

修士論文

閉弦の場の理論の構造とその応用

渡辺英徳¹

06138

東京大学大学院理学系研究科物理学専攻

2002年2月

¹ eytoku@hep-th.phys.s.u-tokyo.ac.jp

更新履歴

- 2002年2月 誤りを含みつつも一応書き上げ。
- 2002年5月 参考文献の誤りを訂正。
- 2003年7月 関係各省庁からのコメントを踏まえて脚注を追加。
- 2004年4月 HIKKO の vertex のバグを訂正。

目次

第 1 章	Introduction	6
第 2 章	Batalin-Vilkovisky 形式	9
2.1	BRST 形式	9
2.1.1	Faddeev-Popov method	10
2.1.2	BRST 形式	11
2.2	Batalin-Vilkovisky 形式	13
2.2.1	Antifield	14
2.2.2	Batalin-Vilkovisky Equation	18
2.2.3	Antifield の消去	21
2.2.4	BRST 形式 との関係	25
2.2.5	Yang-Mills 理論の場合	30
2.2.6	Cubic String Field Theory の場合	32
第 3 章	String Field の構成	38
3.1	Conformal Field Theory	38
3.1.1	Primary Field, Ghost, BRST Operator	38
3.1.2	Hermite 共役、BPZ 共役と内積	42
3.1.3	Reflector	44
3.2	String Field	48
第 4 章	京風閉弦の場の理論	50
4.1	点粒子の場合	50
4.2	Free Case	52
4.3	HIKKO model	55
4.3.1	String Field	56
4.3.2	作用	58

4.3.3	BRST 対称性および Vertex	58
4.3.4	内積	66
4.3.5	作用の対称性	68
4.3.6	α の必要性	72
4.3.7	振幅の α 非依存性と困難	74
4.3.8	BV 方程式と closed HIKKO	75
4.4	Covariantized light-cone string field theory	76
4.4.1	Light-Cone String Field Theory	76
4.4.2	Open Covariantized Light-Cone String Field Theory	78
4.4.3	Closed Covariantized Light-Cone String Field Theory	81
第 5 章	Non-Polynomial 型閉弦の場の理論	83
5.1	Quadratic Differential	83
5.2	Restricted Polyhedra	85
5.3	4 体相互作用の場合	90
5.4	代数構造	93
5.5	Non-polynomial action	97
5.5.1	運動項	97
5.5.2	古典作用	100
5.5.3	ゲージ変換	101
5.5.4	量子論的作用と BV 方程式	104
5.5.5	BRST 対称性	107
5.5.6	代数構造の変形	108
5.6	Vertex の構成	111
5.6.1	準備	112
5.6.2	積	115
5.7	問題点とその解決	116
5.8	結論	116
付録 A	Convention および supermanifold 上の微分形式について	119
付録 B	Antifield 形式の幾何学的意味	124
B.1	Antifield	124
B.2	Antibracket	126

B.3 BV 方程式	128
付録 C Neumann 関数	129
付録 D (5.116) の証明	132

第1章 Introduction

現在、素粒子の間に働く4つの力のうち、強い力、弱い力、及び電磁気力はゲージ対称性を持つ量子場の理論として、標準模型にまとめられ、非常に精度良く記述されている。実際、最近のニュートリノの質量とミュオンの磁気能率異常に関する結果以外、標準模型の予言と実験とのずれはほとんど報告されていない。しかし、クォーク、レプトンの世代数やその質量、ゲージ場との結合定数など、多くの物理量は標準模型からは決定できず、予め外部から与えなくてはならない。

一方、我々にもっとも身近な力である重力は、時空の幾何学と同一視され、一般相対性理論により古典的に記述されている。しかし重力が働く対象である素粒子は量子論的に記述されているから、すべての力が同一の起源を持つと考えるならば、重力もまた量子的であると考えるのは自然なことである。それゆえ重力の量子論を建設することが4つの力の統一的記述のための大きな手掛りになるであろう。また、量子的な揺らぎを取り込むことで一般相対性理論に現れるさまざまな特異点を解消でき、新たな物理的帰結を引き出せるであろう。

しかし、通常の場合の理論が平らな時空を前提として作られているのに対し、一般相対性理論は時空そのものを扱っているため、必然的にその量子論は時空の揺らぎを記述することになり、非常に困難を伴う。例えば、一般相対性理論を安直に量子化した場合、くりこみ不可能な理論になる。そのため、作用に無限個の相殺項が必要となり、高エネルギー領域での予言能力を失ってしまう。

こうした状況を踏まえて、現在、重力の量子論の候補と目されているのが弦理論である。弦理論は物理的現象を Planck 長程度の長さの弦の振動に還元するもので、その低エネルギー極限として標準模型を捉えようという試みである。弦理論は重力を自動的に含んでいることが知られていて、4つの力を統一的に記述するのではないかと期待されている。

弦理論は、登場以来、その包含する物理的帰結が調べられてきたが、それは長らく弦の位置座標や運動量を量子化した、いわゆる第一量子化に基づいた、摂動的でかつ on-shell なものに限られてきた。近年、D-brane が発見され、理論の非摂動的な側面の探求が活発になってきた。また、いわゆる AdS/CFT 対応が発見され、古典的な超重重力理論と超対称 Yang-Mills 理論の間の興味深い対応が明らかになりつつある。しかし、こうした解析に用いられる設定

は予め一定の枚数の D-brane を用意する、というもので、真に非摂動的な領域を調べているとは言い難い。

そこで、通常の場合の理論のように弦の空間的配位に対応した場 (string field) を用いた、第二量子化された理論、弦の場の理論 (string field theory : SFT) による非摂動的な弦理論の定式化が望まれる。SFT により、摂動的な領域で明らかにされた対称性や、時空のコンパクト化などの議論が可能になるのではないかと期待されている。

弦には開弦と閉弦の 2 種類があることに対応して、SFT にも開弦の場合と閉弦の場合がある。SFT の歴史は古く、1970 年代中ごろの開弦の light-cone gauge での記述にまでさかのぼることができる。その後、1980 年代中ごろになって Siegel によって、それまで独立に発見されていた BRST charge を用いて自由な弦の場の理論が構成された。これに続いて、HIKKO 及び Witten が独立に covariant な SFT を提出した。HIKKO には開弦のものと閉弦のもの 2 種、Witten によるものは開弦の 1 種類がある。その後、HIKKO に用いられていた、string length " α " による発散の困難を解決した、covariantized light-cone SFT や、Witten の中点相互作用を閉弦の場合に拡張した non-polynomial SFT が提出されたが、その構造が複雑であるためにそれほど真剣に受け止められてこなかった。

しかし、D-brane の発見と、その不安定な配位におけるタキオンの凝縮の研究に、中点相互作用型の開弦の場の理論が適用されるに及び、それをテストケースとして弦の場の理論そのものに関する理解が深まり、タキオンが凝縮した後の真の真空に基づく vacuum SFT などへと広がりを見せている。

このように開弦の場の理論は見直されてきているが、閉弦の場の理論については未だほとんど手付かずのままである。しかし、重力の量子化を成し遂げ、弦理論の意味するところを汲み尽くすにはやはり閉弦の場の理論は避けて通ることができない。

本論文の基本的姿勢は、D-brane による第二革命が落ち着きを見せはじめ、closed tachyon の凝縮についての研究がなされるようになってきた今、これまでに作られた閉弦の場の理論を今一度検討することで、弦理論の定式化への有益な示唆を得たい、というものである。

以下で本論文の構成を述べる。

第二章では、Batalin-Vilkovisky 形式による、非常に一般的な作用の構成法、及びゲージ固定の手法を解説する。例として Yang-Mills 理論と中点相互作用型の SFT を扱う。

第三章では、弦の第一量子化と BRST charge、string field について解説する。

第四章では、HIKKO の閉弦の場の理論を解説する。ただし、大雑把に言って閉弦の理論は開弦の理論を二つ合わせたものであるから、閉弦の場合に示そうとするとあまりに煩雑になる事柄については、開弦の場合で代用した。また、HIKKO を改良した covariantized light-cone SFT にも簡単に触れる。

第五章では、中点相互作用型 SFT を閉弦に拡張した non-polynomial SFT について解説し、その作用が BV 方程式を満たすことを見る。

第六章では、それまでに解説した SFT を使った、或いはそれに関する議論を紹介する。

付録 A では、本文中で用いた convention、supermanifold 上での微分形式、antibracket に関する公式をまとめた。

付録 B では、BV 形式の幾何学的解釈を述べた。

付録 C では、SFT の vertex を書き下す際に必要な Neumann 関数についてまとめた。

第2章 Batalin-Vilkovisky 形式

経路積分を用いてゲージ対称性を持つ場の量子論を考える際、ゲージ対称性で移り変わることはない、本質的に異なる配位を過不足なく足しあげることが重要である。この足し上げはゲージ不変ではない項を Lagrangian に付け加え、ゲージ固定することにより実現することができる。その一つの方法として、Faddeev-Popov method と呼ばれるものがある。これは、ghost と呼ばれる、スカラー粒子ではあるが Grassmann 数として振舞う unphysical な粒子を導入することで実行でき、摂動の計算が見やすい形になっている。この Faddeev-Popov method はその後 BRST 対称性へとつながり、現在、ゲージ場を量子化する際の標準的な手法となっている。

Faddeev-Popov method やゲージ理論のくりこみ可能性の証明の発見の後、この方法によってゲージ固定された Lagrangian は、量子論的ゲージ対称性とも言うべき対称性を持つことがわかった。この対称性は現在 BRST 対称性と呼ばれている。BRST 対称性は Faddeev-Popov method を含む、より一般的なゲージ固定の処方を与える。また、この対称性を用いることで、ゲージ理論の繰り込み可能性やユニタリー性をより簡明に示すことができる。

ここではより一般的な枠組みである Batalin-Vilkovisky 形式 を解説する。この方法はゲージ対称性、BRST 対称性の nilpotency、対称性変換の群構造などを一挙に扱えるという点で closed string field theory の建設に非常に便利である。

この章では最初に通常のゲージ場の理論について Faddeev-Popov method をおさらいし、その後 BRST 対称性に基づく議論を簡潔にまとめる。後半で Batalin-Vilkovisky 形式 [1, 2] を解説し、いくつかの例を述べる。

2.1 BRST 形式

まず、通常のゲージ場の理論を例に Faddeev-Popov method と BRST 形式をおさらいする [3]。

2.1.1 Faddeev-Popov method

ゲージ群 G を対称性として持つゲージ場の理論を考える。

ゲージ群 G の Lie 代数を \mathcal{G} とし、その生成子を T^a ($a = 1, \dots, \dim G$) とする。生成子のあいだには

$$[T^a, T^b] = f^{abc} T^c$$

なる関係がある¹。

$\varphi(x)$ を物質場とし、 $A_\mu(x)$ をゲージ場とする。ここで、ゲージ場は \mathcal{G} の随伴表現に属し、

$$A_{\mu i}^j(x) = \sum_{a=1}^{\dim G} A_\mu^a(x) (T^a)_i^j$$

である。これらを用いて、ゲージ不変な Lagrangian density は

$$\mathcal{L}(A, \varphi) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \mathcal{L}_{\text{matter}}(\varphi, D_\mu \varphi)$$

と書き表すことができる。 $\mathcal{L}_{\text{matter}}$ は物質場の部分である。ここで、場の強さ F^a 及び共変微分 $D_\mu \varphi$ は

$$F_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (2.1)$$

$$D_\mu \varphi \equiv (\partial_\mu - ig T^a A_\mu^a) \varphi \quad (2.2)$$

である。この Lagrangian density は次の、 $\theta(x)$ をパラメーターとするゲージ変換

$$\delta \varphi_i(x) = ig \theta^a(x) (T^a)_i^j \varphi_j(x) \quad (2.3)$$

$$\delta A_\mu^a(x) = \partial_\mu \theta^a(x) + g f^{abc} A_\mu^b(x) \theta^c(x) = D_\mu \theta^a(x) \quad (2.4)$$

で不変である。

こうした対称性があるため、経路積分を計算する際にはゲージ変換で移りあわないようなゲージ場の配位を過不足なく足しあげることが必要となってくる。

このためには、Faddeev-Popov ghost と呼ばれる unphysical な real scalar の Grassmann 数 $c^a(x), \bar{c}^a(x)$ 及び、中西-Lautrup field $B^a(x)$ を導入して、

$$\tilde{\mathcal{L}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \mathcal{L}_{\text{matter}}(\varphi, D_\mu \varphi) + \mathcal{L}_{\text{GF}} + \mathcal{L}_{\text{FP}} \quad (2.5)$$

$$\mathcal{L}_{\text{GF}} = B^a \partial^\mu A_\mu^a + \frac{\alpha}{2} B^a B^a \quad (2.6)$$

$$\mathcal{L}_{\text{FP}} = i \bar{c}^a \partial^\mu D_\mu c^a \quad (2.7)$$

¹ ゲージ群の足の上下には意味がないので気にする必要はなく、すべて上付きとする。

とすればよい。ここに現れている定数 α はゲージパラメーターと呼ばれる任意の定数である。ここで、ghost number と呼ばれる数 N_{gh} を、

$$N_{\text{gh}}[\varphi, A, c, \bar{c}, B] = (0, 0, 1, -1, 0) \quad (2.8)$$

と割り当てる。

この操作は、重複しているゲージ変換の空間の体積で経路積分を割っていることに相当している。このようにしてゲージを固定する方法を Faddeev-Popov method と呼ぶ。なお、(2.5) はゲージ固定されているから、もはやゲージ変換 (2.3), (2.4) では不変でない。

2.1.2 BRST 形式

前節で述べたように、Faddeev-Popov method を用いてゲージ固定された Lagrangian にはもはやゲージ対称性は残っていない。しかし、ゲージ対称性の名残というべき対称性が残っていることが知られている。それはゲージ変換 (2.3), (2.4) において変換のパラメータ $\theta^a(x)$ の代わりに Grassmann 数を用いた、

λ を Grassmann 数として、ゲージ変換 (2.3), (2.4) においてパラメータ $\theta^a(x)$ の代わりに $\lambda c^a(x)$ とおいたもの、

$$\delta_{\text{B}}\varphi_i(x) = ig\lambda c^a(x)(T^a)_i^j\varphi_j(x) \quad (2.9)$$

$$\delta_{\text{B}}A_\mu^a(x) = \lambda\left(\partial_\mu c^a(x) + gf^{abc}A_\mu^b(x)c^c(x)\right) = \lambda D_\mu c^a(x) \quad (2.10)$$

を BRST 変換という。

ここで、 $\delta_{\text{B}} = \lambda\delta_{\text{B}}$ とすると、 δ_{B} は Grassmann odd な演算子になる。さらに ghost, NL field については

$$\delta_{\text{B}}c^a(x) = -\frac{1}{2}gf^{abc}c^b(x)c^c(x) \quad (2.11)$$

$$\delta_{\text{B}}\bar{c}^a(x) = iB^a(x) \quad (2.12)$$

$$\delta_{\text{B}}B^a(x) = 0 \quad (2.13)$$

とする。なお、 δ_{B} は ghost 数 N_{gh} をひとつ上げる。

上の BRST 変換を成分でなく行列で書けば

$$\delta_B \varphi(x) = igC(x)\varphi(x) \quad (2.14)$$

$$\delta_B A_\mu(x) = \partial_\mu C(x) + ig[C(x), A_\mu(x)] \quad (2.15)$$

$$\delta_B C(x) = igC^2(x) \quad (2.16)$$

$$\delta_B \bar{C}(x) = iB(x) \quad (2.17)$$

$$\delta_B B = 0 \quad (2.18)$$

となる。ただし、 $C(x) \equiv c^a(x)T_a$ などとした。この変換を用いると、BRST 変換の nilpotency、すなわち $\delta_B^2 = 0$ となっていることを示すことができる。

例えば、

$$\delta_B^2 \varphi(x) = ig\delta_B (C(x)\varphi(x)) \quad (2.19)$$

$$= ig \left(igC^2(x)\varphi(x) - C(x)\delta_B \varphi(x) \right) \quad (2.20)$$

$$= -g^2 \left(C^2(x)\varphi(x) - C^2(x)\varphi(x) \right) = 0 \quad (2.21)$$

である。ここで、 δ_B が Grassmann odd な演算子で、ghost field $C(x)$ とは反可換であることを用いた。このようにしてすべての場に対して $\delta_B^2 = 0$ を示すことができるから、 $\varphi, A, c, \bar{c}, B$ の任意の多項式の上で $\delta_B^2 = 0$ が成り立つことがわかる。以下では δ_B を δ_B と書くことにする。

さて、

$$-i\delta_B \left[\bar{c}^a \left(\partial^\mu A_\mu^a + \frac{1}{2}\alpha B^a \right) \right] = B^a \partial^\mu A_\mu^a + \frac{1}{2}\alpha B^a B^a + i\bar{c}^a \partial^\mu D_\mu c^a \quad (2.22)$$

であることに注意すれば、前節のゲージ固定した Lagrangian は

$$\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP} \quad (2.23)$$

$$= \mathcal{L} - i\delta_B \left[\bar{c}^a \left(\partial^\mu A_\mu^a + \frac{1}{2}\alpha B^a \right) \right] \quad (2.24)$$

と書くことができる。この $\tilde{\mathcal{L}}$ の BRST 変換を考える。まず、 \mathcal{L} の中には ghost field は含まれず、ゲージ不変であって、BRST 変換は特殊なゲージ変換とみなすことができるので、 \mathcal{L} は BRST 変換で不変、つまり $\delta_B \mathcal{L} = 0$ である。さらに、第二項は、BRST 変換の nilpotency により BRST 変換で不変であることがわかる。つまり、

$$\delta_B \tilde{\mathcal{L}} = \delta_B \mathcal{L} - i\delta_B^2 \left[\bar{c}^a \left(\partial^\mu A_\mu^a + \frac{1}{2}\alpha B^a \right) \right] = 0 \quad (2.25)$$

となり、 $\tilde{\mathcal{L}}$ はゲージ固定されてはいるが、その名残として BRST 変換により不変であることがわかる。

Faddeev-Popov method によりゲージ固定された Lagrangian が BRST 変換で不変であることを示したが、実際には一歩進んで、(2.22) に限らない適当な ghost 数 -2 の関数 F を選んで

$$\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} - i\delta_B(\bar{c}^a F^a)$$

とすることでゲージ固定された Lagrangian $\tilde{\mathcal{L}}$ を得られることが知られている。

さて、BRST 変換に対応する current は Noether の定理により

$$j_\mu^{\text{BRST}} = B^a D_\mu c^a - \partial_\mu B^a c^a + \frac{i}{2} g f^{abc} \partial_\mu \bar{c}^a c^b c^c - \partial^\nu (F_{\mu\nu}^a c^a) \quad (2.26)$$

となる。この式を見ると、 $N_{\text{gh}}[j_\mu^{\text{BRST}}] = 1$ であることがわかる。この current に対応して保存する charge

$$Q_B = \int d^3x j_0^{\text{BRST}} \quad (2.27)$$

が存在し、この charge が BRST 変換を引き起こす。すなわち、場 ϕ に対して

$$\delta_B \phi = [iQ_B, \phi] \quad (2.28)$$

である。 δ_B の nilpotency に対応して、 $Q_B^2 = 0$ であることがわかる²。

このとき、physical な Hilbert space $\mathcal{H}_{\text{phys}}$ は

$$\mathcal{H}_{\text{phys}} = \{|\rangle \mid Q_B |\rangle = 0\} \quad (2.29)$$

として定義される。

このゲージ固定の部分は、

$$\mathcal{L}_{\text{GF+FP}} = -i\delta_B(\bar{c}^a F^a) = [Q_B, \bar{c}^a F^a] \quad (2.30)$$

となることに注意すると、これは $\mathcal{H}_{\text{phys}}$ に作用したとき 0 になることがわかる。

2.2 Batalin-Vilkovisky 形式

前節で現在標準的に用いられているゲージ対称性を持つ理論のゲージ固定の方法について解説した。上で見たように、BRST 形式は非常に見通しのよいゲージ固定の処方を与える。この節では BRST 形式を含む、さらに一般的な手法である Batalin-Vilkovisky (BV) 形式 [1, 2] を解説する。

² 一般には on-shell な量を計算したときに ghost が出なければいいため、BRST charge Q_B の nilpotency は on-shell でのみ満たされればよい。実際、後に定義する BRST 変換は一般には nilpotent ではない。

1970年代後半、BRST 対称性の発見とほぼ同時期に、Fradkin, Vilkovisky, Batalin および Fradkina により、Hamiltonian と正準交換関係に基づいた、一般的なゲージ理論の量子化の議論がなされていた [4, 5, 6]。その後、1980年代に入ってこの方法を作用、つまり Lagrangian に適用する方法が Batalin 及び Vilkovisky によって提唱された [1, 2]。この二つの手法は、摂動論の範囲で互いに等価であることが知られている [7]。この BV 形式はその後、reducible なゲージ群を持つゲージ理論の量子化や、超重力理論に用いられる一方、幾何学的な意味付けを与えられ [8, 9, 10]、closed string field theory の定式化にも用いられている。最近では変形量子化の議論にも用いられている [11]。また、BV 形式 と同等の手法は、Batalin と Vilkovisky に先行して Zinn-Justin によりくりこみの議論に用いられていたようである [12]。

この節では、Batalin と Vilkovisky の議論よりも一般的な座標系を用いる [9]。BV 形式に関する解説としては [3, 13, 14] がある。

2.2.1 Antifield

BV 形式は、大雑把に言うと、通常の field のそれぞれに antifield と呼ばれる変数を導入し、拡張した空間で議論をした後、その空間を半分の次元の空間に制限する、というものである。

考える理論の中に含まれる場の値の張る空間を n 次元とする³。このとき、 (n, n) 次元の supermanifold \mathcal{M} を考える。さらに、添え字 I は $1, \dots, 2n$ の値をとるものとする。

さて、まず $\mathbb{R}^{(n,n)}$ を考える。座標を $(x^1, \dots, x^n, \xi_1, \dots, \xi_n)$ とする。ただしここで $|x^i| = 0$, $|\xi_i| = 1$ とする⁴。このとき、Grassmann odd で nondegenerate な 2-form

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge d\xi_i \quad (2.31)$$

が定義できる。

一般の \mathcal{M} は $\mathbb{R}^{(n,n)}$ を貼り付けて作ることができることに注意すれば、 \mathcal{M} の上にも Grassmann odd で nondegenerate な symplectic 2-form が定義できることがわかる⁵。実際、これは Darboux の定理⁶によっても保証されている。symplectic supermanifold \mathcal{M} 上のベクトル場などの議論は通常の symplectic manifold の場合とほとんど同様にできるが、symplectic form が Grassmann odd であることなどから、多少異なる点が生じる。しかし、本論文では

³ もっとも、これは #場の種類 $\times V \times$ その他の自由度 $= \infty$ ($V =$ volume of space-time) で、一般に発散するが、ここでは形式的に n とおく。

⁴ notation については 付録 A を参照。

⁵ 正確には、張り合わせの際に後で述べる antibracket を保存するような写像を用いなければならない。そのようにして作られた多様体を、P-manifold と呼ぶ。

⁶ 例えば [15] p.10 を参照せよ。

ここには立ち入らないことにする。なお、[9]の定理3より、一般の (n, n) 次元 P-manifold \mathcal{M} に対して、その Grassmann even な部分 $m(\mathcal{M})$ を \mathcal{N} と書くと、 $\mathcal{M} \simeq T^*\mathcal{N}$ が成り立つ。

そこで、この $\mathbb{R}^{(n,n)}$ を張り合わせて作った symplectic supermanifold \mathcal{M} を考える。 \mathcal{M} の座標を $\{z^I\}$ と書くことにする。このとき、Grassmann odd な symplectic 2-form は、逆行列を持つ行列 ω_{IJ} を用いて、

$$\omega = -dz^I \wedge \omega_{IJ} dz^J = \omega_{JI} dz^I \wedge dz^J \quad (2.32)$$

と書くことができる。ここで、定義により $|\omega| = 1$ である。今、 $|z^I| \equiv I$ と書き、 $|dz^I| = |z^I| = I$ とする notation をとると、 $|\omega_{IJ}| = 1 + I + J$ となることなどを用いた。詳しくは付録 A を参照せよ。Darboux の定理によると、適当な座標変換により、 $\omega_{IJ} = \text{constant}$ とできるから、

$$d\omega = 0 \quad (2.33)$$

が成り立つ。また、 ω は Grassmann odd であるから、

$$\omega \wedge \omega = 0 \quad (2.34)$$

である。これは通常の symplectic manifold では ω^n が体積要素となるのに対して異なる点である。ここで、 \mathcal{M} 上の密度関数 $\rho(z)$ を用いて、 \mathcal{M} 上の体積要素を

$$d\mu(z) = \rho(z) \prod dz^I \quad (2.35)$$

と定義する。この関数 ρ は任意ではなく、すぐ後で定義する微分作用素 Δ_ρ の nilpotency を満たすようなものでなくてはならない。体積要素が決まると vector の divergence を決めることができ、それは

$$\text{div}_\rho V = \frac{1}{\rho} (-1)^I \partial_I (\rho V^I) \quad (2.36)$$

となる。また、 ω^{IJ} を ω_{IJ} の逆行列として、 \mathcal{M} 上の関数 A に対応した Hamiltonian vector field V_A , antibracket 及び Δ_ρ を、

$$V_A \equiv \overleftarrow{\partial}_I \omega^{IJ} \partial_J A \quad (2.37)$$

$$\{A, B\} \equiv A \overleftarrow{\partial}_I \omega^{IJ}(z) \overrightarrow{\partial}_J B = \omega(V_A, V_B) = V_B(A) \quad (2.38)$$

$$\Delta_\rho A \equiv \frac{1}{2} \text{div} V_A \quad (2.39)$$

$$= \frac{1}{2\rho} (-1)^I \partial_I (\rho \omega^{IJ} \partial_J A) \quad (2.40)$$

$$= \frac{1}{2} (-1)^I \partial_I (\omega^{IJ} \partial_J A) + \frac{1}{2} (-1)^I (\partial_I \ln \rho) \omega^{IJ} \partial_J A \quad (2.41)$$

と定義する。ここで、

$$\vec{\partial}_I = \partial_I = \frac{\partial_L}{\partial z^I}, \quad \overleftarrow{\partial}_I = \frac{\partial_R}{\partial z^I} \quad (2.42)$$

とした。ここで、 $|\{A, B\}| = 1 + |A| + |B|$, $|\Delta| = 1$ であることを注意しておく。また、 $d\omega = 0$ を用いると、antibracket に対して Jacobi identity

$$(-1)^{(A+1)(C+1)}\{\{A, B\}, C\} + \text{cyclic permutations} = 0 \quad (2.43)$$

が成り立つことがわかる。特に、二つの異なる密度関数 $\tilde{\rho}, \rho$ に対して、

$$\Delta_{\tilde{\rho}}A = \Delta_{\rho}A + \frac{1}{2} \left\{ \ln \frac{\tilde{\rho}}{\rho}, A \right\} \quad (2.44)$$

が成り立つことが容易にわかる。さらに、antibracket は、 Δ_{ρ} を用いて、

$$(-1)^A\{A, B\} = \Delta_{\rho}(AB) - \Delta_{\rho}AB - (-1)^AA\Delta_{\rho}B \quad (2.45)$$

と表せることが直接計算によりわかる。(2.40) より、 Δ_{ρ} は一般に二階微分であるから、derivation ではない。つまり、Leibniz rule を満たさない。(2.45) を見ると、antibracket は Δ_{ρ} の derivation からのずれを測っている量だと解釈できる。

ところで、 ρ の選び方によっては Δ_{ρ} は derivation に類似の性質を持つことがわかる:

$$\Delta_{\rho}\{A, B\} = \{\Delta_{\rho}A, B\} + (-1)^{A+1}\{A, \Delta_{\rho}B\}. \quad (2.46)$$

実際、 $\rho = 1$ に対しては容易に (2.46) が成り立つことがわかる。その上で、(2.44) 及び Jacobi identity を用いると、一般の ρ に対して (2.46) が成り立つことが示せる。一方、(2.45) を使うと、

$$\Delta_{\rho}\{A, B\} = \{\Delta_{\rho}A, B\} + (-1)^{A+1}\{A, \Delta_{\rho}B\} + (-1)^A \left[\Delta_{\rho}^2(AB) - (\Delta_{\rho}^2A)B - A(\Delta_{\rho}^2B) \right] \quad (2.47)$$

を得る。これと (2.46) を比べると、

$$\Delta_{\rho}^2(AB) = (\Delta_{\rho}^2A)B + A(\Delta_{\rho}^2B) \quad (2.48)$$

であることがわかる。Jacobi identity を導くためには $d\omega = 0$ を用いたので、この式は $d\omega = 0$ と等価である。つまり、 Δ_{ρ} は二階微分であるから直感的には Δ_{ρ}^2 は四階微分であるように思えるが、 $d\omega = 0$ である場合は一階の微分となり、Leibniz rule を満たす、ということである。つまり、 Δ_{ρ} の形に注意すれば、3つの微分はすべて $\rho\omega$ にかかり、

$$\Delta_{\rho}^2 = \frac{1}{2} \left[\Delta_{\rho} \frac{1}{\rho} (-1)^I \partial_I (\rho\omega^{IJ}) \right] \partial_J \quad (2.49)$$

となっていることがわかる。

任意の密度関数に対して、通常の Poisson bracket と同様、

$$\{A, B\} = -(-1)^{(A+1)(B+1)}\{B, A\} \quad (2.50)$$

$$\{A, BC\} = \{A, B\}C + (-1)^{(A+1)B}B\{A, C\} \quad (2.51)$$

$$\{AB, C\} = A\{B, C\} + (-1)^{B(C+1)}\{A, C\}B \quad (2.52)$$

が成り立つ。いずれも直接計算で示すことができる。例として (2.51) を示す。各項を計算すると、

$$\begin{aligned} \{A, BC\} &= A\overleftarrow{\partial}_I\omega^{IJ}\overrightarrow{\partial}_J(BC) \\ &= A\overleftarrow{\partial}_I\omega^{IJ}\overrightarrow{\partial}_JBC + (-1)^{BJ}A\overleftarrow{\partial}_I\omega^{IJ}B\overrightarrow{\partial}_JC \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\{A, B\}C = A\overleftarrow{\partial}_I\omega^{IJ}\left(\overrightarrow{\partial}_JB\right)C \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} (-1)^{(A+1)B}B\{A, C\} &= (-1)^{(A+1)B}BA\overleftarrow{\partial}_I\omega^{IJ}\overrightarrow{\partial}_JC \\ &= (-1)^{(A+1)B+B(A+I+I+J+1)}A\overleftarrow{\partial}_I\omega^{IJ}B\overrightarrow{\partial}_JC \\ &= (-1)^{BJ}A\overleftarrow{\partial}_I\omega^{IJ}B\overrightarrow{\partial}_JC \end{aligned} \quad (2.55)$$

であるから、(2.51) が成り立つ。ここで、 $|\omega| = 1$, $|z^I| = I$, $|\partial_I| = I$, $|dz^I| = I$ であることより、 $|\omega^{IJ}| = 1 + I + J$ となることを用いた。

antibracket の性質として注目すべきことは、(2.50) より、Grassmann odd な任意の関数 F に対して

$$\{F, F\} = -\{F, F\} = 0 \quad (2.56)$$

が従うことである。また、Jacobi identity より、任意の関数 G に対して、

$$\{G, \{G, G\}\} = 0 \quad (2.57)$$

$$\{\{S, S\}, G\} = -2\{\{G, S\}, S\} \quad (2.58)$$

が成り立つこともわかる。ただし、 S は Grassmann even な量である。

また、二つのベクトルの Lie bracket を

$$[V, W] = VW - (-1)^{VW}WV = \overleftarrow{\partial}_I\left(V^I\overleftarrow{\partial}_JW^J - (-1)^{VW}W^I\overleftarrow{\partial}_JV^J\right) \quad (2.59)$$

と定義する。すると、 $d\omega = 0$ を用いて

$$[V_A, V_B] = V_{\{A, B\}} \quad (2.60)$$

が成り立つことがわかる。これは Hamiltonian vector field により引き起こされる対称性変換が閉じていることを示している。

ここまでは一般の座標系を用いて antibracket の性質を議論してきたが、実際の計算においては Darboux 座標系を用いるのが見通しがよい。Darboux 座標系とは、Darboux の定理が保証する座標系で、Grassmann odd symplectic 2-form の関数係数が定数になっているものである。具体的には、 \mathcal{M} の座標を (ϕ^i, ϕ_i^*) ($i = 1, \dots, n$) について、

$$\omega = -2 \sum_{i=1}^n d\phi^i \wedge \phi_i^* \quad (2.61)$$

をとる。ただし、 ϕ^i が Grassmann even だとは限らず、 $N_{\text{gh}}[\phi^i] + N_{\text{gh}}[\phi_i^*] = -1$ である。このとき、さらに密度関数を、 $\rho(\phi, \phi^*) = 1$ ととれば、

$$\omega_{ij} = \left(\begin{array}{c|ccc} & & -1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & -1 \\ \hline 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & & & 1 \end{array} \right), \quad \omega^{ij} = \left(\begin{array}{c|ccc} & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \\ \hline -1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & & & -1 \end{array} \right) \quad (2.62)$$

であって、

$$\{A, B\} = \frac{\partial_R A}{\partial \phi^i} \frac{\partial_L B}{\partial \phi_i^*} - \frac{\partial_R A}{\partial \phi_i^*} \frac{\partial_L B}{\partial \phi^i} \quad (2.63)$$

$$\Delta_{\text{Darboux}} = (-1)^i \frac{\partial_L^2}{\partial \phi^i \partial \phi_i^*} \quad (2.64)$$

と簡単な形になる。このとき、 ϕ^i を field、 ϕ_i^* を antifield と呼ぶ。

以下では Darboux 座標を用いることとし、密度関数 ρ は 1 ととることとする。また、 $\Delta_{\rho=1}$ を単に Δ と書くことにする。特に、 S 同士の antibracket は

$$\{S, S\} = 2 \frac{\partial_R S}{\partial \phi^i} \frac{\partial_L S}{\partial \phi_i^*} \quad (2.65)$$

である。

2.2.2 Batalin-Vilkovisky Equation

前節で antibracket の基本的な性質を議論した。この節では BV 方程式 (master equation) を解説し、その解の持つ対称性を調べる。

BV 方程式は、field、 antifield を引数として持つ作用 $S(\phi, \phi^*)$ が満たすべき方程式であって、その具体的な形は

$$\Delta \exp \left(\frac{S}{\hbar} \right) = 0 \quad (2.66)$$

である⁷。この方程式の幾何学的意味に関しては 付録 B を参照せよ。

この方程式をもう少し簡単な形に変形しよう。

まず、 S は Grassmann even な量であるから積は自由に交換でき、antibracket は 2 つの引数が同時に Grassmann even な場合のみ引数の入れ替えに際して余分な符号を出さないことに注意すると、(2.52) より、

$$\{S^n, S\} = nS^{n-1}\{S, S\} \quad (2.67)$$

が成り立つ。これは帰納法から容易に証明できる。すると、

$$\{S^{n-1}, S\} = \Delta S^n - \Delta S^{n-1}S - S^{n-1}\Delta S \quad (2.68)$$

$$= (n-1)S^{n-2}\{S, S\} \quad (2.69)$$

であるから、これを使うと、

$$\begin{aligned} \Delta S^n &= S\Delta S^{n-1} + S^{n-1}\Delta S + (n-1)S^{n-2}\{S, S\} \\ &= S^2\Delta S^{n-2} + 2S^{n-1}\Delta S + (n-1+n-2)S^{n-2}\{S, S\} \\ &= \dots \\ &= nS^{n-1}\Delta S + \frac{n(n-1)}{2}S^{n-2}\{S, S\} \end{aligned} \quad (2.70)$$

を得る。すると、BV 方程式 (2.66) は、

$$\begin{aligned} \Delta \exp \left(\frac{S}{\hbar} \right) &= \Delta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{S}{\hbar} \right)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\hbar^n} \frac{1}{n!} \left[nS^{n-1}\Delta S + \frac{n(n-1)}{2}S^{n-2}\{S, S\} \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\hbar^n} \left[\frac{1}{(n-1)!} S^{n-1}\Delta S + \frac{1}{2(n-2)!} S^{n-2}\{S, S\} \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\hbar^n} \frac{1}{(n-1)!} S^{n-1} \left[\Delta S - \frac{1}{2\hbar} \{S, S\} \right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.71)$$

⁷ 厳密には後で述べる方法で antifield を消去した S が作用であるがここでは簡単のため、この段階の S も作用と呼ぶことにする。

となる。よって (2.66) は

$$2\hbar\Delta S + \{S, S\} = 0 \quad (2.72)$$

と等価であることがわかる。これも (量子的) BV 方程式と呼ぶ。また、左辺の第一項を落としたものを 古典 BV 方程式と呼ぶ。これは偏微分方程式であるから解を求めるためには境界条件を設定する必要がある。そこで、境界条件として、antifield をすべて 0 にしたとき、通常的作用に一致する、というものをとることにする。特に、Darboux 座標で書くと、

$$(-1)^i \frac{\partial S}{\partial \phi_i^*} \frac{\partial S}{\partial \phi^i} + \hbar(-1)^i \frac{\partial^2 S}{\partial \phi^i \partial \phi_i^*} = 0 \quad (2.73)$$

である。 i について和をとっているので、 $(-1)^s$ は落とせない。

(2.72) の左辺第一項は \hbar がかかっているから、これは作用 S に対する量子論的な補正を表している。実際、後でこの項が 積分測度からの寄与であることを見る。すなわち、量子補正まで含めた作用はこの BV 方程式を満たさねばならず、例えばアノマリーに対する Wess-Zumino consistency condition を与える。この枠組みでは、いかなる局所的な関数 S をもってしても、BV 方程式の解となることができず、非局所的な関数にならざるを得ないとき、アノマリーが存在する、と理解することができる。この点で、BV 方程式は通常の場合の理論における Ward-Takahashi identity とほとんど同等であることが分かる。同時に適当な正則化を用いて通常ゲージ理論の古典作用を議論する際には、この項の影響を無視することができる。これを踏まえて、以下では自然単位系を用いる。

作用 S が BV 方程式 (2.72) の解になっている場合、

$$S + \delta_\varepsilon S \equiv S + \Delta\varepsilon + \{S, \varepsilon\} \quad (2.74)$$

も解になっていることが以下のようにして分かる。ただし、ここで $N_{\text{gh}}[\varepsilon] = -1$ である。

$M[S] = \Delta S + \frac{1}{2}\{S, S\}$ とおくと、Jacobi identity を用いて、

$$\begin{aligned} M[S + \delta_\varepsilon S] &= \Delta(S + \delta_\varepsilon S) + \frac{1}{2}\{S + \delta_\varepsilon S, S + \delta_\varepsilon S\} \\ &= \Delta S + \Delta\{S, \varepsilon\} + \frac{1}{2}\{S, S\} + \frac{1}{2}\{\delta_\varepsilon S, S\} + \frac{1}{2}\{S, \delta_\varepsilon S\} \\ &= M[S] + \{\Delta S, \varepsilon\} + \{S, \Delta\varepsilon\} + \frac{1}{2}\{\Delta\varepsilon + \{S, \varepsilon\}, S\} + \frac{1}{2}\{S, \Delta\varepsilon + \{S, \varepsilon\}\} \\ &= M[S] + \left\{ \Delta S + \frac{1}{2}\{S, S\}, \varepsilon \right\} \\ &= M[S] + \{M[S], \varepsilon\} = 0 \end{aligned} \quad (2.75)$$

であるから、 S が BV 方程式 (2.72) の解になっているとき、(2.74) もまた解になっていることが分かった。

ここでこの変換の意味を考えてみる。(2.74) を計算すると、

$$S + \delta_\varepsilon S = S + \frac{\partial_R S}{\partial \phi^i} \frac{\partial_L \varepsilon}{\partial \phi_i^*} - \frac{\partial_R S}{\partial \phi_i^*} \frac{\partial_L \varepsilon}{\partial \phi^i} + (-1)^i \frac{\partial_L^2 S}{\partial \phi^i \partial \phi_i^*} \quad (2.76)$$

$$= S \left(\phi + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \phi^*}, \phi^* - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \phi} \right) + (-1)^i \frac{\partial_L^2 S}{\partial \phi^i \partial \phi_i^*} \quad (2.77)$$

となる。第二項はすでに上で説明したように量子論的な寄与を表していることに注意すると、(2.74) は古典的には作用 $S(\phi, \phi^*)$ の中の field、antifield をずらす変換であるとわかる。そしてこれは後で見ると Lagrangian submanifold を選ぶ自由度と対応しているので、この変換は物理量の計算にきかない。それゆえ、ゲージ対称性とみなすことができる。経路積分を取る際にはこの対称性を固定する必要があり、それは Lagrangian submanifold を一つ選ぶということで実現できる。

上で導入した変換 δ_ε は閉じた変換群をなしている。実際、

$$\begin{aligned} \delta_{\varepsilon_1} \delta_{\varepsilon_2} S &= \delta_{\varepsilon_1} (\Delta \varepsilon_2 + \{S, \varepsilon_2\}) \\ &= \{\Delta \varepsilon_1 + \{S, \varepsilon_1\}, \varepsilon_2\} \\ &= \{\Delta \varepsilon_1, \varepsilon_2\} + \{\{S, \varepsilon_1\}, \varepsilon_2\} \end{aligned} \quad (2.78)$$

であるから、

$$\begin{aligned} [\delta_{\varepsilon_1}, \delta_{\varepsilon_2}] S &= \{\Delta \varepsilon_1, \varepsilon_2\} + \{\{S, \varepsilon_1\}, \varepsilon_2\} - \{\Delta \varepsilon_2, \varepsilon_1\} + \{\{S, \varepsilon_2\}, \varepsilon_1\} \\ &= \Delta \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} - \{\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}, S\} \\ &= \delta_{\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}} S \end{aligned} \quad (2.79)$$

を得る。すなわち、

$$[\delta_{\varepsilon_1}, \delta_{\varepsilon_2}] = \delta_{\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}} \quad (2.80)$$

である。

2.2.3 Antifield の消去

上で考えた作用 $S(\phi, \phi^*)$ には antifield ϕ^* が含まれている。この作用から物理的な量を計算する場合、antifield を何らかの方法で消去しなくてはならない。antifield 形式ではこの操作を、場の取りえる値を \mathcal{M} の Lagrangian submanifold に制限することで実行する。

作用 S が BV 方程式 (2.72) を満たすとする。このとき、演算子 A の期待値を

$$\langle A \rangle = \int_{\mathcal{L}} d\lambda A(z) e^S \quad (2.81)$$

で定める。ここで、 $\mathcal{L} (\subset \mathcal{M})$ は $(k, n - k)$ 次元の Lagrangian submanifold である。積分の測度 $d\lambda$ は、 \mathcal{M} 上の測度 $d\mu$ から

$$d\lambda(e_1, \dots, e_n) = d\mu(e_1, \dots, e_n, f^1, \dots, f^n)^{1/2} \quad (2.82)$$

で作る。 $(e_1, \dots, e_n, f^1, \dots, f^n)$ は $T_z \mathcal{M}$ の基底である。そのうち、 $\{e_i\}$ は $T_z \mathcal{L}$ の基底であって、 $\{f^i\}$ は $\omega(e_i, f^j) = \delta_i^j$ を満たすものである。

Remark 2.2.1 Lagrangian submanifold

\mathcal{L} が \mathcal{M} の Lagrangian submanifold であるとは、 $\forall z \in \mathcal{L}$ をとったとき、 $\forall v, \tilde{v} \in T_z \mathcal{L}$ に対して $\omega(v, \tilde{v}) = 0$ が成り立つ部分多様体である。

経路積分 (2.81) において \mathcal{L} を指定することが ゲージ固定条件を選ぶ操作に対応している。もちろん $\langle A \rangle$ は ゲージ固定 に依らないはずである。そこで、次に (2.81) が \mathcal{L} の選び方に依らないことを示そう。

次の定理が成り立つことが知られている。証明は原論文に譲るが、 Δ を外微分形式 d とみなし、通常の幾何学を考えれば自然である⁸。

Theorem 2.2.1 Schwarz[9] \mathcal{M} 上の関数 H が $\Delta H = 0$ を満たすとする。 $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1$ が closed Lagrangian submanifold で、その Grassmann even な部分 $m(\mathcal{L}_0), m(\mathcal{L}_1)$ が定める $H_k(m(\mathcal{M}), \mathbb{R})$ の元が同値、すなわち

$$[m(\mathcal{L}_0)] \equiv [m(\mathcal{L}_1)] \quad \text{in } H_k(m(\mathcal{M}), \mathbb{R}) \quad (2.83)$$

であるなら、

$$\int_{\mathcal{L}_0} H d\lambda_0 = \int_{\mathcal{L}_1} H d\lambda_1 \quad (2.84)$$

が成り立つ。

Theorem 2.2.2 Schwarz[9] \mathcal{M} 上の関数 H に対してある関数 K が存在して $H = \Delta K$ となるとき、 \mathcal{M} の任意の closed Lagrangian submanifold \mathcal{L} に対して

$$\int_{\mathcal{L}} H d\lambda = 0 \quad (2.85)$$

となる。

⁸ この類似については付録 B を参照せよ。

これは、(2.39) より、 $H = \Delta K = \frac{1}{2} \operatorname{div} V_K$ だから Stokes の定理より従う。

さて、Theorem 2.2.1 を経路積分 (2.81) に適用すると、

$$\Delta (Ae^S) = 0 \quad (2.86)$$

ならば、 \mathcal{L} には依らないことがわかる。これを (2.66) から (2.72) を導いたのと同じ議論で簡単化する。そのためには

$$\{A, S^n\} = nS^{n-1} \{A, S\} \quad (2.87)$$

であることを使えばよい。この式と (2.45) より、

$$\begin{aligned} (-1)^A \{A, e^S\} &= \Delta (Ae^S) - \Delta Ae^S - (-1)^A \Delta e^S \\ &= \Delta (Ae^S) - \Delta Ae^S, \end{aligned} \quad (2.88)$$

$$\{A, e^S\} = e^S \{A, S\} \quad (2.89)$$

であるから、 $\Delta (Ae^S) = 0$ なら、

$$\Delta A + \{S, A\} = 0 \quad (2.90)$$

が成り立つことが分かる。

Theorem 2.2.2 を用いた議論もできる。 \mathcal{L} の変形が $z^I \rightarrow z^I + \{z^I, \varepsilon\}$ で生成されるとすると⁹、[16] の議論より、

$$\begin{aligned} \langle A \rangle_{\mathcal{L}+\delta\mathcal{L}} - \langle A \rangle_{\mathcal{L}} &= \int_{\mathcal{L}} d\lambda \left(\Delta \varepsilon Ae^S + \{Ae^S, \varepsilon\} \right) \\ &= \int_{\mathcal{L}} d\lambda \left(\Delta (\varepsilon Ae^S) + \varepsilon \Delta (Ae^S) \right) \\ &= \int_{\mathcal{L}} d\lambda \varepsilon \Delta (Ae^S) \end{aligned} \quad (2.91)$$

である。ここで、

$$\Delta (Ae^S) = (\Delta A + \{S, A\}) e^S + A \Delta e^S \quad (2.92)$$

であるから、(2.90) と (2.66) が満たされるなら

$$\langle A \rangle_{\mathcal{L}+\delta\mathcal{L}} = \langle A \rangle_{\mathcal{L}} \quad (2.93)$$

⁹ しかし私にはこの変換が $m(\mathcal{L})$ のホモロジー類を変えないかどうかは分からない。

が成り立つ。

次に Lagrangian submanifold を用いて antifield を消去する方法について述べる。まず、ghost number -1 を持つ、field ϕ の関数 $\Upsilon(\phi)$ を考える。このとき、antifield を、

$$\phi_i^* = \frac{\partial \Upsilon(\phi)}{\partial \phi^i} \quad (2.94)$$

として消去する。この Υ は gauge fermion と呼ばれる。

ここで、antifield を消去する際に (2.94) を用いることの正当性について述べておく。

いま、ゲージ固定された理論に antifield を導入すると考えれば、BV 方程式の解 $S(\phi, \phi^*)$ からゲージ固定された作用を得るには n 個の独立な拘束条件 $G_i = 0$ を導入すればよい。これらの拘束条件は n 次元の多様体 \mathcal{L} を定める。

また、拘束条件は新しい拘束条件を出さないためには antibracket の意味で閉じていなくてはならず、

$$\{G_i, G_j\} = U_{ij}^k G_k \quad (2.95)$$

である。特に \mathcal{L} 上では $\{G_i, G_j\} = 0$ である。この時、 \mathcal{L} が Lagrangian submanifold になっていることが次のようにしてわかる。すなわち、 V_i を G_i に対応する Hamiltonian vector とすると、 \mathcal{L} 上で

$$\omega(V_i, V_j) = \{G_i, G_j\} = 0 \quad (2.96)$$

となり、 \mathcal{L} の接ベクトルは直交することが分かるからである。

次に作用を \mathcal{L} に制限することで antifield を消去することを考える。antifield を消去するよりに選んだ拘束条件 G_i は \mathcal{L} の周りで

$$G_i = \Lambda_i^j(\phi, \phi^*) (\phi_j^* - f_j(\phi)) \quad (2.97)$$

と書ける。ただし、 $|f_j(\phi)| = j + 1$ である。つまり、 \mathcal{L} は $\phi_i^* = f_i(\phi)$ で定められるとする。このとき、(2.51)、(2.52) より、

$$\begin{aligned} 0 = \{G_i, G_j\} &= \left\{ \Lambda_i^k(\phi_k^* - f_k), \Lambda_j^l(\phi_l^* - f_l) \right\} \\ &= \Lambda_i^k \left\{ \phi_k^* - f_k, \Lambda_j^l(\phi_l^* - f_l) \right\} + (\text{terms which are 0 on } \mathcal{L}) \\ &= (-1)^{k(|G_j|-l-1)} \Lambda_i^k \Lambda_j^l \{ \phi_k^* - f_k, \phi_l^* - f_l \} + (\text{terms which are 0 on } \mathcal{L}) \end{aligned} \quad (2.98)$$

となる。つまり、

$$\{ \phi_k^* - f_k, \phi_l^* - f_l \} = 0 \quad (2.99)$$

ならよい。これより、 $\frac{\partial_L \phi_k^*}{\partial \phi_m^*} = \delta^m_k$ の Grassmann parity などに注意すると、

$$\frac{\partial f_l}{\partial \phi^k} - \frac{\partial f_k}{\partial \phi^l} = 0 \quad (2.100)$$

を得る。この条件は

$$f_l = \frac{\partial \Upsilon(\phi)}{\partial \phi^l} \quad (2.101)$$

ならば自動的に満たされ、well defined な拘束を与える。それゆえ、antifield を消去する際に gauge fermion の微分とすればよい。

以上の議論から、antifield の消去が ゲージ固定条件 に対応していて、これは Lagrangian submanifold を選ぶことに相当することが分かる。

これまでの議論をまとめると、BV 形式 は以下のステップで構成される。

1. 考えたい理論に含まれる field ϕ^i を列挙する。ゲージ理論の場合はゲージ固定した時の field である。つまり、ghost も含まれる。
2. それぞれの場に対応した antifield ϕ_i^* を導入する。ただし、 $N_{\text{gh}}[\phi^i] + N_{\text{gh}}[\phi_i^*] = -1$ とする。
3. BV 方程式を解き、作用 $S(\phi, \phi^*)$ を求める。
4. 適当な gauge fermion $\Upsilon(\phi)$ を選びゲージ固定条件を指定する。ただし、 $N_{\text{gh}}[\Upsilon] = -1$ である。
5. 求めた作用を Lagrangian submanifold に制限して antifield を消去し、field ϕ^i に対して経路積分をとる。

2.2.4 BRST 形式 との関係

この節では BV 方程式 (2.72) の解が持つ対称性を解説する。

関数 $A(\phi, \phi^*)$ に対する変換 δ_B を

$$\delta_B A \equiv \{A, S\} \quad (2.102)$$

と定義する。 δ_B は ghost number を一つ上げることに注意せよ。これを pre-BRST 変換と呼ぶ。重要な点は、この変換が nilpotent ではないことである。実際、

$$\delta_B^2 A = \delta_B \{A, S\} = \{\{A, S\}, S\} = -\frac{1}{2} \{\{S, S\}, A\} \quad (2.103)$$

となる。これは S が古典的 BV 方程式の解である場合には 0 となるが、量子的 BV 方程式に対しては 0 にならない。上で触れたように、ゲージ固定した上で on-shell で nilpotent ならよいので、これは何ら問題はない。

Remark 2.2.2 しかし、nilpotent な BRST 変換を定義することもできる。それは、

$$\delta_B A \equiv (-1)^A \Delta A + \{A, S\} \quad (2.104)$$

である。すると、これは単純な計算から、 S が BV 方程式の解であるとき、この変換は nilpotent であることがわかる:

$$\begin{aligned} \delta_B^2 A &= \delta_B \left((-1)^A \Delta A + \{A, S\} \right) \\ &= (-1)^{A+1} \{ \Delta A, S \} + \{ A, \Delta S \} + (-1)^A \{ \Delta A, S \} + \{ \{ A, S \}, S \} \\ &= -\{ M(S), A \} = 0. \end{aligned} \quad (2.105)$$

ただし、この変更された変換と、上で定義した pre-BRST は field, antifield に関しては一致する。以下では (2.102) を採用する。

この上で、ゲージ固定された系での変換を

$$\hat{\delta}_B \phi^i \equiv \delta_B \phi^i \Big|_L = \frac{\partial S(\phi, \phi^*)}{\partial \phi_i^*} \Big|_{\phi_i^* = \frac{\partial \Upsilon(\phi)}{\partial \phi^i}} \quad (2.106)$$

として定義する。ここで、Darboux 座標系を用いた。これは後でみるように Yang-Mills 理論の場合、BRST 変換に一致するから、BRST 変換と呼ぶ。

この BRST 変換には次の重要な性質がある。

BV 方程式の解 $S(\phi, \phi^*)$ を用いて、

$$\hat{S}(\phi) \equiv S \left(\phi, \phi^* = \frac{\partial \Upsilon(\phi)}{\partial \phi} \right) \quad (2.107)$$

と定義すると、

$$\hat{\delta}_B \left(\hat{S}(\phi) + \ln \prod_i d\phi^i \right) = 0 \quad (2.108)$$

$$\hat{\delta}_B^2 \phi \sim 0 \quad \text{in path integral} \quad (2.109)$$

が成り立つ。ここで、二つ目の式の意味は、経路積分の中で成り立つ、ということである。

- (2.108) の証明

S が BV 方程式を満たすことを用いて計算する。まず、

$$\begin{aligned}
\hat{\delta}_B \hat{S}(\phi) &= \frac{\partial_R \hat{S}}{\partial \phi^i} \hat{\delta}_B \phi^i + \frac{\partial_R S}{\partial \phi_i^*} \hat{\delta}_B \frac{\partial_L \Upsilon}{\partial \phi^i} \\
&= \frac{\partial_R \hat{S}}{\partial \phi^i} \hat{\delta}_B \phi^i + \frac{\partial_R S}{\partial \phi_j^*} \hat{\delta}_B \phi^i \frac{\partial_L^2 \Upsilon}{\partial \phi^i \partial \phi^j} \\
&= \frac{\partial_R S}{\partial \phi^i} \frac{\partial_L S}{\partial \phi_i^*} + \frac{\partial_R S}{\partial \phi_j^*} \frac{\partial_L S}{\partial \phi_i^*} \frac{\partial_L^2 \Upsilon}{\partial \phi^i \partial \phi^j} \\
&= \frac{1}{2} \{S, S\} + (-1)^{i+1} \frac{\partial_R S}{\partial \phi_j^*} \frac{\partial_R S}{\partial \phi_i^*} \frac{\partial_L^2 \Upsilon}{\partial \phi^i \partial \phi^j}
\end{aligned} \tag{2.110}$$

である。ところが、(2.110) の第二項は、Grassmann parity に気をつけて計算すると

$$\begin{aligned}
(-1)^{i+1} \frac{\partial_R S}{\partial \phi_j^*} \frac{\partial_R S}{\partial \phi_i^*} \frac{\partial_L^2 \Upsilon}{\partial \phi^i \partial \phi^j} &= (-1)^{i+1} (-1)^{i+j+1} \frac{\partial_R S}{\partial \phi_i^*} \frac{\partial_R S}{\partial \phi_j^*} \frac{\partial_L^2 \Upsilon}{\partial \phi^j \partial \phi^i} \\
&= -(-1)^{j+1} \frac{\partial_R S}{\partial \phi_i^*} \frac{\partial_R S}{\partial \phi_j^*} \frac{\partial_L^2 \Upsilon}{\partial \phi^j \partial \phi^i}
\end{aligned}$$

であるから、0 である。つぎに $\hat{\delta}_B \ln \prod_i d\phi^i$ を計算する。(2.106) より、

$$\begin{aligned}
\sum_i \hat{\delta}_B \ln d\phi^i &= \sum_i \left(\hat{\delta}_B d\phi^i \right) (d\phi^i)^{-1} \\
&= \sum_i d \left(\frac{\partial_L S}{\partial \phi_i^*} \right) (d\phi^i)^{-1} \\
&= \sum_{i,j} \frac{\partial_R}{\partial \phi^j} \frac{\partial_L S}{\partial \phi_i^*} d\phi^j (d\phi^i)^{-1} \\
&= \sum_i \frac{\partial_R}{\partial \phi^i} \frac{\partial_L S}{\partial \phi_i^*} = (-1)^i \frac{\partial_L^2 S}{\partial \phi^i \partial \phi_i^*} \\
&= \Delta S
\end{aligned} \tag{2.111}$$

となる。(2.111) の著しい特徴は、 ΔS の意味付けを与える点である。つまり、 ΔS は積分測度の変換に対する応答であるということを意味している。ここで、 d は左からかかる演算子であって、 $dA = d \exp(\ln A) = (d \ln A) \exp(\ln A) = d \ln A \cdot A$ より、 $d \ln A = dA \cdot A^{-1}$ となることを用いた。なお、今は ϕ^i と $d\phi^i$ の Grassmann parity は等しいので、余分な符号も出ない。

結局、(2.110)、(2.111) より、 S が BV 方程式の解であるなら、

$$\hat{\delta}_B \left(\hat{S}(\phi) + \ln \prod_i d\phi^i \right) = \Delta S + \frac{1}{2} \{S, S\} = 0 \tag{2.112}$$

となることがわかった。

• (2.109) の証明

まず、量子的 BV 方程式 (2.73) を antifield ϕ_j^* で微分すると、

$$(-1)^i \frac{\partial^2 S}{\partial \phi_j^* \partial \phi_i^*} \frac{\partial S}{\partial \phi^i} + (-1)^{i+j+1} \frac{\partial S}{\partial \phi_i^*} \frac{\partial^2 S}{\partial \phi^i \partial \phi_j^*} + (-1)^i \hbar \frac{\partial}{\partial \phi_j^*} \frac{\partial^2 S}{\partial \phi^i \partial \phi_i^*} = 0 \quad (2.113)$$

となる。

BRST 変換の 2 乗を計算すると、互いの Grassmann parity に注意して、

$$\hat{\delta}_B^2 \phi^i = \hat{\delta}_B \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i^*} S \Big|_L \right) \quad (2.114)$$

$$= \frac{\partial_R}{\partial \phi^j} \frac{\partial S}{\partial \phi_i^*} \hat{\delta}_B \phi^j + \frac{\partial_R}{\partial \phi_j^*} \frac{\partial S}{\partial \phi_i^*} \hat{\delta}_B \frac{\partial \Upsilon}{\partial \phi^j} \quad (2.115)$$

$$= (-1)^{ij} \frac{\partial^2 S}{\partial \phi^j \partial \phi_i^*} \frac{\partial S}{\partial \phi_j^*} + (-1)^{i(j+1)} \frac{\partial^2 S}{\partial \phi_j^* \partial \phi_i^*} \frac{\partial_R}{\partial \phi^k} \frac{\partial \Upsilon}{\partial \phi^j} \hat{\delta}_B \phi^k \quad (2.116)$$

$$= (-1)^{ij} \frac{\partial^2 S}{\partial \phi^j \partial \phi_i^*} \frac{\partial S}{\partial \phi_j^*} + (-1)^{i(j+1)+kj} \frac{\partial^2 S}{\partial \phi_j^* \partial \phi_i^*} \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial \phi^k \partial \phi^j} \frac{\partial S}{\partial \phi_k^*} \quad (2.117)$$

$$= (-1)^{ij} \frac{\partial^2 S}{\partial \phi^j \partial \phi_i^*} \frac{\partial S}{\partial \phi_j^*} + (-1)^{j+1} \frac{\partial^2 S}{\partial \phi_i^* \partial \phi_j^*} \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial \phi^j \partial \phi^k} \frac{\partial S}{\partial \phi_k^*} \quad (2.118)$$

となる¹⁰。この第一項を、(2.113) を使って消去すると、

$$\hat{\delta}_B^2 \phi^i = (-1)^{j+1} \frac{\partial^2 S}{\partial \phi_i^* \partial \phi_j^*} \left(\frac{\partial S}{\partial \phi^j} + \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial \phi^j \partial \phi^k} \frac{\partial S}{\partial \phi_k^*} \right) + (-1)^{j+1} \hbar \frac{\partial}{\partial \phi_i^*} \frac{\partial^2 S}{\partial \phi^j \partial \phi_j^*} \quad (2.119)$$

を得る。これを経路積分の中に入れてその意味を考えると、

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_B^2 \phi^i \exp \left(\frac{\hat{S}}{\hbar} \right) &= \hbar (-1)^{j+1} \frac{\partial^2 S}{\partial \phi_i^* \partial \phi_j^*} \frac{\partial}{\partial \phi^j} \exp \left(\frac{\hat{S}}{\hbar} \right) \\ &+ (-1)^{j+1} \hbar \exp \left(\frac{\hat{S}}{\hbar} \right) (-1)^{j(i+1)} \frac{\partial}{\partial \phi^j} \frac{\partial^2 S}{\partial \phi_i^* \partial \phi_j^*} \end{aligned} \quad (2.120)$$

$$= \hbar (-1)^{ij+1} \frac{\partial}{\partial \phi^j} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \phi_i^* \partial \phi_j^*} \exp \left(\frac{\hat{S}}{\hbar} \right) \right) \quad (2.121)$$

であるから、全微分となり、経路積分を取ると 0 になる。すなわち、

$$\langle \hat{\delta}_B^2 \phi^i \rangle = 0 \quad (2.122)$$

となるから、この意味で BRST 変換の nilpotency が成立する。

¹⁰ 正確にはこれを Lagrangian submanifold に制限したものであるが、記号を簡単にするため略してある。以下の計算も同様。

(2.108) により

$$\begin{aligned}\hat{\delta}_B \left(\prod d\phi^i e^{\hat{S}} \right) &= \hat{\delta}_B \left(e^{\hat{S} + \ln \prod d\phi^i} \right) \\ &= \hat{\delta}_B \left(\hat{S} + \ln \prod d\phi^i \right) \prod d\phi^i e^{\hat{S}}\end{aligned}\quad (2.123)$$

$$= 0 \quad (2.124)$$

であって、経路積分の際、積分測度まで含めて BRST 対称性が成り立つことが保証される。このように BV 形式は BRST 対称性を含んでいる。さらに BV 方程式を解いて得られる理論は量子補正まで含めて対称性が成り立つことを保証するという点で、BRST 対称性の議論よりも強力である。

すでに見たように pre-BRST 変換は nilpotent ではなかった。しかし、(2.109) は、経路積分を取れば BRST 変換が nilpotent になることを示している。つまり、on-shell の状態、すなわち運動方程式 $\frac{\delta \hat{S}(\phi)}{\delta \phi} = 0$ が満たされる状態に対しては nilpotent となる。そもそも pre-BRST 変換(2.102)が nilpotent にならなかったのは、2回変換をしたときに ΔS の部分が現れないからである。しかし、以下で見るように作用が局所的な関数として書けている場合は $\Delta S = 0$ として差し支えない。そのため、通常の場合の理論ではこのように定義した BRST 変換は off-shell でも nilpotent である。

また、BV 形式は通常の場合の BRST 量子化で扱えるものよりさらに一般的な系の量子化を議論できる。例えば、ゲージ場が p -form であらわされるような理論の場合、ゲージ場には $(p-1)$ -form の redundancy があるが、こうした reducible な場合は ghost の ghost が必要になる。BV 形式はこのような場合にも適用できることが知られている [17]。

ここで、BV 方程式に現れる ΔS についてももう少し述べておく。

BV 方程式の解 S が局所的な量でかけているとする。これは量子論的な補正まで含めた作用であるから、アノマリーが存在しないことを意味している。すると、アノマリーに対する藤川の方法により、アノマリーが存在しない場合には、対称性変換を行ったときに積分測度から生じる Jacobian は適当な正規化を用いて 1 にすることができる。したがって、今、BRST 変換

$$\phi^i \longrightarrow \phi^i + \varepsilon \hat{\delta}_B \phi^i = \phi^i + \varepsilon \left. \frac{\partial S}{\partial \phi_i^*} \right|_{\mathcal{L}} \quad (2.125)$$

を考えた場合、積分測度は、 $|\varepsilon| = 1$ だから

$$\begin{aligned}\prod d\phi^i &\longrightarrow \left(1 + \varepsilon (-1)^i \left. \frac{\partial^2 S}{\partial \phi^i \partial \phi_i^*} \right|_{\mathcal{L}} \right) \prod d\phi^i \\ &= (1 + \varepsilon \Delta S) \prod d\phi^i\end{aligned}\quad (2.126)$$

$$\longrightarrow 1 \cdot \prod d\phi^i \quad (2.127)$$

となる。つまり、作用が局所的な量で書けている時、正則化により ΔS を 0 にすることができる。特に、古典作用を議論するときには BV 方程式は

$$\{S, S\} = 0 \quad (2.128)$$

として構わないことがわかる。

2.2.5 Yang-Mills 理論の場合

ここではこれまでに説明してきた BV 形式の例として Yang-Mills 理論が古典 BV 方程式の解になっていることを示す。すでに述べたように作用のうち、古典的な部分だけを考えているので、満たすべき方程式は古典的なものである。

古典 BV 方程式は、

$$\sum_i (-)^{|\phi^i|} \frac{\partial S}{\partial \phi^i} \frac{\partial S}{\partial \phi_i^*} = 0 \quad (2.129)$$

である。ここで、 ϕ_i^* は ϕ^i の antifield であって、

$$N_{\text{gh}}[\phi^i] + N_{\text{gh}}[\phi_i^*] = -1 \quad (2.130)$$

である。いま、簡単のために matter の部分は考えないことにする。すると Lagrangian の中に現れる field は ゲージ場 $A_\mu^a(x)$ 、ghost $c^a(x)$ 、antighost $\bar{c}^a(x)$ である。これらに対応する antifield を以下のように導入する¹¹：

$$\begin{pmatrix} \phi^i \\ \phi_i^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_\mu^a(x) \\ K_\mu^a(x) \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^a(x) \\ L^a(x) \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{c}^a(x) \\ B^a(x) \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ここで、二段目はそれぞれの場の ghost number をあらわしている。これらの場を含む作用が満たすべき古典 BV 方程式は、

$$\int d^4x \left(\frac{\delta S}{\delta A_\mu^a(x)} \frac{\delta S}{\delta K_\mu^a(x)} - \frac{\delta S}{\delta c^a(x)} \frac{\delta S}{\delta L^a(x)} - \frac{\delta S}{\delta \bar{c}^a(x)} \frac{\delta S}{\delta B^a(x)} \right) = 0 \quad (2.131)$$

である。これはくりこみを議論する際に現れる Zinn-Justin 方程式で、antifield は外場に相当することが分かる。この方程式の解は BRST 対称性をもっているから、作用の候補となりえ

¹¹ 現れる状況が似ていて紛らわしいが、ここで用いている $B^a(x)$ は前に述べた NL field とは別物である。

る。実際にこの解は、

$$\begin{aligned}
& S(\phi, \phi^*) \\
&= \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a{}^2 - i\partial^\mu \bar{c}^a (D_\mu c)^a + K^{\mu a} (D_\mu c)^a - \frac{1}{2} g f^{abc} L^a c^b c^c - \frac{1}{2\alpha} (B^a + \partial^\mu A_\mu^a)^2 \right\}
\end{aligned} \tag{2.132}$$

である。ここで、 $D_\mu c$ とは (2.2) で定義した共変微分である。

さて、antifield の自由度を消すためにこの作用を Lagrangian submanifold に制限する。ここでは特に $\Upsilon[\phi] = 0$ ととると、antifield は

$$\phi_i^* = \frac{\partial \Upsilon[\phi]}{\partial \phi^i} = 0$$

となる。つまり、 $K_\mu^a = L^a = B^a = 0$ 。すると、作用は

$$S(\phi, \phi^* = 0) = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a{}^2 - i\partial^\mu \bar{c}^a (D_\mu c)^a - \frac{1}{2\alpha} (\partial^\mu A_\mu^a)^2 \right\} \tag{2.133}$$

となる。これはゲージ固定した Lagrangian $\tilde{\mathcal{L}}$ (2.5) において \mathcal{L}_{FP} を部分積分し、NL field B^a について経路積分をとったものと等しく、それゆえ同一の理論を与えている¹²。ここでは Lagrangian submanifold を定める汎関数として非常に特殊なものを採用した。しかし、これまでの議論から分かるようにこの汎関数は任意のものであってよい。

ここで、BV 形式 で求めた BRST 変換を計算し、それが通常の BRST 変換と一致していることを示しておく。

(2.106) より、BV 形式 での BRST 変換は、(2.132) を用いて

$$\hat{\delta}_B A_\mu^a = \left. \frac{\delta S}{\delta K^a} \right|_{K=L=B=0} = (D_\mu c)^a \tag{2.134}$$

$$\hat{\delta}_B c^a = \left. \frac{\delta S}{\delta L^a} \right|_{K=L=B=0} = -\frac{1}{2} g f^{abc} c^b c^c \tag{2.135}$$

$$\hat{\delta}_B \bar{c}^a = \left. \frac{\delta S}{\delta B^a} \right|_{K=L=B=0} = -\frac{1}{\alpha} \partial^\mu A_\mu^a \tag{2.136}$$

である。(2.5) で NL field について経路積分をすれば、 $B^a = -\frac{1}{\alpha} \partial^\mu A_\mu^a$ となることに注意すれば、これは通常の BRST 変換に一致することがわかる。

¹² 古典 BV 方程式からは作用 S の全体の規格化までは決まらないが、ここでは (2.5) と一致するようにとった。

2.2.6 Cubic String Field Theory の場合

次の例として、Witten の open string field theory[18] の作用が BV 方程式の解になっていることを確かめる¹³。

Witten によって提唱された 開弦 の cubic string field theory の作用は

$$S = \frac{1}{2}\Phi \cdot Q_B \Phi + \frac{1}{3}\Phi \cdot (\Phi * \Phi) \quad (2.137)$$

で与えられる。(2.137) では引数を省略したが、 $\Phi[X^\mu, c, b]$ は 開弦 の string field であって、以下で用いる重要な性質は、開弦 での ghost に対する境界条件によりこの引数の中に c_0 は含まれず b_0 は含まれていて、ghost-antighost のその他のモードは対になっている、という点である。

なお、この作用は

$$\delta_\Lambda \Phi = Q_B \Lambda + \Phi * \Lambda - \Lambda * \Phi \quad (2.138)$$

という変換に対して不変となっている。

以後、添え字 I で (X^μ, c, b) をラベルし、 i はこのうち b_0 以外をラベルするものとする。さらに記号を簡単にするため $\Phi[X^\mu, c, b] = \Phi_I$ と書くことにする。

さて、 Φ_I に対して ghost number -1 を割り当てることにする。するとこのとき、 $\frac{\partial}{\partial \Phi_I}$ の ghost number は 0 である。なぜなら、

$$\frac{\partial}{\partial \Phi_I} \Phi_J = \delta_{IJ} \quad (2.139)$$

であるが、 $N_{\text{gh}}[\delta_{IJ}] = -1$ だからである。これは

$$\delta_{IJ} \simeq \prod_{\mu} \delta(X^\mu - X'^\mu) \prod_{n \neq 0} \delta(c_n - c'_n) \prod_{n \neq 0} \delta(b_n - b'_n) \delta(b_0 - b'_0) \propto b_0 - b'_0 \quad (2.140)$$

であって、 $n \neq 0$ の c_n, b_n の持つ ghost number は打ち消しあい、 b_0 の ghost number が残ることからわかる。ただし、ここで I, J に対応する変数をそれぞれ X, X' などと表した。

string field Φ を b_0 について展開する。場 ϕ_i, ψ_i を用いて¹⁴、

$$\Phi_I = -b_0 \phi_i + \psi_i \quad (2.141)$$

¹³ 本論文では cubic string field theory は用いないので、この理論の詳細や最近の不安定な D-brane 系に対する応用などは他の文献に譲る。また、string field の性質などは次章で述べる。

¹⁴ ϕ, ψ にはもはや b_0 は含まれないので、添え字は i である。

と表すと、 $N_{\text{gh}}[\phi_i] = 0, N_{\text{gh}}[\psi_i] = -1$ である。これらを用いると、string field に関する微分は

$$\frac{\partial}{\partial \Phi_I} = \frac{\partial}{\partial \phi_i} + b_0 \frac{\partial}{\partial \phi_i} \quad (2.142)$$

と表せる。実際、

$$\frac{\partial}{\partial \Phi_I} \Phi_{I'} = \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i} + b_0 \frac{\partial}{\partial \phi_i} \right) (-b'_0 \phi_{i'} + \psi_{i'}) \quad (2.143)$$

$$= -b'_0 \delta_{i'}^i + b_0 \delta_{i'}^i \quad (2.144)$$

$$= \delta_{i'}^i (b_0 - b'_0) \quad (2.145)$$

$$= \delta_{I'}^I \quad (2.146)$$

となる。ここで、 b_0 は Grassmann であるので、 $\delta(b_0 - b'_0) = b_0 - b'_0$ であることを使った。

以下では ϕ_i を field、 ψ_i を antifield と見なしたとき、作用 (2.137) が BV 方程式を満たすことを確かめる。

今、

$$\sum_I = \int \mathcal{D}X^\mu \int \mathcal{D}c \int \mathcal{D}b \quad (2.147)$$

と略記すれば、

$$\sum_I \frac{\partial S}{\partial \Phi_I} \frac{\partial S}{\partial \Phi_I} = \sum_i \int db_0 \left(\frac{\partial S}{\partial \phi_i} + b_0 \frac{\partial S}{\partial \psi_i} \right)^2 \quad (2.148)$$

$$= 2 \sum_i \frac{\partial S}{\partial \phi_i} \frac{\partial S}{\partial \psi_i} \quad (2.149)$$

となる。ここで、 $N_{\text{gh}}[S] = 0, N_{\text{gh}}[\phi_i] = 0, N_{\text{gh}}[\psi_i] = -1$ であるから、 S の ϕ_i, ψ_i による微分は可換であることを用いた。この式を見ると、BV 方程式

$$\sum_i \frac{\partial S}{\partial \phi_i} \frac{\partial S}{\partial \psi_i} = 0 \quad (2.150)$$

は

$$\sum_I \frac{\partial S}{\partial \Phi_I} \frac{\partial S}{\partial \Phi_I} = 0 \quad (2.151)$$

と等価であることがわかる。なお、(2.147) から $N_{\text{gh}}[\sum_I] = 1, N_{\text{gh}}[\sum_i] = 0$ であることがわかる。

次にこの方程式のある解を求め、それが (2.137) となっていることを示す。

そこで、解として

$$S[\Phi] = \frac{1}{2} \sum_{I,J} \Phi_I Q_{IJ} \Phi_J + \frac{1}{3} \sum_{I,J,K} V_{IJK} \Phi_I \Phi_J \Phi_K \quad (2.152)$$

という ansatz をおく¹⁵。 Q, V の ghost number は $N_{\text{gh}}[\Phi] = -1, N_{\text{gh}}[S] = 0, N_{\text{gh}}[\sum_I] = 1$ であることに注意すれば、

$$N_{\text{gh}}[Q_{IJ}] = N_{\text{gh}}[V_{IJK}] = 0 \quad (2.153)$$

であることがわかる。また、 Q, V は添え字の cyclic な入れ替えに関して対称であり、それ以外の並び替えに対しては反対称である。

(2.152) より、

$$\frac{\partial S}{\partial \Phi_I} = Q_{IJ}\Phi_J + V_{IJK}\Phi_J\Phi_K \quad (2.154)$$

であるからこれを BV 方程式 (2.151) に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \Phi_I} \frac{\partial S}{\partial \Phi_I} &= (Q_{IJ}\Phi_J + V_{IJK}\Phi_J\Phi_K)^2 \\ &= Q_{JI}Q_{IK}\Phi_J\Phi_K + (Q_{IJ}V_{IKL} + Q_{IL}V_{IJK})\Phi_J\Phi_K\Phi_L + V_{IJK}V_{ILM}\Phi_J\Phi_K\Phi_L\Phi_M \\ &= Q_{JI}Q_{IK}\Phi_J\Phi_K + 2Q_{JI}V_{IKL}\Phi_J\Phi_K\Phi_L + V_{JKI}V_{ILM}\Phi_J\Phi_K\Phi_L\Phi_M \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。ここで、 Q, V の添え字に関する対称性を使った。また、一見各項の ghost number が異なっているように見えるが重複している添え字に関しては和をとっているので両辺で ghost number はつりあっている。

この方程式において Φ の各次数の係数を拾うと、対称性に注意して、

$$Q_{JI}Q_{IK} = 0 \quad (2.155)$$

$$Q_{JI}V_{IKL} + Q_{KI}V_{ILJ} + Q_{LI}V_{IJK} = 0 \quad (2.156)$$

$$V_{JKI}V_{ILM} + V_{KLI}V_{IJM} = 0 \quad (2.157)$$

を得る。

次にこの方程式を満たす Q, V を求めよう。

係数 Q_{IJ} に対応して線形な演算子 Q を、

$$Q_{IJ}\Phi_J = (Q\Phi)_I \quad (2.158)$$

として定義する。すると、(2.155) は任意の string field Φ に関して

$$Q_{IK}Q_{KJ}\Phi_J = Q_{IK}(Q\Phi)_K = (Q^2\Phi)_I = 0 \quad (2.159)$$

¹⁵ 上で述べたように \sum_I は 0 でない ghost number を持つので本来なら注意を喚起するために残しておくべきだが、以下では記号を簡単にするため混乱が生じない限りは省略する。

を意味するから、 $Q^2 = 0$ 、すなわち演算子 Q が nilpotent であることを要請している。そこで、 Q として 開弦 の BRST 演算子 Q_B [19] をとる。つまり、nilpotency が満たされるためには時空は 26 次元でなくてはならない。ここで重要な点はこの方程式は明らかに相互作用 V_{IJK} とは独立であるということである。つまり、string field に関して 2 次の項の係数 Q は相互作用とは無関係に決まり、それは nilpotent でなくてはならないということの意味している。知られている非自明なものの中でそのような演算子は ghost や BRST 演算子しかない。特に、string field の 2 次の部分として $\Phi \cdot Q_B \Phi$ を採用すると、後で見るようにこれは通常の場の理論の作用の 2 次の部分を再現する。

一方、 Q として自明なもの、すなわち $Q = 0$ を採用した理論も知られていて、これは pre-geometrical SFT と呼ばれている。この理論では、string field が dynamical に期待値を持つことで、2 次の部分が現れる、と理解している。

次に相互作用を表す V_{IJK} として Witten によって提唱された中点型相互作用を採用する。すなわち、図 2.1 の相互作用である。

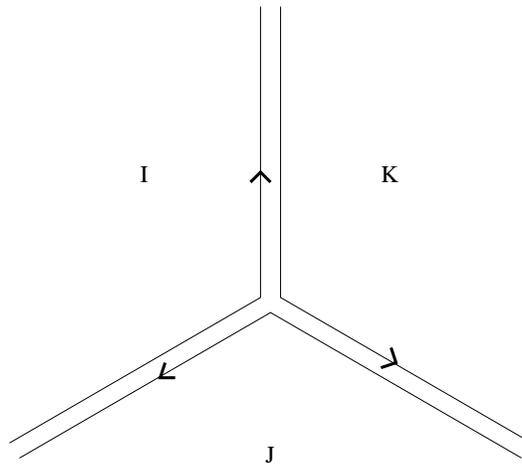


図 2.1: open string の中点での 3 点相互作用

このとき、ここでは詳細は略すが、(2.156) は BRST 変換が相互作用の一次まで nilpotent であることと等価で、26 次元でのみ満たされている。閉弦の場合のこの方程式については後で述べる。

また vertex は自動的に (2.157) を満たしている。このためには、それぞれの項が上の図の過程を表していることに注意すればよい。

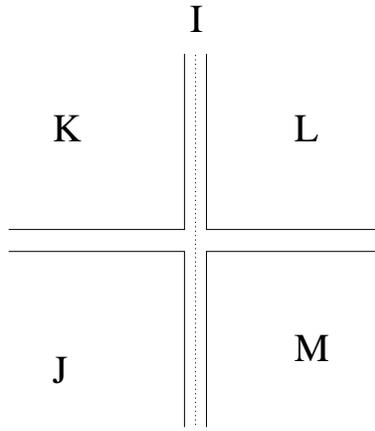


図 2.2: $V_{JKI}V_{ILM}$ の過程

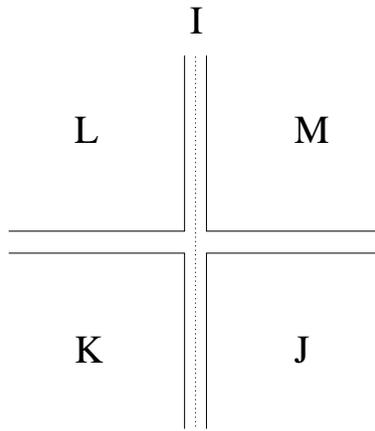


図 2.3: $V_{KLI}V_{IMJ}$ の過程

これより、

$$\text{第一項} \sim \text{図 2.2} \tag{2.160}$$

$$\text{第二項} = -V_{KLI}V_{IMJ} \sim -\text{図 2.3} = -\text{第一項} \tag{2.161}$$

であって、ちょうど打ち消していることがわかる。

そこで、任意の 2 つの string field Φ, Ψ に関して

$$V_{IJK}\Phi_J\Psi_K \equiv (\Phi * \Psi)_I \tag{2.162}$$

として*積を定義すれば、(2.137)は

$$S = \frac{1}{2}\Phi \cdot Q_B \Phi + \frac{1}{3}\Phi \cdot (\Phi * \Phi) \quad (2.163)$$

とまとめることができ、open string field theory の作用を与える。

第3章 String Field の構成

弦の場の理論では、弦の第二量子化をする。通常の場合の理論と量子力学の関係のように、そこに現れる位置や運動量などの演算子は第一量子化で得られたもの採用する。弦の場の理論においては、例えば BRST 演算子が登場するが、これは弦の第一量子化で得られるものである。この弦の第一量子化は、本質的に共形場の理論 (CFT) であるから、弦の場の理論は CFT を一つ定めるとそれに対応して定まる。

この章では本論文で主として用いる CFT の convention [20] と、string field の性質について述べる。

3.1 Conformal Field Theory

3.1.1 Primary Field, Ghost, BRST Operator

まず、 $z = \exp(\tau + i\sigma)$ ととる。

第一量子化の文脈でのゲージ固定された弦の作用は、

$$S = \frac{1}{2\pi} \int d^2z \left(\partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu + b_{zz} \bar{\partial} c^z + b_{\bar{z}\bar{z}} \partial c^{\bar{z}} \right) \quad (3.1)$$

である。 $b = b_{zz}$, $\bar{b} = b_{\bar{z}\bar{z}}$ などと書く。

X は時空中での弦の空間座標で、 b, c は ghost である。エネルギー・運動量テンソルは、

$$T(z) = T^X(z) + T^{\text{gh}}(z) + \text{anti holomorphic part}, \quad (3.2)$$

$$T^X(z) = - : \partial X^\mu \partial X_\mu :, \quad (3.3)$$

$$T^{\text{gh}}(z) = : (\partial b) c : - 2\partial : bc : \quad (3.4)$$

である。ここで、 $::$ は $SL(2, \mathbb{C})$ vacuum に対する normal ordering である。

エネルギー・運動量テンソルの mode 展開

$$T(z) = \sum_n \frac{L_n}{z^{n+2}}, \quad \bar{T}(\bar{z}) = \sum_n \frac{\bar{L}_n}{\bar{z}^{n+2}} \quad (3.5)$$

により、Virasoro 演算子を定義する。ここで、 $L_0^\pm = L_0 \pm \bar{L}_0$ と書く。

共形次元が d であるような primary field ϕ の mode 展開は

$$\phi(z) = \sum_n \frac{\phi_n}{z^{n+d}}, \quad \phi_n = \int \frac{dz}{2\pi i} z^{n+d-1} \phi(z) \quad (3.6)$$

である。

$|1\rangle$ を $SL(2, \mathbb{C})$ vacuum とすると、原点での regularity より

$$\begin{aligned} \phi_n |1\rangle &= 0 & n \geq -d + 1 \\ \langle 1 | \phi_n &= 0 & n < d - 1 \end{aligned} \quad (3.7)$$

であるべきである。特に free boson $i\partial X^\mu, i\bar{\partial} X^\mu$ を考える。mode 展開は

$$i\partial X^\mu = \sum_n \frac{\alpha_n^\mu}{z^{n+1}}, \quad i\bar{\partial} X^\mu = \sum_n \frac{\bar{\alpha}_n^\mu}{\bar{z}^{n+1}} \quad (3.8)$$

であって、さらに

$$\alpha_n^\dagger = \alpha_{-n} \quad (3.9)$$

である。これらの間に交換関係として

$$[\alpha_n^\mu, \alpha_m^\nu] = [\bar{\alpha}_n^\mu, \bar{\alpha}_m^\nu] = ng^{\mu\nu} \delta_{n,-m} \quad (3.10)$$

を設定する。すると、(3.7) より

$$\alpha_n |1\rangle = \bar{\alpha}_n |1\rangle = 0 \quad n \geq 0 \quad (3.11)$$

$$\langle 1 | \alpha_n = \langle 1 | \bar{\alpha}_n = 0 \quad n < 0 \quad (3.12)$$

が成り立つ。 $\alpha_0^\mu = \bar{\alpha}_0^\mu = \hat{p}^\mu$ に対して $|1, p\rangle$ なる state を、 $\hat{p}^\mu |1, p\rangle = p^\mu |1, p\rangle$ として定義する。このとき、

$$\begin{aligned} \alpha_n^\mu |1, p\rangle = \bar{\alpha}_n^\mu |1, p\rangle &= 0 & n > 0 \\ \langle 1, p | \alpha_n^\mu = \langle 1, p | \bar{\alpha}_n^\mu &= 0 & n < 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

となる。

次に ghost c , antighost b について考える¹。conformal weight はそれぞれ、 $(-1, 0), (2, 0)$ である。mode 展開は、

$$c(z) = \sum_n \frac{c_n}{z^{n-1}}, \quad \bar{c}(\bar{z}) = \sum_n \frac{\bar{c}_n}{\bar{z}^{n-1}} \quad (3.14)$$

$$b(z) = \sum_n \frac{b_n}{z^{n+2}}, \quad \bar{b}(\bar{z}) = \sum_n \frac{\bar{b}_n}{\bar{z}^{n+2}} \quad (3.15)$$

¹ これまでは c を ghost、 \bar{c} を antighost としてきたが、この節以降では c を ghost、 b を antighost とする。

であって、Hermite 共役は

$$c_n^\dagger = c_{-n}, \quad b_n^\dagger = b_{-n} \quad (3.16)$$

である。交換関係は

$$\{b_m, c_n\} = \{\bar{b}_m, \bar{c}_n\} = \delta_{m,-n}$$

をとる。すると、(3.7) より、

$$\begin{cases} b_n|1, p\rangle = \bar{b}_n|1, p\rangle = 0 & n \geq -1 \\ \langle 1, p|b_n = \langle 1, p|\bar{b}_n = 0 & n \leq 1 \end{cases} \quad (3.17)$$

および

$$\begin{cases} c_n|1, p\rangle = \bar{c}_n|1, p\rangle = 0 & n \geq 2 \\ \langle 1, p|c_n = \langle 1, p|\bar{c}_n = 0 & n \leq -2 \end{cases} \quad (3.18)$$

である。ここで、著しい特徴は、 c_{-1}, c_0, c_1 は $|1, p\rangle, \langle 1, p|$ のどちらも消さず、 b_{-1}, b_0, b_1 はどちらも消すことである。OPE は、

$$b(z_1)c(z_2) \sim \frac{1}{z_{12}}, \quad z_{12} = z_1 - z_2 \quad (3.19)$$

である。

ここで、後の便宜のため、 c_0^\pm, b_0^\pm を

$$c_0^\pm = \frac{1}{2}(c_0 \pm \bar{c}_0), \quad b_0^\pm = b_0 \pm \bar{b}_0 \quad (3.20)$$

と定義しておく。すると、交換関係は、

$$\{c_0^+, b_0^+\} = 1, \quad \{c_0^-, b_0^-\} = 1 \quad (3.21)$$

である。

ここでエネルギー・運動量テンソルの OPE を書いておくと、26 次元の場合 central charge が消えることに注意して、

$$T(z)T(w) \sim \frac{2}{(z-w)^2}T(w) + \frac{1}{z-w}\partial T(w) + \dots \quad (3.22)$$

である。

$SL(2, \mathbb{C})$ vacuum $|1, p\rangle$ の ghost number が 0 であるように ghost number operator G を

$$G = 3 + \left(\frac{1}{2}(c_0 b_0 - b_0 c_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (c_{-n} b_n - b_{-n} c_n) + \text{anti holo. part} \right) \quad (3.23)$$

と定義する。すると、明らかに $G|1, p\rangle = 0$ である。

$SL(2, \mathbb{C})$ vacuum に ghost をかけると、次に 4 つの Fock vacuum を得る:

$$|\Downarrow, p\rangle = c_1 \bar{c}_1 |1, p\rangle, \quad (3.24)$$

$$|\Uparrow, p\rangle = c_0^+ |\Downarrow, p\rangle, \quad (3.25)$$

$$|\Downarrow, p\rangle = c_0^- |\Downarrow, p\rangle, \quad (3.26)$$

$$|\Uparrow, p\rangle = c_0^+ c_0^- |\Downarrow, p\rangle. \quad (3.27)$$

これらは c_n, b_n ($n \geq 1$) をかけると 0 になる。

この系においては BRST 変換は

$$\delta_B X^\mu = i\varepsilon (c\partial + \bar{c}\bar{\partial}) X^\mu, \quad (3.28)$$

$$\delta_B b = i\varepsilon (T^X + T^{\text{gh}}), \quad \delta_B \bar{b} = i\varepsilon (\bar{T}^X + \bar{T}^{\text{gh}}) \quad (3.29)$$

$$\delta_B c = i\varepsilon (c\partial + \bar{c}\bar{\partial}) c \quad \delta_B \bar{c} = i\varepsilon (c\partial + \bar{c}\bar{\partial}) \bar{c} \quad (3.30)$$

である。対応する Noether current の正則な部分は、

$$j_B = cT^X + \frac{1}{2} : cT^{\text{gh}} : + \frac{3}{2} \partial^2 c \quad (3.31)$$

である。これから、BRST charge を作ると、

$$Q_B = \frac{1}{2\pi i} \oint (dz j_B - d\bar{z} \bar{j}_B) \quad (3.32)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n L_{-n}^X + \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \frac{m-n}{2} c_m c_n b_{-m-n} - c_0 + \text{anti holo. part} \quad (3.33)$$

となる。OPE を使って計算すると、BRST charge との交換関係として、

$$[Q_B, X^\mu(z)] = c(z) \partial X^\mu(z), \quad (3.34)$$

$$\{Q_B, c(z)\} = c(z) \partial c(z), \quad (3.35)$$

$$\{Q_B, b(z)\} = T(z) \quad (3.36)$$

を得る。これは上の BRST 変換を再現する。特に、次元を 26 次元とすると、

$$\{Q_B, Q_B\} = 0 \quad (3.37)$$

が成り立つ。

3.1.2 Hermite 共役、BPZ 共役と内積

次に Hermite conjugate と BPZ conjugate を定義する。まず、内積の規格化を

$$\langle 1, p | c_{-1} \bar{c}_{-1} c_0^+ c_0^- c_1 \bar{c}_1 | 1, p' \rangle = (2\pi)^d \delta^d(p - p') \quad (3.38)$$

ととる。今の場合には $d = 26$ である。 A_i を α_n, c_n, b_n, c を定数として、状態 $\prod A_i | 1, p \rangle c$ の Hermite 共役を

$$\left(\prod_{i=1}^n A_i | 1, p \rangle c \right)^\dagger = \bar{c} \langle 1, p | \prod_{i=1}^n A_{n-i+1}^\dagger \quad (3.39)$$

と定義する。 A_i の積の順序が反対になっていることに注意せよ。以下、状態 $|A\rangle$ の Hermite 共役を、 $\langle A_{\text{hc}}|$ と書くことにする。このとき、二つの状態 $|A\rangle, |B\rangle$ の間の内積 $\langle A_{\text{hc}}|B\rangle$ は antilinear である。Hermite 共役を用いた A, B の内積を

$$(A, B) \equiv \langle A_{\text{hc}}|B\rangle \quad (3.40)$$

定義すると、(3.38) より、 $(A, B)^\dagger = -(B, A)$ である。これは、 $(c_{-1} \bar{c}_{-1} c_0^+ c_0^- c_1 \bar{c}_1)^\dagger = -c_{-1} \bar{c}_{-1} c_0^+ c_0^- c_1 \bar{c}_1$ であることから従う。 U をある演算子とすると、 U の Hermite 共役を $(UA, B) = (A, U^\dagger B)$ と定義する。特に、BRST 演算子は Hermite であるので $(Q_B A, B) = (A, Q_B B)$ である。

次に BPZ 共役を定義する。 I で写像 $z \mapsto \frac{1}{z}$ を表す。このとき、 A を演算子とすると、これを z 平面の原点において作った状態 $|A\rangle = A(0)|1\rangle$ の BPZ 共役を

$$\langle A| \equiv \langle 1|I \circ A(0) \quad (3.41)$$

と定義する。例えば、共形次元 $(d, 0)$ の場 ϕ の mode 展開の BPZ 共役は、これを ϕ^T と書くと、

$$\phi_n^T = \int \frac{dz'}{2\pi i} z'^{n+d-1} \phi'(z') = (-1)^d \phi_{-n} \quad (3.42)$$

となる。この BPZ 共役を用いて、状態 $c \prod A_i | 1 \rangle$ の BPZ 共役を

$$\left(c \prod_{i=1}^n A_i | 1 \rangle \right)^T \equiv \langle 1 | c \prod_{i=1}^n A_i^T \quad (3.43)$$

と定義する。特に、 X^μ の共形次元は $(1, 0)$ であるから、 $\hat{p}^{\mu T} = -\hat{p}^\mu$ である。つまり、 $(|1, p\rangle)^T = \langle 1, -p|$ となる。つぎに ghost c の共形次元は $(-1, 0)$ であるから、上で定義した Fock vacuum の BPZ 共役は、

$$\langle \downarrow \downarrow, p | = \langle 1, -p | c_{-1} \bar{c}_{-1}, \quad (3.44)$$

$$\langle \uparrow \downarrow, p | = -\langle 1, -p | c_0^+ c_{-1} \bar{c}_{-1}, \quad (3.45)$$

$$\langle \downarrow \uparrow, p | = -\langle 1, -p | c_0^- c_{-1} \bar{c}_{-1}, \quad (3.46)$$

$$\langle \uparrow \uparrow, p | = \langle 1, -p | c_0^+ c_{-1} \bar{c}_{-1} \quad (3.47)$$

となる。BPZ 共役を用いた内積を、

$$\langle A, B \rangle \equiv \langle A | c_0^- | B \rangle \quad (3.48)$$

と定義する。

次に conjugate state を定義する。\$r\$ でラベルされる状態 \$|\Phi_r\rangle\$ に対して、conjugate state \$\langle \Phi_r^c|\$ を

$$\langle \Phi_r^c | \Phi_s \rangle = \delta_{rs} \quad (3.49)$$

で定義する。これは \$|\Phi_r\rangle\$ の双対空間であるから完全であるとする。これは上で導入した Hermite 共役とも、BPZ 共役とも異なることに注意せよ。(3.38) より、

$$\langle 1^c | = (2\pi)^{-d} \langle 1, p | c_{-1}^- \bar{c}_{-1}^+ c_0^- c_1 \bar{c}_1 \quad (3.50)$$

であると分かる。この BPZ 共役をとると、

$$|1^c\rangle = (2\pi)^{-d} c_{-1}^- \bar{c}_{-1}^+ c_0^- c_1 \bar{c}_1 \quad (3.51)$$

であって、\$\langle 1 | 1^c \rangle = 1\$ となっている。この \$\langle 1^c|\$ を用いて、一般の状態 \$|\Phi\rangle\$ の conjugate state および BPZ 共役は \$a_n = \frac{1}{\sqrt{|n|}} \alpha_n\$ として

$$|\Phi_s\rangle = (c_{-n_1} \cdots c_{-n_i}) (b_{-m_1} \cdots b_{-m_j}) (a_{-p_1} \cdots a_{-p_k}) |1\rangle, \quad (3.52)$$

$$\langle \Phi_s^c | = \langle 1^c | (a_{p_k} \cdots a_{p_1}) (c_{m_j} \cdots c_{m_1}) (b_{n_i} \cdots b_{n_1}), \quad (3.53)$$

$$\langle \Phi_s | = (-1)^{i+j} \langle 1 | (c_{n_1} \cdots c_{n_i}) (b_{m_1} \cdots b_{m_j}) (a_{p_1} \cdots a_{p_k}), \quad (3.54)$$

$$|\Phi_s^c\rangle = (-1)^{k+j} (a_{-p_k} \cdots a_{-p_1}) (c_{-m_j} \cdots c_{-m_1}) (b_{-n_i} \cdots b_{-n_1}) |1^c\rangle \quad (3.55)$$

となる。すると、\$\langle \Phi_r | \Phi_s^c \rangle = (-1)^{\Phi_r} \delta_{rs}\$ であることがわかる。

完全性より、

$$1 = \sum_r |\Phi_r\rangle \langle \Phi_r^c | = \sum_r |\Phi_r^c\rangle \langle \Phi_r | (-1)^{\Phi_r} \quad (3.56)$$

である。すると、\$\langle A | B \rangle = (-1)^{AB} \langle B | A \rangle\$ が成り立つ。それは、\$\langle A | = \sum_s a_s \langle \Phi_s^c |\$, \$|B\rangle = \sum_s |\Phi_s\rangle b_s\$ とすると、\$\langle A | B \rangle = \sum_s a_s b_s\$ であって、一方、\$\langle B | A \rangle = \sum_s a_s b_s (-1)^{(a+s)(b+s)}\$ であることから従う。

3.1.3 Reflector

次に reflector を定義する。それは

$$\langle R_{12}| = \sum_r {}_2\langle \Phi_r | {}_1\langle \Phi_r^c | \quad (3.57)$$

である²。この reflector は、 $|A\rangle_1 = \sum_s a_s |\Phi_s\rangle = \sum_s a_s^c |\Phi_s^c\rangle$ に気をつけると、

$$\langle R_{12}|A\rangle_1 = \sum_r {}_2\langle \Phi_r | a_s = {}_2\langle A|, \quad \langle R_{12}|A\rangle_2 = \sum_r (-1)^{rs} {}_1\langle \Phi_r^c | a_s^c (-1)^r = {}_1\langle A| \quad (3.58)$$

と作用することが分かる。これより、reflector は添え字について対称だとわかる。つまり、 $\langle R_{12}| = \langle R_{21}|$ 。これを一般化した関係式がある。今、 $\sum_{N_{\text{gh}}[\Phi_s]=G} |\Phi_s\rangle_1 |\Phi_s^c\rangle_2$ に完全系をはさむと、(3.38) より、ghost number が 6 ずれている状態が 0 でない内積を持つことに注意して、

$$\sum_{N_{\text{gh}}[\Phi_s]=G} |\Phi_s\rangle_1 |\Phi_s^c\rangle_2 = \sum_{N_{\text{gh}}[\Phi_s]=G} \sum_{p,q} (-1)^p |\Phi_p^c\rangle_1 \langle \Phi_p | \Phi_s \rangle |\Phi_q\rangle_2 \langle \Phi_q^c | \Phi_s^c \rangle \quad (3.59)$$

$$= \sum_{N_{\text{gh}}[\Phi_s]=G} \sum_{\substack{N_{\text{gh}}[\Phi_p]=6-G \\ N_{\text{gh}}[\Phi_q]=6-G}} (-1)^p (-1)^{pq} |\Phi_q\rangle_2 |\Phi_p^c\rangle_1 \langle \Phi_p | \Phi_s \rangle \langle \Phi_q^c | \Phi_s^c \rangle \quad (3.60)$$

$$= \sum_{\substack{N_{\text{gh}}[\Phi_p]=6-G \\ N_{\text{gh}}[\Phi_q]=6-G}} \sum_s (-1)^p |\Phi_q\rangle_2 |\Phi_p^c\rangle_1 \langle \Phi_p | \Phi_s \rangle \langle \Phi_s^c | \Phi_q^c \rangle \quad (3.61)$$

$$= \sum_{N_{\text{gh}}[\Phi_q]=6-G} \sum_p |\Phi_q\rangle_2 (-1)^p |\Phi_p^c\rangle_1 \langle \Phi_p | \Phi_q^c \rangle \quad (3.62)$$

$$= \sum_{N_{\text{gh}}[\Phi_q]=6-G} |\Phi_q\rangle_2 |\Phi_q^c\rangle_1 \quad (3.63)$$

を得る。ここで、 p と s が同じ統計性を持つこと、および、 $(-1)^{sq} \langle \Phi_q^c | \Phi_s^c \rangle = \langle \Phi_s^c | \Phi_q^c \rangle$ であること、および ghost number の和が 6 にならない状態同士の内積は 0 になることを用いた。これより、次の性質

$$\sum_{N_{\text{gh}}[\Phi_s]=G} |\Phi_s\rangle_1 |\Phi_s\rangle_2 = \sum_{N_{\text{gh}}[\Phi_s]=6-G} |\Phi_s\rangle_2 |\Phi_s^c\rangle_2 \quad (3.64)$$

$$\sum_{N_{\text{gh}}[\Phi_s]=G} {}_1\langle \Phi_s | {}_2\langle \Phi_s | = \sum_{N_{\text{gh}}[\Phi_s]=6-G} {}_2\langle \Phi_s | {}_1\langle \Phi_s^c | \quad (3.65)$$

が示せた。一つ目の式の左辺の $|\Phi_s\rangle_1$ の ghost number は G で、 $|\Phi_s\rangle_2$ の ghost number は $6-G$ 、右辺では、 $|\Phi_s\rangle_2$ の ghost number は $6-G$ 、 $|\Phi_s^c\rangle_1$ の ghost number は $6-(6-G) = G$ となり、両辺で一致している。

² これを $\langle R(1,2)|$ と書くこともある。

(3.42) より、reflector に関して次の関係

$$\langle R_{12} | (\alpha_n^1 - \alpha_{-n}^2) = 0, \quad (3.66)$$

$$\langle R_{12} | (c_n^1 + c_{-n}^2) = 0, \quad (3.67)$$

$$\langle R_{12} | (b_n^1 - b_{-n}^2) = 0, \quad (3.68)$$

$$\langle R_{12} | (Q_B^1 + Q_B^2) = 0 \quad (3.69)$$

が成り立つことは明らかである。これを接続の条件と呼ぶ。特に、3番目の式は、BRST 対称性の要請と関係している。これまでに導入した内積はこの reflector を使って

$$\langle A|B\rangle = \langle R_{12}|A\rangle_1|B\rangle_2, \quad (3.70)$$

$$\langle A, B\rangle = \langle R_{12}|A\rangle_1 c_0^{(2)-} |B\rangle_2 \quad (3.71)$$

と表せる。この表示を用いると、

$$\langle A, B\rangle = \langle R_{12}|A\rangle_1 c_0^{(2)-} |B\rangle_2 \quad (3.72)$$

$$= (-1)^{A(B+1)} \langle R_{12}|c_0^{(2)-}|B\rangle_2 |A\rangle_1 \quad (3.73)$$

$$= -(-1)^{A(B+1)} \langle R_{12}|c_0^{(1)-}|B\rangle_2 |A\rangle_1 \quad (3.74)$$

$$= (-1)^{(A+1)(B+1)} \langle R_{21}|B\rangle_2 c_0^{(1)-} |A\rangle_1 \quad (3.75)$$

$$= (-1)^{(A+1)(B+1)} \langle B, A\rangle \quad (3.76)$$

$$(3.77)$$

がわかる。また、証明は略すが、 A, B が b_0^-, L_0^- で消されるとき、

$$\langle Q_B A, B\rangle = (-1)^A \langle A, Q_B B\rangle \quad (3.78)$$

が成り立つ。

上で述べた bra の reflector と同様に ket reflector $|R_{12}\rangle$ を

$$|R_{12}\rangle \equiv \sum_s |\Phi_s\rangle_1 |\Phi_s^c\rangle_2 \quad (3.79)$$

と定義する。これに関しても (3.64) より、添え字の入れ替えに関する対称性 $|R_{12}\rangle = |R_{21}\rangle$ が成り立つ。

上で導入した二つの reflector をかけると、

$$\langle R_{ij}|R_{jk}\rangle = \sum_{r,s} \langle \Phi_r | \langle \Phi_r^c | \Phi_s \rangle_j | \Phi_s^c \rangle_k \quad (3.80)$$

$$= \sum_s \langle \Phi_s | \cdot | \Phi_s^c \rangle_k \quad (3.81)$$

$$= \sum_s (-1)^s | \Phi_s^c \rangle_k \cdot \langle \Phi_s | \quad (3.82)$$

を得る。これはほとんど 1 (3.56) で、Hilbert 空間を取り替える働きをする。すなわち、

$$\langle R_{ij} | R_{jk} \rangle | A \rangle_i = | A \rangle_k \quad (3.83)$$

である。〈 R_{12} 〉と同様に次の関係

$$\left(\alpha_n^{(1)\mu} - \alpha_{-n}^{(2)\mu} \right) | R_{12} \rangle = 0, \quad (3.84)$$

$$\left(c_n^1 + c_{-n}^2 \right) | R_{12} \rangle = 0, \quad (3.85)$$

$$\left(b_n^1 - b_{-n}^2 \right) | R_{12} \rangle = 0, \quad (3.86)$$

$$\left(Q_B^1 + Q_B^2 \right) | R_{12} \rangle = 0 \quad (3.87)$$

が成り立つ。

つぎに projector P_i を定義しておく。閉弦の場合、正則なモードと反正則なモードが同数励起していなくてはならないという level matching 条件がある。そこで、任意の状態からこの条件に従う部分を切り出す projector を、

$$P_i = \int \frac{d\theta}{2\pi} e^{i\theta(L_0^i - \bar{L}_0^i)} \quad (3.88)$$

で定義する。この projector を用いて、' つきの reflector を

$$| R'_{12} \rangle = P_1 P_2 | R_{12} \rangle \quad (3.89)$$

と定義する³。BRST 演算子は L_0, \bar{L}_0 と可換であるから、この reflector は 前述の reflector と同様に、

$$\left(Q_B^1 + Q_B^2 \right) | R'_{12} \rangle = 0 \quad (3.90)$$

を満たす。

ついでに~ つきの状態および reflector を、

$$| \tilde{\Phi}_s \rangle \equiv b_0^- | \Phi_s^c \rangle, \quad (3.91)$$

$$| \tilde{R}_{12} \rangle \equiv b_0^{(1)-} | R_{12} \rangle = b_0^{(2)-} | R_{12} \rangle \quad (3.92)$$

$$= \sum_s b_0^{(2)-} | \Phi_s \rangle_1 | \Phi_s^c \rangle_2 = \sum_s (-1)^s | \Phi_s \rangle_1 | \tilde{\Phi}_s \rangle_2 \quad (3.93)$$

と定義する⁴。この新しい reflector は、そのままでは $(Q_B^1 + Q_B^2)$ では消えないが、これから ' つきの reflector を作ると、 $\{Q_B, b_0^1\} = L_0^-$ および $PL_0^- = 0$ に注意すると、により、0 を与え

³ 実際には $L_0^- | \Phi_r \rangle_1 = 0$ なら、 $L_0^- | \Phi_r^c \rangle_2 = 0$ であるから、projector は一つでよい。

⁴ 等号は $(b_n^1 - b_{-n}^2) | R_{12} \rangle = 0$ より従う。

ることがわかる。つまり、

$$|\tilde{R}'_{12}\rangle = P_1 P_2 |\tilde{R}_{12}\rangle \quad (3.94)$$

とすると、

$$(Q_B^1 + Q_B^2) |\tilde{R}'_{12}\rangle = 0 \quad (3.95)$$

である。

この~つきの状態に関して、次の恒等式が成り立つ:

$$\sum_{G(\Phi_s)=G} f(G) |\Phi_s\rangle_1 O |\tilde{\Phi}_s\rangle_2 = - \sum_{G(\Phi_s)=5-G} f(G) |\tilde{\Phi}_s\rangle_1 O |\Phi_s\rangle_2. \quad (3.96)$$

ここで、 $f(G)$ は ghost number の任意の関数で、 O は任意の演算子である。これを示すためには、次の事実を使う。それは、 a を定数として、 $|\Phi_s\rangle = a c_0^- |\Phi_{s'}\rangle$ かつ $b_0^- |\Phi_{s'}\rangle = 0$ のとき、 $|\Phi_s^c\rangle = \frac{1}{a} (-1)^{s'} |\tilde{\Phi}_{s'}\rangle$ である、というものである。これは conjugate state の節で与えた一般的な対応から、ある $|\chi\rangle$ に対して $|\Phi_s^c\rangle = b_0^- |\chi\rangle$ であることから従う。この状態に関して和をとるものとする、上の式の左辺は、(3.64) をつかって、

$$\sum_{G(\Phi_s)=G} f(G) |\Phi_s\rangle_1 O |\tilde{\Phi}_s\rangle_2 = \sum_{G(\Phi_s)=6-G} f(G) (-1)^{(O+1)s} O b_0^{(2)-} |\Phi_s\rangle_1 |\Phi_s^c\rangle_2 \quad (3.97)$$

$$= \sum_{G(\Phi_s)=6-G} f(G) (-1)^{(O+1)s} O b_0^{(2)-} |\Phi_s\rangle_2 |\Phi_s^c\rangle_1 \quad (3.98)$$

$$= \sum_{G(\Phi_s)=6-G} f(G) (-1)^{(O+1)s} O b_0^{(2)-} c_0^{(2)-} |\Phi_{s'}\rangle_2 |\Phi_s^c\rangle_1 \quad (3.99)$$

$$= \sum_{G(\Phi_{s'})=5-G} f(G) (-1)^{(O+1)(s'+1)+s'} O |\Phi_{s'}\rangle_2 |\tilde{\Phi}_{s'}\rangle_1 \quad (3.100)$$

$$= - \sum_{G(\Phi_s)=5-G} f(G) |\tilde{\Phi}_{s'}\rangle_1 O |\Phi_{s'}\rangle_2 \quad (3.101)$$

を得る。

ここで reflector を、生成消滅演算子で表したものを与えておく。これは次章でわかるが、BRST 変換の nilpotency を手掛りに弦の貼り付けを決める際に重要である。上で述べた、 α, c, b と reflector の関係式を満たすように作ると、reflector は、

$$\langle R_{12}| = \int \frac{dp}{(2\pi)^d} {}_1\langle \downarrow\downarrow, p| {}_2\langle \downarrow\downarrow, p| \exp E_{12} \left(c_0^{(1)+} + c_0^{(2)+} \right) \left(c_0^{(1)-} + c_0^{(2)-} \right), \quad (3.102)$$

$$E_{12} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \left(\alpha_n^1 \cdot \alpha_n^2 + c_n^1 b_n^2 - b_n^1 c_n^2 \right) + \text{anti holo. part} \quad (3.103)$$

である。後に見るようにこれは弦の向きを変える操作に対応している。

3.2 String Field

次に string field について述べる。

前節で CFT から作られる Hilbert 空間の基底 $\{|\Phi_s\rangle\}$ を考えたが、string field はこれらの重ねあわせであって、

$$|\Psi\rangle = \sum_s |\Phi_s\rangle \psi_s \quad (3.104)$$

と書けるものである。ここで、 ψ_s は後にターゲット空間中の場と同定されるものである。しかし、まだこの段階では ψ_s は一般の複素場である。

閉弦の場であるから、level matching 条件を満たすものとする。すなわち、

$$(L_0 - \bar{L}_0) |\Psi\rangle = 0 \quad (3.105)$$

である。また、physical な部分をうまく切り出すために、

$$(b_0 - \bar{b}_0) |\Psi\rangle = 0 \quad (3.106)$$

も要請する。すると、string field は、すでに導入した Fock vacuum に関して、

$$|\Psi\rangle = |\phi_s, \downarrow\downarrow\rangle \psi_s + |\phi_s, \uparrow\downarrow\rangle \tilde{\psi}_s \quad (3.107)$$

と展開できる。

次に、作用に入る string field $|\Psi\rangle$ の ghost number は 2 であるとする。それゆえ、 $|\Psi\rangle$ の Grassmann parity は even である。

今、string field に現れる場 ψ_s は一般の複素場であるが、これは例えば、タキオンは実スカラー場であることを考えると、自由度が大きすぎる。そこで、reality という条件を課して Hilbert 空間を半分に制限する。それは、

$$(|\Psi\rangle)^\dagger = \langle\Psi_{\text{hc}}| = -\langle\Psi| \quad (3.108)$$

である。これは時空の場に対する条件に書き換えると意味がわかる。今、string field 中には、タキオンが

$$|T\rangle = \int \frac{dp}{(2\pi)^d} \phi(p) c_1 \bar{c}_1 |1, p\rangle \quad (3.109)$$

の形で入っているとして全体の規格化を決めると、この Hermite 共役と BPZ 共役は、それぞれ

$$\langle T_{\text{hc}}| = \int \frac{dp}{(2\pi)^d} \phi^*(p) \langle 1, p| \bar{c}_{-1} c_{-1}, \quad (3.110)$$

$$\langle T| = \int \frac{dp}{(2\pi)^d} \phi(p) \langle 1, -p| c_{-1} \bar{c}_{-1} \quad (3.111)$$

であるから、 reality の条件は、

$$\phi^*(p) = \phi(-p) \quad (3.112)$$

となる。

第4章 京風閉弦の場の理論

現在 open string field theory として知られているものにはいわゆる HIKKO によって提唱されたものと Witten によるものと 2通りある。closed string field theory には、HIKKO によるものと、Witten の open string field theory を closed string に拡張した non-polynomial closed string field theory がある。

この章では最初に点粒子を例に、BRST 演算子を用いた作用を与え、次にそれから類推して自由な string の action を作り、その後相互作用の入った理論を考える。HIKKO model の要点を述べた後、non-polynomial closed string field theory の構造を述べる。最後に、HIKKO 模型の string length parameter α の問題を取り除いた covariantized light-cone SFT を紹介する¹。

4.1 点粒子の場合

一般に SFT の作用の kinetic term は BRST 演算子を用いて表される。この表示では理論の対称性が見やすくなるという利点がある。これは一見通常の場合の理論と異なるように見えるが、実は等価であるということ点を点粒子を例にとって示す [21]。

ここでは、 d 次元の scalar 粒子 ϕ で、3体の相互作用をするもの考える。つまり、 ϕ を記述する作用は、

$$S = \int d^d x \left(\frac{1}{2} \phi (\square - m^2) \phi - g \phi^3 \right) \quad (4.1)$$

である。

Grassmann odd な parameter c 及び、場 ψ を導入して、

$$\Phi(x, c) = \phi(x) + c\psi(x) \quad (4.2)$$

と書くことにする。Grassmann parity は、 $|\Phi| = |\phi| = 0, |c| = |\psi| = 1$ である。この Φ に対

¹ この章の題字の中の”風”という言葉は、似非という印象を与えるという主張もあるが、ここでは簡単のため、深入りしない [65]。

して BRST 変換 δ_B^0 を

$$\delta_B^0 \Phi = \frac{1}{2} c (\square - m^2) \Phi \equiv Q_B \Phi \quad (4.3)$$

と定義する。 ϕ, ψ で書くと、

$$\delta_B^0 \phi = 0 \quad (4.4)$$

$$\delta_B^0 \psi = \frac{1}{2} (\square - m^2) \phi \quad (4.5)$$

であって、 $\tilde{\Phi}(x, c) = \Phi(x, -c)$ とすると、

$$\tilde{\Phi} c \frac{\partial}{\partial c} \Phi = (\phi - c\psi) \cdot c \frac{\partial}{\partial c} (\phi + c\psi) = \phi c \psi \quad (4.6)$$

となっている。すると、作用 (4.1) の kinetic term は、これを S_0 として

$$S_0 = \int d^d x \, dc \, \delta_B^0 \left(\tilde{\Phi} c \frac{\partial}{\partial c} \Phi \right) = \int d^d x \, dc \, \tilde{\Phi} \left[c \frac{\partial}{\partial c}, Q_B \right] \Phi \quad (4.7)$$

と書けることがわかる。ただし、

$$\int d^d x \, dc \, (Q_B \tilde{\Phi}) \Psi = - \int d^d x \, dc \, \tilde{\Phi} Q_B \Psi \quad (4.8)$$

を使った。

次に、3 体の相互作用を含めるために、BRST 変換を $\delta_B = \delta_B^0 + \delta_B^1$ に拡張する。 \mathbf{i} で (x_i, c_i) を表すことにすると、3 点 vertex

$$V(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}) = \delta(x_1 - x_3) \delta(x_2 - x_3) c_3 c_1 c_2 \quad (4.9)$$

を用いて、 δ_B^1 を

$$\delta_B^1 \Phi(\mathbf{3}) = g \int d\mathbf{1} \, d\mathbf{2} \, \Phi(\mathbf{1}) \, \Phi(\mathbf{2}) V(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \tilde{\mathbf{3}}) = -c_3 \phi^2(x_3) \quad (4.10)$$

と定義する。 ϕ, ψ で書けば、

$$\delta_B^1 \phi = 0 \quad (4.11)$$

$$\delta_B^1 \psi = -\phi^2 \quad (4.12)$$

となる。ここで、

$$\delta_B^1 \left(\tilde{\Phi} c \frac{\partial}{\partial c} \Phi \right) = (\delta_B^1 \tilde{\Phi}) c \frac{\partial}{\partial c} \Phi + \tilde{\Phi} c \frac{\partial}{\partial c} \delta_B^1 \Phi \quad (4.13)$$

$$= g \int d\mathbf{1} \, d\mathbf{2} \, \Phi(\mathbf{1}) \Phi(\mathbf{2}) V(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}) c \frac{\partial}{\partial c} \Phi(\mathbf{3}) + \tilde{\Phi}(\mathbf{3}) c \frac{\partial}{\partial c} g \int d\mathbf{1} \, d\mathbf{2} \, \Phi(\mathbf{1}) \Phi(\mathbf{2}) V(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \tilde{\mathbf{3}}) \quad (4.14)$$

であって、2行目の第一項は V のなかの c_3 と微分演算子の前の c により消える。よって、

$$\delta_{\text{B}}^1 \left(\tilde{\Phi} c \frac{\partial}{\partial c} \Phi \right) (\mathbf{3}) = \tilde{\Phi}(\mathbf{3}) c \frac{\partial}{\partial c} g \int d\mathbf{1} d\mathbf{2} \Phi(\mathbf{1}) \Phi(\mathbf{2}) V(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \tilde{\mathbf{3}}) \quad (4.15)$$

$$= -g \int d\mathbf{1} d\mathbf{2} \tilde{\Phi}(\mathbf{3}) \Phi(\mathbf{1}) \Phi(\mathbf{2}) V(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}) \quad (4.16)$$

$$= -c_3 g \phi^3(x_3) \quad (4.17)$$

となるので、相互作用項 S^1 は

$$S^1 = \int d^d x dc \delta_{\text{B}}^1 \left(\tilde{\Phi} c \frac{\partial}{\partial c} \Phi \right) = -g \int d\mathbf{1} d\mathbf{2} d\mathbf{3} \Phi(\mathbf{3}) \Phi(\mathbf{1}) \Phi(\mathbf{2}) V(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}) \quad (4.18)$$

と書ける。結局、作用 (4.1) は

$$S = S^0 + S^1 = \int d^d x dc \delta_{\text{B}} \left(\tilde{\Phi} c \frac{\partial}{\partial c} \Phi \right) \quad (4.19)$$

と表すことができる。なお、ここで定義した BRST 演算子について $\delta_{\text{B}}^2 = 0$ が成り立つのは容易にわかる。

4.2 Free Case

まず手始めに相互作用のない、自由な弦の場の理論を考える [21, 22]。前節の点粒子の例より、ket 表示の string field は physical な部分 + unphysical な部分 \times ghost zero mode であると推測できる。開弦の場合は ghost-antighost は一組なのでこれは正しい。一方閉弦の場合は二組あるので、多少事情がことなり、以下で説明するように入れ子構造になっている。ここの記号などは [23] を参考にした。

すでに考えたように、運動項のみの作用は、BRST charge Q_{B} を用いて、

$$S_0 = \Phi \cdot Q_{\text{B}} \Phi = \int dx \langle \Phi(x) | Q_{\text{B}} b_0^- | \Phi(x) \rangle \quad (4.20)$$

である²。 $|\Phi(x)\rangle$ は、前章で述べたように、

$$|\Phi(x)\rangle = c_0^- \left(|\phi(x)\rangle + c_0^+ |\psi\rangle \right) + \left(|\chi(x)\rangle + c_0^+ |\eta(x)\rangle \right) \quad (4.21)$$

と展開できる。この作用は次のゲージ不変性を持っている。

$$\delta |\Phi(x)\rangle = Q_{\text{B}} |\Lambda\rangle \quad (4.22)$$

² ここでは string field の汎関数表示を用いる。詳しくは次節で述べる。

実際、 Q_B の nilpotency、 $\{Q_B, b(z)\} = T(z)$ より $\{Q_B, b_0^-\} = (L_0 - \bar{L}_0)$ であること、さらに level matching の条件から $\langle \Phi | (L_0 - \bar{L}_0) = 0$ となることに注意すれば、

$$\delta S_0 = \int dx \left[\langle \Lambda | Q_B^2 b_0^- | \Phi \rangle + \langle \Phi | Q_B b_0^- Q_B | \Lambda \rangle \right] \quad (4.23)$$

$$= \int dx \langle \Phi | (L_0 - \bar{L}_0) Q_B | \Lambda \rangle = 0 \quad (4.24)$$

である。

ここで、この自由な作用の表す理論を明確にするために弦の場を展開して、作用を書きかえてみる。 S_0 での内積で b_0^- が入っているから (4.21) の第二項は寄与しないので、第一項のみを書く。すると、level matching 条件を考慮して、

$$|\Phi(x)\rangle = ic_0^- \left\{ 2\varphi(x)|0\rangle + \hat{h}_{\mu\nu}(x)(\alpha_{-1}^\mu \alpha_{-1}^\nu)^{+-}|0\rangle + A_{\mu\nu}(x)(\alpha_{-1}^\mu \alpha_{-1}^\nu)^{[+-]}|0\rangle \right. \\ \left. + 2i\hat{D}(x)(c_{-1}b_{-1})^{(++)}|0\rangle - 2S(x)(c_{-1}b_{-1})^{[+-]}|0\rangle + \dots \right\} \quad (4.25)$$

$$+ ic_0^+ \left\{ -b_\mu(x)(b_{-1}\alpha_{-1}^\mu)^{(+--)}|0\rangle + e_\mu(x)(b_{-1}\alpha_{-1}^\mu)^{[+-]}|0\rangle + \dots \right\} \quad (4.26)$$

となる。ただし、ここで、 $|0\rangle$ は Fock vacuum で、

$$(ab)^{(+--)} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(a\bar{b} + \bar{a}b), \quad (ab)^{[+-]} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(a\bar{b} - \bar{a}b) \quad (4.27)$$

と定義した。

また、ゲージ変換に現れた $|\Lambda\rangle$ の展開を、

$$|\Lambda\rangle = 4 \left\{ i\varepsilon_\mu(b_{-1}\alpha_{-1}^\mu)^{(+--)}|0\rangle - i\zeta_\mu(x)(b_{-1}\alpha_{-1}^\mu)^{[+-]}|0\rangle + \dots \right\} - c_0 \left\{ \sqrt{2}\eta(x)b_{-1}\bar{b}_{-1}|0\rangle \dots \right\} \quad (4.28)$$

と書いておく。

上の弦の場の展開を作用 (4.20) に代入すると、BRST charge の生成消滅演算子での表示を用いて、

$$S_0 = \Phi \cdot Q_B \Phi \quad (4.29)$$

$$= \int dx \left(\frac{1}{2}\varphi(\square + 8)\varphi + \frac{1}{4}\hat{h}_{\mu\nu}\square\hat{h}^{\mu\nu} + \frac{1}{4}A_{\mu\nu}\square A^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\hat{D}\square\hat{D} + \frac{1}{2}S\square S \right. \\ \left. - \frac{1}{2}(b_\mu^2 + e_\mu^2) + b^\mu(\partial^\nu\hat{h}_{\mu\nu} - \partial_\mu\hat{D}) - e^\mu(\partial^\nu A_{\mu\nu} - \partial_\mu S) + \dots \right) \quad (4.30)$$

$$\quad (4.31)$$

となる。これから、第一項の φ の質量の 2 乗は -8 であるから、 φ はタキオンであることがわかる。ただし、ここでは場について 2 次の部分しか計算していないのでタキオンのポテンシャルはわからない。

ゲージ変換を成分で書いておくと、

$$\delta \hat{h}_{\mu\nu} = \partial_\mu \varepsilon_\nu(x) + \partial_\nu \varepsilon_\mu(x) \quad (4.32)$$

$$\delta \hat{D}(x) = \partial \cdot \varepsilon(x) \quad (4.33)$$

$$\delta b_\mu(x) = \square \varepsilon_\mu(x) \quad (4.34)$$

$$\delta A_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu \zeta_\nu(x) - \partial_\nu \zeta_\mu(x) \quad (4.35)$$

$$\delta S(x) = \partial \cdot \zeta + \eta(x) \quad (4.36)$$

$$\delta e_\mu(x) = \square \zeta_\mu(x) + \partial_\mu \eta(x) \quad (4.37)$$

などとなる。ここで、作用 (4.31) の中で、 b, c は運動項がないため容易に経路積分することができる。さらに

$$\hat{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} D \quad (4.38)$$

$$\hat{D} = D + \frac{1}{2} h^\mu{}_\mu \quad (4.39)$$

と変数変換すると作用 (4.31) は

$$S_0 = \int d^{26}x \left(\frac{1}{2} \varphi (\square + 8) \varphi - \frac{1}{2\kappa^2} (\sqrt{-g}R)_2 + \frac{1}{12} F_{\mu\nu\rho} F^{\mu\nu\rho} + 6D\square D + \dots \right) \quad (4.40)$$

となる。この時、時空が 26 次元であることを用いた。つまり、 $6 = (26 - 2)/4$ である。

ここで、

$$F_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu A_{\nu\rho} + \partial_\nu A_{\rho\mu} + \partial_\rho A_{\mu\nu} \quad (4.41)$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu} \quad (4.42)$$

である。 $F_{\mu\nu\rho}$ は反対称テンソルである。上のように計量をとるとき、 $(\sqrt{-g}R)_2$ は、 $\sqrt{-g}R$ の 2 次の部分、つまり、

$$-\frac{1}{2\kappa^2} (\sqrt{-g}R)_2 = \frac{1}{4} h^{\mu\nu} (\square h_\mu - 2\partial_\nu \partial^\rho h_{\mu\rho} + 2\partial_\mu \partial_\nu h^\rho{}_\rho - \eta_{\mu\nu} \square h^\rho{}_\rho) \quad (4.43)$$

である。これは Einstein action の 2 次の部分を与えるから、2 階の対称テンソル $h_{\mu\nu}$ は graviton と同定できる。タキオンの場合と同様、ここでは場について 2 次までしか考えていないので、相互作用を含んでいないので、graviton の高次の項は出てこず、この部分しか現れないのは当然である。さて、このとき、あらたに取り替えた場に関するゲージ変換は、先ほどの変換

から、

$$\delta h_{\mu\nu} = \partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu \quad (4.44)$$

$$\delta A_{\mu\nu} = \partial_\mu \zeta_\nu - \partial_\nu \zeta_\mu \quad (4.45)$$

$$\delta \varepsilon = 0 \quad (4.46)$$

$$\delta D = 0 \quad (4.47)$$

となることが容易にわかる。

上の (4.40) を得る際に、 b, c については経路積分をとった。この b, c は (4.26) の第二項、(4.21) の第一項の $c_0^- c_0^+$ に比例する項から来ていることがわかる。つまり、(4.21) において physical な場は、第一項の $c_0^- |\phi(x)\rangle$ に含まれているものであることが分かる。また、(4.40) において、 $F_{\mu\nu\rho}, D$ の質量項は現れず、それゆえ massless であることがわかる。

4.3 HIKKO model

弦の第一量子化が得られた後、1974年に弦の場の理論が提案された [24]。これは light-cone gauge で書かれていたため、現在では light-cone gauge SFT と呼ばれている。しかし、理論の対称性を調べるためには covariant な形式を知る必要がある。

1985年になって、前節で述べた自由な弦の場の理論が提唱された [21, 22]。その後、1986年にこの作用に相互作用を付け加えた、Lorentz covariant な理論が2種類提唱された。一つは HIKKO model [25, 26, 27, 28, 29] で、もう一つは Witten[18]によるものである。前者は相互作用として light-cone gauge SFT と同じ splitting joining を採用し、開弦と閉弦の2種類がある。後者は midpoint interaction を用いていて、開弦の場合が提唱された。後に closed string の場合にも拡張された。

この節では HIKKO model について述べる。上で触れたように、HIKKO は先行していた light-cone gauge SFT の共変な形式への拡張というべきものである。それゆえ HIKKO model での vertex は light-cone gauge SFT のものと似ている。しかし、light-cone gauge SFT では string の light-cone 方向の運動量 p^+ を特別扱いしていたのに対し、共変な HIKKO model ではそうした特別扱いは許されない。そのため、 p^+ と似た役割をする string length parameter α を導入する必要がある。

4.3.1 String Field

前章では string field の bra、ket での表示を述べた。ここでは HIKKO model でしばしば使われる汎関数での表示についてまとめておく。汎関数表示を用いると、式を簡潔に書くことができるので便利である。また、この節で用いる notation は前章と若干異なるのでここでまとめておく³。

まず、Target space での弦の位置は、 $X^\mu(\sigma)$ によってあらわされる。第一量子化の場合と異なり、world sheet を target space に写像しているわけではないので、world sheet 上の時間変数は含まれず、string を parametrize する σ ($-\pi \leq \sigma \leq \pi$) のみを引数とすることが重要である。この他に閉弦の場の理論には、ゲージ固定に必要な ghost $c(\sigma), b(\sigma)$ がある。それゆえ、閉弦の string field Φ の引数は、 X, c, b であるが、開弦の場合と異なり、ghost c の zero mode が残る。そこで、開弦での知識を生かすために、 c_0 は運動量表示を用いて、

$$\Phi [X^\mu, c, b; \pi_c^0, \alpha] \quad (4.48)$$

とする。ここで c は zero mode 以外の部分である。また、 $c_0 = -i \frac{\partial}{\partial \pi_c^0}$ と理解する。このとき、mode 展開は、前章の第一量子化の場合とほとんど同じで、 $\tau = 0$ としたものに等しい。ここでは、 $\sigma \simeq \sigma + 2\pi$ の周期性に注意して、

$$X^\mu(\sigma) = x^\mu + \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} (\alpha_n^\mu e^{-in\sigma} + \bar{\alpha}_n^\mu e^{in\sigma}) \quad (4.49)$$

$$c(\sigma) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-c_n e^{-in\sigma} + \bar{c}_n e^{in\sigma}) \quad (4.50)$$

$$b(\sigma) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (b_n e^{-in\sigma} + \bar{b}_n e^{in\sigma}) \quad (4.51)$$

とする。ここで、

$$\alpha_0^\mu = \alpha_0^\nu = \frac{1}{2} p^\mu, \quad (4.52)$$

$$c_0 = \frac{\partial}{\partial b_0} + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial \pi_c^0}, \quad \bar{c}_0 = \frac{\partial}{\partial b_0} - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial \pi_c^0} \quad (4.53)$$

$$b_0 = \frac{1}{2} b_0 - i\pi_c^0, \quad \bar{b}_0 = \frac{1}{2} \bar{b}_0 + i\pi_c^0 \quad (4.54)$$

³ しかし、原論文のものとも変えてある。

である。ただし、 $b_0 = \bar{b}_0$ である。また、 X, c, b はそれぞれ Hermite、つまり、

$$\alpha_{-n}^{\mu\dagger} = \alpha_n^\mu, \quad \bar{\alpha}_{-n}^{\mu\dagger} = \bar{\alpha}_n^\mu, \quad (4.55)$$

$$c_{-n}^{\mu\dagger} = c_n^\mu, \quad \bar{c}_{-n}^{\mu\dagger} = \bar{c}_n^\mu, \quad (4.56)$$

$$b_{-n}^{\mu\dagger} = b_n^\mu, \quad \bar{b}_{-n}^{\mu\dagger} = \bar{b}_n^\mu, \quad (4.57)$$

であるとする。さらにこれらに関して、交換関係を

$$[\alpha_n^\mu, \alpha_m^\nu] = n\delta_{n,-m}\eta^{\mu\nu} \quad (4.58)$$

$$\{c_n, b_m\} = \delta_{n,-m} \quad (4.59)$$

を設定する。これ以外に関しては 0 である。

こうすると、zero mode 以外の寄与は bra と ket で書くことができる。string field を、ghost zero mode に関して展開して、

$$|\Phi(x, b_0, \pi_c^0, \alpha)\rangle = -b_0|\phi(x, \alpha)\rangle + |\psi(x, \alpha)\rangle + b_0\pi_c^0|\chi(x, \alpha)\rangle + i\pi_c^0|\eta(x, \alpha)\rangle \quad (4.60)$$

と書ける。自由な弦の場合で見たように、物理的な自由度は antighost が一つだけかかっている部分、すなわち $|\phi\rangle$ からくるので、この部分の ghost number を 0 と定義する。つまり、 $|\Phi\rangle$ の ghost number は -1 と定まり、 ψ, χ, η の ghost number も $-1, 1, 0$ と決まる。

今、 Z で $(X^\mu, c, b; \pi_c^0, \alpha)$ を表すものとし、 z で Z のうち、 $(x^\mu, b_0; \pi_c^0, \alpha)$ 以外の部分、つまり zero mode 以外を表すとする。すると、bra、ket 表示と汎関数表示は

$$\Phi[Z] = \langle z|\Phi\rangle \quad (4.61)$$

$$\Phi^\dagger[Z] = \langle\Phi|z\rangle \quad (4.62)$$

で結びついている。上で、 $|\Phi\rangle$ は ghost number -1 を持つと述べた。 z の中には同数の ghost、antighost が含まれているので、ghost number は 0 である。すなわち、汎関数表示 $\Phi[Z]$ の ghost number は -1 である。

汎関数表示で書いた場合、次に述べる vertex を見通しよく書くことができる。また、

$$dZ_1 = dx^\mu db_0 d\pi_c^{(1)0} \frac{d\alpha}{2\pi} \times \prod_{n \geq 1} dx_n dC_n d\bar{C}_n dB_n d\bar{B}_n \quad (4.63)$$

である。ここで、 B_n, C_n は $b(\sigma), c(\sigma)$ の Fourier 変換である。

4.3.2 作用

ここで、相互作用を含む、閉弦の作用を与えておく。積などについてはこれから定義する。

開弦の理論では、正しい4体相互作用の振幅を与えるためには string field について3次だけでは不十分で、4次の項を必要であった [26, 27]。

しかし、閉弦の理論の場合は、3次までで十分である。そしてその作用は、

$$S = \Phi \cdot Q_B \Phi + \frac{2}{3} g \Phi^3 \quad (4.64)$$

である。この作用は、ゲージ変換

$$\delta \Phi = Q_B \Lambda + 2g \Phi * \Lambda \quad (4.65)$$

で不変である。

以下で、ここで用いられている積や演算子を具体的に構成する。

4.3.3 BRST 対称性および Vertex

この節では、まず、BRST 変換を考え、その nilpotency の条件から vertex の満たすべき方程式を導き、その解を見つける。

前章で述べた string field の reality の条件は汎関数表示で書けば、

$$\Phi^\dagger[Z] = \Phi[\tilde{Z}] \quad (4.66)$$

である。ただし、 $\tilde{Z} = (X(-\sigma), -c(-\sigma), b(-\sigma); \pi_c^0, -\alpha)$ である。string length も符号を変える点が必要である。これを bra、ket を使って書くと、Hermite 共役として書くことができ、

$$\langle \Phi(2) | = \int d\mathbf{1} \langle R(\mathbf{1}, \mathbf{2}) | | \Phi(1) \rangle \quad (4.67)$$

と定義される。ここで、 \mathbf{i} で $(x_i, b_0^i, \pi_c^{0(i)}, \alpha_i)$ を表すことにし、積分の測度は $d\mathbf{1} = dx_1 db_0 d\pi_c^{0(1)} \frac{d\alpha_1}{2\pi}$ である。 $\langle R(\mathbf{1}, \mathbf{2}) |$ は reflector で、生成消滅演算子を用いて、

$$\begin{aligned} \langle R(\mathbf{1}, \mathbf{2}) | &= \delta(x_1 - x_2) \delta(\pi_c^{0(1)} - \pi_c^{0(2)}) \delta(b_0^1 - b_0^2) 2\pi \delta(\alpha_1 + \alpha_2) \\ &\times {}_{12} \langle 0 | \exp \left[- \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \alpha_n^1 \cdot \alpha_n^2 + c_n^1 b_n^2 - b_n^1 c_n^2 + \text{anti-holo. part} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.68)$$

と書かれる。

この定義を理解するために、例えば $\frac{1}{m}\alpha_m^{1\mu}$ ($m < 0$) に reflector がどのように働くかを見
てみる。今、anti-holomorphi part は考えなくてよいから、contraction の組み合わせの数を
考えて、

$${}_1\langle 0|_2\langle 0| \exp \left[- \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\alpha_n^1 \cdot \alpha_n^2 + c_n^1 b_n^2 - b_n^1 c_n^2 + (\bar{\alpha}, \bar{c}, \bar{b}) \right) \right] \frac{1}{m}\alpha_m^{1\mu} \quad (4.69)$$

$$= \frac{1}{m} {}_1\langle 0|_2\langle 0| \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)^N}{N!} \left(\sum_n \frac{1}{n}\alpha_n^1 \cdot \alpha_n^2 \right)^N \alpha_m^{1\mu} \exp \left[- \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n^1 b_n^2 - b_n^1 c_n^2 + (\bar{\alpha}, \bar{c}, \bar{b}) \right) \right] \quad (4.70)$$

$$= \frac{1}{m} {}_1\langle 0|_2\langle 0| \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(-1)^N}{(N-1)!} \left(\sum_n \frac{1}{n}\alpha_n^1 \cdot \alpha_n^2 \right)^{N-1} \sum_n \frac{1}{n} n \delta_{n,-m} \alpha_n^{2\mu} \\ \times \exp \left[- \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n^1 b_n^2 - b_n^1 c_n^2 + (\bar{\alpha}, \bar{c}, \bar{b}) \right) \right] \quad (4.71)$$

$$= {}_1\langle 0|_2\langle 0| \exp \left[- \sum_n \left(\frac{1}{n}\alpha_n^1 \cdot \alpha_n^2 + c_n^1 b_n^2 - b_n^1 c_n^2 + (\bar{\alpha}, \bar{c}, \bar{b}) \right) \right] \frac{1}{-m} \alpha_{-m}^{2\mu} \quad (4.72)$$

を得る。つまり、 $\sum_n \frac{1}{n} \alpha_n^{1\mu} e^{-in\sigma}$ に作用させると、

$$\sum_n \frac{1}{-n} \alpha_{-n}^{2\mu} e^{-in\sigma} = \sum_n \frac{1}{n} \alpha_n^{2\mu} e^{in\sigma} = \sum_n \frac{1}{n} \alpha_n^{2\mu} e^{-in(-\sigma)} \quad (4.73)$$

となるから、

$$\langle R(\mathbf{1}, \mathbf{2}) | X^{1\mu}(\sigma) = \langle R(\mathbf{1}, \mathbf{2}) | X^{2\mu}(-\sigma) \quad (4.74)$$

が成り立つ。一方、ghost に関しては反交換関係を設定しているので、 b に作用させた場合は
(4.68) 中の符号と打ち消しあい、 X と同様の関係式が成り立つが、 c に作用させた場合は打
ち消さず、符号を変える。 π_c^0, α に関しては δ 関数に注目して、

$$\langle R(\mathbf{1}, \mathbf{2}) | c^1(\sigma) = \langle R(\mathbf{1}, \mathbf{2}) | -c^2(-\sigma) \quad (4.75)$$

$$\langle R(\mathbf{1}, \mathbf{2}) | b^1(\sigma) = \langle R(\mathbf{1}, \mathbf{2}) | b^2(-\sigma) \quad (4.76)$$

$$\langle R(\mathbf{1}, \mathbf{2}) | \alpha^1 = \langle R(\mathbf{1}, \mathbf{2}) | (-\alpha^2) \quad (4.77)$$

$$\langle R(\mathbf{1}, \mathbf{2}) | \pi_c^{(1)0} = \langle R(\mathbf{1}, \mathbf{2}) | \pi_c^{(2)0} \quad (4.78)$$

である。このように reflector は bra を ket に変えるとともに σ の向きを変える。

この中には δ 関数が含まれているので、

$$\langle R(\mathbf{1}, \mathbf{2}) | (X^1 - X^2) = 0 \quad (4.79)$$

が成り立つ。なお、ghost の部分に対しても同様の関係式が成り立つ。

BRST charge は、

$$L_n^X = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} : \alpha_m \cdot \alpha_{-m} :, \quad (4.80)$$

$$L_n^{\text{FP}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (n+m) : b_{n-m} c_m :, \quad (4.81)$$

$$Q_B = -2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} : c_{-n} \left(L_n^X + \frac{1}{2} L_n^{\text{FP}} - \delta_{n,0} \right) : + \text{anti holo.} \quad (4.82)$$

$$= \frac{\partial}{\partial b_0} L + b_0 M + i \frac{\partial}{\partial \pi_c^0} (L - \bar{L}) - 2i \pi_c^0 (M - \bar{M}) + \tilde{Q}_B, \quad (4.83)$$

$$L = 2(L + \bar{L}), \quad L = - \left(L_0^X + L_0^{\text{FP}} \right) + 1, \quad (4.84)$$

$$M_+ = \sum_{n \geq 1} 2n c_{-n} c_n, \quad M_- = \bar{M}_+, \quad (4.85)$$

$$M = M_+ + M_- \quad (4.86)$$

で与えられる。ここで、便宜のために前章で述べたものと係数を変えた。これは正則な部分と反正則な部分との和になっているので、開弦の場合の BRST 演算子を二つ足したものと解釈できる。開弦の場合は 26 次元で nilpotent であることが分かっている、なおかつ正則な部分と反正則な部分は反交換するので、26 次元とすると $Q_B^2 = 0$ が従う。また、明らかに BRST 演算子 Q_B は ghost number 1 を持つ。

次に 3 点の vertex を考える。まず、自由な弦の作用は

$$S = \Phi \cdot Q_B \Phi \quad (4.87)$$

であった。この作用は、 $\delta \Phi = Q_B \Phi$ で不変であった。そこで、点粒子の場合と同様に、BRST 変換を、結合定数 g について 0 次と 1 次の部分に分けて、 $\delta_B = \delta_B^0 + \delta_B^1$ と書き、その Φ に対する作用を、

$$\delta_B^0 \Phi[Z] = Q_B \Phi[Z], \quad \delta_B^0 |\Phi(\mathbf{1})\rangle = Q_B |\Phi(\mathbf{1})\rangle, \quad (4.88)$$

$$\delta_B^1 \Phi[Z] = (\Phi * \Phi)[Z], \quad \delta_B^1 |\Phi(\mathbf{1})\rangle = |(\Phi * \Phi)(\mathbf{1})\rangle \quad (4.89)$$

と定義する。ただし、

$$(\Phi * \Psi)[Z_3] = \int dZ_1 dZ_2 \Phi[Z_1] \Phi[Z_2] V[Z_1, Z_2, \tilde{Z}_3] \quad (4.90)$$

$$|(\Phi * \Phi)(\mathbf{3})\rangle = \int d\mathbf{1} d\mathbf{2} \langle \Phi(\mathbf{1}) | \langle \Psi(\mathbf{2}) | |V(\tilde{\mathbf{1}}, \tilde{\mathbf{2}}, \tilde{\mathbf{3}})\rangle \quad (4.91)$$

である⁴。ここで、 $d\bar{Z}_1 d\bar{Z}_2 = dZ_1 dZ_2$ であることを使った。また、 δ_B^1 も ghost number 1 を持つべきで、それゆえ、左辺の ghost number は 0。di の ghost number が 0 であることに注意すれば、 $|V\rangle$ の ghost number は 2 でなければならない。

以上を踏まえて、BRST 変換を

$$\delta_B \Phi = \delta_B^0 \Phi + \delta_B^1 \Phi = Q_B \Phi + g \Phi * \Phi \quad (4.92)$$

と書く。

さて、この BRST 変換の nilpotency を要請する。 $(\delta_B^0)^2 = Q_B^2 = 0$ であるから、

$$(\delta_B)^2 = (\delta_B^0)^2 + \delta_B^0 \delta_B^1 + \delta_B^1 \delta_B^0 + (\delta_B^1)^2 \quad (4.93)$$

$$= \{\delta_B^0, \delta_B^1\} + (\delta_B^1)^2 \quad (4.94)$$

$$= 0 \quad (4.95)$$

であればよい。結合定数の次数ごとに拾うと、

$$\{\delta_B^0, \delta_B^1\} = 0, \quad (\delta_B^1)^2 = 0 \quad (4.96)$$

である。

このうち、一つ目の式を考えてみる。 $|\Phi(\mathbf{3})\rangle$ に作用させてみると、 $|\text{di}| = 0, \|\Phi\| = 1$ に注意して、

$$\{\delta_B^0, \delta_B^1\} |\Phi(\mathbf{3})\rangle = \delta_B^0 \delta_B^1 |\Phi(\mathbf{3})\rangle + \delta_B^1 \delta_B^0 |\Phi(\mathbf{3})\rangle \quad (4.97)$$

$$= \delta_B^0 \left(\int d\mathbf{1} d\mathbf{2} \langle \Phi(\mathbf{1}) | \langle \Phi(\mathbf{2}) | V(\tilde{\mathbf{1}}, \tilde{\mathbf{2}}, \tilde{\mathbf{3}}) \rangle \right) + \delta_B^1 Q_B |\Phi(\mathbf{3})\rangle \quad (4.98)$$

$$= \int d\mathbf{1} d\mathbf{2} \left(\langle \Phi(\mathbf{1}) | Q_B^1 \langle \Phi(\mathbf{2}) | + \langle \Phi(\mathbf{1}) | \langle \Phi(\mathbf{2}) | Q_B^2 \right) | V(\tilde{\mathbf{1}}, \tilde{\mathbf{2}}, \tilde{\mathbf{3}}) \rangle + Q_B^3 \int d\mathbf{1} d\mathbf{2} \langle \Phi(\mathbf{1}) | \langle \Phi(\mathbf{2}) | V(\tilde{\mathbf{1}}, \tilde{\mathbf{2}}, \tilde{\mathbf{3}}) \rangle \quad (4.99)$$

$$= \int d\mathbf{1} d\mathbf{2} \langle \Phi(\mathbf{1}) | \langle \Phi(\mathbf{2}) | \left(Q_B^1 + Q_B^2 + Q_B^3 \right) | V(\tilde{\mathbf{1}}, \tilde{\mathbf{2}}, \tilde{\mathbf{3}}) \rangle \quad (4.100)$$

であるから、

$$\left(Q_B^1 + Q_B^2 + Q_B^3 \right) | V(\tilde{\mathbf{1}}, \tilde{\mathbf{2}}, \tilde{\mathbf{3}}) \rangle = 0 \quad (4.101)$$

であればよい。汎関数表示の場合、これは Grassmann parity に注意して、

$$Q_B(\Phi * \Phi) = Q_B \Phi * \Phi + (-1)^\Phi \Phi * Q_B \Phi \quad (4.102)$$

⁴ 本当は Φ, Ψ が Hermite か anti-Hermite かに応じて符号がつくが、ここではすべての string field は reality condition (4.66) を満たすものとし、すべて Hermite とする。すなわち、余分な符号は出ない。

となる。(4.101) が成り立つとき、(4.102) は任意の string field Φ, Ψ に対して

$$Q_B(\Phi * \Psi) = Q_B\Phi * \Psi + (-1)^\Phi \Phi * Q_B\Psi \quad (4.103)$$

に拡張できる。

この解は、開弦の場合の HIKKO、ひいては light-cone SFT を元にして作ることができて、それは開弦の場合の 3-vertex を、2 つ正則なものと反正則なものとして掛け合わせて ghost number をあわせるための係数をかけて作られ、

$$\begin{aligned} |V(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3})\rangle &= P_{123} \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_3} \mu^2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \Pi_c \delta \left(\sum_{r=1}^3 \frac{1}{\alpha_r} \pi_c^{0(r)} \right) \prod_{r=1}^3 \left(1 - b_0^{(r)} \frac{1}{\sqrt{2}} \omega_I^{(r)} \right) \\ &\times \exp F(1, 2, 3) |0\rangle \delta(1, 2, 3) \end{aligned} \quad (4.104)$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} F_+(1, 2, 3) &= \sum_{r,s} \sum_{n,m \geq 1} \bar{N}_{nm}^{rs} \left(\frac{1}{2} \alpha_{-n}^r \cdot \alpha_{-m}^s + i \gamma_{c,-n}^r \gamma_{b,-m}^s \right) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_r \sum_{n \geq 1} \bar{N}_n^r \alpha_{-n}^r \cdot P + \tau_0 \sum_r \frac{1}{\alpha_r} \frac{p_r^2}{8}, \end{aligned} \quad (4.105)$$

$$\gamma_{c,n}^r = i n \alpha_r c_n^r, \quad (4.106)$$

$$\gamma_{b,n}^r = \frac{b_n^r}{\alpha_r}, \quad (4.107)$$

$$P = \alpha_r p_{r+1} - \alpha_{r+1} p_r, \quad (4.108)$$

$$\omega_+^r = - \sum_s \sum_{n \geq 1} \left(\chi^{rs} \bar{N}_n^s + \frac{1}{\alpha_r} \sum_{m=1}^{n-1} \bar{N}_{n-m,m}^{ss} \right) \gamma_{c,-n}^s, \quad (4.109)$$

$$\chi^{rs} = \delta^{rs} \frac{\alpha_{r-1} - \alpha_{r+1}}{\alpha_r} + \sum_{t=1}^3 \varepsilon^{rst}, \quad (4.110)$$

$$\mu(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \exp \left(-\tau_0 \sum_{r=1}^3 \frac{1}{\alpha_r} \right), \quad (4.111)$$

$$\tau_0 = \sum_{r=1}^3 \alpha_r \ln |\alpha_r|, \quad (4.112)$$

$$\delta(1, 2, 3) = (2\pi)^{27} \delta \left(\sum_{r=1}^3 p_r \right) \delta \left(\sum_{r=1}^3 \alpha_r \right), \quad (4.113)$$

$$\Pi_c = \alpha_r \frac{\pi_c^{0(r+1)}}{\alpha_{r+1}} - \alpha_{r+1} \frac{\pi_c^{0(r)}}{\alpha_r} \quad (4.114)$$

であって、反正則の部分についても同様である⁵。ただし、 F_+, ω_+ に対応する反正則な量は、 F_-, ω_- と書く。このとき、 $F = F_+ + F_-$ である。また、添え字 I, II でラベルされる量を

⁵ こうした vertex を共形場理論を使って導くこともできる [30, 31]。共形場理論を用いた議論では、より組織的に見通しよく構成でき、Generalized Gluing Resmoothing Theorem が成り立つことが知られている。

$A_I = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_+ + A_-)$, $A_{II} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_+ - A_-)$ と定義する。特に、 $b_0^I = \frac{b_0}{\sqrt{2}}$, $b_0^{II} = -\sqrt{2}i\pi_c^0$ である。Neumann 関数については付録 C で述べる。この表示を見ると、

$$|V(1, 2, 3)\rangle = |V(\tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3})\rangle \quad (4.115)$$

なる対称性があることがわかる。これは twist 演算子 Ω を考えればわかる。 Ω は

$$\Omega(\alpha_n, c_n, b_n)\Omega^{-1} = (\bar{\alpha}_n, \bar{c}_n, \bar{b}_n) \quad (4.116)$$

と作用するものとする。このとき、 $\Omega i\Omega^{-1} = \tilde{i}$ であるのに対して、(4.104) の右辺は不変であるからである。

また、(4.104) の、 $\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_3}\Pi_c$ 以外の部分は 1, 2, 3 の入れ替えに対して明らかに対称である。さらに (ijk) を (123) の cyclic な入れ替えとすると、

$$\pi_c^{0(k)} \frac{\alpha_i\alpha_j}{\alpha_k} \Pi_c \delta \left(\sum_r \frac{1}{\alpha_r} \pi_c^{0(r)} \right) = \pi_c^{0(1)} \pi_c^{0(2)} \pi_c^{0(3)} \quad (4.117)$$

であることに注意すれば、

$$\pi_c^{0(3)} |V(1, 2, 3)\rangle = \pi_c^{0(1)} |V(2, 3, 1)\rangle = \pi_c^{0(2)} |V(3, 1, 2)\rangle \quad (4.118)$$

が成り立つことが示せる。

(4.104) をもう少し扱いやすい形に書き換える。そのために付録 C の恒等式 (C.21) を用いる。この式を、(4.104) の I の部分に適用すると、

$$|V(1, 2, 3)\rangle = P_{123} \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_3} \mu^2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) G(\sigma_I) \Pi_c |V_0(1, 2, 3)\rangle \quad (4.119)$$

と書ける。ここで、

$$|V_0(1, 2, 3)\rangle = \exp[E(1, 2, 3)] |0\rangle \bar{\delta}(1, 2, 3) \quad (4.120)$$

$$E(1, 2, 3) = \sum_{r,s} \sum_{n,m=0}^{\infty} \bar{N}_{nm}^{rs} \left(\frac{1}{2} \alpha_{-n}^r \cdot \alpha_{-m}^s + i\gamma_{c,-n}^r \gamma_{b,-m}^s + \frac{1}{2} \bar{\alpha}_{-n}^r \cdot \bar{\alpha}_{-m}^s - i\bar{\gamma}_{c,-n}^r \bar{\gamma}_{b,-m}^s \right), \quad (4.121)$$

$$\bar{\delta}(1, 2, 3) = (2\pi)^{27} \delta \left(\sum_r p_r \right) \delta \left(\sum_r \alpha_r \right) \delta \left(\sum_r \frac{\pi_c^{0(r)}}{\alpha_r} \right) \delta \left(\sum_r \frac{b_0^r}{\alpha_r} \right), \quad (4.122)$$

$$G(\sigma_I) = \sqrt{\pi} \alpha_r i \pi_b^r (\sigma_I^r) \quad (4.123)$$

である。

この vertex がどのような過程を表しているか考えてみる。今、vertex は生成消滅演算子を用いて書かれているが、この汎関数表示 [32] を用いると見やすい⁶。計算の詳細は略すが、それは、 $\alpha_1, \alpha_2 < |\alpha_3|$ のとき

$$\begin{aligned}
V &\simeq \delta \left(\sum_{r=1}^3 \alpha_r \right) \prod_{-\pi|\alpha_3| \leq \sigma \leq \pi|\alpha_3|} \prod_{\mu} \delta \left(\Theta_1 X^{(1)\mu}(\sigma_1) + \Theta_2 X^{(2)\mu}(\sigma_2) - X^{(3)\mu}(\sigma_3) \right) \\
&\times \delta \left(\Theta_1 \alpha_1 c^1(\sigma_1) + \Theta_2 \alpha_2 c^2(\sigma_2) - \alpha_3 c^3(\sigma_3) \right) \\
&\times \delta \left(\Theta_1 \alpha_1^{-2} b^1(\sigma_1) + \Theta_2 \alpha_2^{-2} b^2(\sigma_2) - \alpha_3^{-2} b^3(\sigma_3) \right)
\end{aligned} \tag{4.124}$$

である。上で述べた bra、ket 表示からこの汎関数表示を得るためには、運動量表示の生成消滅演算子の完全系をかけて、運動量に関して積分を取ればよいが、煩雑なので詳細は文献 [32] に譲る。ここで、上の (4.119) のうち、 $|V_0(1, 2, 3)\rangle$ がここでの δ 関数の部分に (α の部分を除いて) 等しくなっている。また、この式で、ghost、antighost の前の係数 α は、BRST 演算子をかいた際にうまく打ち消すように選んだ。また、 Θ_r 及び σ_r は、 $\sigma \in [-\pi, \pi]$ に対して

$$\Theta_1(\sigma) = \theta(\pi\alpha_1 - |\sigma|), \tag{4.125}$$

$$\Theta_2(\sigma) = \theta(|\sigma| - \pi\alpha_1), \tag{4.126}$$

$$\sigma_1(\sigma) = \frac{\sigma}{\alpha_1}, \tag{4.127}$$

$$\sigma_2(\sigma) = \frac{\sigma - \pi\alpha_1 \text{sgn}(\sigma)}{\alpha_2}, \tag{4.128}$$

$$\sigma_3(\sigma) = \frac{\pi|\alpha_3| \text{sgn}(\sigma) - \sigma}{|\alpha_3|} \tag{4.129}$$

である。

この表示から、弦がどのように張り付いているのか見ることができる。例えば $|\sigma| < \pi\alpha_1$ の領域では、 δ 関数の X^μ の部分は $\delta(X^1(\sigma_1) - X^3(\sigma_3))$ の形になっている。 σ が $[-\pi\alpha_1 \rightarrow 0 \rightarrow \pi\alpha_1]$ と変化するとき、 σ_1, σ_3 はそれぞれ

$$\alpha_1: -\pi \rightarrow 0 \rightarrow \pi \tag{4.130}$$

$$\alpha_3: \pi \frac{\alpha_2}{|\alpha_3|} \rightarrow \pi = -\pi \rightarrow -\pi \frac{\alpha_2}{|\alpha_3|} \tag{4.131}$$

と変化する。つまり、弦 1 は弦 3 の、区間 $\left[\pi \frac{\alpha_2}{|\alpha_3|}, \pi \right]$ 及び区間 $\left[-\pi, -\frac{\alpha_2}{|\alpha_3|} \right]$ に逆向きに張り合わされる。弦 2 についても同様に考えると、 $\alpha_1, \alpha_2 > 0, \alpha_3 < 0$ かつ $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ の場合、図 4.1 のように弦が張り付いているとわかる。 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ の間の大小関係が一般の場合も同様である。

⁶ 実際には light-cone SFT での汎関数表示から bra、ket 表示が得られた。

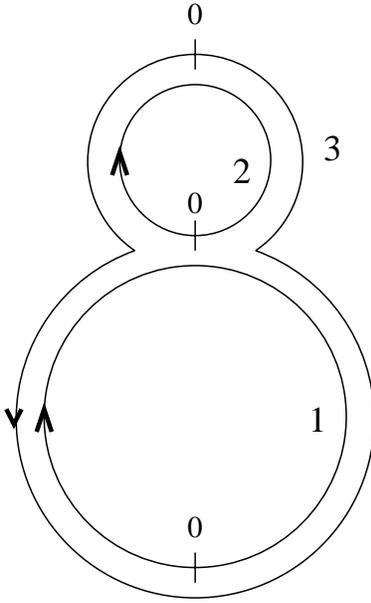


図 4.1: closed string の 3 vertex. $\alpha_1, \alpha_2 < |\alpha_3|$ の場合

さて、(4.119) を使うと、3-vertex には次の対称性があることがわかる:

$$|V(1, 2, 3)\rangle = -|V(2, 1, 3)\rangle. \quad (4.132)$$

これは、閉弦において $\exp i\pi(L - \bar{L})$ は σ を π だけ並進させることに注意すれば、図 4.1 を参照して、

$$P_{123}|V_0(2, 1, 3)\rangle = P_{123} \prod_{r=1}^3 \exp i\pi(L^r - \bar{L}^r) |V_0(1, 2, 3)\rangle = P_{123}|V_0(1, 2, 3)\rangle \quad (4.133)$$

を得る。一方、 Π_c はこの入れ替えに関して反対称であるから、結局、(4.132) を得る。次に、上で示したように、

$$\langle R(1, 2) | (\alpha_n^1, c_n^1, b_n^1, \alpha_1) = \langle R(1, 2) | (-\alpha_{-n}^2, -c_{-n}^2, b_{-n}^2, -\alpha_2) \quad (4.134)$$

であることを用いると、

$$\int d1' d2' d3' \langle R(3', 3) | \langle R(2', 2) | \langle R(1', 1) | |V(1', 2', 3')\rangle = \langle V(2, 1, 3) | \quad (4.135)$$

が成り立つ。また、(4.132) より、汎関数表示で、

$$\Phi * \Psi = (-1)^{\Phi \cdot \Psi + 1} \Psi * \Phi \quad (4.136)$$

が成り立つ。

次に BRST 変換の nilpotency の条件のうち、もう一つの条件 $(\delta_B^1)^2$ を考える。すでに述べたように、汎関数表示を用いると、BRST 変換は、

$$\delta_B \Phi = Q_B \Phi + g \Phi * \Phi \quad (4.137)$$

であるから、BRST 変換の nilpotency は

$$\delta_B^2 \Phi = \delta_B (Q_B \Phi + g \Phi * \Phi) \quad (4.138)$$

$$\begin{aligned} &= -Q_B^2 \Phi + g (-Q_B (\Phi * \Phi) + Q_B \Phi * \Phi - \Phi * Q_B \Phi) \\ &+ g^2 ((\Phi * \Phi) * \Phi - \Phi * (\Phi * \Phi)) \end{aligned} \quad (4.139)$$

$$= 0 \quad (4.140)$$

であればよい。第二項は分配則より消える。 $(\delta_B^1)^2 = 0$ の部分は、第三項で、それは

$$(\Phi * \Phi) * \Phi = 0 \quad (4.141)$$

であればよい。実はこれよりももっと強い Jacobi identity が成り立つことが知られている。この証明には例えば図 4.2 などの過程を考慮する必要があり、非常に複雑なので詳細は原論文 [27] を参照せよ。ここでは結果だけ述べておくと、Jacobi identity は、

$$(-1)^{\Phi \cdot \Lambda} (\Phi * \Psi) * \Lambda + (-1)^{\Psi \cdot \Phi} (\Psi * \Lambda) * \Phi + (-1)^{\Lambda \cdot \Psi} (\Lambda * \Phi) * \Psi = 0 \quad (4.142)$$

である。これより、 $(\Phi * \Phi) * \Phi = 0$ が従う。

4.3.4 内積

前節では string field の間の $*$ 積を定義したので、ここでは string field の内積を定義する。 $*$ 積は 2 つの string field から 1 つの string field への写像であったが、内積は c-number を与える。

それは

$$\Phi \cdot \Psi = \int d1 \pi_c^{0(1)} \langle \Phi(1) | \Psi(1) \rangle \quad (4.143)$$

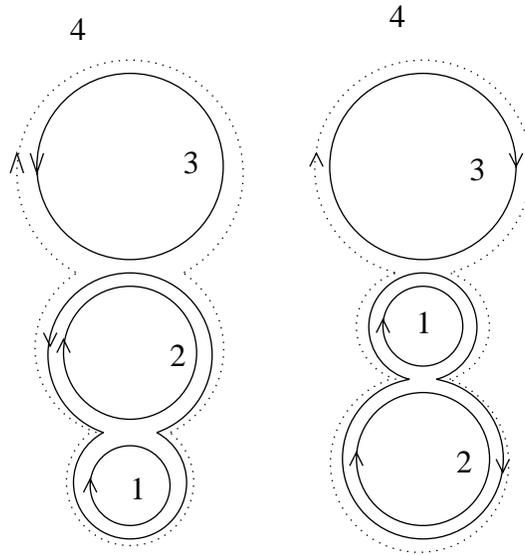


図 4.2: Jacobi identity の証明に必要な過程の例

とするのが自然である。これを reflector を用いて書きなおしたもの、及び汎関数表示は、

$$\Phi \cdot \Psi = \int d1d2 \pi_c^{0(1)} \langle \Phi(1) | \Psi(1) \rangle = \int d1d2 \pi_c^{0(1)} \langle R(1, 2) | |\Phi(1)\rangle | \Psi(2)\rangle \quad (4.144)$$

$$= \int dZ \pi_c^{0(1)} \Phi^\dagger[Z] \Psi[Z] \quad (4.145)$$

$$= \int dZ \pi_c^{0(1)} \Phi[\tilde{Z}] \Psi[Z] \quad (4.146)$$

である。また、この汎関数表示より、明らかに

$$\Phi \cdot \Psi = (-1)^{|\Phi||\Psi|} \Psi \cdot \Phi \quad (4.147)$$

が成り立つ。さらに、 $\{Q_B, \pi_c^0\} = i(L_+ - L_-)$ であるから、

$$Q_B \Phi \cdot \Psi = (-1)^{1+\Phi} \Phi \cdot Q_B \Psi \quad (4.148)$$

である。前節で示した $|V(1, 2, 3)\rangle$ の cyclic な対称性を用いると、容易に

$$\Phi \cdot (\Psi * \Lambda) = (-1)^{\Phi(\Psi+\Lambda)} \Psi \cdot (\Lambda * \Phi) = (-1)^{\Lambda(\Phi+\Psi)} \Lambda \cdot (\Phi * \Psi) \quad (4.149)$$

が成り立つことがわかる。

4.3.5 作用の対称性

これで作用を書くのに必要な定義がそろった。そこで、作用 (4.64) の対称性を調べる。すでに書いたように、作用は、

$$S = \Phi \cdot Q_B \Phi + \frac{2}{3} g \Phi^3 \quad (4.150)$$

である。運動方程式は、

$$\frac{\delta S}{\delta \Phi} = 2(Q_B \Phi + g \Phi * \Phi) = \delta_B \Phi \quad (4.151)$$

である。このとき、この作用は、無限小変換

$$\delta \Phi = Q_B \Lambda + 2g \Phi * \Lambda \quad (4.152)$$

で不変である。ただし、 Λ は Grassmann odd でなおかつ、anti-Hermite $\Lambda^\dagger[Z] = -\Lambda[\tilde{Z}]$ 、さらに、 $N_{gh}[\Lambda] = -2$ であって、 $P\Lambda = 0$ を満たす汎関数であるとする。

実際、この変換により、

$$\delta S = 2\delta_B \Phi \cdot \delta \Phi \quad (4.153)$$

$$= 2\delta_B \Phi \cdot Q_B \Lambda + 2\delta_B \cdot (\Phi * \Lambda - \Lambda * \Phi) \quad (4.154)$$

$$= -2\Lambda \cdot (Q_B \delta_B \Phi + g(\Phi * \delta_B \Phi - \delta_B \Phi * \Phi)) \quad (4.155)$$

$$= 2\Lambda \cdot \delta_B^2 \Phi = 0 \quad (4.156)$$

である。また、この変換は off-shell で閉じている。二つ変換の交換子をとると、Jacobi identity を使って、

$$[\delta_B(\Lambda_1), \delta_B(\Lambda_2)] \Phi = 2g(Q_B(\Lambda_1 * \Lambda_2) + 2g\Phi * (\Lambda_1 * \Lambda_2)) \quad (4.157)$$

$$= \delta_B(2g\Lambda_1 * \Lambda_2)\Phi \quad (4.158)$$

を得るから、

$$[\delta_B(\Lambda_1), \delta_B(\Lambda_2)] = \delta_B(2g\Lambda_1 * \Lambda_2) \quad (4.159)$$

となる。

以上で閉弦に対する HIKKO model およびその対称性が得られた。ただし、string field のうち、physical な状態を含むのは、(4.60) のうち、 $|\phi\rangle$ であるから、それ以外の部分を何らかの方法でおとして、ゲージ固定しなくてはならない。

そこで、次にゲージ固定をした作用とその場合の BRST 変換を与え、作用が BRST 変換で不変であることを見る。まず、string field を ghost zero mode で展開して、

$$\Phi = -b_0\phi + \psi + b_0\pi_c^0\chi + i\pi_c^0\eta \quad (4.160)$$

とかく。ただし、string field は $P\Phi = 0$ を満たすものとする。このとき、理論に現れる諸量を、 π_c^0 を分離して、

$$\Phi = \Phi' + \pi_c^0\chi', \quad (4.161)$$

$$\Lambda = \Lambda' + \pi_c^0\Lambda'_\chi, \quad (4.162)$$

$$Q_B = \frac{\partial}{\partial b_0}L + b_0M + i\frac{\partial}{\partial\pi_c^0}(L - \bar{L}) - 2i\pi_c^0(M - \bar{M}) + \tilde{Q}_B \quad (4.163)$$

と表す。

このとき、

$$\Phi' \cdot \Psi' = \int dZ' \Phi'[\tilde{Z}']\Psi'[Z'], \quad (4.164)$$

$$(\Phi' * \Psi')[3'] = \int d1' d2'\Phi'[1']\Psi'[2']V'[1', 2', \tilde{3}'] \quad (4.165)$$

と積を理解すると、作用は、 $P\Phi = 0 \Rightarrow (L - \bar{L})\chi' = 0$ に注意して、

$$S = \Phi' \cdot Q_B\Phi' + \frac{2}{3}g\Phi'^3 \quad (4.166)$$

となる。BRST 変換およびゲージ変換は、容易に

$$\delta_B\Phi' = Q'_B\Phi' + g\Phi' * \Phi', \quad (4.167)$$

$$\delta\Phi' = Q'_B\Lambda' + g(\Phi' * \Lambda' - \Lambda' * \Phi') \quad (4.168)$$

となることが分かる。さて、上の π_c^0 を含まない作用には、まだ ψ が含まれている。自由な弦の場合から、physical な部分は ϕ であると推測できるから、この ψ も消去したい。そこで、さらに string field の展開のうち、 ψ を 0 に制限する。すなわち、ゲージ固定された、(BRST 不変な) 作用として

$$\hat{S} = \left(\Phi' \cdot Q_B\Phi' + \frac{2}{3}g\Phi'^3 \right)_{\psi=0} = \left(\Phi \cdot Q_B\Phi + \frac{2}{3}g\Phi^3 \right)_{\psi=\chi=\eta=0} \quad (4.169)$$

を採用する。これを ϕ で表す。そのために、 $di = dx\frac{d\alpha}{2\pi}$ とし、さらに内積と * 積を改めて π_c^0, c_0

を積分してしまった形に書いて、

$$\phi \cdot L\phi = \int d1 \langle \phi(1) | L | \phi(1) \rangle, \quad (4.170)$$

$$\phi^3 = \int d1 d2 d3 \langle \phi(1) | \langle \phi(2) | \langle \phi(3) | | v(1, 2, 3) \rangle, \quad (4.171)$$

$$|v(1, 2, 3)\rangle = \mu^2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) P_{123} \exp F(1, 2, 3) |0\rangle \delta(1, 2, 3), \quad (4.172)$$

$$\delta(1, 2, 3) = (2\pi)^{27} \delta\left(\sum_r \alpha_r\right) \delta\left(\sum_r p_r\right) \quad (4.173)$$

とする。 $F(1, 2, 3)$ に関しては、前に定義したものとほとんど同じで、ghost part の和を $n \geq 1$ にしたものである。

この積を用いると、ゲージ固定した作用は、

$$\hat{S} = \phi \cdot L\phi + \frac{2}{3} g \phi^3 \quad (4.174)$$

と書ける。このとき、 ϕ は level matching の条件 $P\phi = \phi$ を満たす。運動方程式は、ゲージ固定する前は

$$\frac{\delta S}{\delta \Phi} = 2(Q_B \Phi + g\Phi * \Phi) = 2\delta_B \Phi = 0 \quad (4.175)$$

である。ゲージ固定後は、 ϕ のゲージ変換には χ, η が混ざらないので、

$$\delta \hat{S} = 2(\delta \Phi \cdot \delta_B \Phi)_{\psi=0} = -2\delta \phi \cdot (\delta_B \psi)_{\psi=0} \quad (4.176)$$

より、

$$(\delta_B \psi)_{\psi=0} = 0 \quad (4.177)$$

である。

こうしてゲージを固定したので、BRST 変換を、

$$\hat{\delta}_B \phi = \delta_B \phi |_{\psi=\chi=\eta=0} = \int db_0 d\pi_c^0 \pi_c^0 \delta_B \Phi |_{\psi=\chi=\eta=0} \quad (4.178)$$

と定める。

この BRST 変換は nilpotent であることが分かる。(4.178) と、 ϕ の BRST 変換には χ, η が混ざらないので、ゲージ固定する前の BRST 変換は高々

$$\delta_B \phi = \hat{\delta}_B \phi + \psi f(\phi, \psi) \quad (4.179)$$

である。これより、 $\delta_B^2 = 0$ を用いて

$$(\delta_B)^2 \phi = \delta_B (\hat{\delta}_B \phi + \psi f(\phi, \psi)) = \delta_B \hat{\delta}_B \phi + (\delta_B \psi) f(\phi, \psi) - \psi \delta_B f(\phi, \psi) = 0 \quad (4.180)$$

であるから、これを $\psi = 0$ に制限し、さらに運動方程式を用いて、

$$\left(\hat{\delta}_B\right)^2 \phi = -(\delta_B \psi)_{\psi=0} f(\phi, 0) = 0 \quad (4.181)$$

を得る。つまり、BRST 変換は nilpotent であるとわかった。

次にこの BRST 変換で作用が不変であることを見る。直接計算すると、

$$\hat{\delta}_B \hat{S} = -2\hat{\delta}_B \phi \cdot (\delta_B \psi)_{\psi=0} \quad (4.182)$$

$$= -\int db_0 d\pi_c^0 \pi_c^0 \left(b_0 \delta_B \phi + \delta_B \psi + b_0 \pi_c^0 \delta_B \chi - i\pi_c^0 \delta_B \eta \right)^2 \Big|_{\psi=0} \quad (4.183)$$

$$= -(\delta_B \Phi \cdot \delta_B \Phi)_{\psi=0} \quad (4.184)$$

となる。これはさらに

$$\delta_B \Phi \cdot \delta_B \Phi = (Q_B \Phi + g\Phi * \Phi)^2 \quad (4.185)$$

$$= Q_B \Phi \cdot Q_B \Phi + 2gQ_B \Phi \cdot (\Phi * \Phi) + g^2(\Phi * \Phi) \cdot (\Phi * \Phi) \quad (4.186)$$

である。第一項は $Q_B^2 = 0$ より消える。第二項は、(4.103)、(4.136)、(4.148) より、 $|\phi| = 0$ に注意して、

$$Q_B \Phi \cdot (\Phi * \Phi) = -\Phi \cdot Q_B(\Phi * \Phi) \quad (4.187)$$

$$= -\Phi \cdot (Q_B \Phi * \Phi + \Phi * Q_B \Phi) \quad (4.188)$$

$$= -\Phi \cdot (Q_B \Phi * \Phi + (-1)^{0+1} Q_B \Phi * \Phi) = 0 \quad (4.189)$$

である。第三項は、(4.149) より、

$$(\Phi * \Phi) \cdot (\Phi * \Phi) = \Phi \cdot ((\Phi * \Phi) * \Phi) = 0 \quad (4.190)$$

である。以上から、結局

$$\hat{\delta}_B \hat{S} = 0 \quad (4.191)$$

が分かった。

4.3.6 α の必要性

今まで、string field の引数として string length α を導入してその保存を要請してきた。これは light-cone SFT での p^+ に相当するものである。この節ではこの string length がなぜ必要なのかということについて議論する [27]。この議論は BRST 変換の nilpotency と密接に結びついている。この議論は特に閉弦の場合は非常に込み入っているので、ここでは開弦の場合で説明する。大雑把に言って閉弦は開弦を二つ張り合わせたようなものなので定性的な理解はできる。

開弦の場合も閉弦の場合と同様に BRST 変換の 1 次の部分は 3 つの開弦の貼りあわせであって、下の図 (4.3) のようになる。これを二つ張り合わせると閉弦の場合になる。

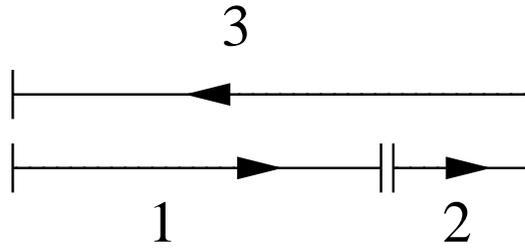


図 4.3: 開弦の 3-vertex

そのため、 $(\delta_B^1)^2$ を議論するためには、4 つの開弦の貼りあわせを考えなくてはならない。いま、1, 2, 3 の開弦が貼り合わさって 4 ができたとする。 $(\delta_B^1)^2 = 0$ であるためには同じ構造の δ 関数を持つ過程が消しあわなくてはならない。その例として、1, 2, 3 の弦が δ 関数内で 4 と組を作っている場合を考える。例えば、下の図 4.4 の (a), (c) である。参考のため、これとは異なる例として (b) を挙げておく。

4.3 の過程で、例えば弦の貼りあわせを α で指定するのをやめて、 $\alpha_3 = -1$ 、 $\alpha_1 = x$ 、 $\alpha_2 = 1 - x$ とする。その上で string field の引数として α は使わずに、貼りあわせの位置の情報を vertex にのみ入れるとする。すなわち、 $\sigma = \frac{\alpha_1}{\alpha_3}$ としたときに

$$|V(1, 2, 3)\rangle = \int d\sigma \mu(\sigma) |V(1, 2, 3; \sigma)\rangle \quad (4.192)$$

である。ただし μ は x のみの関数なので、 $\mu^\dagger = \mu$ である。このとき、図 4.4 (a) の過程は、 σ' を弦 1, 2 の接合部分の位置また σ を 2, 3 の接合部分の位置とすると、

$$\int d\sigma \mu(\sigma) \int d\sigma' \mu(\sigma') \int d3' \langle V(1, 2, 3'; \sigma') | 1 \rangle | 2 \rangle \langle 3 | V(3', 3, 4; \sigma) \rangle \quad (4.193)$$

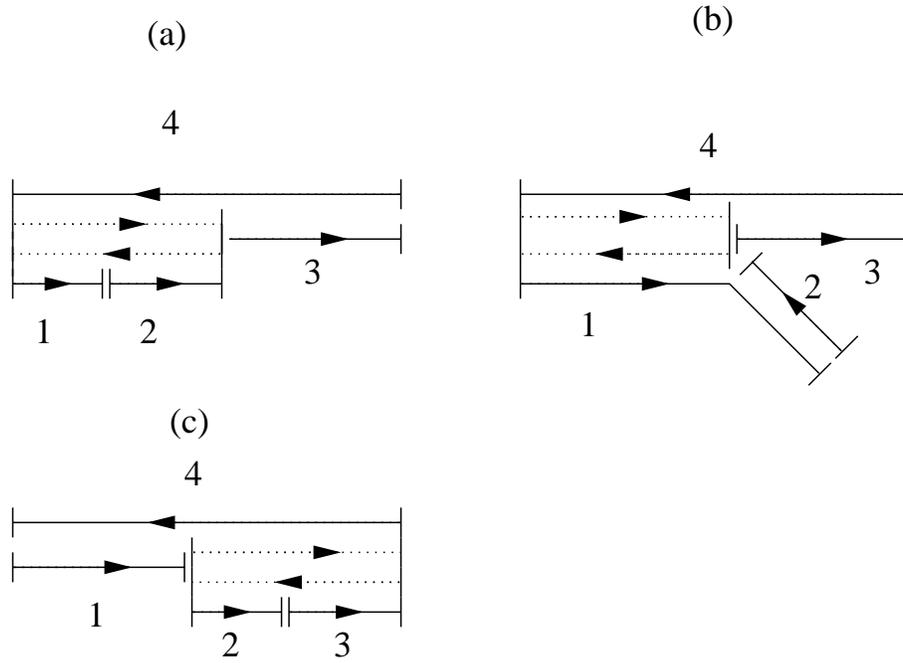


図 4.4: 開弦の 4 体相互作用の例。点線は合成したもの、及びその共役。

などとなる。 $(\delta_{\mathbb{B}}^1)^2 = 0$ が満たされるためには、この二つの積分が、共通の領域で等しい値をとらなくてはならない [27]。それゆえ (a)、(b) の過程を比べるために、弦の長さの比を $\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 = y : (x - y) : 1 - x$ ($x > y$) とする。これは (a) では $\sigma = \frac{y}{x}, \sigma' = x$ とすることに相当していて、(b) では $\sigma = \frac{x - y}{1 - y}, \sigma' = y$ とすることに相当する。このとき、上の積分を考えると、積分測度を $dx dy$ に書き直すことで μ は

$$\mu\left(\frac{y}{x}\right) \mu(x) \frac{1}{x} = \mu\left(\frac{x - y}{1 - y}\right) \mu(y) \frac{1}{1 - y} \quad (4.194)$$

でなくてはならない。一方、同様の過程として、下の図 4.5 を考えると、

$$\mu(1 - x) \mu(y) = \mu\left(\frac{y}{x}\right) \mu\left(\frac{1 - x}{1 - y}\right) \frac{x - y}{x^2(1 - y)^2} \quad (4.195)$$

という条件が出る。

(4.194)、(4.195) を満たす自明でない関数 μ は存在しないことが次のようにしてわかる。まず、両辺をかけると、 $\mu \neq 0$ に対して

$$\mu(x) \mu(1 - x) = \frac{x - y}{x(1 - y)^3} \mu\left(\frac{x - y}{1 - y}\right) \mu\left(\frac{1 - x}{1 - y}\right) \quad (4.196)$$

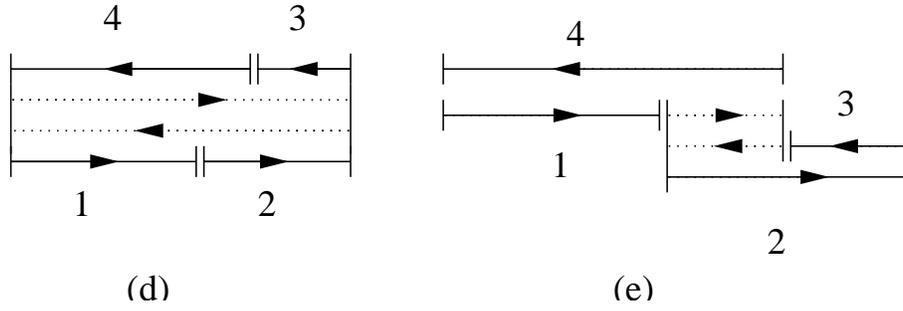


図 4.5: 開弦の 4 体相互作用の例。点線は合成したもの、及びその共役。

を得る。これを y に関して微分して $y \rightarrow 0$ とすれば $g(x) = \mu(x)\mu(1-x)$ に対して次の微分方程式を得る:

$$\left(-\frac{1}{x} + 3\right)g(x) + (x-1)g'(x) = 0. \quad (4.197)$$

この解は

$$g(x) = \frac{c}{x(1-x)^2} \quad (4.198)$$

であるが、これは $x \leftrightarrow 1-x$ の対称性を持たず、 $g(x)$ の定義に反する。ゆえに $\mu = 0$ となる。そのため、vertex のみが string length によるとすることはできない。

4.3.7 振幅の α 非依存性と困難

前節の議論から、string length α は理論に必要であることが分かった。しかし、実際の物理には α は現れないから、これは physical な量ではありえない。それゆえ、 α が on-shell の振幅にどのように現れるかが問題になる。[33] によれば、tree level では T_N を α に依らない量として、

$$\text{on-shell } N\text{-string Amplitude} \propto \delta\left(\sum_i^N \alpha_i\right) T_N \rightarrow \prod_r^{N-1} \delta(\tilde{\alpha}_r - \tilde{\alpha}_N) T_N \quad (4.199)$$

と書ける。ただしここで、矢印の変形で α を Fourier 変換した。これを見ると、string は $\tilde{\alpha}_N$ によってラベルされるセクターに分かれていることがわかる。

L loop の時は、振幅は $\left(\int d\alpha \frac{\alpha}{2\pi}\right)^L$ に比例する [33]。この発散は、結合定数のくりこみによって除去できるが、 α の対称性の名残の modular 不変性による発散が残ってしまう。つま

り、仮に結合定数をくりこんでも、中間状態で α が異なるセクターに関する和をとる必要がある。それゆえ、例えば 1-loop amplitude T の虚部は光学定理により、

$$\text{Im}T(a \rightarrow b) \propto \int \text{di} \frac{d\alpha}{2\pi} |T(a \rightarrow \text{any } i)|^2 \propto \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \quad (4.200)$$

となり、発散する。このように、HIKKO においては loop のある振幅は well-defined とは言いがたい。

4.3.8 BV 方程式と closed HIKKO

以上の議論から、loop に問題があるものの、閉弦の場の理論として

$$S = \Phi \cdot Q_B \Phi + \frac{2}{3} \Phi^3 \quad (4.201)$$

を得た。

では、これが BV 方程式の解になっているかどうか調べてみる。今、string field を

$$\Phi = -b_0 \phi + \psi \quad (4.202)$$

と書き、古典 BV 方程式に代入すれば、2章で得たものと同じ方程式が得られる。すなわち、今まで用いてきた言葉に焼きなおすと、

$$\left(\pi_c^0 Q_B\right)^2 = 0, \quad (4.203)$$

$$\sum_r Q_B^r |V(1, 2, 3)\rangle = 0, \quad (4.204)$$

$$(\Phi * \Phi) \cdot (\Phi * \Phi) = 0 \quad (4.205)$$

である。この方程式はすでに示したようにすべて満たされている。つまり、閉弦の HIKKO model は古典 BV 方程式の解になっている。これは HIKKO model が tree level では well-defined であることを意味している。しかし、これはあくまでも古典 BV 方程式である。2章で述べたように作用が局所的な量でかけているときに限り、量子的 BV 方程式ではなく古典 BV 方程式で十分である。しかし、これまでに見たように閉弦の相互作用は

$$|V(1, 2, 3)\rangle \sim \exp F(1, 2, 3)|0\rangle \sim \exp p_r^2 |0\rangle \quad (4.206)$$

であった。すなわち弦の重心座標に関する無限個の微分が入っているので非局所的な量である。そのため、作用は古典 BV 方程式を満たすだけでは不十分で、量子的 BV 方程式を満たす必要がある。

実際、経路積分を用いて閉弦の場合の HIKKO を量子化する際には非局所的な項が必要であることがわかっている [34, 35, 36]。

4.4 Covariantized light-cone string field theory

次に、詳しく解説する余裕はないが、covariantized light-cone string field theory を紹介する。

covariant と light-cone という言葉が両方入っていて何のことか分かりづらいが、これは歴史的な理由によるところが大きい。歴史的には、1970年代に light-cone gauge での string field theory が建設されていた。これはその後、1984年に Siegel により、covariant な理論に焼きなおされた。そのため、これは covariant light-cone gauge string field theory と呼ばれる。しかし、これははじめからゲージ固定されていたため、理論の構造を見るには不便であった。ここで解説するのは covariantized light-cone gauge string field theory であって、ゲージ不変性を保った形式である。この理論には次の2つの特徴がある。

まず、HIKKO によく似ている点である。逆に、covariantized light-cone string field theory は HIKKO において、 α と BRST 4重項を組む変数を付け加えたものと解釈できる。すでに述べたように、この string strength α は loop の計算において発散を出す原因であった。しかし、BRST 4重項をなすことで、この発散を取り除くことができる。

もう一つは上で解説した non-polynomial string field theory では作用の BRST 対称性のために無限個の項が必要であったのに対して covariantized light-cone string field theory では3次までで作用がかける、という点である。

しかし、こうした利点にもかかわらず、その構造があまりに煩雑であるためか、これを用いた議論や文献は非常に限られている。

この節ではまず light-cone string field theory を簡潔にまとめる。次に、簡単のため開弦の場合に HIKKO との類似点を解説し [37]、その後 closed string の場合の要点を述べる [38]。

4.4.1 Light-Cone String Field Theory

ここで紹介する open light-cone string field theory は一番最初に提唱された string field theory であって、その名のとおり、light-cone gauge を用いている。相互作用としては joining-splitting 型を採用している。ここでは記号を簡単にするため、open の場合を説明し、詳しくは文献に譲る [39]⁷。実際には、ここに現れる演算子などに anti-holomorphic な部分を足してやれば closed string の場合も構成できる。

この文献は検討する。

⁷ covariantized version と比較するため、ここではいささか式の羅列になる。

作用は、string field を ϕ と書いて、

$$S_{\text{LC}} = \int d\tau \left\{ \phi^\dagger \left(i\partial_\tau - \frac{L_0^\perp}{\alpha} \right) \phi + \frac{2}{3}g\phi^3 + \frac{1}{2}g^2\phi^4 \right\} \quad (4.207)$$

で与えられる。ここで、

$$L_0^\perp = \frac{1}{2} \sum_m : \alpha_m^i \alpha_{i,-m} : -1, \quad \alpha_0^i = p^i \quad (i = 1, \dots, 24) \quad (4.208)$$

であり、積分は physical な mode についてのみとる。積は、vertex について

$$\phi^3 = \int d\mathbf{1}d\mathbf{2}d\mathbf{3} \text{tr} \langle \phi(\mathbf{1}, \tau) | \langle \phi(\mathbf{2}, \tau) | \langle \phi(\mathbf{3}, \tau) | |V_{\text{LC}}^{(2)}(\mathbf{1}, \mathbf{2}) \rangle \quad (4.209)$$

などと決める。tr というのは 開弦 の Chan-Paton factor についての和である。積分の測度は、 $d\mathbf{1} = (2\pi)^{-25} d^{24} p_1^i \alpha_1 d\alpha_1$ である。後で closed string の場合を与えるので比較のために 3 点の vertex を与えておくと、

$$\begin{aligned} |V_{\text{LC}}^{(3)}\rangle &= \frac{\mu^{(3)}}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \exp \left(\frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^3 \sum_{n,m=0}^{\infty} \bar{N}_{nm}^{rs} \alpha_{-n}^{(r)i} \alpha_{i,-m}^{(s)} \right) |0\rangle_{\mathbf{123}} \\ &\times (2\pi)^{25} \delta^{24} \left(\sum_r p_r^i \right) \delta \left(\sum_r \alpha_r \right), \end{aligned} \quad (4.210)$$

$$\mu^{(3)} = \exp \left(-\tau_0 \sum_{r=1}^3 \frac{1}{\alpha_r} \right), \quad (4.211)$$

$$\tau_0 = \sum_{r=1}^3 \alpha_r \ln |\alpha_r| \quad (4.212)$$

である。ここで、 \bar{N}_{nm}^{rs} は Neumann 関数のフーリエ成分で、 $|0\rangle_{\mathbf{123}}$ は 3 つの Fock vacuum の積である。

このとき、 ϕ の j -方向の Lorentz 変換を考えることができ [40]、それは

$$\delta\phi = [i\varepsilon_{j-} M^{j-}, \phi], \quad (4.213)$$

$$\delta|\phi\rangle = i\varepsilon_{j-} \left[M^{j-} |\phi\rangle - gX^j(\sigma_{\text{int}}) |\phi * \phi\rangle - g^2 X^j(\sigma_{\text{int}}) |\phi \circ \phi \circ \phi\rangle \right], \quad (4.214)$$

$$M^{j-} = ip^j \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{x^j}{\alpha} L_0^\perp - \frac{i}{\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_{-m}^j L_m^\perp - L_{-m}^\perp \alpha_m^j}{m} \right), \quad (4.215)$$

$$X^j(\sigma_{\text{int}}) |\phi * \phi(\mathbf{3})\rangle = \int d\mathbf{1}d\mathbf{2} \langle \phi(\mathbf{1}, \tau) | \langle \phi(\mathbf{2}, \tau) | X^j(\sigma_{\text{int}}) |V_{\text{LC}}^{(3)}(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3})\rangle \quad (4.216)$$

で、 $|\phi \circ \phi \circ \phi\rangle$ も同様である。このとき、(4.207) はこの変換で不変であることが知られている:

$$\delta S_{\text{LC}} = 0. \quad (4.217)$$

また、Lorentz 変換も可換である:

$$[M^{i-}, M^{j-}] = 0, \quad [\delta, \delta'] = 0. \quad (4.218)$$

4.4.2 Open Covariantized Light-Cone String Field Theory

上で紹介した light-cone string field theory を踏まえて、これを Siegel の処方に従って covariant にする。これは大雑把に言って light-cone gauge version の string field $\phi[X^i, \alpha, \tau]$ を $\Phi[X^M, \alpha, \tau, \theta]$ に拡張することである。ここで、 τ は proper time で unphysical、 α は string length で、これも unphysical、 θ は後で説明するように τ の BRST partner である。

ここで、 X^M は $OSp(d-1, 1|2)$ 対称性をもち、

$$X^M = (X^\mu, c, b) \quad (4.219)$$

で、ghost, antighost を含むものとする。mode 展開で書くと、

$$x^M = (x^\mu, c_0, b_0) \quad (4.220)$$

$$p^M = (p^\mu, -\pi_0, \bar{\pi}_0) = \alpha_0^M \quad (4.221)$$

$$\alpha_n^M = (\alpha_n^\mu, -\gamma_n, \bar{\gamma}_n) \quad \text{for } n \neq 0 \quad (4.222)$$

である。上で同時に導入した θ に関しては後で述べる。

それに伴って計量を $OSp(d-1, 1|2)$ 型、

$$\eta_{MN} = \eta^{MN} = \left(\begin{array}{c|cc} \eta_{\mu\nu} & & \\ \hline & 0 & -i \\ & i & 0 \end{array} \right) \quad (4.223)$$

とする。交換関係は、

$$[x^M, p^N] = i\eta^{MN} \quad (4.224)$$

$$[\alpha_n^M, \alpha_m^N] = n\eta^{MN} \delta_{n,-m} \quad (4.225)$$

と拡張される。このとき、light-cone gauge version で扱った L_n は

$$L_n = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} : \alpha_{n+m}^M \eta_{MN} \alpha_{-m}^N : -\delta_{n,0} \quad (4.226)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} : \left(\frac{1}{2} \alpha_{n+m}^\mu \alpha_{\mu,-m} + i\gamma_{n+m} \bar{\gamma}_{-m} \right) : -\delta_{n,0} \quad (4.227)$$

と変更される。これは

$$\gamma_n \Leftrightarrow i n \alpha_n, \quad \bar{\gamma}_n \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} b_n \quad (4.228)$$

と同一視すれば zero mode 以外は HIKKO の場合と一致する。一致しないのは zero mode で、それは $\alpha_0^M = (p^\mu, -\pi_0, \bar{\pi}_0)$ において、 $p^\mu, \bar{\pi}_0$ は、対応するもの、 $p^\mu, \bar{\gamma}_0$ があるが、 $-\pi_0$ が対応すべき γ_0 は上の対応では $\gamma = i \times 0 \times \alpha c_0$ であるべきで、これは消えてしまうからである。つまり、covariantized light-cone version はこの点で HIKKO にはない自由度を取り込んでいると分かる。

次にこの設定で BRST operator を考える。これは上で導入した string field が持つ $OSp(d-1, 1|2)$ 対称性を元に、 $(c-)$ 方向に拡張した Lorentz 変換 M^{c-} であることが知られている [41]。実際、この回転により ghost とそれ以外の成分を混ぜ合わせるので ghost number を一つあげる。それは (4.215) において $x^c = c_0, p^c = -\pi_0, \alpha_n^c = -\gamma_n$ と置き換えたもので、

$$Q_B \equiv -M^{c-} = \frac{c_0}{\alpha} L_0 + i\pi_0 \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{i}{\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\gamma_{-m} L_m - L_{-m} \gamma_m}{m} \right) \quad (4.229)$$

である。HIKKO との違いは zero mode に現れる π_0 の部分であったことを思い出し、この BRST charge を π_0 を含む部分と含まない部分に分けると、

$$Q_B = Q_B^{\text{KO}} + \frac{i\pi_0}{\alpha} \left(N_{\text{FP}} + \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + 1 \right) \quad (4.230)$$

となり、加藤 - 小川 [19] の BRST charge Q_B^{KO} を再現している [42]。ただし、ここでは上で述べた同一視をして、さらに zero mode については

$$c_0 = \frac{\partial}{\partial \pi_0} = \alpha c_0^{\text{KO}} \quad (4.231)$$

とした。 N_{FP} は、ghost の数演算子を拡張したもので、

$$N_{\text{FP}} = \pi_0 \frac{\partial}{\partial \pi_0} - \bar{\pi}_0 \frac{\partial}{\partial \bar{\pi}_0} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\gamma_n^\dagger \bar{\gamma}_n + \bar{\gamma}_n^\dagger \gamma_n \right) \quad (4.232)$$

である。

こうして、ひとまず作用は (4.207) において L_0^\perp を (4.227) に置き換えたもので、積は

$$|\Phi * \Psi(\mathbf{3})\rangle = \varepsilon_\Phi \varepsilon_\Psi \int d\mathbf{1} d\mathbf{2} \langle \Phi(\mathbf{1}) | \langle \Psi(\mathbf{2}) | | V^{(3)}(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}) \rangle, \quad (4.233)$$

$$|V^{(3)}(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3})\rangle = \frac{\mu^{(3)}}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} c(\sigma_{\text{int}}) \exp \left[\sum_{r,s=1}^3 \sum_{n,m=0}^{\infty} \bar{N}_{nm}^{rs} \left(\frac{1}{2} \alpha_{-n}^{(r)} \cdot \alpha_{-m}^{(s)} + i \gamma_{-n}^{(r)} \bar{\gamma}_{-m}^{(s)} \right) \right] |0\rangle \delta(\alpha, p), \quad (4.234)$$

$$\delta(\alpha, p) = (2\pi)^{27} \delta \left(\sum_r \alpha_r \right) \delta^{26} \left(\sum_r p_r \right) \delta \left(\sum_r \bar{\pi}_0^{(r)} \right) \delta \left(\sum_r \pi_0^{(r)} \right), \quad (4.235)$$

$$d\mathbf{r} = (2\pi)^{-27} \alpha_r d\alpha_r d^{26} p_r d\pi_0^{(r)} d\bar{\pi}_0^{(r)} \quad (4.236)$$

である。

このとき、作用は BRST 変換

$$\delta_B \Phi = Q_B \Phi + g \Phi * \Phi + g^2 \Phi \circ \Phi \circ \Phi \quad (4.237)$$

で不変である。さらにこれは Lorentz 変換の交換関係

$$\{M^{c-}, M^{c-}\} = 0 \quad (4.238)$$

より⁸、nilpotent、つまり $\delta_B^2 \Phi = 0$ が成り立つ。(4.237) を使うと、 g の各次数で Q_B の満たすべき方程式が得られ、それらは HIKKO の場合と一致する [27, 29]。

次に、これまで保留していた、上で string field を拡張した際にあらわれた τ, θ について考える。これは、 α によって引き起こされる発散を、BRST 4 重項を作ることで除去するために導入されるものである。

すでに見たように、covariantized light-cone version での BRST operator の中には $i\pi_0 \frac{\partial}{\partial \alpha}$ が含まれていて、 α の BRST partner が π_0 であることを意味している。そこで、もう一つの unphysical parameter である τ の BRST partner θ を導入する。それには、上の BRST operator Q_B を、

$$Q_B \longrightarrow Q_B - E \frac{\partial}{\partial \pi_\theta} \quad (4.239)$$

とすればよい⁹。以後、この変更を受けた BRST operator を Q_B と書く。ただし、 E, π_θ は τ, θ に対応する momentum である。これに伴って δ 関数や積分測度は、

$$\delta(\alpha, p) \rightarrow \delta(\alpha, p) 2\pi \delta \left(\sum_r E_r \right) \delta \left(\sum_r \pi_\theta^{(r)} \right), \quad (4.240)$$

$$d\mathbf{r} \rightarrow (2\pi)^{-28} \alpha_r d\alpha_r d^{26} p_r d\pi_0^{(r)} d\bar{\pi}_0^{(r)} dE_r d\bar{\pi}_\theta^{(r)} \quad (4.241)$$

となる。このとき、 Q_B の nilpotency などの性質はやはり満たされることがわかる。例えば、 $E \frac{\partial}{\partial \pi_\theta}$ と可換であることから、nilpotent である。

以上から、開弦の covariantized light-cone string field theory の作用は、

$$S = \Phi \cdot Q_B \Phi + \frac{2}{3} g \Phi^3 + \frac{1}{2} g^2 \Phi^4 \quad (4.242)$$

となり、ゲージ変換、

$$\delta \Phi = Q_B \Lambda + g (\Phi * \Lambda - \Lambda * \Phi) + g^2 (\Phi \circ \Phi \circ \Lambda - \Phi \circ \Lambda \circ \Phi + \Lambda \circ \Phi \circ \Phi) \quad (4.243)$$

⁸ M^{c-} は BRST 変換を生成するから Grassmann odd である。

⁹ これは運動量表示の場合で、座標表示の場合は代わりに $-i\theta \frac{\partial}{\partial \tau}$ を引けばよい。

で不変である。

以上のように開弦の covariantized light-cone string field theory は構成される。実際にこの理論を用いて計算する際にはゲージを固定する必要がある、ゲージ固定条件として、 $\pi_0|\Phi\rangle = 0$ や、 $(\pi_0 - \pi_\theta)|\Phi\rangle = 0$ をとった議論がなされている。

4.4.3 Closed Covariantized Light-Cone String Field Theory

次に上で述べた covariantized light-cone string field theory の closed string の場合を紹介する。ここでの記号などは [38] に基づく¹⁰。主な変更点は、anti-holomorphic part が付け加わることと、closed string の場合、積分領域が $[-\pi, \pi]$ になるので、諸量の規格化が変わること、vertex に level matching 条件を満たすために projector が入るという点である。

closed string の場合も light-cone gauge の場合から上で述べたのと同様の方法で作ることができる。つまり、string field を covariant にし、同時に α と BRST 多重項をつくる変数を導入する¹¹。

quartet mechanism 括弧内は Grassmann parity。

$$\begin{array}{ccc} (\alpha, 0) & (E, 0) & \\ Q_B \downarrow & \uparrow Q_B & \\ (\xi, 1) & (\eta, 1) & \end{array} \quad (4.244)$$

作用は light-cone や open string HIKKO の場合と同様 string field の 3 次までで与えられ、

$$S = \Phi \cdot Q_B \Phi + \frac{2}{3}g\Phi^3 \quad (4.245)$$

である。mode 展開は

$$X^M(\sigma) = x^M + \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \left(\alpha_n^M e^{-in\sigma} + \bar{\alpha}_n^M e^{in\sigma} \right) \quad (4.246)$$

¹⁰ これは HIKKO のところで用いたものと同様である。付録 C も参照せよ。

¹¹ ここでは上の開弦の場合の π_θ, π_0 の代わりに η, ξ とかく。

と定義する。前節で述べた定義式を拡張すると、BRST operator および Virasoro operator は

$$Q_B = \frac{2c_0}{\alpha} (L_0 + \bar{L}_0) + i\xi \frac{\partial}{\partial \alpha} - E \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (4.247)$$

$$+ \frac{2i}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{ (\gamma_{-n} L_{-n} - L_{-n} \gamma_n) + (\bar{\gamma}_{-n} \bar{L}_{-n} - \bar{L}_{-n} \bar{\gamma}_n) \right\}, \quad (4.248)$$

$$L_n = - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} : \alpha_{n+m}^M \eta_{MN} \alpha_{-m}^N : + \delta_{n,0} \quad (4.249)$$

$$= - \sum_{m=-\infty}^{\infty} : \left(\frac{1}{2} \alpha_{n+m} \alpha_{-m} + i \gamma_{n+m} \beta_{-m} \right) : + \delta_{n,0} \quad (4.250)$$

である。string field の積を定義する際に用いられる reflector 及び 3-string vertex は、projection operator をもちいて、

$$\langle R(\mathbf{1}, \mathbf{2}) | = \delta(\mathbf{1}, \mathbf{2})_{12} \langle 0 | \exp \left(- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \alpha_n^{M(1)} \eta_{MN} \alpha_n^{N(2)} - \text{anti-holo. part} \right) P_{12} \frac{1}{\alpha_1}, \quad (4.251)$$

$$\begin{aligned} |V(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3})\rangle &= P_{123} \frac{\mu^2}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} X^e(\sigma_{\text{int}}) \\ &\times \exp \left(\frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^3 \sum_{n,m=0}^{\infty} \bar{N}_{nm}^{rs} \alpha_{-n}^{M(r)} \eta_{MN} \alpha_{-m}^{N(s)} + \text{anti-holo. part} \right) |0\rangle_{123} \delta'(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}) \end{aligned} \quad (4.252)$$

と与えられる。ここで用いた projection operator と δ 関数は、

$$P_r = \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{2\pi} \exp i\sigma (L_0 - \bar{L}_0)^{(r)} \quad (4.253)$$

$$P_{12\dots n} = \prod_i^n P_i \quad (4.254)$$

$$\delta(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \mathbf{N}) = (2\pi)^{28} \delta^{26} \left(\sum_r^N p_r \right) \delta \left(\sum_r^N b_0^{(r)} \right) \delta \left(\sum_r^N \eta_r \right) \delta \left(\sum_r^N \xi_r \right) \delta \left(\sum_r^N E_r \right) \delta \left(\sum_r^N \alpha_r \right) \quad (4.255)$$

であって、 δ' は b_0 に関する δ 関数を落としたものである。

closed string に対する covariantized light-cone string field theory は以上のように構成される。

この covariantized light-cone string field theory は、dilaton の真空期待値による coupling constant の変化の議論に用いられ [38]、light-cone による結果 [43] と一致することが確かめられている¹²。しかし、その他の応用はいまだなされていないのが現状である。

¹² HIKKO による解析では異なる結果を与えるが、この点に関しては dilaton operator に着目した HIKKO の枠内での議論がある [44]。

第5章 Non-Polynomial型閉弦の場の理論

次に、これまでとは別種の閉弦の場の理論を考える。Witten は HIKKO とほぼ同時期に中点相互作用を採用した開弦の場の理論を提唱した [18]。これは 2 章で紹介したように、3 本の弦を中点が一致するように張り合わせたものである。これは HIKKO 型とは異なり、張り合わせ方を指定する string length α のような余分な自由度を必要とせず、一意的に貼りあわせを指定する。開弦の場合、すでに見たように作用は string field に関して 3 次までの項を含み、

$$S = \Phi \cdot Q\Phi + \frac{2}{3}g\Phi^3 \quad (5.1)$$

である¹。

この開弦の場の理論は、最近不安定な D-brane 系のタキオンの凝縮の解析に用いられ、弦理論の真空の理解を深める手がかりを与えている。

ところが、ひとたびこの中点相互作用を持つ理論を閉弦の場合に拡張しようとする、相互作用に対応する Riemann 面のモジュライ空間を覆うためには無限個の項が必要であることがわかり [45]、non-polynomial SFT と呼ばれている。

5.1 Quadratic Differential

まず、相互作用を考える際に重要な役割を果たす quadratic differential を紹介する [46]。複素平面を考え、その座標を z とする。 $\phi(z)$ を共形次元 $(2, 0)$ の primary field として、

$$\phi(z)dz^2 \quad (5.2)$$

を quadratic differential と呼ぶ。

このとき、 $\phi(z)$ が共形次元 $(2, 0)$ であることから、共形変換

$$z \longrightarrow z' = h(z) \quad (5.3)$$

¹ この章では BRST charge Q_B を単に Q と書く。

の元で

$$\phi(z)dz^2 = \phi'(z')dz'^2 \quad (5.4)$$

が成り立つことが分かる。

ここで、いくつか言葉を定義する。

Definition 5.1.1 *critical point*

quadratic differential の critical point とは、 $\phi(z)$ の零点と極のことである。

Definition 5.1.2 *horizontal trajectory*

quadratic differential の horizontal trajectory とは、その上で $\phi(z)dz^2$ が実でかつ正であるような曲線である。

Definition 5.1.3 *closed trajectory*

閉じた horizontal trajectory を closed trajectory と呼ぶ。

この定義の意味は、各 horizontal trajectory 上で quadratic differential に対して共形変換をして、

$$dw^2 = \phi(z)dz^2 \quad (5.5)$$

とすると見やすい。ただし、

$$w(z) = \int \sqrt{\phi(z)}dz \quad (5.6)$$

と変換した。すると、 $\phi(z)dz^2$ が horizontal trajectory にある限り $w(z)$ の虚部は変化しないことが分かる。すなわち、 z が horizontal line を動くと、 w の軌跡は実軸に平行になる。

特に、以下では2次の極を持つ quadratic differential が重要である。今、quadratic differential が点 p の周りで

$$\phi(z) = -\frac{a^2}{(z-p)^2}, \quad a \in \mathbb{R} \quad (5.7)$$

で与えられているとすると、

$$w(z) = ia \ln |z-p| - a \arg(z-p) \quad (5.8)$$

となる。すると、horizontal trajectory は、 $w(z)$ の第一項を一定に保って第二項を動かすようなものであるから、 z 平面では、点 p を中心とする円であることが分かる。ここで、 $z-p = re^{i\theta}$

と表し、 ϕ が他に極を持っていないとすると、 w は実軸方向に長さ $2\pi a$ 、虚軸方向に無限大に伸びた円柱をあらわしていることが分かる。円柱になるのは、 θ について端を同一視するからである。一般には円の半径を大きくするうちに他の極にぶつかるので、円柱の虚部方向への広がり半無限となる。

この $\phi(z)$ を用いて w 平面に (ユークリッド的な) 距離を入れることができる。

$$|dw| = \sqrt{|\phi(z)|} |dz| \quad (5.9)$$

であるから、これを積分すればよい。すると、例えば (5.8) が定める、 z 内の p を中心とした半径 r の円は、 w 平面で、

$$\int |dw| = \oint \frac{a}{|z-p|} |dz| = \int_0^{2\pi r} \frac{a}{r} ds = 2\pi a \quad (5.10)$$

なる長さをもつことになる。これは r に依らず、quadratic differential の極の係数によって決まるから、 ϕ -length と呼ぶ。

弦の相互作用では、閉弦の外線は円柱として表され、その円柱を張り合わせて Riemann 面を作る。このとき、次の定理がある。

Theorem 5.1.1 (Strebel) R を Riemann 面とし、 R 上に $n(\geq 2)$ 個の点 P_j , ($j = 1, \dots, n$) があるとす。今、 $\dot{R} = R \setminus \{P_j\}$ とし、その上に、 \dot{R} の、穴 P_j を囲む円盤 R_j の周 α_j を closed trajectory としてもつ quadratic differentials ϕ は、各 closed trajectory の ϕ -length a_j により一意的に決まる。ここで、 a_j は任意の値をとることができる。

上で見たように、closed trajectory を決めることは Laurant 展開の 2 次の係数を決めることを意味する。複素関数論から、極の周りの振る舞いにより関数がほぼ決定されることから、これはその拡張であると考えられる。

ここで、各穴 P_j の周りの円盤 R_j は円柱と同相であるから \dot{R} を n 本の閉弦の相互作用を表しているとみなせる。つまり、周の長さを指定した円柱を張り合わせることで相互作用を指定できる。以上を踏まえて、モジュライ空間を覆うためにはどのような相互作用を取ればよいかを次節で説明する。

5.2 Restricted Polyhedra

この節では、開弦の中間相互作用を閉弦の場合に拡張する [47, 48, 49, 50, 51]。

開弦の場合、中間相互作用は図 2.1 のとおりである。これを閉弦の場合に拡張すると、図 5.1 のようになっている。前節で説明したように、こうした相互作用は、Saadi と Zwiebach

[45] により考案された。Jenkins-Strebel quadratic differential [46] を用いると、 n 個の穴がある Riemann 面と n 個の string が図 5.1 のような接触相互作用の間には一対一対応があることが分かる。これは、相互作用する n 個の string 上の quadratic differential を Riemann 面上に滑らかに張り合わせる際の条件である。ただし、前節の定理では張り合わせる円柱の周の長さは任意であった。しかし、その場合 tadpole などといった望ましくない相互作用を含んでしまうので、各円柱の周の長さは 2π であると制限をつける。これは共変な理論では全ての閉弦が同等に扱われるべきである、という見方とも整合的である。

Riemann 面のモジュライ空間を過不足なく覆う処方 [48] によってあたえられた。それは、以下の条件を満たす多面体を考えることに帰着する。

1. S^2 に同相。
2. 各頂点には辺が 3 本のみつながっている。
3. 任意の面の周の長さは 2π である。すなわち、各辺の長さを l_i とすると、任意の面 F について

$$\sum_{i \in F} l_i = 2\pi \quad (5.11)$$

である。

4. 多面体の上の各面の周を作る辺で構成される全ての閉じた経路 L に対して、その長さは 2π 以上である。すなわち、

$$\sum_{i \in L} l_i \geq 2\pi \quad (5.12)$$

である。

以上の条件を満たす多面体を、restricted polyhedron と呼ぶ。

それでは restricted polyhedron の性質についていくつか述べておく。ある多面体を考えて、その頂点、辺、面の個数をそれぞれ v, e, n とすると、オイラー数の関係式から

$$v - e + n = 2 \quad (5.13)$$

なる関係がある。上の restricted polyhedron の定義 (2) より、 $3v = 2e$ でなくてはならない。すると、上の関係式を用いて

$$e = 3(n - 2), \quad (5.14)$$

$$v = 2(n - 2) \quad (5.15)$$

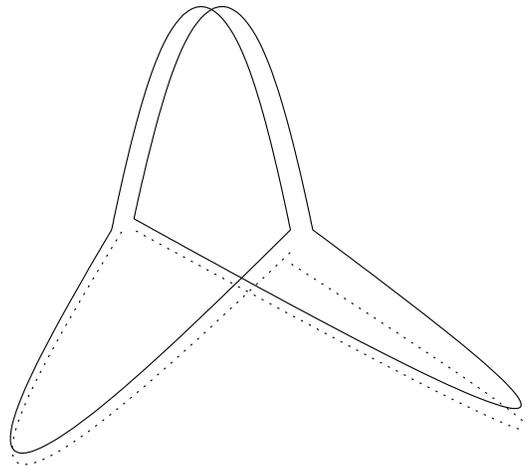


図 5.1: 3-closed string vertex

と解くことができる。この多面体を決定する自由度は、辺の数から、面の周の和に関する拘束条件の数を差し引いたもので、

$$e - n = 2n - 6 \quad (5.16)$$

である。これは $g = 0$ の Riemann 面のモジュラーパラメーターの数と一致する。すなわち、モジュライ空間の数え上げに関して正しい処方を与えているという証拠の一つになる。

$n = 3$ の場合、モジュラーパラメーターは 0 個であるから vertex は一意に決まり、図 5.2 のようになる。この図は図 5.1 をつづしたものである。各辺の長さは π である。

$n = 4$ の場合、モジュラーパラメーターは 2 個である。この過程に対応する restricted polyhedron は図 5.3 である。このとき、各面について条件 (3) を考慮すると、交わらない辺同士の長さは互いに等しいことが分かる。 $n = 3$ の場合と同様につづした図を書くと、図 5.4 となる。このとき

$$a + b + c = 2\pi \quad (5.17)$$

である。この上で、条件 (4) を考えてみる。例えば、 $b \rightarrow c \rightarrow b \rightarrow c$ という閉じた経路を考えると、

$$2(b + c) \geq 2\pi \quad (5.18)$$

でなくてはならず、これにより $a \leq \pi$ となる。同様にして、 $a, b, c \leq \pi$ を得る。

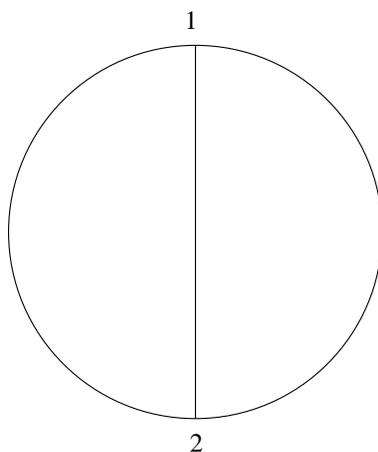


図 5.2: 3-closed string vertex の restricted polyhedron

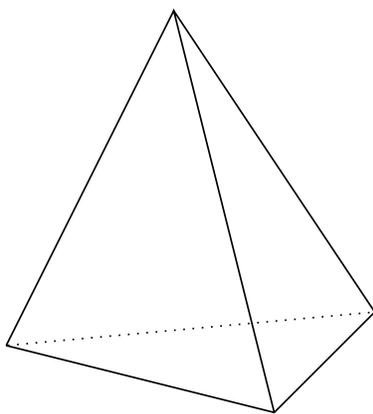


図 5.3: 4-closed string vertex

次に図 5.5 を考える。長さ l_i の両側には面 F_1, F_2 がある。このとき、条件 (3) より、

$$\sum_{j \in F_1} l_j = 2\pi, \quad (5.19)$$

$$\sum_{k \in F_2} l_k = 2\pi \quad (5.20)$$

が成り立つ。同時に、条件 (4) より、 F_1, F_2 を作る辺のうち、 l_i 以外の部分でつくる閉じた経路について

$$\sum_{j \in (F_1 \cap F_2) - l_i} l_j \geq 2\pi \quad (5.21)$$

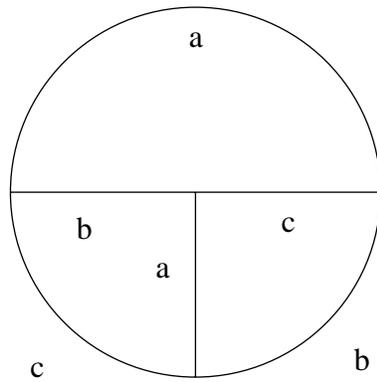


図 5.4: 4-string vertex に対応する restricted polyhedron

でなくてはならない。結局これらをあわせて一般の辺 l_i に関して

$$l_i \leq \pi \tag{5.22}$$

という制限がつくことがわかった。

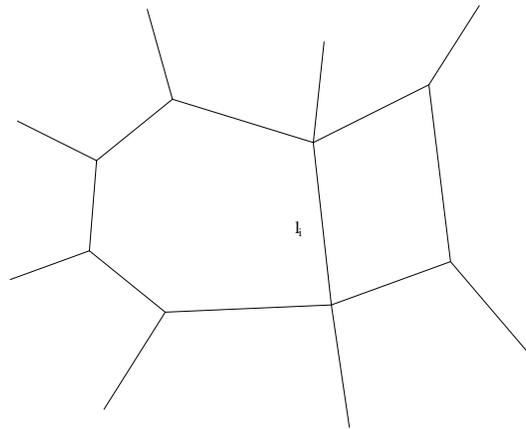


図 5.5: 一般の多面体の一部。

一般の genus g の Riemann 面のモジュライ空間を過不足なく覆うためにはこうして得られた restricted polyhedron だけでは実は十分ではなく、上の条件の元で、Riemann 面の面積を最小にする計量に制限することが必要であることが Zwiebach により提唱されている。詳しい議論は文献 [52, 53, 54] に譲る。

5.3 4体相互作用の場合

この節では前節で考えた restricted polyhedron の組み合わせが相互作用のモジュライ空間をどのように覆っているのかを、4体の相互作用について具体的に見る。

前節で見たように restricted tetrahedron は和が 2π になるような辺の長さ a, b, c によって特徴付けられる。このとき、弦の張り付き方によって図 5.6 に示すような二つの場合が考えられる。それゆえ、(a) の場合のモジュライ空間は図 5.7 のようになる。(b) についても同様である。ただし、こちらに関しては辺の長さに ' を付けるものとする。ただし、例えば辺 AB と $A'B'$ は同一視される。なぜなら、 $a = 0, b = b', c = c'$ のときこれが表す相互作用は一致するからである。それゆえ、4体の相互作用のモジュライ空間は3三角形を二つ張り合わせたような形になっている。

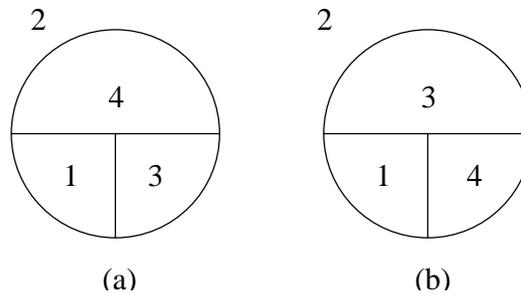


図 5.6: 2つの4体相互作用。

このモジュライ空間において、特に

$$\{a, b, c\} \leq \pi \quad (5.23)$$

を満たす領域を考える。この領域は前節で考えた restricted polyhedron に対応する部分である。' つきについても同様である。この領域に対応する4面体は、各面で

$$a + b > c, \quad b + c > a, \quad c + a > b \quad (5.24)$$

を満たすから、各面は直線を辺として持つ三角形である。すなわち、これ以外の領域では相互作用を表す多面体は平面に属する部分を含むから、3点相互作用を含む図 5.8 などの場合は、これ以外の領域に含まれる。

今、3体の相互作用から作られる4体相互作用の Feynman graph (図 5.8) を考える。それぞれ、相互作用している弦を時計回りに並べて例えば s-channel に関しては $[12p][p34]$ と書くことにする。

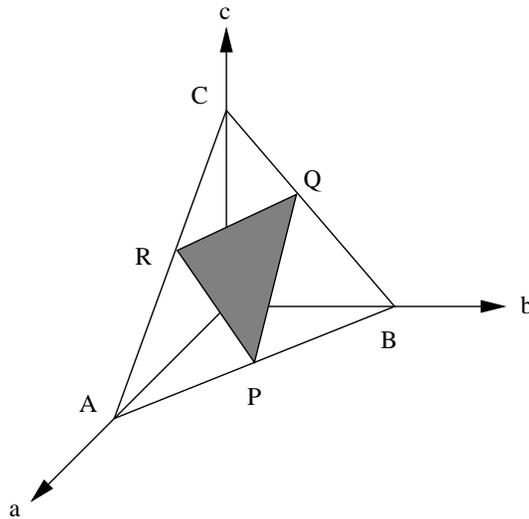


図 5.7: 4 体相互作用のモジュライ空間。

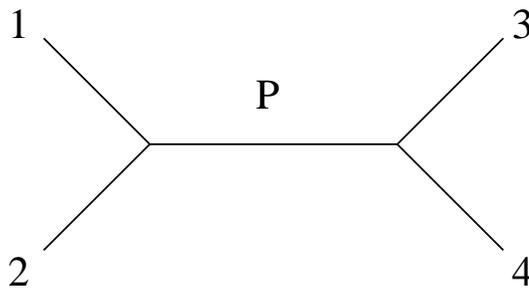


図 5.8: Feynman graph (s-channel)。

閉弦 1, 3, 4 を共形変換でそれぞれ $0, 1, \infty$ にうつすと、弦 2 の球面上の位置がモジュラー変換の自由度に対応する。しかし、上の Feynman graph によってつくされる領域は、これを λ 平面で書いて、下の図のようになることが知られている。(図 5.7 とこの図の各点の同一視は後で与える。)²

このとき、s-channel で p に対応する propagator の長さが 0 に近づく極限を考える。すると、以下の図のように、propagator のひねりを考慮して、上で考えた二通りの restricted polyhedron を得る。これは図 5.7 の $RP(R'P')$ に相当する。今、 $[mn; pq]$ で弦 m, n が長さ π

² ただし、各境界の解析的な表現は知られていない。

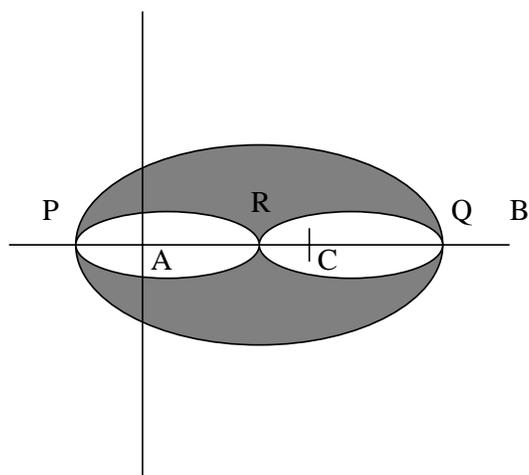


図 5.9: モジュラーパラメータ λ の空間。

で貼り付けられ、また npq の順に弦 m に貼り付けられている相互作用を表すとすると、結局、

$$\lim_{p \rightarrow 0} [12p][p34] = [12; 34] + [12; 43] \quad (5.25)$$

を得る。つまり、s-channel の相互作用の境界は restricted tetrahedron に一致する。

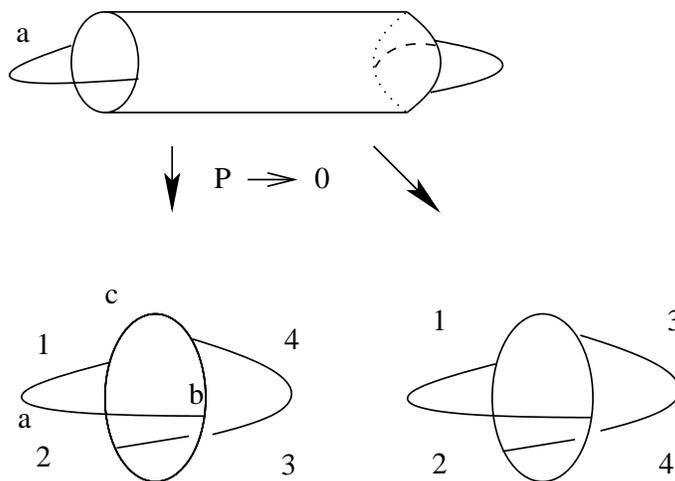


図 5.10: Feynman graph の極限。

また、tetrahedron において、 $a \geq \pi$ の領域を考えてみる。 $b = 0$ とすると $a \geq \pi \geq c$ である。このとき、自由度は 1 次元であるから、 $\lambda \in \mathbb{R}$ である。さらに $a = c = \pi$ のとき、対称であるから、 $\lambda = \frac{1}{2}$ となる。また、 $c \rightarrow 0$ のとき、弦 2 は弦 1 に漸近するから、 $\lambda \rightarrow 0$ とな

る。すなわち、図 5.7 の RA は図 5.9 の RA に一致する事がわかる。他の境界に関しても同様に見ることができて、結局、境界が一致するのでその中身も一致して、図 5.9 において影をつけた部分は restricted polyhedron の領域に一致する。(5.10) より、3 体相互作用からこの領域を覆うことはできないから、モジュライ空間を覆うためには 4 体の restricted polyhedron の相互作用が必要であることが分かった。一般の n 本の弦の相互作用の場合も同様の状況で、tree level のモジュライ空間を覆うには restricted polyhedron に対応する n 体の相互作用を取り込む必要があることが示されている [48]。

5.4 代数構造

前節で見たように、non-polynomial タイプの SFT では相互作用が作用に BRST 対称性を要請すると無限個の項を含めなくてはならない。前章の HIKKO の場合は、個々の vertex を作ったが、今の場合、それはできない。そこで、ここでは一般の n 個の string field の間の積を定義し、それが満たす代数を議論する [55]。積の具体的な構成法は多少こみいっているのでこの章の最後に述べるとして、ここでは先に、積の満たす性質を紹介する。量子論的に正しい作用を作ろうとすると、genus を取り込んだ代数が必要になるが、特に古典的な部分のみは、 L_∞ 代数と呼ばれる代数を作っている。これは、開弦の場の理論で現れる A_∞ 代数に類似のものである。

以下では \mathcal{H} で Hilbert space を表し、 $\{B_i\}$ で string field を表すことにする。ただし、 B_i は b_0^- 及び L_0^- をかけると消えるものとし、その他の ghost number などの条件は任意とする。前に導入した reality の条件すら満たす必要はない。このとき、string field についての多重線形な積

$$(g, \mathcal{H}^{\otimes n}) \longrightarrow \mathcal{H} : (B_1, B_2, \dots, B_n) \longmapsto [B_1, B_2, \dots, B_n]_g \quad (5.26)$$

を定義する。これは後に述べるが、HIKKO の場合にしたように、積に対応する vertex を作り、そこに string field の ket をかけて積分する、という形をしている。つまり、 $\{B_1, \dots, B_n\} \sim \langle \Omega | B_1 \rangle \cdots | B_n \rangle$ で、 Ω は Grassmann even である。この積は次の補助条件

$$b_0^- [B_1, B_2, \dots, B_n]_g = L_0^- [B_1, B_2, \dots, B_n]_g = 0 \quad (5.27)$$

を満たし、多重線形である：

$$[B_1, \dots, B_i b + B'_i b', \dots, B_n]_g \quad (5.28)$$

$$= [B_1, \dots, B_i, \dots, B_n]_g b (-1)^{b(B_{i+1} + \dots + B_n)} + [B_1, \dots, B'_i, \dots, B_n]_g b' (-1)^{b'(B_{i+1} + \dots + B_n)}. \quad (5.29)$$

また、状態の入れ替えに関して

$$[B_1, \dots, B_i, B_{i+1}, \dots, B_n]_g = (-1)^{B_i B_{i+1}} [B_1, \dots, B_{i+1}, B_i, \dots, B_n]_g \quad (5.30)$$

である。この積は後に n -string の genus g の vertex に相当することが分かる。

次に積の内容を見る。

まず、 $n = 0$ のとき、これは \mathcal{H} 中の特別な元を指定する。これを F_g と書く。すなわち、 $[\cdot]_g = F_g \in \mathcal{H}$ 。特に $g = 0$ の時は 0 である: $[\cdot]_0 = 0$ 。

次に $n = 1$ かつ $g = 0$ の時は、これは $[B]_0 = QB$ となる。

この積の ghost number は、

$$G([B_1, \dots, B_n]_g) = 3 + \sum_{i=1}^n (G(B_i) - 2) \quad (5.31)$$

である。これより、Grassmann parity は、

$$|[B_1, \dots, B_n]| = 1 + \sum_{i=1}^n |B_i| \quad (5.32)$$

であると分かる。

さて、この多重線形な積に対して次の関係式が成り立つ:

$$\begin{aligned} & Q[B_1, \dots, B_n]_g + \sum_{i=1}^n (-1)^{B_1 + \dots + B_{i-1}} [B_1, \dots, QB_i, \dots, B_n]_g \\ & + \sum_{\substack{g_1, g_2 \\ \{i_l, j_k\}, l, k}} \sigma(i_l, j_k) [B_{i_1}, \dots, B_{i_l}, [B_{j_1}, \dots, B_{j_k}]_{g_2}]_{g_1} + \frac{1}{2} \sum'_s (-1)^s [\Phi_s, \tilde{\Phi}_s, B_1, \dots, B_n]_{g-1} \\ & = 0. \end{aligned} \quad (5.33)$$

証明は複雑なので文献[55]に譲る。ここで、和のとり方について説明する。第二項は、 $\{1, 2, \dots, n\}$ を二つの組、 $\{i_1, \dots, i_l\}, \{j_1, \dots, j_k\}$ に分けるわけ方についての和である。ここで、和は異なる分け方についてた仕上げるもので、異なる分け方とは、並べ方の順序が異なるだけのものは同じ分け方であるとみなす。また、 g_1, g_2, l, k に関しては次の条件

$$g_1 \geq 0, \quad g_2 \geq 0, \quad g_1 + g_2 = g, \quad (5.34)$$

$$l \geq 0, \quad k \geq 0, \quad l + k = n \geq 0, \quad (5.35)$$

$$l \geq 1 \quad \text{when } g_1 = 0, \quad (5.36)$$

$$k \geq 2 \quad \text{when } g_2 = 0 \quad (5.37)$$

を満たす。第二項に現れた係数 $\sigma(i_l, j_k)$ は、 $\{Q, B_1, \dots, B_n\}$ を $\{B_{i_1}, \dots, B_{i_l}, Q, B_{j_1}, \dots, B_{j_k}\}$ に並べ替える際に現れる符号である。つまり、この和は、 $\{1, \dots, n\}$ を二つに分けて、それ

ぞれ添え字の小さい順に並べて、 Q を動かしたときの符号を拾えば計算しやすい。この恒等式 (5.33) は以下の議論で非常に重要なので、main identity と呼ぶ。

ところで、第二項に、形式的に (1) $l = 0$ かつ $g_1 = 0$ 、及び (2) $k = 1$ かつ $g_2 = 0$ 、及び (3) $k = 0$ かつ $g_2 = 0$ を代入すると、(1) の場合、 $Q[B_1, \dots, B_n]_{g_2}$ 、(2) の場合、 $(-1)^{B_1 + \dots + B_{i-1}} [B_1, \dots, QB_i, \dots, B_n]_{g_1}$ 、(3) の場合 0 となるから、(5.33) は

$$\sum_{\substack{g_1 + g_2 = g \\ \{i, j_k\}, l, k \geq 0 \\ l + k = n}} \sigma(i_l, j_k) [B_{i_1}, \dots, B_{i_l}, [B_{j_1}, \dots, B_{j_k}]_{g_2}]_{g_1} + \frac{1}{2} \sum'_s (-1)^s [\Phi_s, \tilde{\Phi}_s, B_1, \dots, B_n]_{g-1} = 0 \quad (5.38)$$

と書き換えることができる。後に見るように、この代数があるために作用が BV 方程式を満たすことが純粋に代数的に確かめられる。この点が HIKKO においては \hbar 展開の各次数ごとにアノマリーを相殺する項を求めなくてはならないこと [34, 35] と著しく異なる。また、特に、 $g = 0$ 場合、第二項はなくなり、

$$\sum_{\substack{g_1 + g_2 = g \\ \{i, j_k\}, l, k \geq 0 \\ l + k = n}} \sigma(i_l, j_k) [B_{i_1}, \dots, B_{i_l}, [B_{j_1}, \dots, B_{j_k}]_0]_0 = 0 \quad (5.39)$$

となる [47]。これは L_∞ と呼ばれる ホモトピー結合代数をなしている。(5.38) と比べると、 $g \geq 1$ の量子論的な項は積のトレースのような形をしていて、それがこの代数を壊していることが分かる。

(5.33) の意味するところを具体的に調べてみる。

古典的な部分、すなわち $g = 0$ の場合を見ると、 $g_1 = g_2 = 0$ だから特に簡単になって、 $n = 0$ のとき、

$$[[\cdot]_0]_0 = Q[\cdot]_0 = 0 \quad (5.40)$$

である。これは $[\cdot]_0 = 0$ であることと整合的である。つぎに $n = 1$ の時、任意の B に対して

$$[[B]_0]_0 + (-1)^B [B, [\cdot]_0]_0 = Q^2 B = 0 \quad (5.41)$$

となり、BRST charge の nilpotency を表す。 $n = 2$ の時は、

$$[[B_1, B_2]_0]_0 + (-1)^{B_1} [B_1, [B_2]_0]_0 + (-1)^{B_2(1+B_1)} [B_2, [B_1]_0]_0 = 0 \quad (5.42)$$

である。書き換えると、

$$Q[B_1, B_2]_0 + [QB_1, B_2]_0 + (-1)^{B_1} [B_1, QB_2]_0 = 0 \quad (5.43)$$

を与える。これは BRST charge が $[\cdot]_0$ に関して Leibniz rule を満たすことを表している³。
次に $n = 3$ の場合を書くと、見やすく整理すると、

$$\begin{aligned} & Q[B_1, B_2, B_3]_0 + [QB_1, B_2, B_3]_0 + (-1)^{B_1} [B_1, QB_2, B_3]_0 + (-1)^{B_1+B_2} [B_1, B_2, B_3]_0 \\ & + (-1)^{B_1} [B_1, [B_2, B_3]_0]_0 + (-1)^{B_2(1+B_1)} [B_2, [B_1, B_3]_0]_0 + (-1)^{B_3(1+B_1+B_2)} [B_3, [B_1, B_2]_0]_0 \\ & = 0 \end{aligned} \quad (5.44)$$

である。第一行目は、三個の string field の積に関して、BRST charge Q が derivation として働かないことを表して、第二行は Jacobi identity の破れを表している。さらにこの式はその破れの度合いが等しいということの意味している。

これまでに解説した多重線形な積は Hilbert space の元を定めるが、次にこれを用いて、内積により c-number を出す演算を定義する。それは、 $A, B_i \in \mathcal{H}$ に対して、

$$\{A, B_1, \dots, B_n\}_g \equiv \langle A, [B_1, \dots, B_n]_g \rangle = \langle A | c_0^- | [B_1, \dots, B_n]_g \rangle \quad (5.45)$$

である。この積により、上で定義した多重線形な積は、

$$[B_1, \dots, B_n]_g = \sum'_s (-1)^s |\tilde{\Phi}_s\rangle \cdot \{\Phi_s, B_1, \dots, B_n\}_g \quad (5.46)$$

と表すことができる。ここで、 \sim つきの状態が現れているのは、内積の定義で c_0^- が現れているために、 $1 \simeq \sum_s |s\rangle \langle s|$ からずれるためである。

この積は、多重線形な積の場合と同様、多重線形性を持つ。また、内積をとる際に、 $|A\rangle$ は reflector を使って bra にするため、 $\{B_i\}$ と同等に扱えることから、

$$\{B_1, \dots, B_i, B_{i+1}, \dots, B_n\}_g = (-1)^{B_i B_{i+1}} \{B_1, \dots, B_{i+1}, B_i, \dots, B_n\}_g \quad (5.47)$$

が成り立つ。さらに、これは c-number を与えるので、0 でない値を与えるときは、ghost number は 0 であるべきである。それゆえ、 $\{B_1, \dots, B_n\} \neq 0$ ならば、 $G(B_1) + 1 + 3 + \sum_{i=2}^n (G(B_i) - 2) = 6$ つまり、 $\sum_i (G(B_i) - 2) = 0$ 。これより、Grassmann parity は、

$$|[B_1, \dots, B_n]| = \sum_i^n |B_i| \quad (5.48)$$

である。

³ この式では符号がずれているが、積の定義で符号を調節すれば通常の関係式にできる。

上の場合と同様にいくつか簡単な部分について具体的に示す。まず、 $\{\cdot\}_g = F'_g$ とおく。さらに記号を、

$$\{B\}_g = \langle B, [\cdot]_g \rangle \quad (5.49)$$

とする。 $g = 0$ のとき、 $\{\cdot\} \equiv 0$ とする。さらに、 $\{B\}_0 = \langle B, [\cdot]_0 \rangle = 0$ である。

5.5 Non-polynomial action

この節では具体的に作用を構成する。相互作用の部分は複雑であるので、string field について 2 次の部分である運動項と、相互作用の部分を別々に論じる。

5.5.1 運動項

まず、前章と同様に、作用の 2 次の部分は、

$$S_{0,2} = \frac{1}{2} \langle \Psi | c_0^- Q | \Psi \rangle = -\frac{1}{2} (\Psi, c_0^- Q \Psi) = \frac{1}{2} \langle \Psi, Q \Psi \rangle \quad (5.50)$$

である⁴。ここで、string field $|\Psi\rangle$ は

$$b_0^- |\Psi\rangle = L_0^- |\Psi\rangle = 0 \quad (5.51)$$

なる条件を満たす。この作用は Hermite である。実際、計算になれる意味でこれを示すと、 $\{Q, b_0^-\} = L_0^-$ に注意して、

$$(\Psi, c_0^- Q \Psi)^\dagger = - (c_0^- Q \Psi, \Psi) \quad (5.52)$$

$$= - (\Psi, Q c_0^- \Psi) \quad (5.53)$$

$$= - (\Psi, (b_0^- c_0^- + c_0^- b_0^-) Q c_0^- \Psi) \quad (5.54)$$

$$= - (\Psi, c_0^- b_0^- Q c_0^- \Psi) \quad (5.55)$$

$$= (\Psi, c_0^- Q \{b_0^-, c_0^-\} \Psi) \quad (5.56)$$

$$= (\Psi, c_0^- Q \Psi) \quad (5.57)$$

となることから従う。

⁴ $S_{0,2}$ の添え字の意味は、作用の中の、string field 2 個、genus 0 の部分という意味である。

運動方程式は、 $|\Psi\rangle$ を変分して、

$$\delta S_{0,2} = \frac{1}{2} (\langle \delta\Psi, Q\delta\Psi \rangle + \langle \Psi, Q\Psi \rangle) \quad (5.58)$$

$$= \langle \delta\Psi, Q\Psi \rangle \quad (5.59)$$

より、

$$Q|\Psi\rangle = 0 \quad (5.60)$$

である。

上の変形を見ると、 $Q_B^2 = 0$ であるから、 $S_{0,2}$ は、 $\delta|\Psi\rangle = Q|\Lambda\rangle$ の無限小変換に関して不変であることが分かる。ただし、 $|\Lambda\rangle$ は Grassmann odd である。またこのとき、 $|\Psi\rangle$ が満たすべき条件より、 $|\Lambda\rangle$ は以下の条件を満たさなくてはならない。それは、

$$b_0^-|\Lambda\rangle = L_0^-|\Lambda\rangle = 0, \quad (5.61)$$

$$(|\Lambda\rangle)^\dagger = -\langle\Lambda|, \quad (5.62)$$

$$G|\Lambda\rangle = |\Lambda\rangle \quad (5.63)$$

である。

以上を踏まえると、physical な部分は、BRST cohomology で分類できる：

$$|\Psi\rangle \simeq |\Psi\rangle + Q|\Lambda\rangle, \quad (5.64)$$

ただし、 $b_0^-|\Psi\rangle = b_0^-|\Lambda\rangle = 0$, $L_0^-|\Psi\rangle = L_0^-|\Lambda\rangle = 0$ とする⁵。

ゲージ固定条件の一つに Siegel ゲージがある。それは $b_0^+|\Psi\rangle = 0$ である。このとき、作用は、

$$S_0^2 = \frac{1}{2} \langle \Psi | c_0^- c_0^+ (L_0 + \bar{L}_0) | \Psi \rangle \quad (5.65)$$

と書ける。対応する propagator は

$$\frac{b_0^- b_0^+}{L_0 + \bar{L}_0} P | R_{12} \rangle \quad (5.66)$$

となる。次にこれが 古典 BV 方程式を満たしていることを示そう。 $S_{0,2}$ は局所的な関数でかいているので、古典 BV 方程式を満たしていることを示せば十分である。そのために string field を、

$$|\Psi\rangle = |\Psi_-\rangle + |\Psi_+\rangle = \sum'_{G(\Phi_s) \leq 2} |\Phi_s\rangle \phi_s + \sum'_{G(\tilde{\Phi}_s) \leq 2} |\tilde{\Phi}_s\rangle \phi_s^* \quad (5.67)$$

⁵ この補助的な条件のために正確には semirelative cohomology となる。

と分解する。 ϕ_s を field, ϕ_s^* を antifield とみなす。ここで、 $|\tilde{\Phi}_s\rangle = b_0^- |\Phi_s^c\rangle$ であって、ghost number は $5 - G$ である。また、 ϕ_s, ϕ_s^* の ghost number はそれぞれ $2 - G(\Phi_s), G(\Phi_s) - 3$ となっていて、両者の和は -1 となっている。また、 Σ' は、 $L_0^- |\Phi\rangle = 0$ を満たす状態についてのみ和をとることを表す。

ここで、簡単のため、Grassmann even な演算子 O を、 $O \equiv c_0^- Q_B$ と定義すると、作用は

$$S_{0,2} = \frac{1}{2} \langle R_{12} |\Phi_1\rangle O_2 |\Phi_2\rangle \quad (5.68)$$

と書ける。今、reflector は接続の条件より、この演算子 O に対して

$$\langle R_{12} | (O_1 - O_2) = 0 \quad (5.69)$$

を満たす。これに注意すると、

$$\frac{\partial_R S_{0,2}}{\partial \phi_s} = \frac{1}{2} \langle R_{12} |\Phi_s\rangle_1 O_2 |\Psi_s\rangle + \frac{1}{2} \langle R_{12} |\Psi_1\rangle O_2 |\Phi_s\rangle_2 = \langle R_{12} |\Psi_1\rangle O_2 |\Phi_s\rangle_2 \quad (5.70)$$

を得る。同様にして、antifield に関する微分は、左微分であるために、 $(-1)^{(5-G)(G-3)} = (-1)^{G+1}$ なる係数がつくことに注意して、

$$\frac{\partial_L S_{0,2}}{\partial \phi_s^*} = (-1)^{s+1} \langle R_{34} |\Psi_3\rangle O_4 |\tilde{\Phi}_s\rangle_4 \quad (5.71)$$

である。これを古典 BV 方程式に代入して、

$$\frac{\partial_R S_{0,2}}{\partial \phi_s} \frac{\partial_L S_{0,2}}{\partial \phi_s^*} = -\langle R_{12} |\Psi_1\rangle O_2 \langle R_{34} |\Psi_3\rangle O_4 \sum'_{G(\Phi_s) \leq 2} (-1)^s |\Phi_s\rangle_2 |\tilde{\Phi}_s\rangle_4 \quad (5.72)$$

$$= -\frac{1}{2} \langle R_{12} |\Psi_1\rangle O_2 \langle R_{34} |\Psi_3\rangle O_4 \sum'_{G(\Phi_s) \leq 2} (-1)^s \left(|\Phi_s\rangle_2 |\tilde{\Phi}_s\rangle_4 + |\Phi_s\rangle_4 |\tilde{\Phi}_s\rangle_2 \right) \quad (5.73)$$

ここで、右辺の reflector の部分が 2、4 の入れ替えに対して対称であることを用いた。この和の部分は (3.96) を用いて書き換えることができる。これによると、

$$\sum'_{G(\Phi_s) \leq 2} (-1)^s |\Phi_s\rangle_4 |\tilde{\Phi}_s\rangle_2 = \sum'_{G(\Phi_s) \geq 3} (-1)^s |\Phi_s\rangle_2 |\tilde{\Phi}_s\rangle_4 \quad (5.74)$$

であるから、和をとる際の ghost number に関する制約をはずすことができ、

$$\begin{aligned}
2 \frac{\partial_R S_{0,2}}{\partial \phi_s} \frac{\partial_L S_{0,2}}{\partial \phi_s^*} &= -\langle R_{12} | \Psi_1 \rangle O_2 \langle R_{34} | \Psi_3 \rangle O_4 \sum_s' (-1)^s |\Phi_s\rangle_2 |\tilde{\Phi}_s\rangle_4 \\
&= -\langle R_{12} | \Psi_1 \rangle O_2 \langle R_{34} | O_4 | \Psi_3 \rangle b_0^{(4)-} | R_{24} \rangle \\
&= -\langle \Psi_2 | O_2 \langle R_{34} | b_0^{(3)-} O_3 | \Psi_3 \rangle P_2 | R_{24} \rangle \\
&= -\langle \Psi_2 | O_2 b_0^{(2)-} O_2 | \Psi_2 \rangle \\
&= -\langle \Psi | O b_0^- O | \Psi \rangle \\
&= -\langle \Psi | c_0^- Q b_0^- c_0^- Q | \Psi \rangle \\
&= \langle \Psi | c_0^- Q c_0^- b_0^- Q | \Psi \rangle \\
&= \langle \Psi | c_0^- Q c_0^- (-Q b_0^- + L_0^-) | \Psi \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

となる。以上で運動項 $S_{0,2}$ は古典 BV 方程式を満たすことが示せた。

5.5.2 古典作用

前節では作用の中の、string field に関して 2 次の部分を考えた。次に相互作用の入った、古典作用を考える。閉弦の理論の古典作用は、[47] で与えられ、ゲージ対称性を持つことが示された。この節では、上で導入した多重線形な積を用いて閉弦の理論の作用を表し、それがゲージ対称性を持つことを示す。

今、 $\underbrace{\{\Psi, \Psi, \dots, \Psi\}}_n = \{\Psi^n\}$ と書くことにすると、ghost number が 2 の string field Ψ に関して、古典的作用は

$$S(\Psi) = \frac{1}{\kappa^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\kappa^n}{n!} \{\Psi^n\}_0 \quad (5.75)$$

である。ここで、 κ は閉弦の場の理論の結合定数である。これは一見前節で与えた作用と異なるが、 $n = 2$ の部分を考えれば、

$$\{\Psi, \Psi\}_0 = \langle \Psi, [\Psi]_0 \rangle = \langle \Psi, Q\Psi \rangle \quad (5.76)$$

となり、作用は

$$S(\Psi) = \frac{1}{2} \langle \Psi, Q\Psi \rangle + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\kappa^{n-2}}{n!} \{\Psi^n\}_0 \quad (5.77)$$

となる⁶。この作用で、形式的に $n = 0, 1$ に対応する項を考えると、どちらも 0 を与えるので、この作用は

$$S(\Psi) = \frac{1}{\kappa^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\kappa^n}{n!} \{\Psi^n\}_0 \quad (5.78)$$

と書くこともできる。作用が与えられたから、運動方程式を求める。作用を変分して、

$$\delta S = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\kappa^{n-2}}{(n-1)!} \{\delta\Psi, \Psi^{n-1}\}_0 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\kappa^{n-2}}{(n-1)!} \langle \delta\Psi, [\Psi^{n-1}]_0 \rangle \quad (5.79)$$

を得る。ここで、 Ψ は Grassmann even であることと、(5.47) を使った。これより、運動方程式は

$$\mathcal{F}(\Psi) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa^{n-1}}{n!} [\Psi^n]_0 = Q|\Psi\rangle + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\kappa^{n-1}}{n!} [\Psi^n]_0 = 0 \quad (5.80)$$

となる。

5.5.3 ゲージ変換

前節で古典作用を与えたので、この節では、この作用を不変にするゲージ変換を考える。ゲージ変換は、作用を微分してその中の string field の一つを変換のパラメータで置き換える、という処方で与えられて、

$$\delta_\Lambda |\Psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\kappa^n}{n!} [\Psi^n, \Lambda]_0 = Q|\Lambda\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} [\Psi^n, \Lambda]_0 \quad (5.81)$$

である。 Λ の ghost number は 1 であって、それゆえ Grassmann odd である。

それではこの変換で作用 (5.78) が不変であることを見よう。(5.79) にこの変換を代入すると、

$$\begin{aligned} \delta_\Lambda S &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa^{n-2}}{(n-1)!} \{\delta_\Lambda \Psi, \Psi^{n-1}\}_0 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\kappa^{n+m-1}}{n!m!} \{[\Psi^m, \Lambda]_0, \Psi^n\}_0 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\kappa^{n+m-1}}{n!m!} \langle [\Psi^m, \Lambda]_0, [\Psi^n]_0 \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{l \geq 0, k \geq 0 \\ l+k=n}} \frac{\kappa^{n-1}}{l!k!} \langle [\Psi^l, \Lambda]_0, [\Psi^k]_0 \rangle \end{aligned} \quad (5.82)$$

⁶ 前節までの作用とは規格化が異なる。

を得る。ここで、最後の变形で、和をとる順番を取り替えた。これが 0 になることを示そう。
(5.33) において、 $g = 0$ とし、string field をすべて Ψ とすると、

$$\sum_{\substack{l+k=n \\ l,k \geq 0}} \frac{n!}{l!k!} [\Psi^l, [\Psi^k]_0]_0 = 0 \quad (5.83)$$

となる。ここで、(5.33) では和は異なる分け方に関してとったが、ここではすべての場合についてとり、その重複の分を割っている。これと Λ で内積をとり、並び替えると、

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{l+k=n \\ l,k \geq 0}} \frac{n!}{l!k!} \langle \Lambda, [\Psi^l, [\Psi^k]_0]_0 \rangle &= \sum_{\substack{l+k=n \\ l,k \geq 0}} \frac{n!}{l!k!} \{ \Lambda, \Psi^l, [\Psi^k]_0 \}_0 \\ &= - \sum_{\substack{l+k=n \\ l,k \geq 0}} \frac{n!}{l!k!} \{ [\Psi^k]_0, \Psi^l, \Lambda \}_0 \\ &= - \sum_{\substack{l+k=n \\ l,k \geq 0}} \frac{n!}{l!k!} \langle [\Psi^l, \Lambda]_0, [\Psi^k]_0 \rangle \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.84)$$

この式において n については和をとっていないので、

$$\sum_{\substack{l+k=n \\ l,k \geq 0}} \frac{1}{l!k!} \langle [\Psi^l, \Lambda]_0, [\Psi^k]_0 \rangle = 0 \quad (5.85)$$

が示せた。これにより、

$$\delta_\Lambda S = 0 \quad (5.86)$$

が従う。ここで、(5.83) を見ると、無限個の和をとることで初めてこの式が成り立っていることが重要であることが分かる。このために、作用は無限個の項を含まなければゲージ対称性が保証されないのである。

作用はゲージ変換で不変であることが分かったが、この変換は閉じているだろうか。次に変換の交換子を計算して、実際に変換が群をなしていることを示す。そのために、

$$[\delta_{\Lambda_1}, \delta_{\Lambda_2}] |\Psi\rangle \quad (5.87)$$

を計算したい。

今、 $[[\]] = 1, |\Psi| = 0, |\Lambda| = 1$ であることに注意して、

$$\begin{aligned}
\delta_{\Lambda_2} \delta_{\Lambda_1} |\Psi\rangle &= \delta_{\Lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\kappa^n}{n!} [\Psi^n, \Lambda_1]_0 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\kappa^n}{(n-1)!} [\delta_{\Lambda_2} \Psi, \Psi^{n-1}, \Lambda_1]_0 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\kappa^{n+1}}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\kappa^m}{m!} [[\Psi^m, \Lambda_2]_0, \Psi^n, \Lambda_1]_0 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{l,k \\ l+k=n}} \frac{\kappa^{n+1}}{l!k!} [\Psi^l, \Lambda_1, [\Lambda_2, \Psi^m]_0]_0
\end{aligned} \tag{5.88}$$

であるから、

$$[\delta_{\Lambda_1}, \delta_{\Lambda_2}] |\Psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{l,k \\ l+k=n}} \frac{\kappa^{n+1}}{l!k!} \left([\Psi^l, \Lambda_1, [\Lambda_2, \Psi^k]_0]_0 - (\Lambda_1 \leftrightarrow \Lambda_2) \right) \tag{5.89}$$

を得る。(5.33)において string field を Ψ を n 個、 Λ_1, Λ_2 について適用して、そのうちの古典的な部分、つまり、 $g = 0$ の部分を考えて、

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{l,k \\ l+k=n}} \frac{n!}{l!k!} \left([\Psi^l, \Lambda_1, [\Lambda_2, \Psi^k]_0]_0 - [\Psi^l, \Lambda_2, [\Lambda_1, \Psi^k]_0]_0 \right. \\
&\quad \left. - [\Psi^l, [\Lambda_1, \Lambda_2, \Psi^k]_0]_0 + [\Psi^l, \Lambda_1, \Lambda_2, [\Psi^k]_0]_0 \right) = 0
\end{aligned} \tag{5.90}$$

となる。この最初の二つの項が (5.89) と一致しているので、結局、和の演算のうち一方を先に実行すると、運動方程式 $\mathcal{F}(\Psi)$ (5.80) を思い出して

$$\begin{aligned}
[\delta_{\Lambda_1}, \delta_{\Lambda_2}] |\Psi\rangle &= \sum_{l,k} \frac{\kappa^{k+l+1}}{l!k!} \left([\Psi^l, [\Lambda_1, \Lambda_2, \Psi^k]_0]_0 - (\Psi^l, \Lambda_1, \Lambda_2, [\Psi^k]_0]_0 \right) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\kappa^l}{l!} \left(\left[\Psi^l, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\kappa^{k+1}}{k!} [\Lambda_1, \Lambda_2, \Psi^k]_0 \right]_0 + \kappa^2 [\Psi^l, \Lambda_2, \Lambda_1, \mathcal{F}(\Psi)]_0 \right) \\
&= \delta_{\Lambda(\Psi)} |\Psi\rangle + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\kappa^{l+2}}{n!} [\Psi^n, \Lambda_2, \Lambda_1, \mathcal{F}(\Psi)]_0,
\end{aligned} \tag{5.91}$$

$$\Lambda(\Psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\kappa^{n+1}}{n!} [\Lambda_1, \Lambda_2, \Psi^n]_0 \tag{5.92}$$

$$= \kappa [\Lambda_1, \Lambda_2]_0 + \kappa^2 [\Lambda_1, \Lambda_2, \Psi]_0 + \dots \tag{5.93}$$

となる。これを見ると、期待通り二つのゲージ変換の交換子は一つのゲージ変換とみなせることが分かる。ただし、それは on-shell、つまり $\mathcal{F}(\Psi) = 0$ が満たされる限りである。

5.5.4 量子論的作用と BV 方程式

これまでの議論で古典作用及びそのゲージ対称性を見た。しかし、これはあくまでも理論の古典的な部分に過ぎない。これをゲージ固定して経路積分により量子化しようとする場合、積分測度の部分からの寄与も問題になる。2章で説明したように、積分測度まで含めて BRST 対称性を保証するには作用が BV 方程式の解になっていることを要請すればよい。この節では古典作用 (5.78) を量子論的に拡張し、それが BV 方程式の解になっていることを示す。

多少天下り的ではあるが、古典的作用 (5.78) を拡張した量子的作用は、

$$S(\Psi) = \frac{1}{\kappa^2} \sum_{g \geq 0} (\hbar \kappa^2)^g \sum_{n \geq 0} \frac{\kappa^n}{n!} \{\Psi^n\}_g \quad (5.94)$$

である。ここで、量子論的な補正が分かるように \hbar をあらわに書いた。 $g = 0$ の部分が先に与えた古典的な部分である。つまり、この作用は古典的な部分に loop からの補正の部分を加えた形をしている。また、 $g = 1, n = 0$ の部分は、すでに考えたように定数である。今、 $S_g^n(\Psi) = \frac{1}{n!} \{\Psi^n\}_g$ と書くと、 $S(\Psi) = \sum_{g,n} \hbar^g \kappa^{n+2g-2} S_g^n(\Psi)$ である。前節で導入した古典作用 (5.78) はすでにそれだけでゲージ対称性を持っていた。しかし、それだけでは BV 方程式を満たすことができない。量子論的な補正は、 $g = 1$ 、すなわち 1-loop の部分からすでに始まっているので、non-polynomial SFT には、loop の全てのオーダーでアノマリーが出ているのだと分かる。それゆえ、量子補正としてアノマリーを消去する、非局所的な項を無限に入れる必要がある。

さて、この作用 (5.94) が BV 方程式を満たすことを示す。BV 方程式は、

$$\frac{\partial_R S}{\partial \phi^s} \frac{\partial_L S}{\partial \phi_s^*} + \hbar \frac{\partial_R}{\partial \phi^s} \frac{\partial_L S}{\partial \phi_s^*} = 0 \quad (5.95)$$

である。 S が Grassmann even であることに注意すると、係数の $\frac{1}{2}$ は antibracket を計算すると消える。これに上の作用を代入して、 \hbar の次数ごとに拾うと、量子的な項に注意して、

$$\sum_{\substack{g_1+g_2=g \\ n_1+n_2=n}} \frac{\partial_R S_{g_1}^{n_1}}{\partial \phi^s} \frac{\partial_L S_{g_2}^{n_2}}{\partial \phi_s^*} + \frac{\partial_R}{\partial \phi^s} \frac{\partial_L S_{g-1}^n}{\partial \phi_s^*} = 0 \quad (5.96)$$

を得る。第二項が $g-1$ の部分であるのは、BV 方程式の中に \hbar が含まれていることによる。

$n = 0$ のとき、 $n_1 = n_2 = 0$ で、 $S_g^0 = 0$ であるから成り立っている。 $n = 1$ のとき、 $(n_1, n_2) = (1, 0), (0, 1)$ である。第一項は、どちらかに $S_g^0 = 0$ が含まれるので 0 となる。また、 $S_g^1 \sim \{\Psi\}_g$ であるから第二項は 0 となり、満たされる。

$n = 2$ のときは少々厄介である。これを示すには作用の selection rule を使う必要がある。まず、 $S_g^1 = \{\Psi\}_g = \langle \Psi, [\cdot]_g \rangle = \langle \Psi | c_0^- | [\cdot]_g \rangle$ 、 $|[\cdot]_g| = 3$ に注意すると、 $|\Psi\rangle = |\Phi_s\rangle \phi^s$ とし

て target space の場 ϕ^s を表すと、 $N_{\text{gh}}[\phi^s] = 0$ でなくてはならない。すると、 S_g^1 には ghost number が 0 の場しか現れることができず、field または antifield のどちらかしか現れることができない。すなわち

$$\frac{\partial_R S_g^1}{\partial \phi^s} \frac{\partial_L S_{g'}^1}{\partial \phi_s^*} = 0 \quad (5.97)$$

である。 S_g^2 に関しても同様に、ある target space 上の場 ϕ_1, ϕ_2 に関して $S_g^2 \sim \phi_1 \phi_2$ である。すると、 $N_{\text{gh}}[\phi_1] + N_{\text{gh}}[\phi_2] = 0$ であるからこれは field と antifield の対にはなりえない。ゆえに、

$$\frac{\partial_R S_g^2}{\partial \phi^s} \frac{\partial_L S_g^2}{\partial \phi_s^*} = 0 \quad (5.98)$$

である。この二つを使うと、 $n = 2$ のとき、BV 方程式が満たされることが分かる。

そこで、 $n \geq 3$ に関して示すことができればよい。方程式は、

$$\underbrace{\sum_{\substack{g_1+g_2=g \\ n_1+n_2=n \geq 1 \\ n_1, n_2 \geq 0}} \frac{\partial_R S_{g_1}^{n_1+1}}{\partial \phi^s} \frac{\partial_L S_{g_2}^{n_2+1}}{\partial \phi_s^*}}_{\text{(I)}} + \underbrace{\frac{\partial_R S_{g-1}^{n+2}}{\partial \phi^s} \frac{\partial_L S_{g-1}^{n+2}}{\partial \phi_s^*}}_{\text{(II)}} = 0 \quad (5.99)$$

と書き直すことができる。

ここで、

$$\frac{\partial_R S_g^n}{\partial \phi^s} = \frac{1}{(n-1)!} \left\{ \Psi^{n-1}, \Phi_s \right\}_g, \quad (5.100)$$

$$\frac{\partial_L S_g^n}{\partial \phi_s^*} = \frac{1}{(n-1)!} \left\{ \Psi^{n-1}, \tilde{\Phi}_s \right\}_g (-1)^{s+1} \quad (5.101)$$

であるから、(I) は、和を対称に書いて、

$$\frac{1}{2} \sum_{\substack{g_1+g_2=g \\ n_1+n_2=n \geq 1 \\ n_1, n_2 \geq 0}} \sum'_{G(\Phi_s) \leq 2} (-1)^{s+1} \frac{1}{n_1! n_2!} \left[\left\{ \Psi^{n_1}, \Phi_s \right\}_{g_1} \left\{ \Psi^{n_2}, \tilde{\Phi}_s \right\}_{g_2} + \left\{ \Psi^{n_2}, \Phi_s \right\}_{g_2} \left\{ \Psi^{n_1}, \tilde{\Phi}_s \right\}_{g_1} \right] \quad (5.102)$$

と変形できる。この第二項は、(3.96) を用いて、

$$\sum'_{G(\Phi_s) \geq 3} \left\{ \Psi^{n_2}, \tilde{\Phi}_s \right\}_{g_2} \left\{ \Psi^{n_1}, \Phi_s \right\}_{g_1} (-1)^{s+1} = \sum'_{G(\Phi_s) \geq 3} \left\{ \Psi^{n_1}, \Phi_s \right\}_{g_1} \left\{ \Psi^{n_1}, \tilde{\Phi}_s \right\}_{g_2} (-1)^{s+1} \quad (5.103)$$

とできる。ここで、(3.96) では変形の際に -1 がかかっているが、今は、 $G(\leq 2) \rightarrow G(\geq 3) \equiv$

5 - G より、Grassmann parity が変わるので、 $(-1)^s$ の中に吸収した。これにより、(I) は

$$-\frac{1}{2} \sum_{\substack{g_1+g_2=g \\ n_1+n_2=n \geq 1 \\ n_1, n_2 \geq 0}} \sum'_s (-1)^s \frac{1}{n_1! n_2!} \{\Psi^{n_1}, \Phi_s\}_{g_1} \{\Psi^{n_2}, \tilde{\Phi}_s\}_{g_2} (-1)^s \quad (5.104)$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{\substack{g_1+g_2=g \\ n_1+n_2=n \geq 1 \\ n_1, n_2 \geq 0}} \sum'_s (-1)^s \frac{1}{n_1! n_2!} \langle \Phi_s, [\Psi^{n_1}]_{g_1} \rangle \langle \tilde{\Phi}_s, [\Psi^{n_2}]_{g_2} \rangle \quad (5.105)$$

とまとめることができる。これをさらに変形する。内積を reflector で表して、 Φ が L_0^-, b_0^- で消えることと、 b_0^- に関する接続の条件を考えると、

$$\sum'_s \langle \Phi_s, [\Psi^{n_1}]_{g_1} \rangle \langle \tilde{\Phi}_s, [\Psi^{n_2}]_{g_2} \rangle = \sum'_s (-1)^s \langle R_{12} | \Phi_s \rangle_1 c_0^{(2)-} [\Psi^{n_1}]_{g_1}^2 \langle R_{1'2'} | \tilde{\Phi}_s \rangle_{1'} c_0^{(2')-} [\Psi^{n_2}]_{g_2}^{2'} \quad (5.106)$$

$$= \sum'_s (-1)^s \langle R_{12} | c_0^{(2)-} [\Psi^{n_1}]_{g_1}^2 \langle R_{1'2'} | c_0^{(2')-} [\Psi^{n_2}]_{g_2}^{2'} | \Phi_s \rangle_1 | \tilde{\Phi}_s \rangle_{1'} \quad (5.107)$$

$$= \langle R_{12} | c_0^{(2)-} [\Psi^{n_1}]_{g_1}^2 \langle R_{1'2'} | c_0^{(2')-} [\Psi^{n_2}]_{g_2}^{2'} b_0^{(1')-} P_{1'} | R_{11'} \rangle \quad (5.108)$$

$$= \langle R_{12} | c_0^{(2)-} [\Psi^{n_1}]_{g_1}^2 \langle R_{1'2'} | [\Psi^{n_2}]_{g_2}^{2'} | R_{11'} \rangle \quad (5.109)$$

$$= \langle R_{12} | c_0^{(2)-} [\Psi^{n_1}]_{g_1}^2 [\Psi^{n_2}]_{g_2}^1 \quad (5.110)$$

$$= \langle [\Psi^{n_2}]_{g_2}, [\Psi^{n_1}]_{g_1} \rangle \quad (5.111)$$

$$= \left\{ \Psi^{n_1}, [\Psi^{n_2}]_{g_2} \right\}_{g_1} \quad (5.112)$$

となる。

次に (II) の部分を考える。これは直接計算すると、

$$\frac{\partial_R}{\partial \phi^s} \frac{\partial_L S_{g-1}^{n+2}}{\partial \phi_s^*} = \frac{1}{(n+1)!} \frac{\partial_R}{\partial \phi^s} \left\{ \Psi^{n+1}, \tilde{\Phi}_s \right\}_{g-1} (-1)^{s+1} \quad (5.113)$$

$$= \frac{1}{n!} \sum'_{G(\Phi_s) \geq 2} \left\{ \Psi^n, \Phi_s, \tilde{\Phi}_s \right\}_{g-1} (-1)^{s+1} \quad (5.114)$$

である。ここで、 $\tilde{\Phi}_s$ は Φ_s, ϕ^s と可換であることに注意せよ。これを、先ほどと同様に (3.96) を使って変形すると、全ての状態 s に関する和に書き換えることができ、

$$(II) = -\frac{1}{2 \cdot n!} \sum'_s \left\{ \Psi^n, \Phi_s, \tilde{\Phi}_s \right\}_{g-1} (-1)^s \quad (5.115)$$

となる。

以上から、BV 方程式が満たされるためには

$$\sum_{\substack{g_1+g_2=g \\ n_1+n_2=n \geq 1 \\ n_1, n_2 \geq 0}} \frac{1}{n_1!n_2!} \left\{ \Psi^{n_1}, [\Psi^{n_2}]_{g_2} \right\}_{g_1} + \frac{1}{n!} \sum'_s \left\{ \Psi^n, \Phi_s, \tilde{\Phi}_s \right\}_{g-1} (-1)^s = 0 \quad (5.116)$$

であればよいことが分かる。これは 付録 D で示すように、成り立つ。よって、(5.94) は BV 方程式を満たすことが分かった。つまり、古典的な作用 (5.78) では loop の各次でアノマリーが出るが、それを補正する項を無限に付け加えた量子論的作用 (5.94) は、BV 方程式を満たすことが分かった。

5.5.5 BRST 対称性

では、次にこの量子論的作用が持つ BRST 対称性を考える。まず、pre-BRST 変換は、2 章で考えたように、

$$\delta_B |\Psi\rangle = \hbar \Delta |\Psi\rangle + \{ |\Psi\rangle, S \} = \{ |\Psi\rangle, S \} \quad (5.117)$$

である。\$|\Psi\rangle = |\Psi_s\rangle\phi^s + |\tilde{\Phi}_s\rangle\phi_s^*\$ に注意して計算すると、

$$\delta_B |\Psi\rangle = \{ |\Psi\rangle, S \} \quad (5.118)$$

$$= \frac{\partial_R |\Psi\rangle}{\partial \phi^s} \frac{\partial_L S}{\partial \phi_s^*} - \frac{\partial_R |\Psi\rangle}{\partial \phi_s^*} \frac{\partial_L S}{\partial \phi^s} \quad (5.119)$$

$$= \sum'_{G(\Phi_s) \leq 2} \left(|\Phi_s\rangle \frac{\partial_L S}{\partial \phi_s^*} - |\tilde{\Phi}_s\rangle \frac{\partial_L S}{\partial \phi^s} \right) \quad (5.120)$$

$$= \sum_{n \geq 1, g} \hbar^g \kappa^{n+2g-2} \sum'_{G(\Phi_s) \leq 2} \left(|\Phi_s\rangle \frac{\partial_L S_g^n}{\partial \phi_s^*} - |\tilde{\Phi}_s\rangle \frac{\partial_L S_g^n}{\partial \phi^s} \right) \quad (5.121)$$

となるので、この微分を、前節で行ったのと同様に計算すると、

$$\frac{\partial_L S_g^n}{\partial \phi^s} = (-1)^s \frac{1}{(n-1)!} \left\{ \Psi^{n-1}, \Phi_s \right\}_g, \quad (5.122)$$

$$\frac{\partial_L S_g^n}{\partial \phi_s^*} = (-1)^{s+1} \frac{1}{(n-1)!} \left\{ \Psi^{n-1}, \tilde{\Phi}_s \right\}_g \quad (5.123)$$

であるので、結局、(3.96) を用いて、

$$\delta_B |\Psi\rangle = - \sum_{n \geq 1, g} \hbar^g \kappa^{n+2g-2} \frac{1}{(n-1)!} \sum'_s (-1)^s |\tilde{\Phi}_s\rangle \left\{ \Phi_s, \Psi^{n-1} \right\}_g \quad (5.124)$$

$$= - \sum_{n \geq 1, g} \hbar^g \kappa^{n+2g-2} \frac{1}{(n-1)!} \left[\Psi^{n-1} \right]_g \quad (5.125)$$

を得る。よって、pre-BRST 変換は

$$\delta_{\text{B}}|\Psi\rangle = \sum_{g,n \geq 0} \frac{\hbar^g \kappa^{n+2g-2}}{n!} [\Psi^n]_g \quad (5.126)$$

である。この結果において例えば、 $g = 0$ の部分を見ると、

$$(\delta_{\text{B}}|\Psi\rangle)_{g=0} = \sum_{n \geq 0} \kappa^{n-1} \frac{1}{n!} [\Psi^n]_0 = \mathcal{F}(\Psi) \quad (5.127)$$

となっている。

BRST 変換は、これを Lagrangian submanifold に制限して、

$$\hat{\delta}_{\text{B}}|\Psi\rangle \equiv \delta_{\text{B}}|\Psi\rangle|_{\phi^* = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi}} \quad (5.128)$$

で定義される。

5.5.6 代数構造の変形

上で、string field の積の $g = 0$ の部分は L_∞ 代数をなすと述べた。この節では string field が古典的に満たす代数、つまりこれまでに扱った代数の $g = 0$ の部分の、運動方程式の解ではない string field Φ による変形を議論する。

まず、 n 個の string field $\{B_i\}$ の積 $[B_1, \dots, B_n]$ を m_n と書くことにする。

Hilbert space \mathcal{H} が与えられたとき、対称積によるベクトル空間 $\mathbf{T}(\mathcal{H})$ を、

$$\mathbf{T}(\mathcal{H}) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} S\mathcal{H}^{\otimes n} \quad (5.129)$$

と定義する。ここで、 S は対称化された積 $(B_1, \dots, B_n) \in S\mathcal{H}^{\otimes n}$ を表す。それぞれの引数の入れ替えにより、string field の持つ Grassmann parity にしたがって符号を変える。

このベクトル空間には余代数の構造を入れることができる。余代数は、

$$\Delta : \text{comultiplication} \quad (5.130)$$

$$b : \text{coderivation} \quad (5.131)$$

により定まる。ただし、以下の図式は可換であるとする：

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{T} & \xrightarrow{\Delta} & \mathbf{T} \otimes \mathbf{T} \\ \Delta \downarrow & & \downarrow \Delta \otimes 1 \\ \mathbf{T} \otimes \mathbf{T} & \xrightarrow{1 \otimes \Delta} & \mathbf{T} \otimes \mathbf{T} \otimes \mathbf{T} \end{array} \quad (5.132)$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{T} & \xrightarrow{b} & \mathbf{T} \\
\Delta \downarrow & & \downarrow \Delta \\
\mathbf{T} \otimes \mathbf{T} & \xrightarrow{1 \otimes b + b \otimes 1} & \mathbf{T} \otimes \mathbf{T}.
\end{array} \tag{5.133}$$

具体的には、

$$\Delta(B_1, \dots, B_n) = \sum_{\substack{\{i_l, j_k\}, l, k \\ l+k=n}} \hat{\sigma}(i_l, j_k)(B_{i_1}, \dots, B_{i_l}) \otimes (B_{j_1}, \dots, B_{j_k}), \tag{5.134}$$

$$b(B_1, \dots, B_n) = \sum_{\substack{\{i_l, j_k\}, l, k \\ l+k=n}} \sigma(i_l, j_k) (B_{i_1}, \dots, B_{i_l}, [B_{j_1}, \dots, B_{j_k}]_0) \tag{5.135}$$

と定める。ここで、 σ は (5.33) で導入したものである。 $\hat{\sigma}$ は、 σ の場合から Q を除いたものである。

演算の degree を、

$$d(B_i) = 2 - G(B_i) \tag{5.136}$$

と定める。特に、

$$d([B_1, \dots, B_n]) = 2 - G([B_1, \dots, B_n]) = 2 - \left(3 + \sum_{i=1}^n (G(B_i) - 2) \right) = -1 + \sum_{i=1}^n d(B_i) \tag{5.137}$$

となる。

以上のように、 $\mathbf{T}(\mathcal{H})$ には余代数の構造を入れることができる。

これまで見たように、弦の場の理論は、第一量子化の演算子を用い、また、string field も対応する CFT の Hilbert space のベクトルとした。つまり、理論が、その元となった CFT に依るように見える。それゆえ、理論が background に独立になっているかどうか調べることは重要である。そこで次に、non-conformal background による代数の変形を見る。ここで、non-conformal background というのは、運動方程式 $\mathcal{F}(\Psi) = 0$ の解となっていない string field Ψ_0 のことである。

この Ψ_0 を用いて、string field Ψ を、

$$\Psi \longrightarrow \Psi' + \Psi_0 \tag{5.138}$$

とずらして、 Ψ' を用いて理論を記述する。しかし、作用は依然としてゲージ対称性を持つ。なぜなら、 $S(\Psi)$ は $\Psi \rightarrow \Psi + \delta_\Lambda \Psi$ に対して不変であるから、 $S(\Psi' + \Psi_0)$ は $\Psi' + \Psi_0 \rightarrow \Psi' + \Psi_0 + \delta_\Lambda(\Psi' + \Psi_0)$ で不変である。つまり、

$$\Psi' \rightarrow \Psi' + \delta_\Lambda(\Psi' + \Psi_0) \tag{5.139}$$

とすればよい。

この string field の取替えに対して、具体的に作用を計算すると、二項展開して、和の順番をかえて

$$S(\Psi' + \Psi_0) = \frac{1}{\kappa^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\kappa^n}{n!} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \{\Psi'^m, \Psi_0^{n-m}\}_0 \quad (5.140)$$

$$= \frac{1}{\kappa^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=m} \frac{\kappa^n}{m!(n-m)!} \{\Psi'^m, \Psi_0^{n-m}\}_0 \quad (5.141)$$

$$= \frac{1}{\kappa^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=0} \frac{\kappa^{n+m}}{m!n!} \{\Psi'^m, \Psi_0^n\}_0 \quad (5.142)$$

$$= \frac{1}{\kappa^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\kappa^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\kappa^m}{m!} \{\Psi'^m, \Psi_0^n\}_0 \quad (5.143)$$

$$= \frac{1}{\kappa^2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\kappa^m}{m!} \{\Psi_0^m\}_0 + \kappa \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\kappa^m}{m!} \{\Psi', \Psi_0^m\}_0 + \dots \right) \quad (5.144)$$

$$= S(\Psi_0) + \langle \Psi', \mathcal{F}(\Psi_0) \rangle + \dots \quad (5.145)$$

を得る。ここで、第二項は、もし Ψ_0 が運動方程式の解であるなら、消えるので、運動方程式の解による変形では、代数は不変に保たれることを意味している。さて、これと (5.78) を見比べると、

$$\{\Psi^n\}_0 \longrightarrow \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\kappa^m}{m!} \{\Psi'^m, \Psi_0^m\}_0 \quad (5.146)$$

なる対応があるように見える。そこで、新しく積を

$$\{B_1, \dots, B_n\}'_0 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\kappa^m}{m!} \{B_1, \dots, B_n, \Psi_0^m\}_0, \quad (5.147)$$

$$[B_1, \dots, B_n]'_0 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\kappa^m}{m!} [B_1, \dots, B_n, \Psi_0^m]_0 \quad (5.148)$$

と定義する。これを使うと、

$$S'(\Psi') \equiv S(\Psi' + \Psi_0) = \frac{1}{\kappa^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\kappa^n}{n!} \{\Psi\}'_0 \quad (5.149)$$

と書ける。

ゲージ変換は、上の考察から明らかで、作用と同様に和を取替えをして、

$$\delta'_\Lambda \Psi' = \delta_\Lambda (\Psi' + \Psi_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\kappa^n}{n!} [(\Psi' + \Psi_0)^n, \Lambda]_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\kappa^n}{n!} [\Psi'^n, \Lambda]'_0 \quad (5.150)$$

を得る。これまでと同様に最初の項を調べると、

$$[\Lambda]'_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\kappa^n}{n!} [\Lambda, \Psi_0^n]_0 = Q\Lambda + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa^n}{n!} [\Lambda, \Psi_0^n]_0 \quad (5.151)$$

となり、これも Ψ_0 に関する項が補正として加わっている。これを Q' と書くことにする。

このように、string field の取替えによって積は変更を受ける。これを具体的に見る。変形前は、 $m_0 = [\cdot]_0 = 0$ とした。しかし、今、変形により

$$[\cdot]'_0 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\kappa^m}{m!} [\Psi_0^m]_0 \quad (5.152)$$

である。これは ghost number 3 を持つから、0 ではありえない。そこでこれを F とおく。実は

$$F = [\cdot]'_0 = \sum_{m=0}^{\infty} [\Psi_0^m]_0 = \kappa \mathcal{F}(\Psi_0) \quad (5.153)$$

である。つまり、変形された代数では $m_0 \neq 0$ である。さらに著しい点は、この変形された積も (5.39) を満たすという点である。これは、作用のゲージ対称性を示す際に (5.39) を使ったことから、今逆に作用 $S'(\Psi')$ のゲージ対称性からこの積について (5.39) (の ' つき) を示すことができるからである。

そこで、(5.39) の $n = 0$ の部分を見ると、 $[[\cdot]'_0]'_0 = 0$ であるので、

$$Q'[\cdot]'_0 = Q'F = 0 \quad (5.154)$$

を意味する。 $n = 1$ の場合、

$$Q'^2 B + [F, B]'_0 = 0 \quad (5.155)$$

を得る。これは変形された BRSR charge が nilpotency ではないということの意味している。その nilpotency からのずれは変更された積 m_2 によって与えられる。 $n = 3$ のところを見ると、

$$Q'[B_1, B_2]'_0 + [Q'B_1, B_2]'_0 + (-1)^{B_1} [B_1, Q'B_2]'_0 + [F, B_1, B_2]'_0 = 0 \quad (5.156)$$

であって、 Q' が derivation からずれることを表している。

5.6 Vertex の構成

それでは先延ばしにしていた vertex の具体的な構成を述べる。一般に、 n 個の閉弦の相互作用は、 n 個の穴のあいた、genus が g 個の Riemann 面で表される。弦の相互作用を記述する場合、この Riemann 面の (コンパクト化された) モジュライ空間全域について一回だけ重複なく積分を取る必要がある。今、 n 個の穴があき、 $\#\text{genus} = g$ の Riemann 面のモジュライ空間を $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ で表し、Riemann 面の上の座標までこめたモジュライ空間を $\mathcal{P}_{g,n}$ と書くこ

とにする。 $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ の次元は $6g - 6 + 2n$ で、 $\mathcal{P}_{g,n}$ は無限次元である。すると、 $\mathcal{P}_{g,n}$ は $\mathcal{M}_{g,n}$ の上のファイバーバンドルとみなすことができ、 $\mathcal{M}_{g,n}$ に関する積分は、 $\mathcal{P}_{g,n}$ の切断に関する積分と読み替えることができる。実際には、座標は局所的に $e^{i\theta}$ だけ冗長であるから、この同値類で割った $\hat{\mathcal{P}}_{g,n} \equiv \mathcal{P}_{g,n} / \sim$ を用いる。すると、この面の上の座標の取り方の変形を表す conformal Killing vector もしくは Schiffer variations を考えることができ、これを用いて vertex を表す。こうして得られた vertex の正当性など詳しい議論は [55] に譲り、この節では具体的な vertex の構成に限って解説する。

5.6.1 準備

この節では vertex を書き下すための準備をする。

Σ である一つの $\#genus = g$ 、 n 個の穴のあいた Riemann 面を表すことにする。この n 個の穴は n 個の閉弦の相互作用であることに対応している。この Riemann 面の上の座標を $\{z, \bar{z}\}$ とする。ただし、 Σ の場合、 n 個の穴の周りに一つずつ、穴を $|z| = 1$ と定義するような局所座標があると便利で、Riemann 面をこの n 個の座標系の貼りあわせで書くとなると、 Σ の座標は、 n 次元のベクトル (z_i) ($i = 1, \dots, n$) で表すのが適当である。

このとき、conformal Killing vector は

$$(1 + \varepsilon \delta_{\mathbf{v}})z \equiv z + \varepsilon \mathbf{v}(z) \quad (5.157)$$

と作用するものとする。2つの変換を連続的に作用させると、

$$\delta_{\mathbf{v}_1} \delta_{\mathbf{v}_2} z = \delta_{\mathbf{v}_1} (\mathbf{v}_2(z)) = \mathbf{v}_2 (\mathbf{v}_1(z)) \quad (5.158)$$

であるから、交換子を取れば、

$$[\delta_{\mathbf{v}_1}, \delta_{\mathbf{v}_2}] = \delta_{[\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1]} \quad (5.159)$$

が成り立つことが分かる。左辺と右辺のベクトルの順番が異なることに注意せよ。

さて、Riemann 面 Σ に対して状態 $|\Sigma\rangle \in \mathcal{H}^{\otimes n}$ が定まる。また、相互作用する n 本の閉弦に対応して状態 $|\vec{B}\rangle \equiv |B_1\rangle \otimes \dots \otimes |B_n\rangle \in \mathcal{H}^{\otimes n}$ が定まる。

それでは Σ 上の座標を変えたときに、状態 $|\Sigma\rangle$ がどのように変化するか調べる。そのために、二つの演算子 $\mathbf{T}(\mathbf{v}), \mathbf{b}(\mathbf{v})$ を

$$\mathbf{T}(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n \left(\oint \frac{dz_i}{2\pi i} T^i(z_i) v^i(z_i) - \text{anti holo. part} \right), \quad (5.160)$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n \left(\oint \frac{dz_i}{2\pi i} b^i(z_i) v^i(z_i) - \text{anti holo. part} \right) \quad (5.161)$$

と定義する。ここで、 i は n 個の Hilbert space をラベルし、反正則部分の前の負号は、積分経路の向きのために生じる。OPE を使って交換関係を求めると、

$$[\mathbf{T}(\mathbf{v}_1), \mathbf{T}(\mathbf{v}_2)] = \mathbf{T}([\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1]), \quad (5.162)$$

$$[\mathbf{T}(\mathbf{v}), \mathbf{b}(\mathbf{v}_k)] = \mathbf{b}([\mathbf{v}_k, \mathbf{v}]), \quad (5.163)$$

$$\left[\sum_{i=1}^n Q^i, \mathbf{b}(\mathbf{v}_k) \right] = \mathbf{T}(\mathbf{v}_k) \quad (5.164)$$

である。 n 個の Hilbert space をわたるので、太い文字で書いたが、以後、 $T(v), b(v)$ と書くことにする。

今、central charge は 0 であるので、エネルギー・運動量テンソルは、primary field として振舞うので、reflector に対して

$$\langle R_{12} | (L_n^1 - L_{-n}^2) = 0 \quad (5.165)$$

を満たす。さらに、ベクトル $v(z)$ の mode 展開を、

$$v(z) = \sum_n \frac{v_n}{z^{n-1}} \quad (5.166)$$

と書けば、正則部分について

$$T(v) = \oint \frac{dz}{2\pi i} T(z)v(z) = \sum_n L_n v_{-n} \quad (5.167)$$

である。また、 $v(z)$ の BPZ 共役は、

$$v^T(z) = -z^2 v\left(\frac{1}{z}\right) = -\sum_n \frac{v_{-n}}{z^{n-1}} \quad (5.168)$$

であることに注意すれば、(5.165) は v_{-n} をかけて和をとると

$$\langle R_{12} | [T^1(v) + T^2(v^T)] = 0 \quad (5.169)$$

と書き直せる。また、BPZ 共役の中身を見ると、共役をとるには $v_n \rightarrow -v_{-n}$ とすればよいので、

$$[v_1^T(z), v_2^T(z)] = [v_1(z), v_2(z)]^T \quad (5.170)$$

であることが分かる。

このとき、 v による $|\Sigma\rangle$ の無限小変換は、

$$\delta_v |\Sigma\rangle = T(v^T) |\Sigma\rangle \quad (5.171)$$

である [56]。交換子は、

$$[\delta_{v_1}, \delta_{v_2}] |\Sigma\rangle = [T(v_1^T), T(v_2^T)] |\Sigma\rangle \quad (5.172)$$

$$= T([v_2^T, v_1^T]) |\Sigma\rangle \quad (5.173)$$

$$= T([v_2, v_1]^T) |\Sigma\rangle \quad (5.174)$$

$$= \delta_{[v_2, v_1]} |\Sigma\rangle \quad (5.175)$$

となり、(5.159) と一致する。ここで、 v の BPZ 共役を用いるのは、座標の取替えて一点関数の値を変えないようにするためである。

$|\Sigma\rangle$ に対応して $\langle\Sigma|$ を

$$\langle\Sigma| = \langle R_{11'} | \cdots \langle R_{nn'} | \Sigma \rangle_{1' \dots n'} \quad (5.176)$$

と定め、この無限小変換を、

$$\delta_{v_{1\dots n}} \langle\Sigma| \equiv \langle R_{11'} | \cdots \langle R_{nn'} | \delta_v |\Sigma\rangle_{1' \dots n'} \quad (5.177)$$

$$= \langle R_{11'} | \cdots \langle R_{nn'} | T'(v^T) |\Sigma\rangle_{1' \dots n'} \quad (5.178)$$

$$= -\langle R_{11'} | \cdots \langle R_{nn'} | T(v) |\Sigma\rangle_{1' \dots n'} \quad (5.179)$$

$$= -\delta_{v_{1\dots n}} \langle\Sigma| T(v) \quad (5.180)$$

と定義する。ここで、(5.169) を用いた。

また、[56] より、

$$\langle\Sigma| \sum_{i=1}^n Q^i = 0, \quad (5.181)$$

$$G|\Sigma\rangle = (6g - 6 + 6n)|\Sigma\rangle \quad (5.182)$$

である。

次に、 $6g - 6 + 2n$ 次の微分形式 $\Omega_B^{g,n} \in T_{\hat{\mathcal{P}}_B}^*(\hat{\mathcal{P}}_{g,n})$ を

$$\Omega_B^{g,n}(\hat{V}_1, \dots, \hat{V}_{6g-6+2n}) \equiv (2\pi i)^{-3g+3-n} \langle \Sigma_P | b(v_1) \cdots b(v_{6g-6+2n}) | \vec{B} \rangle \quad (5.183)$$

と定義する。ここで、 $\hat{V} \in T_{\hat{\mathcal{P}}_B}(\hat{\mathcal{P}}_{g,n})$ は、 v に対応する変形を表す。この微分形式の満たす性質など詳細にはここでは立ち入らない。

5.6.2 積

前節で導入した微分形式を用いて、この章の始めに定義した string field の間の積を、

$$\{B_1, \dots, B_n\}_g = \int_{\mathcal{V}_{g,n}} \Omega_{\vec{B}}^{g,n} \quad (5.184)$$

と定義する。さらに、 $\langle \Omega^{g,n} |$ を、

$$\Omega_{\vec{B}}^{g,n} = \langle \Omega^{g,n} | B_1 \rangle \cdots | B_n \rangle \quad (5.185)$$

つまり、

$$\langle \Omega^{g,n} | \equiv (2\pi i)^{-3g+3-n} \langle \Sigma_P | b(v_1) \cdots b(v_{6g-6+2n}) \quad (5.186)$$

と定めると、上の積は

$$\{B_1, \dots, B_n\}_g = \int_{\mathcal{V}_{g,n}} \langle \Omega^{g,n} | B_1 \rangle \cdots | B_n \rangle \quad (5.187)$$

と書くこともできる。 $\mathcal{V}_{g,n}$ は、string vertex に対応する $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ の部分空間の切断である。ところで $\langle \Sigma |$ の ghost number は $6g - 6 + 6n$ であった。 $\langle \Omega^{g,n} |$ の定義には $6g - 6 + 2n$ 個の antighost が入っていたので、 $\langle \Omega^{g,n} |$ の ghost number は $4n$ となる。今、 $\Omega_{\vec{B}}^{g,n}$ は ghost number が $6n$ なら 0 でないので、 $\sum_{i=1}^n G(B_i) = 2n$ でなくてはならない。

今、 $|B\rangle_i$ で状態 $|B\rangle$ が Σ の上の i 番目の穴の状態を表しているとする、どの状態でどの穴を表すかは任意であるから、

$$\int \langle \Omega^{g,n}(1, \dots, i, \dots, j, n) | \cdots | B_i \rangle_i \cdots | B_j \rangle_j \cdots = \int \int \langle \Omega^{g,n}(1, \dots, j, \dots, i, n) | \cdots | B_i \rangle_j \cdots | B_j \rangle_i \cdots \quad (5.188)$$

が成り立つはずである。ここで、 Ω の引数は穴を表す。これを見ると、 $\langle \Omega^{g,n}(1, \dots, n) |$ は引数の入れ替えに関して対称であると分かる。それゆえ、上の式で右辺の穴の順番を左辺とそろえると B_i の Grassmann parity に応じて係数を拾って、結局

$$\{B_1, \dots, B_i, B_{i+1}, \dots, B_n\}_g = (-1)^{B_i B_{i+1}} \{B_1, \dots, B_{i+1}, B_i, \dots, B_n\}_g \quad (5.189)$$

を得る。

また、上の定義から、

$$\{ \cdots \}_g = \int_{\mathcal{V}_{g,0}} \Omega^{g,0} \quad (5.190)$$

である。#genus = 0 の場合は、

$$\{\cdot\}_0 \equiv 0, \quad (5.191)$$

$$\{B\}_0 \equiv 0, \quad (5.192)$$

$$\{B_1, B_2\}_0 \equiv \langle B_1, QB_2 \rangle \quad (5.193)$$

と定める。

次に多重線形な積を定義する。これは reflector を使って、

$$[B_1, \dots, B_{n-1}]_g \equiv \sum'_s (-1)^s \int_{\mathcal{V}_{g,n}} \langle \Omega^{g,n} | \Phi_s \rangle_0 |\tilde{\Phi}_s \rangle_e |B_1\rangle \cdots |B_{n-1}\rangle \quad (5.194)$$

とすればよい。状態 $|\Phi_s\rangle$ は L_0^- で消えるものである。 $|\Phi_s\rangle_e$ は Ω とは和をとらず、外部から bra をかけるときに作用する。 $|\Phi_s\rangle_0$ は 0 番目の Hilbert space で和をとる。(5.194) は以下のように書き直すことができる:

$$[B_1, \dots, B_{n-1}]_g = \sum'_s (-1)^s |\tilde{\Phi}_s \rangle_e \{ \Phi_s, B_1, \dots, B_n \}_g \quad (5.195)$$

$$= \int_{\mathcal{V}_{g,n}} \langle \Omega^{g,n} | \tilde{R}'_{0e} \rangle |B_1\rangle \cdots |B_n\rangle. \quad (5.196)$$

このように書くと、

$$\langle A, \{B_1, \dots, B_n\}_g \rangle = \{A, B_1, \dots, B_n\}_g \quad (5.197)$$

が成り立つことが理解できる。

5.7 問題点とその解決

このようにしてゲージ不変な non-polynomial 型閉弦の場の理論が得られた。しかし、この理論の作用(5.94) は非常に複雑な作用をしている。このためもあって、現実になんかを計算するには手に余る。

また、触れる余裕がなかったが、弦の場の理論はその元となっている CFT に依存しているように見える。これは background independence の問題と呼ばれている。 L_∞ 代数の変形の所で述べたように、理論が CFT に依らない、という議論 [57, 58, 59] がある。

5.8 結論

本修士論文では閉弦の場の理論について、HIKKO によるもの [25, 26, 27, 28, 29] と non-polynomial 型のもの [45, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 60] を見てきた。ここではこれまで

のまとめと、本論文では触れられなかった事項について述べる。

HIKKO においては経路積分により量子化をしようとするときアノマリーが出るので、各次で相殺項を入れる必要がある。しかし、一般の次数の相殺項を求める処方は今のところ見つかっていないので、実際に計算して見なくてはわからない。

一方、non-polynomial 型の場合は、アノマリーが出るものの、古典的には string field のあいだに A_∞ に類似の L_∞ と呼ばれる代数構造があり、量子論的にもこれに基づいた関係があるため、相殺項を制御でき、一般の次数で求めることができる。

古典作用に関して言えば、双方とも BV 方程式を満たしていて、古典論としては well-defined である。しかし、non-polynomial は古典作用の段階ですでに無限個の項を必要としているのに対し、HIKKO では 3 次までと簡潔である。

HIKKO には string length による発散の問題があったが、これは covariantized light-cone gauge SFT へ移行し、これと BRST 4 重項を組む変数を導入することで除去できる。つまり、発散はなく、しかも作用は 3 次までと簡潔である。こうして一見非常によいように見えるが、あらたに導入した変数の物理的意味の解釈が不明である点が不満である。しかも、作用は HIKKO のものとほとんど同一であるため量子的 BV 方程式は満たさず、アノマリーを相殺する項が必要になると思われる。

これとは別のアプローチで string length の問題を解決しようとしたものに本論文では触れる余裕がなかったが、 $\alpha = p^+$ HIKKO というものがある。これは本来独立な変数である α と p^+ を同一視してしまう、という理論である。すると、 α から生じる発散をはじめから取り除くことができる。この理論を用いて、T-duality を弦の場の理論で解釈する、という研究もなされている [61]。

概して閉弦の弦の場の理論の作用は複雑であるため、直接作用を扱わずに必要な情報を引き出そうとする試みもある。その一つが、Hata[62] である。これは運動方程式として BV 方程式を与えるような理論の理論を考えることで、詳細に立ち入ることなく一般的に閉弦の場の理論の物理的帰結を抽出しようとするものである。

また、近年、Zwiebach により、開弦まで含めたいわゆる open-closed 理論が提唱されている。これは現在の研究へとつながる流れである。今後、この理論について調べていきたいと思っている。開弦の場の理論の理解が深まりつつあり、最近では VSFT の枠内で閉弦に関する議論もなされるようになってきた [63]。

最近の開弦の場の理論の理解の進展には D-brane の存在が欠かせない。本論文で扱った場の理論には超対称性が入っていなかった。しかも、閉弦のみであるので直接 D-brane を見るのは難しい。この方向では、古典的な HIKKO 理論を用いて D-brane を取り扱うという試みがなされている [64]。超対称性が入った閉弦の場の理論の建設も今後の課題である。

もし弦理論が正しく自然を記述し、弦の場の理論がそのための正しい言葉であるなら弦の場の理論には通常の場の理論にはない著しい性質があると期待される。それは例えば作用が多項式ではかけないことかもしれない。作用が無限個の項を含むのは、我々の言葉が不十分で、新たな相応の道具の必要性を示唆していると思われる。

謝辞

指導教官の松尾先生にはこの修士論文を書くにあたってさまざまなアドバイスをいただいたことを感謝します。日常的なかかわりを通して研究室の先輩や同輩からは精神的な支えを得ることができました。また、論文執筆中の家族の支援にも深く感謝します。

付録A Convention および supermanifold 上の微分形式に ついて

A を場、または演算子とする。このとき、

$$|A| = 1 \quad A \text{ が Grassmann odd} \quad (\text{A.1})$$

$$= 0 \quad \text{even} \quad (\text{A.2})$$

とする。また、混乱が生じない場合は $|A|$ を A などと書く。

微分に関しては

$$\vec{\partial}_I = \partial_I = \frac{\partial_L}{\partial z^I}, \quad \overleftarrow{\partial}_I = \frac{\partial_R}{\partial z^I} \quad (\text{A.3})$$

と書く。

$f(z)$ を \mathcal{M} 上の関数として、その外微分を

$$df \equiv dz^I \partial_I f = f \overleftarrow{\partial}_I dz^I \quad (\text{A.4})$$

と定義する。また、 TM の元 $V(z)$ を

$$V(z) = \overleftarrow{\partial}_I V^I(z) \quad (\text{A.5})$$

とすると、関数 f に対する作用は

$$V(f) = f \overleftarrow{\partial}_I V^I \quad (\text{A.6})$$

である。関数 A に対する Hamiltonian vector field は

$$V_A \equiv \overleftarrow{\partial}_I \omega^{IJ} \partial_J A \quad (\text{A.7})$$

と定義する。

微分形式の wedge 積を、

$$dz^{I_1} \wedge dz^{I_2} \wedge \cdots \wedge dz^{I_N} = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in S_N} \varepsilon(\sigma) \eta(\{I\}, \sigma) dz^{I_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes dz^{I_{\sigma(N)}} \quad (\text{A.8})$$

と定義する。ここで、 $\varepsilon(\sigma)$ は置換 σ の signature で、 $\eta(\{I\}, \sigma)$ は $z^{I_1} z^{I_2} \cdots z^{I_N}$ を $z^{I_{\sigma(1)}} \cdots z^{I_{\sigma(N)}}$ に並び替える際に現れる z^I の Grassmann parity に起因する factor ± 1 である。

特に、

$$dz^I \wedge dz^J = \frac{1}{2} (dz^I \otimes dz^J - (-1)^{IJ} dz^J \otimes dz^I) = -(-1)^{IJ} dz^J \wedge dz^I \quad (\text{A.9})$$

である。

一般に微分形式のベクトルに対する作用を、

$$(dz^{I_1} \otimes \cdots \otimes dz^{I_N})(V_1, \cdots, V_N) = (-1)^E dz^{I_1}(V_1) \cdots dz^{I_N}(V_N) \quad (\text{A.10})$$

$$= (-1)^E V_1^{I_1} \cdots V_N^{I_N} \quad (\text{A.11})$$

と定義する。ここで、 $E = \sum_{i=1}^{N-1} |V_i| \sum_{j=i+1}^N I_j$ である。

一般に supermanifold 上には d と z^I という Grassmann odd な量が二つある。本論文では、通常の外積代数との対比を明確にするために d と z^I そのものは可換であるとして、その分のずれをその他の量の間の交換関係に押し付けることにする。すなわち、

$$|z^I| = |dz^I| \quad (\text{A.12})$$

であって、これを I と書くことにする。また、 ω は Grassmann odd な symplectic 2-form としたから、

$$|\omega| = 1 \quad (\text{A.13})$$

である。このとき、

$$|\delta^I_K| = I + K \quad (\text{A.14})$$

$$|\omega_{IJ}| = |\omega^{IJ}| = 1 + I + J \quad (\text{A.15})$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial z^I} \right| = I \quad (\text{A.16})$$

であることが分かる。以下でこれを示しておく。

- (A.14) の証明

$dz^I = \delta^I_K dz^K$ であることから $|\delta^I_K| = I + K$ が従う。

- (A.15) の証明

$|\omega| = 1$ であって、 $\omega = -dz^I \wedge \omega_{IJ} dz^J$ であることから $|\omega_{IJ}| = 1 + I + J$ が分かる。また、 $\omega^{IJ} \omega_{JK} = \delta^I_K$ であるから、 $|\omega^{IJ}| = I + K + 1 + J + K = 1 + I + J$ となる。

- (A.16) の証明

dz^I の $\vec{\partial}_J$ に対する作用を

$$dz^I \left(\frac{\partial}{\partial z^J} \right) = \delta^I_J \quad (\text{A.17})$$

としたいので、 $|\vec{\partial}_I| = |\overleftarrow{\partial}_I| = I$ である。

さらに、

$$\vec{\partial}_I f = (-1)^{I(|f|-1)} f \overleftarrow{\partial}_I \quad f \text{ は関数} \quad (\text{A.18})$$

$$\delta^I_K = (-1)^{K(I+1)} \delta_K^I \quad (\text{A.19})$$

$$\omega_{IJ} = -(-1)^{IJ} \omega_{JI} \quad (\text{A.20})$$

$$\omega^{IJ} = -(-1)^{(I+1)(J+1)} \omega^{JI} \quad (\text{A.21})$$

が成り立つ。

- (A.19) の証明

$$dz^I = \delta^I_K dz^K \quad (\text{A.22})$$

$$= dz^K \delta_K^I = (-1)^{K(K+I)} \delta_K^I dz^K \quad (\text{A.23})$$

であるから、 $\delta^I_K = (-1)^{K(I+1)} \delta_K^I$ が成り立つ。

- (A.20) の証明

(2.32) および (A.9) より、

$$\begin{aligned} \omega &= -dz^I \wedge \omega_{IJ} dz^J = -(-1)^{I(1+I+J)} \omega_{IJ} dz^I \wedge dz^J \\ &= -(-1)^{IJ} (-1)^{I(J+1)} \omega_{IJ} dz^J \wedge dz^I \\ &= (-1)^{J(1+I+J)} dz^J \wedge \omega_{IJ} dz^I \\ &= (-1)^{IJ} dz^J \wedge \omega_{IJ} dz^I \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

であるから、 $\omega_{JI} = -(-1)^{IJ} \omega_{IJ}$ が従う。

• (A.21) の証明

(A.14)、(A.15)、(A.20) を用いて、

$$\begin{aligned}\delta^I_K &= \omega^{IJ} \omega_{JK} \\ &= (-1)^{(1+J+K)(1+I+J)} \omega_{JK} \omega^{IJ} \\ &= (-1)^{(1+J+K)(1+I+J)+JK+1} \omega_{KJ} \omega^{IJ}\end{aligned}\tag{A.25}$$

$$\begin{aligned}&= (-1)^{K(I+1)} \delta_K^I \\ &= (-1)^{K(I+1)} \omega_{KJ} \omega^{JI}\end{aligned}\tag{A.26}$$

であることがわかるから、整理すると $\omega^{IJ} = -(-1)^{(I+1)(J+1)} \omega^{JI}$ が従う。

以下に antibracket に関する公式をまとめておく。

$$\{A, B\} \equiv A \overleftarrow{\partial}_I \omega^{IJ}(z) \overrightarrow{\partial}_J B = \omega(V_A, V_B) = V_B(A)\tag{A.27}$$

$$(-1)^{(A+1)(C+1)} \{\{A, B\}, C\} + \text{cyclic permutations} = 0 \quad : \text{Jacobi identity}\tag{A.28}$$

$$\{A, B\} = -(-1)^{(A+1)(B+1)} \{B, A\}\tag{A.29}$$

$$\{A, BC\} = \{A, B\}C + (-1)^{(A+1)B} B\{A, C\}\tag{A.30}$$

$$\{AB, C\} = A\{B, C\} + (-1)^{B(C+1)} \{A, C\}B\tag{A.31}$$

$$\{F, F\} = 0 \quad \text{if } F \text{ is Grassmann odd}\tag{A.32}$$

$$\{G, \{G, G\}\} = 0 \quad \text{for any } G\tag{A.33}$$

$$\{\{S, S\}, G\} = -2\{\{G, S\}, S\} \quad \text{for any } G \text{ provided } S \text{ is Grassmann even}\tag{A.34}$$

△ について。

$$\Delta_\rho A \equiv \frac{1}{2} \text{div } V_A = \frac{1}{2\rho} (-1)^I \partial_I (\rho \omega^{IJ} \partial_J A)\tag{A.35}$$

$$= \frac{1}{2} (-1)^I \partial_I (\omega^{IJ} \partial_J A) + \frac{1}{2} (-1)^I (\partial_I \ln \rho) \omega^{IJ} \partial_J A\tag{A.36}$$

$$(-1)^A \{A, B\} = \Delta_\rho(AB) - \Delta_\rho AB - (-1)^A A \Delta_\rho B\tag{A.37}$$

$$\Delta_\rho \{A, B\} = \{\Delta_\rho A, B\} + (-1)^{A+1} \{A, \Delta_\rho B\}\tag{A.38}$$

Darboux 座標系の場合。

$$\omega = -2 \sum_{i=1}^n d\phi^i \wedge \phi_i^* \quad (\text{A.39})$$

$$\{A, B\} = \frac{\partial_{\text{R}} A}{\partial \phi^i} \frac{\partial_{\text{L}} B}{\partial \phi_i^*} - \frac{\partial_{\text{R}} A}{\partial \phi_i^*} \frac{\partial_{\text{L}} B}{\partial \phi^i} \quad (\text{A.40})$$

$$\Delta = (-1)^i \frac{\partial_{\text{L}}^2}{\partial \phi^i \partial \phi_i^*} \quad (\text{A.41})$$

$$\{S, S\} = 2 \frac{\partial_{\text{R}} S}{\partial \phi^i} \frac{\partial_{\text{L}} S}{\partial \phi_i^*} = 2(-1)^i \frac{\partial S}{\partial \phi^i} \frac{\partial S}{\partial \phi_i^*} \quad \text{if } S \text{ is Grassmann even} \quad (\text{A.42})$$

$$\{A, S^n\} = nS^{n-1}\{A, S\} \quad \text{for } \forall A \quad (\text{A.43})$$

付録B Antifield 形式の幾何学的意味

ここでは、chapter 2 で導入した BV 方程式の幾何学的な意味付けについて解説する [8]。特に、antifield は field に双対な空間の基底であること、BV 方程式に現れる微分演算子は supermanifold 上の Laplacian である一方で外微分作用素の類似物であることを見る。

B.1 Antifield

この節では antifield の幾何学的な意味を解説する。

M を向き付け可能な n 次元多様体とし、その局所座標を x^i ($i = 1, \dots, n$) と書くことにする¹。このとき、 M 上のファイバーバンドルとして、 $W = TM \oplus T^*M$ を考える。すると、 W は (n, n) 次元の supermanifold となる。 TM の基底を w_i とし、 T^*M の基底を z^i で表せば、自然に

$$w_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (\text{B.1})$$

$$z^i = dx^i \quad (\text{B.2})$$

と同一視できる。これらの基底のあいだには自然に内積を定義することができる。それは

$$(z^i, w_j) = \delta_j^i \quad (\text{B.3})$$

であり、その他は 0 である。

さて、 W の上に Clifford 代数

$$\{z^i, w_j\} = \delta_j^i \quad \{z^i, z^j\} = \{w_i, w_j\} = 0 \quad (\text{B.4})$$

を設定し、その spinor 表現 R, R' を考える。この二つの表現は容易に構成できて、それは

R : z^i を生成演算子、 w_i を消滅演算子とみなす。

R' : w_i を生成演算子、 z^i を消滅演算子とみなす

¹ ここでは簡単のため座標 x^i は Grassmann even な量としておく。これは Lagrangian の中に現れるももとの場として Grassmann even なものだけを考えていることに対応する。

というもので、 R では基底は z^i に関する 2^n 個の多項式、 $\{1, z^i, z^i z^j, \dots, z^1 z^2 \dots z^{n-1} z^n\}$ で、de Rham complex が生成される。このとき、 $w_i = \frac{\partial}{\partial z^i}$ と解釈される。同様に R' の基底は w_i の多項式で張られ、 z^i は w_i に関する微分として解釈される。ここで、表現 R' の中で z^i に消される状態を Ω と書くことにする。

微分形式に注目すれば、二つの表現 R, R' のあいだには同型対応があることがわかる。例えば、 R において z^i で消される状態を考えると、それは

$$\alpha \equiv f(x)z^1 z^2 \dots z^n = f(x)dx^1 dx^2 \dots dx^n \quad (\text{B.5})$$

であるから²、これは R' での Ω に対応することがわかる。つまり、

$$\alpha \longleftrightarrow \Omega. \quad (\text{B.6})$$

この上に w_i をかけていけばそれぞれ R, R' 上の de Rham complex が構成できる。ところで、実際には上で取った α には関数 $f(x)$ の分だけ任意性がある。 α は多様体 M の volume form とみなすことができるから、 α を一つ選んで固定するということは、 M の volume form すなわち積分測度を定めるということにほかならない。この積分測度を改めて $d\mu$ と書くことにし、そのとき対応する Ω を 1 と書くことにする。

次に M 上での関数の積分について考える。 R の de Rham complex の元 $F(x, z = dx)$ の z に関する展開を考えると

$$F(x, dx) = f(x) + f_i(x)dx^i + f_{ij}(x)dx^i dx^j + \dots + f_{i_1 i_2 \dots i_n}(x)dx^{i_1} dx^{i_2} \dots dx^{i_n} \quad (\text{B.7})$$

となる。ここで、 $f(x), f_i(x), \dots, f_{i_1 \dots i_n}(x)$ は 0-form である。この $F(x, dx)$ の M 上での積分は、この展開の volume form の部分だけ抜き出して、

$$\int_M F(x, dx) = \int f_{i_1 \dots i_n}(x) dx^{i_1} \dots dx^{i_n} \quad (\text{B.8})$$

である。

一方、 R' の de Rham complex の元 $G(x, w)$ の w に関する展開も上と同様にできて、

$$G(x, w) = g(x) + g^i(x)w_i + \dots + g^{i_1 \dots i_n}(x)w_{i_1} \dots w_{i_n} \quad (\text{B.9})$$

である。 G の M 上での積分は R と R' の間の同型 (B.6) をふまえれば

$$\int_M G(x, w) = \int_M d\mu g(x) = \int_M d\mu G(x, 0) \quad (\text{B.10})$$

² 本来は $dx^1 \wedge dx^2 \dots$ などと書くべきだが notation の整合性のため、このように書くことにする。

であるということがわかる。ここで $G(x, w)$ の積分を考える際に $w_i = 0$ なる部分を取り出し
てきたということが、antifield 形式において最終的に場の値を Lagrangian submanifold に制
限するという操作に対応している。それゆえ、 R' の座標として導入した w_i は、field x^i に対
する antifield と解釈することができる。

この解釈に基づくと、 M は field x が張る空間であるので、関数の M 上での積分 (B.8, B.10)
は経路積分と同定できる。そこで、以後 w_i を x_i^* と書くことにする。

B.2 Antibracket

次にこの設定で antibracket の意味を考えてみる。

そのために R' での微分作用素を導入する。まず、 R での外微分作用素は

$$d = dx^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (\text{B.11})$$

である。 R' ではこの作用素は

$$\Delta \equiv \frac{\partial}{\partial x_i^*} \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (\text{B.12})$$

に対応する。 d は一階微分として働くが、この Δ は二階微分作用素になっていることに注意
する。これは chapter 2 で考えた antifield 形式 に現れた作用素を Darboux 座標系であらわ
したものである。ここで、field x はすべて Grassmann even の状況なので、chapter 2 でこ
の作用素を考えた際に現れた因子 $(-1)^i$ は出ない。また、微分はすべて左微分である。なお、
 $d^2 = 0$ に対応して、 Δ についても明らかに $\Delta^2 = 0$ が成り立つ。

さて、ここで、 R, R' 内の積を考える³。 R 内では微分形式の wedge 積として自然に積を入
れることができる。 R' の元に対しても自然に非可換性に注意して積をとればよい。するとこ
のとき、 R の元の積に対して d は derivation として働く。つまり、

$$d(fg) = (df)g + (-1)^f f dg \quad (\text{B.13})$$

である。

一方、すでに述べたように R' では Δ は二階微分作用素になっているので d とは異なり deriva
tion ではない。この、 Δ の derivation からのずれを

$$(-1)^f \{f, g\} = \Delta(fg) - (\Delta f)g - (-1)^f f \Delta g \quad (\text{B.14})$$

³ 正確には例えば、 R の de Rham complex の断面の元の間積、というべきであるがここでは簡単のため、
こう言うことにする。

として関数 $\{f, g\}$ を定義する。これは (B.12) を用いると、

$$(-1)^f \{f, g\} = \frac{\partial}{\partial x_i^*} \frac{\partial}{\partial x^i} (fg) - (\Delta f) g - (-1)^f f \Delta g \quad (\text{B.15})$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_i^*} \frac{\partial g}{\partial x^i} + (-1)^f \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x_i^*} \quad (\text{B.16})$$

となり、結局

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x_i^*} + (-1)^f \frac{\partial f}{\partial x_i^*} \frac{\partial g}{\partial x^i} \quad (\text{B.17})$$

であるから、chapter 2 で導入した antibracket に一致する。

Remark B.2.1 R' の元の間積には注意が必要である。元 f, g の積は例えば

$$(f(x, x^*), g(x, x^*)) \longmapsto fg(x, x^*) \quad (\text{B.18})$$

として定義されるが、これは R 内の wedge product による積とは異なる。例えば

$$(x_i^*, x_j^*) \longmapsto x_i^* x_j^*$$

であるのでこれは R 内では

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

に対応するからである。つまり、 $R \longmapsto R'$ なる同型写像とこの積は可換ではない。

なお、antibracket について次の二つの性質が成り立つ:

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + (-1)^{g(h+1)}\{f, h\}g \quad (\text{B.19})$$

$$(-1)^{(f+1)(h+1)}\{f, \{g, h\}\} + \text{cyclic permutations} = 0. \quad (\text{B.20})$$

これらは直接計算で示すことができる。例えば (2.46) の証明を述べておく。antibracket の定義 (B.17) を用いて、

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= (-1)^{f+g} \frac{\partial(fg)}{\partial x_i^*} \frac{\partial h}{\partial x^i} + \frac{\partial(fg)}{\partial x^i} \frac{\partial h}{\partial x_i^*} \\ &= (-1)^{f+g} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i^*} g + (-1)^f f \frac{\partial g}{\partial x_i^*} \right) \frac{\partial h}{\partial x^i} + \frac{\partial f}{\partial x^i} g \frac{\partial h}{\partial x_i^*} + f \frac{\partial g}{\partial x^i} \frac{\partial h}{\partial x_i^*} \\ &= (-1)^{f+g+gh} \frac{\partial f}{\partial x_i^*} \frac{\partial h}{\partial x^i} g + (-1)^g f \frac{\partial g}{\partial x_i^*} \frac{\partial h}{\partial x^i} + (-1)^{g(h+1)} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial h}{\partial x_i^*} g + f \frac{\partial g}{\partial x^i} \frac{\partial h}{\partial x_i^*} \\ &= f \left((-1)^g \frac{\partial g}{\partial x_i^*} \frac{\partial h}{\partial x^i} + \frac{\partial g}{\partial x^i} \frac{\partial h}{\partial x_i^*} \right) + (-1)^{g(h+1)} \left((-1)^f \frac{\partial f}{\partial x_i^*} \frac{\partial h}{\partial x^i} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial h}{\partial x_i^*} \right) g \\ &= f\{g, h\} + (-1)^{g(h+1)}\{f, h\}g. \end{aligned}$$

B.3 BV 方程式

以上をふまえて BV 方程式の幾何学的な意味を述べる。

R の元のある関数 f が M 上で積分できるためにはこれが n -form でなくてはならない。すなわち、 R の中で $df = 0$ である必要がある。

これを R' の中で考えると

$$\Delta f = 0 \tag{B.21}$$

と翻訳できる。ここで、特に $S \in \Gamma(R')$ を用いて、 $f = \exp\left(\frac{S}{\hbar}\right)$ の積分を考えてみる。これが積分可能であるためには

$$\Delta \exp\left(\frac{S}{\hbar}\right) = 0 \tag{B.22}$$

でなくてはならない。これより、

$$2\hbar\Delta S + \{S, S\} = 0 \tag{B.23}$$

を得る。これは chapter 2 で導入した BV 方程式に一致する。つまり、BV 方程式は、この枠組みの中では、関数 $\exp\left(\frac{S}{\hbar}\right)$ が積分可能である、という条件になっていることがわかる。これは antifield 形式の言葉で言えば、作用 S を元にして経路積分を考えることができるための条件になっている。これは非常に緩やかな条件に見える。実際、Yang-Mills 理論においてはそれほど強力な拘束にはならない。しかし、弦の場の理論においては強力な手法となっている。

付録C Neumann 関数

3 vertex を決める際に用いた Neumann 関数の定義を述べる。

定義は、 $n, m \geq 1$ に対して、

$$\overline{N}_{nm}^{rs} = -\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \frac{1}{\frac{\alpha_r}{n} + \frac{\alpha_s}{m}} \overline{N}_n^r \overline{N}_m^s, \quad (\text{C.1})$$

$$\overline{N}_{n0}^{rs} = -c_s \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_s} \overline{N}_n^r, \quad \text{where } (c_1, c_2, c_3) = (1, -1, 0), \quad (\text{C.2})$$

$$\overline{N}_{00}^{rs} = \tau_0 \left(\frac{\delta_{rs}}{\alpha_r} - \frac{\delta_{r3}}{\alpha_3} - \frac{\delta_{s3}}{\alpha_s} \right), \quad (\text{C.3})$$

$$\overline{N}_n^r = \frac{1}{\alpha_r} f_n \left(-\frac{\alpha_{r+1}}{\alpha_r} \right) e^{n\tau_0/\alpha_r}, \quad (\text{C.4})$$

$$f_n(x) = \frac{\Gamma(nx)}{n! \Gamma(nx - n + 1)} \quad (\text{C.5})$$

である。ただし、 α_r は弦 r の string length で、 $\alpha_4 = \alpha_1, \alpha_0 = \alpha_3$ 、また $\tau_0 = \sum_{r=1}^3 \alpha_r \ln |\alpha_r|$ である。

ここで紹介した Neuman 関数 \overline{N}_{nm}^{rs} は、複素平面上の Neumann 関数の Fourier 係数という意味を持っている。詳細については [27] を参照のこと。

次に Chapter 4 で 3-vertex の変形に用いた式を述べる。まず、

$$|V_{\text{FP}}(1, 2, 3)\rangle = \delta \left(\sum_r \frac{b_0^r}{\alpha_r} \right) \exp E_{\text{FP}}(1, 2, 3) |0\rangle \quad (\text{C.6})$$

とする。ここで、

$$E_{\text{FP}} = i \sum_{n, m \geq 1} \sum_{r, s} \overline{N}_{nm}^{rs} \gamma_{c, -n}^r \gamma_{b, -m}^s + i \sum_{n \geq 1} \sum_{s, t} \overline{N}_{n0}^{st} \gamma_{-n}^s \frac{b_0^t}{\alpha_t}, \quad (\text{C.7})$$

$$\gamma_{c, n}^r = i n \alpha_r c_n^r, \quad (\text{C.8})$$

$$\gamma_{b, n}^r = \alpha_r^{-1} b_n^r \quad (\text{C.9})$$

である。これは 3-vertex のうち、ghost の部分にほぼ等しい。実際にはこれに反正則な部分を足し、ghost number をあわせるために係数が必要になる。

$i\pi_b^r(\sigma)$ は、 $|V_{\text{FP}}(1, 2, 3)\rangle$ にかかっている場合、 σ_I を、弦がつなぎかえられている点として、

$$\sqrt{\pi}i\pi_b^r(\sigma_I) = \frac{\partial}{\partial b_0^r} + \sum_{n \geq 1} (c_n^r + c_{-n}^r) \cos(n\sigma_I^r) \quad (\text{C.10})$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial b_0^r} + \sum_{n \geq 1} c_{-n}^r \cos(n\sigma_I^r) + \left[\sum_{n \geq 1} c_n^r \cos(n\sigma_I^r), E_{\text{FP}}(1, 2, 3) \right] \quad (\text{C.11})$$

$$= \frac{\partial}{\partial b_0^r} i \frac{1}{\alpha_r} \sum_{n \geq 1} \sum_{s \neq n} \left(\frac{1}{n} \delta^{rs} \cos(n\sigma_I^r) - \sum_{m \geq 1} \overline{N}_{mn}^{rs} \cos(m\sigma_I^r) \right) \gamma_{c, -n}^s \quad (\text{C.12})$$

$$\equiv \frac{\partial}{\partial b_0^r} + \omega^r \quad (\text{C.13})$$

と変形できる。ここで、詳細は略すが、

$$\omega^r = i \sum_{n \geq 1} \sum_s \left(\chi^{rs} \overline{N}_n^s + \frac{1}{\alpha_r} \sum_{m=1}^{n-1} \overline{N}_{n-m, m}^{ss} \right) \gamma_{-n}^s, \quad (\text{C.14})$$

$$\chi^{rs} = \delta^{rs} \frac{\alpha_{r-1} - \alpha_{r+1}}{\alpha_r} + \sum_{t=1}^3 \varepsilon^{rst} \quad (\text{C.15})$$

であることが分かる。このとき、

$$\alpha_r \omega^r - i \sum_{n \geq 1} \sum_t \overline{N}_{n0}^{tr} \gamma_{-n}^t = \alpha_r \omega^s - i \sum_{n \geq 1} \sum_t \overline{N}_{n0}^{ts} \gamma_{-n}^t, \quad (\text{C.16})$$

$$\sum_{r=1}^3 \alpha_r^2 \omega^r = 0 \quad (\text{C.17})$$

が成り立つ。例えば、この2番目の式は、

$$\sum_r \alpha_r^2 \omega^r = i \sum_{r, s} \sum_n \left(\alpha_r^2 \chi^{rs} \overline{N}_n^s + \alpha_r \sum_m \overline{N}_{n-m, m}^{ss} \right) \gamma_{-n}^s, \quad (\text{C.18})$$

$$\begin{aligned} \text{1st term on RHS} &\propto \sum_r \alpha_r^2 \chi^{rs} \\ &= \alpha_s (\alpha_{s-1} - \alpha_{s+1}) + \sum_{r, t} \alpha_r^2 \varepsilon^{rst} \\ &= -\alpha_{s-1}^2 + \alpha_{s+1}^2 + \sum_{r, t} \alpha_r^2 \varepsilon^{rst} \\ &= 0, \\ \text{2nd term on RHS} &\propto \sum_r \alpha_r = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

であるから成り立つ。

これを用いると、任意の r について次の式を示すことができる [27]:

$$\sqrt{\pi} \alpha_r i \pi_b^r (\sigma_I^r) \delta \left(\sum_r \frac{b_0^r}{\alpha_r} \right) \exp(E_{\text{FP}}(1, 2, 3)) |0\rangle \quad (\text{C.20})$$

$$\begin{aligned} &= \alpha_r \left(\frac{\partial}{\partial b_0^r} + \omega^r \right) \delta \left(\sum_{s=1}^3 \frac{1}{\alpha_s} b_0^s \right) \exp \left(i \sum_{n,m \geq 1} \sum_{s,t} \bar{N}_{nm}^{st} \gamma_{c,-m}^s \gamma_{b,-m}^t + i \sum_{n \geq 1} \sum_{s,t} \bar{N}_{n0}^{st} \gamma_{c,-n}^s \frac{b_0^t}{\alpha_t} \right) |0\rangle \\ &= \prod_{s=1}^3 (1 - b_0^s \omega^s) \exp \left(i \sum_{n,m \geq 1} \sum_{s,t} \bar{N}_{nm}^{st} \gamma_{c,-n}^s \gamma_{b,-m}^t \right) |0\rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

これを用いると、 $|V(1, 2, 3)\rangle$ を使いやすい形に変形することができる。

付録D (5.116) の証明

ここでは (5.116) の証明を述べる。

まず、(5.33) を $n - 1$ 個の Ψ に対して適用すると、

$$\sum_{\substack{g_1+g_2=g \\ n_1 \geq 1, n_2 \geq 0 \\ n_1+n_2=n \geq 1}} \frac{(n-1)!}{(n_1-1)!n_2!} [\Psi^{n_1-1}, [\Psi^{n_2}]_{g_2}]_{g_1} + \frac{1}{2} \sum'_s (-1)^s [\Phi_s, \tilde{\Phi}_s, \Psi^{n-1}]_{g-1} = 0 \quad (\text{D.1})$$

となる。これと Ψ に関して内積をとると

$$\sum_{\substack{g_1+g_2=g \\ n_1 \geq 1, n_2 \geq 0 \\ n_1+n_2=n \geq 1}} \frac{(n-1)!}{(n_1-1)!n_2!} \{ \Psi^{n_1}, [\Psi^{n_2}]_{g_2} \}_{g_1} + \frac{1}{2} \sum'_s (-1)^s \{ \Phi_s, \tilde{\Phi}_s, \Psi^n \}_{g-1} = 0 \quad (\text{D.2})$$

である。ここで、

$$\{ \Psi^{n_1}, [\Psi^{n_2}]_{g_2} \}_{g_1} = \{ \Psi^{n_2}, [\Psi^{n_1}]_{g_1} \}_{g_2} \quad (\text{D.3})$$

であるから、和を対称的に書くことができ、

$$\sum_{\substack{g_1+g_2=g \\ n_1 \geq 1, n_2 \geq 0 \\ n_1+n_2=n \geq 1}} \frac{(n-1)!}{(n_1-1)!n_2!} \{ \Psi^{n_1}, [\Psi^{n_2}]_{g_2} \}_{g_1} \quad (\text{D.4})$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\substack{g_1+g_2=g \\ n_1 \geq 1, n_2 \geq 0 \\ n_1+n_2=n \geq 1}} \frac{(n-1)!}{(n_1-1)!n_2!} \left(\{ \Psi^{n_1}, [\Psi^{n_2}]_{g_2} \}_{g_1} + \{ \Psi^{n_2}, [\Psi^{n_1}]_{g_1} \}_{g_2} \right) \quad (\text{D.5})$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{\substack{g_1+g_2=g \\ n_1 \geq 1, n_2 \geq 0 \\ n_1+n_2=n \geq 1}} \frac{(n-1)!}{(n_1-1)!n_2!} + \sum_{\substack{g_1+g_2=g \\ n_1 \geq 0, n_2 \geq 1 \\ n_1+n_2=n \geq 1}} \frac{(n-1)!}{(n_2-1)!n_1!} \right) \{ \Psi^{n_1}, [\Psi^{n_2}]_{g_2} \}_{g_1} \quad (\text{D.6})$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\substack{g_1+g_2=g \\ n_1 \geq 0, n_2 \geq 0 \\ n_1+n_2=n \geq 1}} \frac{n!}{n_1!n_2!} \{ \Psi^{n_1}, [\Psi^{n_2}]_{g_2} \}_{g_1} \quad (\text{D.7})$$

を得る。これを最初の式 (D.2) に代入すると、望みの式 (5.116)

$$\sum_{\substack{g_1+g_2=g \\ n_1 \geq 0, n_2 \geq 0 \\ n_1+n_2=n \geq 1}} \frac{n!}{n_1!n_2!} \{ \Psi^{n_1}, [\Psi^{n_2}]_{g_2} \}_{g_1} + \sum'_s (-1)^s \{ \Phi_s, \tilde{\Phi}_s, \Psi^n \}_{g-1} = 0 \quad (\text{D.8})$$

が示せた。

関連図書

- [1] I. A. Batalin and G. A. Vilkovisky, “Gauge Algebra and Quantization,” *Phys. Lett.* **B102**, 27 (1981).
- [2] I. A. Batalin and G. A. Vilkovisky, “Quantization of Gauge Theories with Linearly Dependent Generators,” *Phys. Rev.* **D28**, 2567 (1983) [Erratum-ibid. **D30**, 508 (1983)].
- [3] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields II*, Cambridge University Press 1996.
- [4] E. S. Fradkin and G. A. Vilkovisky, “Quantization of Relativistic Systems with Constraints,” *Phys. Lett.* **55B**, 224 (1975).
- [5] I. A. Batalin and G. A. Vilkovisky, “Relativistic S Matrix of Dynamical Systems with Boson and Fermion Constraints,” *Phys. Lett.* **69B**, 309 (1977).
- [6] E. S. Fradkin and T. E. Fradkina, “Quantization of Relativistic Systems with Boson and Fermion First and Second Class Constraints,” *Phys. Lett.* **72B**, 343 (1978).
- [7] I. A. Batalin and I. V. Tyutin, “On the perturbative equivalence between the Hamiltonian and Lagrangian quantizations,” *Int. J. Mod. Phys.* **A11**, 1353 (1996), hep-th/9506203.
- [8] E. Witten, “A Note on the Antibracket Formalism,” *Mod. Phys. Lett.* **A5** (1990) 487.
- [9] A. Schwarz, “Geometry of Batalin-Vilkovisky quantization,” *Commun. Math. Phys.* **155**, 249 (1993), hep-th/9205088.
- [10] A. Schwarz, “Semiclassical approximation in Batalin-Vilkovisky formalism,” *Commun. Math. Phys.* **158**, 373 (1993), hep-th/9210115.
- [11] 梶浦宏成, “弦理論と非可換幾何学,” 修士論文 (2000).

- [12] J. Zinn-Justin, in “Trends in Elementary Particle Theory — International Summer Institute on Theoretical Physics in Bonn 1974,” Lecture Notes in Physics, Vol. 37, eds. H. Rollnik and K. Dietz, Springer-Verlag 1975.
- [13] J. Gomis, J. Paris and S. Samuel, “Antibracket, antifields and gauge theory quantization,” Phys. Rept. **259**, 1 (1995), hep-th/9412228.
- [14] M. Henneaux and C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems*, Princeton 1992.
- [15] H. Hofer and E. Zehnder, *Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics*, Birkhäuser Verlag, 1994.
- [16] H. Hata and B. Zwiebach, “Developing the Covariant Batalin-Vilkovisky Approach to String Theory,” Annals. Phys. **229**, 177-216 (1994), hep-th/9301097.
- [17] J. Fisch, M. Henneaux, J. Stasheff, and C. Teitelboim, “Existence, Uniqueness and Cohomology of the Classical BRST Charge with Ghosts of Ghosts,” Commun. Math. Phys. **120**, 379 (1989).
- [18] E. Witten, “Interacting Field Theory of Open Superstrings,” Nucl. Phys. B**276**, 291 (1986).
- [19] M. Kato and K. Ogawa, “Covariant Quantization of String Based on BRS Invariance,” Nucl. Phys. B**212**, 443 (1983).
- [20] J. Polchinski, *String Theory I, II*, Cambridge University Press, 1998.
- [21] W. Siegel, “Covariantly Second-Quantized String II,” Phys. Lett. B**151**, 391 (1985).
- [22] W. Siegel, “Covariantly Second-Quantized String III,” Phys. Lett. B**151**, 396 (1985).
- [23] 九後汰一郎, *(Gauge) String Field Theory*, 1997年夏の学校講義録.
- [24] M. Kaku and K. Kikkawa, “Field theory of relativistic strings. I. Trees,” Phys. Rev. D**10**, 1110 (1974); “Field theory of relativistic strings. II. Loops and Pomerons,” Phys. Rev. D**10**, 1823 (1974).
- [25] H. Hata, K. Itoh, T. Kugo, H. Kunitomo and K. Ogawa, “Manifestly Covariant Field Theory of Interacting String II,” Phys. Lett. B**172**, 195 (1986).

- [26] H. Hata, K. Itoh, T. Kugo, H. Kunitomo and K. Ogawa, “Manifestly Covariant Field Theory of Interacting String,” *Phys. Lett.* **B172**, 186 (1986).
- [27] H. Hata, K. Itoh, T. Kugo, H. Kunitomo and K. Ogawa, “Covariant String Field Theory,” *Phys. Rev.* **D34** (1986) 2360.
- [28] H. Hata, K. Itoh, T. Kugo, H. Kunitomo and K. Ogawa, “The Gauge Invariant Action of the Interacting String Field,” *Nucl. Phys.* **B283**, 433 (1987).
- [29] H. Hata, K. Itoh, T. Kugo, H. Kunitomo and K. Ogawa, “Covariant String Field Theory. 2,” *Phys. Rev.* **D35**, 1318 (1987).
- [30] A. LeClair, M. E. Peskin and C. R. Preitschopf, “String Field Theory on the Conformal Plane. 1. Kinematical Principles,” *Nucl. Phys.* **B317**, 411 (1989).
- [31] A. LeClair, M. E. Peskin and C. R. Preitschopf, “String Field Theory on the Conformal Plane. 2. Generalized Gluing,” *Nucl. Phys.* **B317**, 464 (1989).
- [32] M. B. Green and H. Schwarz, “Superstring Interactions,” *Nucl. Phys.* **B218**, 43 (1983).
- [33] H. Hata, K. Itoh, T. Kugo, H. Kunitomo and K. Ogawa, “Loop Amplitudes In Covariant String Field Theory,” *Phys. Rev. D* **35**, 1356 (1987).
- [34] H. Hata, “BRS Symmetry and Path-Integral Quantization of String Field Theory,” *Phys. Lett.* **B217**, 445 (1989).
- [35] H. Hata, “BRS Invariance and Unitarity in Closed String Field Theory,” *Nucl. Phys.* **B329**, 698 (1990).
- [36] H. Hata, “Construction of the Quantum Action for Path-Integral Quantization of String Field Theory,” *Nucl. Phys.* **B339**, 663 (1990).
- [37] T. Kugo, “Covariantized Light-Cone String Field Theory,” in *Quantum Mechanics of Fundamental Systems vol.2*, ed. C. Teitelboim and J. Zanelli, Plenum Publishing Corporation, 1989, Chapter 11.
- [38] T. Kawano, “Dilaton Condensation in the Covariantized Light-Cone Closed String Field Theory,” *Prog. Theor. Phys.* **88**, 1181 (1992).

- [39] S. Mandelstam, “Interacting String Picture of Dual Resonance Models,” Nucl. Phys. **B64**, 205 (1973); “Interacting String Picture of the Neveu-Schwarz-Ramond Model,” Nucl. Phys. B **69**, 77 (1974); “Lorentz Properties of the Three - String Vertex,” Nucl. Phys. B **83**, 413 (1974).
- [40] T. Kugo, “Lorentz Transformation in the Light Cone Gauge String Field Theory,” Prog. Theor. Phys. **78**, 690 (1987).
- [41] W. Siegel and B. Zwiebach, “Gauge String Fields from the Light Cone,” Nucl. Phys. **B282**, 125 (1987).
- [42] S. Uehara, “On the “Covariantized Light-Cone” String Field Theory,” Phys. Lett. **B190**, 76 (1987).
- [43] T. Yoneya, “String-Coupling Constant and Dilaton Vacuum Expectation Value in String Field Theory,” Phys. Lett. **B197**, 76 (1987).
- [44] H. Hata, “Soft Dilaton Theorem in String Field Theory,” Prog. Theor. Phys. **88**, 1197 (1992).
- [45] M. Saadi and B. Zwiebach, “Closed String Field Theory from Polyhedra,” Annals Phys. **192**, 213 (1989).
- [46] K. Strebel, *Quadratic Differentials*, Springer-Verlag, 1984.
- [47] T. Kugo and K. Suehiro, “Nonpolynomial Closed String Field Theory: Action and Its Gauge Invariance”, Nucl. Phys. **B337**, 434 (1990).
- [48] T. Kugo, H. Kunitomo and K. Suehiro, “Non-Polynomial Closed String Field Theory”, Phys. Lett. **B226**, 48 (1989).
- [49] S. B. Giddings and E. J. Martinec, “Conformal Geometry and String Field Theory,” Nucl. Phys. **B278**, 91 (1986).
- [50] S. Carlip, “Quadratic Differentials and Closed String Vertices”, Phys. Lett. **B214**, 187 (1988).
- [51] S. B. Giddings, E. J. Martinec and E. Witten, “Modular Invariance in String Field Theory,” Phys. Lett. **B176**, 362 (1986).

- [52] B. Zwiebach, “Consistency of Closed String Polyhedra from Minimal Area,” *Phys. Lett. B* **241**, 343 (1990).
- [53] B. Zwiebach, “How Covariant Closed String Theory Solves a Minimal Area Problem,” *Commun. Math. Phys.* **136**, 83 (1991).
- [54] B. Zwiebach, “Quantum Closed Strings from Minimal Area,” *Mod. Phys. Lett. A* **5**, 2753 (1990).
- [55] B. Zwiebach, “Closed string field theory: Quantum action and the B-V master equation,” *Nucl. Phys. B* **390**, 33 (1993), hep-th/9206084.
- [56] L. Alvarez-Gaume, C. Gomez, G. W. Moore and C. Vafa, “Strings in the Operator Formalism,” *Nucl. Phys. B* **303**, 455 (1988).
- [57] A. Sen and B. Zwiebach, “A Proof of local background independence of classical closed string field theory,” *Nucl. Phys. B* **414**, 649 (1994), hep-th/9307088.
- [58] A. Sen and B. Zwiebach, “Quantum background independence of closed string field theory,” *Nucl. Phys. B* **423**, 580 (1994), hep-th/9311009.
- [59] A. Sen and B. Zwiebach, “Background independent algebraic structures in closed string field theory,” *Commun. Math. Phys.* **177**, 305 (1996), hep-th/9408053.
- [60] B. Zwiebach, “Closed string field theory: An Introduction,” hep-th/9305026.
- [61] T. Kugo and B. Zwiebach, “Target space duality as a symmetry of string field theory,” *Prog. Theor. Phys.* **87**, 801 (1992), hep-th/9201040.
- [62] H. Hata, “‘Theory of Theories’ approach to string theory,” *Phys. Rev. D* **50**, 4079 (1994), hep-th/9308001.
- [63] D. Gaiotto, L. Rastelli, A. Sen and B. Zwiebach, “Ghost structure and closed strings in vacuum string field theory,” hep-th/0111129.
- [64] K. Hashimoto and H. Hata, “D-brane and Gauge Invariance in Closed String Field Theory,” *Phys. Rev. D* **56**, 5179 (1990), hep-th/9704125.
- [65] H. Hata, private communication.