

非可換 Anti-Self-Dual Yang-Mills 方程式の数理と可積分系

名古屋大学大学院多元数理科学研究科 浜中 真志

E-mail: hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

場の理論の非可換空間への拡張は、単なる一般化ではなく、物理としても数理物理としても非常に面白いものを含んでいる。特に、非可換空間上のゲージ場の理論は、背景フラックス中のゲージ場の理論と等価であり、量子ホール効果の分野などで古くから様々な応用がなされてきた。さらに非可換空間では特異点の解消が一般に起こり、新しい物理的対象が現れる。例えば、4次元ゲージ理論の Anti-Self-Dual Yang-Mills (ASDYM) 方程式の非可換化では、モジュライ空間 (解空間) の特異点解消が起こり、 $U(1)$ インスタントンという非可換特有の物理的配位がもたらされる。ここでは ADHM 構成法がうまく非可換化されることも要となっており、この意味で可積分性といった良い性質も保たれている。対応する D プレーンとの対応も明快で、多くの知見が与えられた。

この流れを受け、ゲージ理論には (直接) 属さない可積分方程式 (KdV 方程式など) の非可換化の研究も活発になった。特に [1] により、「これらの方程式の大半は、4次元非可換 ASDYM 方程式から次元還元などにより得られる」ことが明らかにされ、対応する物理系への応用の可能性が開かれた。KdV 方程式などもこの意味でゲージ理論に属し、非可換化の意味 (背景フラックスの導入という物理的意味) を持つのである。この次元還元に見られる方程式には $N=2$ 弦理論というものが関連し、ソリトン解の解析などを通じて、この理論への直接的応用が可能である。また、幾何学的背景や無限次元対称性の視点から、低次元非可換可積分方程式の統一的理解が深まると期待される。

私は、グラスゴー大学の Gilson 氏、Nimmo 氏と共同で、非可換 ASDYM 方程式 ($G=GL(2)$) に対する (2種類の involutive な) ベックルト変換 (解を解にうつす変換) を与え、それらを交互に組み合わせることで、線形方程式 (Laplace 方程式) の簡単な解から、非可換インスタントン解、非可換「非線形平面波」解といったさまざまな厳密解を具体的に構成した [2]。この議論では有限作用の条件は課しておらず、後者のように ADHM 構成法で構成できない解が多く含まれる。これらの D プレーン解釈も興味深い問題である。またこのベックルト変換が単なるゲージ変換ではないことも証明し、可換空間でも懸案だった問題を解決した。

また、これらの解の記述には、ある種の非可換行列式である quasi-determinant と呼ばれるものが重要な役割を果たす。この事実は、低次元の非可換可積分 (階層) 方程式と共通したものであり、低次元と高次元の深遠な関係を示唆しているとも考えられる [3]。また、この証明には quasi-determinant の恒等式をフルに用いるが、このことを「非可換ベックルト変換は quasi-determinant の恒等式そのものである」と言い表すこともできる。これは可換空間での (低次元) 可積分系でよく知られた事実「ベックルト変換は determinant の恒等式そのものである」の自然な拡張となっており、quasi-determinant を用いた可積分系の新しい定式化の可能性をもほめかしている。

さらに、このベックルト変換の起源を非可換ツイスター理論の枠組みから理解することに成功し [2]、生成された解はいわゆる Atiyah-Ward ansatz 解と呼ばれるクラスの解の非可換版であることを明らかにした。ベックルト変換と解の一般化も行った。すべての解を生成するベックルト変換が見出せれば、解空間の構造や対称性が具体的に記述され、低次元可積分系の対称性による系統的分類や (有限作用条件を除いた) ASDYM 場バックグラウンドでの経路積分 (無限次元の積分) の実行が (原理的には) 可能になる。

References

- [1] M. Hamanaka, “Noncommutative Ward’s Conjecture and Integrable Systems,” Nuclear Physics B **741** (2006), 368 – 389 [hep-th/0601209].
- [2] C. R. Gilson, M. Hamanaka and J. J. C. Nimmo, “Bäcklund Transformations and the Atiyah-Ward ansatz for Noncommutative Anti-Self-Dual Yang-Mills Equations,” Proceedings of the Royal Society A **465** (2009), 2613 – 2632 [arXiv:0812.1222].
- [3] M. Hamanaka, “Noncommutative Solitons and Quasideterminants,” work in progress.