283-316 (1991)