

アノマリーの数学的基礎から現象論的応用まで

京都大学基礎物理学研究所

川平将志

概要

場の量子論の非摂動効果を解析することは、様々な現象の理解に繋がるため、現代物理学における重要なテーマの 1 つである。特に本修士論文では非摂動効果の解析の主たるツールの 1 つであるアノマリー (Anomaly) という現象について最近の進展をまとめた。

アノマリーの歴史は古いが、近年様々な概念的進歩があり、その結果 d 次元アノマリーは $d+2$ 次ボルディズム群の Anderson 双対 $(I_{\mathbb{Z}}\Omega)^{d+2}$ と対応することがわかった。

$$[\text{Anomaly}]_d = (I_{\mathbb{Z}}\Omega)^{d+2} \quad (1)$$

この関係を用いることで、あらゆるアノマリーについて系統的に取り扱うことが可能になり、近年続々と新しい知見が得られている。また、過去に知られていた事実についても、この対応関係を用いることで非自明な点が存在することも判明した。

本修士論文では $[\text{Anomaly}]_d = (I_{\mathbb{Z}}\Omega)^{d+2}$ を導入した後、具体的にあらゆる物理現象に応用することで、過去の議論が再現されることや、その議論に見逃されてきた非自明な点が存在することを示す。特に標準模型の非摂動的なゲージ・アノマリー相殺については非自明な事実があり、Steenrod 代数を用いること明瞭に理解できることを説明する。

目次

第 0 章	Introduction	3
0.1	場の量子論の非摂動効果とアノマリー	3
0.2	本修士論文の目的	4
0.3	本修士論文の構成	5
第 I 部	アノマリーの計算方法	6
第 1 章	アノマリーの導入	8
1.1	アノマリーの歴史的導入	8
1.2	アノマリーの理論的導入	13
1.3	アノマリーの諸性質	18
第 2 章	摂動アノマリーの計算	24
2.1	Wess-Zumino の整合条件	24
2.2	Stora-Zumino の降下方程式	27
2.3	AS 指数定理	31
2.4	具体例	34
第 3 章	非摂動アノマリーの計算	37
3.1	大域的ゲージ変換	37
3.2	アノマリー流入	40
3.3	Witten-Yonekura によるバルク作用の構成	42
3.4	APS 指数定理	46
3.5	具体例	49
第 4 章	一般的なアノマリーの計算	58
4.1	TQFT について	58
4.2	具体例	63

第 II 部	アノマリーの物理への応用	77
第 5 章	ゲージアノマリー	79
5.1	ゲージアノマリーの意味	79
5.2	標準模型への応用	80
5.3	$so(10)$ 大統一理論への応用	91
第 6 章	't Hooft アノマリー	98
6.1	't Hooft アノマリーの意味	98
6.2	massless QCD への応用	100
第 7 章	ABJ アノマリー	114
7.1	ABJ アノマリーの意味	114
7.2	massless QCD への応用	119
7.3	標準模型への応用	120
第 8 章	まとめと課題	123
付録 A	ゲージ理論の基礎事項	126
A.1	Notation について	126
A.2	ゲージ場の汎関数積分	129
付録 B	アノマリーの諸性質	137
B.1	アノマリーの微分幾何学的解釈	137
B.2	Weyl アノマリーの特殊性	139
付録 C	幾何学について	141
C.1	コホモロジーについて	141
C.2	Spin 構造およびその類似物について	154
参考文献		158

第 0 章

Introduction

0.1 場の量子論の非摂動効果とアノマリー

場の量子論は次のいくつかの点において大変成功した物理理論であると言える。まず第 1 に，場の量子論は非常に広い分野において物理現象を記述する礎を与えている。素粒子の散乱現象のような高エネルギー現象のみならず，トポロジカル物性・臨界現象・相転移といった身の回りの物性の記述まで幅広くカバーしている。第 2 に，場の量子論は高い精度で実験結果の予測が可能である。特に電子の異常磁気モーメントは理論値と実験値が 10 桁以上一致しており，場の量子論の正しさを強く支持している。第 3 に，場の量子論はこれまで多くの実験結果を予言してきた。例えば，Higgs 粒子は 1964 年にその存在が予言され，約 50 年後の 2011 年に観測された。この他にも場の量子論はたくさんの予言を的中させてきた。以上のような点において場の量子論は優れた物理理論である。

しかし，場の量子論にはいくつかの課題が残されている。その 1 つとして非摂動効果の理解が足りていないというものがある。場の量子論には，分配関数 Z と呼ばれる基本的な関数が存在する。もし分配関数を厳密に計算することが出来れば，場の量子論の枠組みの中で最高の精度の予測が可能となる。だが，よく知られているようにこれは人類にとって難問で，相互作用のある系の分配関数は一般に計算ができない。そこで多くの場合，代わりに結合定数 g について展開して，ある有限の次数まで分配関数を計算している。つまり係数を c_i とおくと分配関数は

$$Z = c_0 + c_1 g + c_2 g^2 + \cdots \quad (1)$$

と展開される。このような手法を摂動論という。摂動論で計算結果すると，電磁相互作用が媒介する電子の系（量子電磁力学）において，よく実験と理論が一致することが知られている。しかし，強い相互作用が媒介するクォークの系（量子色力学）において摂動論では歯が立たない。なぜなら，我々の観測するエネルギースケールにおいて量子色力学の結合定数 g は非常に大きいため，摂動論で無視した $e^{-1/g}$ に比例するような項^{*1}が主要な効果を生むからである。このような効果を非摂動効果という。この非摂動効果がクォークの閉じ込め等の重要な現象を記述すると考えられているため，非摂動効果を解析することは物理的にも重要な意味をもつ。しかし，場の量子論において非摂動効果の計算は非常に難しく，未だに十分な解析がなされていないのが現状である。

^{*1} この項は冪展開できない。

本修士論文では、場の量子論の非摂動効果を解析する 1 つの有望な手段である、アノマリーと呼ばれる現象の解説を目的としている。アノマリーは、簡単にいうと分配関数の位相 $\arg(Z)$ に関する理論的現象である。分配関数は複素数値関数で、その絶対値 $|Z|$ の計算は非常に難しいが、位相に関してはトポロジカルな性質を用いることで色々計算できて、現象の予測や模型に対する制限を与えることができる。アノマリーは長い歴史を持つ概念であるが、近年大きく様変わりしこれまで以上に精細に場の量子論の性質を調べることが可能となった。本修士論文では特に、分配関数の位相^{*2}は高次元に依存しているというアノマリー流入のアイディアを中心に、アノマリーの現代的な理解を提示し、それに基づいた現象の解析をまとめる。

0.2 本修士論文の目的

現代的には d 次元のアノマリーは $d+2$ 次のボルディズム群の Anderson 双対 $(I_{\mathbb{Z}}\Omega)^{d+2}$ と対応することが知られている：

$$[\text{Anomaly}]_d = (I_{\mathbb{Z}}\Omega)^{d+2}. \quad (2)$$

本修士論文ではこれを「アノマリーの基本公式」と呼ぶことにする。本論文の目的は、この公式の厳密な証明ではない。むしろ、それを具体的にあらゆる物理現象に応用し、過去の議論を再現することや見逃されてきた非自明な点について言及することが目的である（第 2 部）。しかし、いきなりこの計算を行っても、物理的に分かりづらい点が多い。よって、第 1 部ではまず、この基本公式に至るまでの道のりを、できるだけ最小限のページ数で説明することを目的とした。また、第 2 部の計算を具体的に実行するには、スペクトル系列およびそれに関連した諸々の数学的概念が必要であるので、付録にて簡単に説明した。第 1 部では説明しきれなかった内容や、議論が横道に逸れるため省略した内容も付録に書いた。本文ではコホモロジーを中心とした多岐に渡る代数トポロジーの概念を使っているため、コホモロジー論の簡単な導入も付録に書いた。

公式 $[\text{Anomaly}]_d = (I_{\mathbb{Z}}\Omega)^{d+2}$ を用いることで、初めて「素粒子の標準模型にゲージ・アノマリーが存在しないこと」が明確に証明できるようになった^{*3}他、あらゆる模型に対してアノマリーの存在・非存在が明確になった。特に標準模型のゲージ群には、中心群で割るだけの不定性があり、もしある特定の割り方についてアノマリーがあれば、大統一理論が論理的に否定される可能性すらあった。そのような観点で、全ての割り方について明確にアノマリーが相殺していることを証明した意義は大きいと思われるため、特に詳しく扱った。標準模型のアノマリー相殺を注意深く議論することで、その背後にはコホモロジーの Steenrod 代数の加群構造があることもわかる。

^{*2} 「位相」よりトポロジカルな場の量子論と言った方がより正確な表現である。

^{*3} かつてのゲージ・アノマリーの議論はゲージ代数だけで決まるようなもの、言い換えると摂動的なものに限定されていた。

0.3 本修士論文の構成

第1部（1章から4章）：アノマリーの計算方法を説明する．

- 1章… 詳細な計算に立ちいることなくわかるアノマリーの諸性質を見る．
- 2章… 摂動アノマリーのケースについて説明する．
- 3章… 2章の内容を非摂動アノマリーに拡張する．
- 4章… 2・3章の内容を一般的なアノマリーに拡張する^{*4}．

第2部（5章から7章）：各現象に対する応用を見る．

- 5章… ゲージ・アノマリーの意味と応用
- 6章… 't Hooft アノマリーの意味と応用
- 7章… ABJ アノマリーの意味と応用

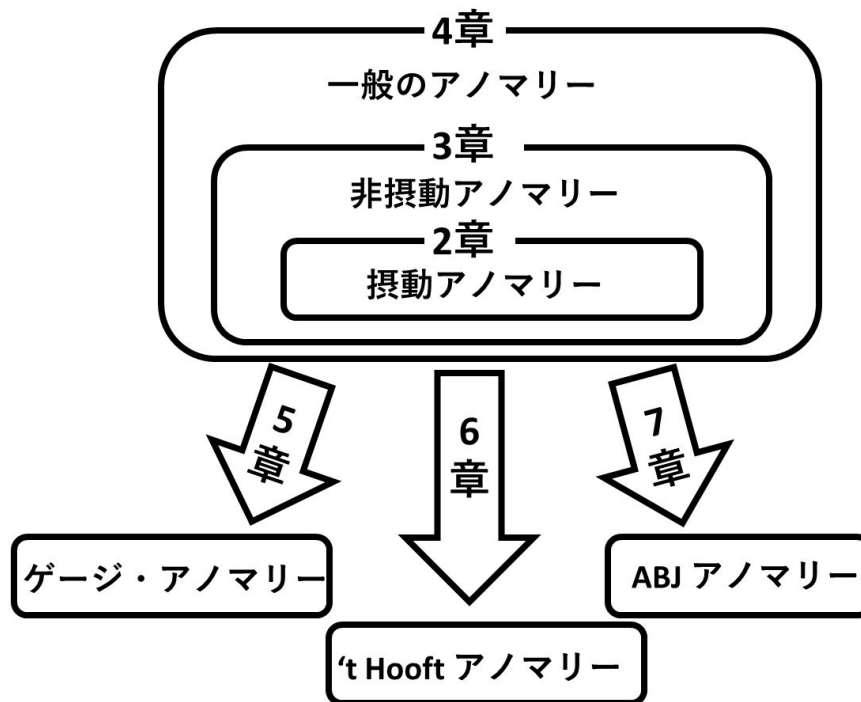


図1 本修士論文の構成

^{*4} 2・3章では点粒子由来のフェルミオンアノマリーのみを考えているが、4章は概念的に全てのアノマリー（ボゾンアノマリーや高次形式対称性由来のアノマリー、結合定数空間上のアノマリー）にも対応した定式化である．

第 I 部

アノマリーの計算方法

アノマリーの物理的意味は主に 3 つに分かれる.

- ゲージ・アノマリー... 理論の矛盾
- 't Hooft アノマリー... 繰り込み群不変量
- ABJ アノマリー... Noether カレントの破れ

第 1 章にてアノマリーの歴史をしつつ, これらの概念や応用例について軽く解説する. しかし, なぜそのような物理的意味になるのか, それぞれ論理が複雑であるので, 第 1 部では詳しい説明を避けた. 詳細は第 2 部の各章を参照してほしい.

第 1 部の大部分ではそのような物理的意味にほぼ触れず, 極めて形式的にアノマリーを導入する. つまり 1 章ではゲージ変換 $A \mapsto A'$ による分配関数の変化量からアノマリー J を定義する.

$$Z[A'] = J \cdot Z[A] \quad (3)$$

また, 3 章ではアノマリー流入の概念を利用することで, d 次元時空 M 上の分配関数 $\mathcal{Z}_d$ は $d+1$ 次元時空 N に依存するものとして再定義される.

$$\mathcal{Z}_d[A, M, N] \quad (4)$$

この新しい分配関数はゲージ不変性が常に担保される: $\mathcal{Z}_d[A, M, N] = \mathcal{Z}_d[A', M, N]$. ゆえに, アノマリーという用語は, 高次元 N への依存性として再定義される.

$$\mathcal{Z}_d[A, M, N'] = \mathcal{J} \cdot \mathcal{Z}_d[A, M, N] \quad (5)$$

この新しい定義のアノマリー $\mathcal{J}$ は古い定義のアノマリー J を含み, さらにより数学的に明瞭に取り扱うことが可能である. その結果, ボルディズム群の Anderson 双対と対応することを説明する.

$$[\text{Anomaly}]_d = (I_{\mathbb{Z}}\Omega)^{d+2} \quad (6)$$

第 1 章

アノマリーの導入

現代的には、アノマリー流入や基本公式 $[\text{Anomaly}]_d = (I_{\mathbb{Z}}\Omega)^{d+2}$ を用いてアノマリーを定義するのが、最も論理的に簡潔であるが、物理的意味は不明瞭である。そこでここでは、アノマリーの歴史^{*1}を追った後に、Pauli-Villars 正則化の下でアノマリーを議論する。また、経路積分のヤコビアンとして概念的にアノマリーを捉えられることにも触れる。これは一般に Fujikawa の方法 (Fujikawa method) として知られている。1 章の多くの内容は [1] を元に行っている。

1.1 アノマリーの歴史的導入

1.1.1 アノマリーの歴史

本修士論文は、「アノマリー」と呼ばれる場の量子論の概念について、現代的視点から解説することを試みたものである。しかし「アノマリーとは何か？」を一言で説明することは極めて難しい。なぜならば、アノマリーの定義・解釈は、その長い歴史の中で紆余曲折の変化を経て現代に至っているためである。そこでここではまず、アノマリーという概念についてその歴史について概説する。

■対称性の破れとしてのアノマリー

アノマリーの発見は 1969 年の Adler[2] および Bell-Jackiw[3] の研究にまで遡る。彼らの発見したことは、大域的対称性に関連した Noether 保存則が古典論では成立しているのにも拘らず、量子化によって破れる場合があるということであった。

$$\langle \partial_\mu j^\mu \rangle \neq 0, \quad (1.1)$$

$$j^\mu : \text{ネーターカレント}, \quad (1.2)$$

$$\langle \cdot \rangle : \text{量子的期待値} \quad (1.3)$$

この発見は、「 η' メソンの質量がなぜ他の擬スカラーメソン 8 重項と比較して大きいのか」という問題の解決に本質的に重要であった。その後、大域的対称性に対するアノマリーだけでなく、局所的対称性 (ゲージ対称性) に対するアノマリーも存在しうることが発見された。よって現在では、大域的対称性のアノマリーを ABJ アノマリー (Adler-Bell-Jackiw アノマリー) と呼び、ゲージ対称性のア

^{*1} 本論へ話を繋げるための、恣意的で筆者の目線に偏った「歴史」であることを断っておく。

ノマリーをゲージ・アノマリーと区別するようになった。ゲージ・アノマリーは、理論のユニタリ性を破壊するため、その存在は理論の矛盾を意味する。よって、無矛盾な理論を作る際に、ゲージ・アノマリーの相殺は1つの理論的指針となる。実際標準模型や超弦理論といった有名な理論は、奇跡的にゲージ・アノマリーが相殺することが知られており、この事実は標準模型や超弦理論の理論面における正しさを保証している。

■ 't Hooft アノマリーの発見

実は先述の terminology は少々不親切である。先述の内容からは

$$(\text{大域的対称性のアノマリー}) = (\text{ABJ アノマリー}), \quad (1.4)$$

$$(\text{ゲージ対称性のアノマリー}) = (\text{ゲージ・アノマリー}) \quad (1.5)$$

と思われることであろう。しかしこの捉え方は間違いでないにしても、実は現代的には混乱を招きかねない。それは't Hooft アノマリーの存在があるからである。't Hooft アノマリーとは、大域的対称性を無理矢理にゲージ化したときに生じるゲージ・アノマリーのことである。このアノマリーは、当然非物理的なゲージ場に対するアノマリーであるため、通常のゲージ・アノマリーのように理論の矛盾を意味することはない。しかし、ABJ アノマリーのように Noether 保存則の破れという明快な物理的意味ももたない。その点で't Hooft アノマリーは極めて奇異なアノマリーである。しかし't Hooft が [4] で主張したように、このアノマリーは量子色力学 (QCD) の低エネルギー領域のような強結合物理の解析において有効である。彼の議論は大まかには以下の通りである。

- 理論の大域的対称性をゲージ化すると一般に't Hooft アノマリーが生じる。
- その't Hooft アノマリーが仮想的なフェルミオン (スペクテイター・フェルミオン^{*2}という) の寄与により相殺されていると仮定する: $\mathcal{A}_{\text{s.f.}} + \mathcal{A}_{\text{UV}} = 0$.
- スペクテイター・フェルミオン込みの理論は、その低エネルギー領域においても't Hooft アノマリーが相殺されている筈である: $\mathcal{A}'_{\text{s.f.}} + \mathcal{A}_{\text{IR}} = 0$.
- スペクテイター・フェルミオンからの't Hooft アノマリーの寄与は常に一定である: $\mathcal{A}_{\text{s.f.}} = \mathcal{A}'_{\text{s.f.}}$ よって、高エネルギー側と低エネルギー側で't Hooft アノマリーは一致する: $\mathcal{A}_{\text{UV}} = \mathcal{A}_{\text{IR}}$
- このアノマリーの一致条件は、低エネルギーの相構造に非自明な制限を与え得る。

ここでは、概観だけを述べているため、分かりづらいかもしれない。そこで具体例として massless QCD を考えよう。massless QCD は低エネルギー側でカイラル対称性の破れを起こすと考えられているが、実はこのカイラル対称性の破れは、一致条件を使うと背理的に証明できるのである^{*3}。背理法なので、ここでは低エネルギー側でカイラル対称性が破れていないと仮定しよう。高エネルギー側ではクォークが't Hooft アノマリーを生成する。一方、クォークの閉じ込めを真とすると、低エネルギー側ではバリオンが't Hooft アノマリーを生成する。しかし、3-flavor (アップクォーク, ダウン・クォーク, ストレンジ・クォークだけ) の場合、具体的に't Hooft アノマリーを計算すると決して一致し得ないことがわかる。よって、カイラル対称性の破れが起きて Nambu-Goldstone 粒子によ

^{*2} 現在ではその役割をトポロジカルな場の理論が代行している。詳しくは't Hooft アノマリーの章を参照。ちなみにスペクテイター (spectator) とは傍観者を意味している。

^{*3} いくらかの仮定をおいているので、厳密な証明とまでは言えない。

るアノマリーの寄与がなければならないと分かる．このアノマリーの寄与が正しく高エネルギー側の't Hooft アノマリーを再現するには，Nambu-Goldstone 粒子の低エネルギー有効理論に特殊な項が必要である．これを Wess-Zumino-Witten 項といい，中性 π 粒子の崩壊を理論的に説明するために不可欠な項であった [5]．このように，'t Hooft アノマリーを用いることで，QCD を始めとする理論の強結合領域について，理論的に色々調べることができる．

't Hooft アノマリーの定義は一見すると分かりづらいように思われるかもしれないが，アノマリーが三角形のファインマン・ダイアグラムで決定されるという Adler-Bardeen の定理を踏まえると，ABJ アノマリーやゲージ・アノマリーも含めて次のように定義が分類できる．

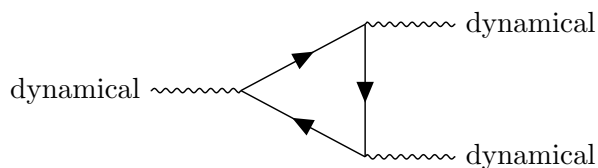


図 1.1 ゲージ・アノマリー

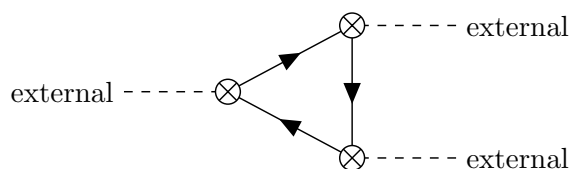


図 1.2 't Hooft アノマリー

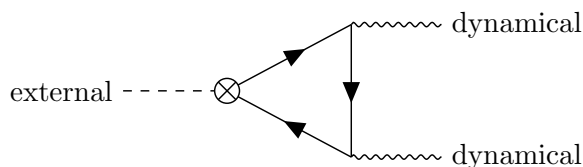


図 1.3 ABJ アノマリー

ここで”dynamical”はダイナミカルで物理的に伝播するゲージ場を表す．それに対して”external”は，大域的対称性をゲージ化したことで導入される外場としてのゲージ場を意味する．このような視点に立った時，実は歴史的に最初に発見された ABJ アノマリーは，外場とダイナミカルなゲージ場の混合したアノマリーであり，最も複雑であるとする見方が成り立つ．そこで本修士論文では，多くの標準的な教科書から逸脱し，ABJ アノマリーを最後に取り扱う*4．

■非摂動アノマリーの発見

以上を精密化すれば，アノマリーの完全な定義および分類が達成されるように思われるかもしれ

*4 ABJ アノマリーをこのような外場とダイナミカルなゲージ場の混合したアノマリーとして表記している文献として [6][7] がある．

ない。しかし、それは叶わない。実は先述のアノマリーは全て、Feynman ダイアグラムで計算できることからわかるように摂動的なアノマリーであるためだ。これは、そもそも ABJ アノマリーが Noether 保存則の破れとして発見されたこと、そして Noether カレントとは、微小な対称性変換由来であるからである。そこで Witten は、微小ではない対称性変換をしたときのアノマリーに着目し、1982 年に摂動的でないアノマリーを発見した [8]。ナイーブに考えると微小な変換を足し合わせることで、任意の大きさの変換が実現できるため、摂動的なアノマリー以上の新たなアノマリーは何も生じないように思われるかもしれない。しかし、Witten はトポロジカルな非自明さ（ホモトピー群）に着目することで、摂動的なアノマリー以外のアノマリー（非摂動アノマリー）を発見した。

この Witten の議論により、非摂動的なゲージ・アノマリーや非摂動的な 't Hooft アノマリーも存在することがわかった*⁵。それにより、アノマリー＝三角ダイアグラムという関係は一般には成立しないことがわかった。

さらに、非摂動アノマリーの厄介な所は、摂動アノマリーと比較して遥かに発見が難しい点にある。摂動アノマリーは、単に三角ダイアグラムを計算すれば求めることが可能である。しかし、当時非摂動アノマリーにそのような機械的手続きは存在しなかった。ホモトピー群の非自明さをもって最初は発見されたものの、現在ではホモトピー群の非自明さは非摂動アノマリーの存在のために必要でも十分でもないことが知られていて、ホモトピー群を使っても一般にその存在を発見することは不可能である。

困難ではあるものの、「存在しうる非摂動アノマリーを全て列挙せよ」という問題は、物理的に重要な意味をもつ。なぜならば、ゲージ・アノマリーが全て相殺していると信じられているモデルで、新たな非摂動アノマリーが存在するとなれば、その時点で実験・観測との比較をすることなく、そのモデルは棄却されるからである。よって、「この理論にゲージ・アノマリーはない」断言するには、非摂動アノマリーを全て求める手続きは必須である。また、新しい非摂動的な 't Hooft アノマリーが見つければ、強結合領域の物理に新たな知見を与えられるかもしれない。

■アノマリー流入

「非摂動アノマリーを全て列挙せよ」という問題に対して、近年解答が与えられた。一言で言うと、「 d 次元非摂動アノマリーは、 $d+1$ 次ボルディズム群で分類される」ということになる。またこの主張は、摂動アノマリーも含めたものに行うことが出来、その場合には「 d 次元アノマリーは、 $d+2$ 次ボルディズム群の Anderson 双対で分類される」となる。この結果は、素粒子物理学・物性物理学・数理物理学を横断することで得られた輝かしい結果ではあるが、その主張は極めて数学的で、恐らく多くの物理学者にとって馴染みにくいものと思われる。そこでここではその概要だけ述べ、詳細は本論に預ける。

アノマリーを現代的に述べる上で欠かせないのが、アノマリー流入というアイディアである。このアイディアの源流は、Wess-Zumino や Stora-Zumino による摂動アノマリーの代数的研究にある。彼らの主張は、 d 次元アノマリーの代数的関係を調べると、それは $d+1$ のトポロジカルな理論、および $d+2$ 次元のアノマリーと相互に関係していることがわかったのである。これは先ほどのボル

*⁵ 非摂動的な ABJ アノマリーは存在しない。なぜなら、Noether カレントに関連するのは、微小な対称性変換に限られるからである。

ディズム群を使った主張の原型にあたる。

このように高次元を考える理由は、アノマリーの起源に関係している。古典的に存在した対称性が量子化に伴い消失した原因は、正則化と深く関係している。量子化とは量子揺らぎについて、その寄与を全て足し合わせることで、様々な場面で発散が生じる。その発散をコントロールするために正則化するのだが、正則化の仕方により古典的対称性が壊れたり、壊れなかったりするのである。つまり、正則化の仕方が悪いからアノマリーがあるともいえる。そのため、「アノマリーがある」という言葉は、正確には「どのような正則化をしても対称性が破れる」ときにそう表現されているのである。

「どのような正則化をしても対称性が破れる」ことを示すのは困難である。正則化の違いは相殺項の違いとして考えられるが、 d 次元であらゆる相殺項 C を使ってもそのアノマリーを消去できないことを示すのは、難しい問題である。しかし、Stokes の定理を使うと、 d 次元で相殺項 C を考えることと、 $d+1$ 次元で完全微分 dC を考えることとある意味で等価であることがわかる。

$$\int_{M_d} C = \int_{M_{d+1}} dC \quad (1.6)$$

ただしここで、 d 次元多様体、 $d+1$ 次元多様体をそれぞれ M_d, M_{d+1} とし、 M_{d+1} の境界が M_d とした。一般に d 次元アノマリーに対して、それに対応した何らかの $d+1$ 閉形式 A が存在する。「アノマリーが相殺項で相殺できない」ということは、 $d+1$ 次元で見れば、「どのような完全形式 dC についても $A = dC$ とできない」という意味である。つまり、アノマリー A とは、不完全微分（閉だが完全でない形式）として明瞭に捉えられるのである。

ここでアノマリーに対応した何らかの $d+1$ 閉形式 A は、実はトポロジカルな場の理論（より正確には可逆な場の理論）のラグランジアンである。ここでの対応とは、 d 次元 M_d （エッジ）にアノマリー q をもった理論がいて、 M_{d+1} （バルク）にそれに対応したラグランジアン $A(q)$ を置いた系を考えたとき、全体としてアノマリーが相殺しているという意味である。それはまるでバルクからの寄与がエッジに流入した結果、全体のアノマリーが相殺しているようであり、アノマリー流入と呼ばれる。

d次元理論

d+1次元トポロジカル理論

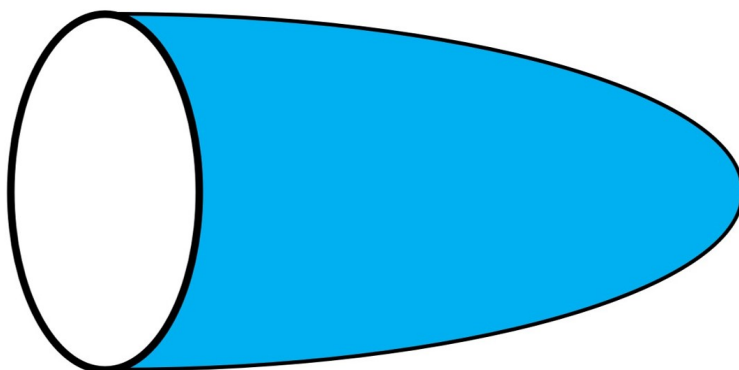


図 1.4 アノマリー流入の概念図

■現状

問題となるのは、 d 次元アノマリー q を相殺するような $d+1$ 次元トポロジカルな理論 $\mathcal{A}(q)$ は常に存在するのか、という点であるが、これは未だ完全な解答は与えられていない。現在までのところ、点粒子由来のフェルミオンアノマリーについては、常にそのようなトポロジカル理論の存在が証明され、具体形^{*6}も知られている。これは本質的に数学者の Dai と Freed によって与えられた結果であるが、Witten と Yonekura によって近年物理的な解釈 [9] が与えられた。それ以外のアノマリー、例えば高次形式対称性由来のアノマリーやボゾニックアノマリー、結合定数空間上のアノマリーについても、そのアノマリーに対応したトポロジカル理論が存在すると思われるが、そのようなアノマリーにも通用する一般的な証明は、(少なくとも著者の知る限り) 未完成である。しかし、現在までの所、この予想に反する結果は知られていない上に、本修士論文は点粒子由来のフェルミオンアノマリーのみを扱うため、この予想を真として取り扱う。つまり

$$[\text{Anomaly}]_d = [\text{Topological Field Theory}]_{d+1} \quad (1.7)$$

を仮定する。

また、数理物理および物性物理の知見によると、 $d+1$ 次元トポロジカル理論は $d+2$ 次のボルディズム群の Anderson 双対で分類されることが^{*7}、Freed-Hopkins の研究 [10] から知られている^{*7}。

$$[\text{Topological Field Theory}]_{d+1} = (I_{\mathbb{Z}}\Omega)^{d+2} \quad (1.8)$$

これら 2 つの式と組み合わせると、アノマリーの基本公式^{*8}が得られる。

$$[\text{Anomaly}]_d = (I_{\mathbb{Z}}\Omega)^{d+2} \quad (1.9)$$

この結果が先ほど述べた「 d 次元アノマリーは、 $d+2$ 次ボルディズム群の Anderson 双対で分類される」という主張である。この主張により、全ての非摂動アノマリーを列挙することが可能となった。

1.2 アノマリーの理論的導入

現代的には、アノマリー流入や基本公式 $[\text{Anomaly}]_d = (I_{\mathbb{Z}}\Omega)^{d+2}$ を用いてアノマリーを定義するのが、最も論理的に簡潔であるが、物理的意味は不明瞭である。そこでここでは、そのような高次元に関連する議論には触れずに、アノマリーを導入する。都合上 Pauli-Villars 正則化の場合に限定して議論することを断っておく。ここでの内容の多くは [1] を元としている。

^{*6} η 不変量と呼ばれる量で表される。

^{*7} この主張も厳密には予想であるが、正しいと信じられている。今回のようなフェルミオンアノマリーの探索をする上では、殆ど証明されていると考えても良いかもしれないが、実はボルディズム群の Anderson 双対の自由部分に関して、議論が残されているようである。ただしこの周辺の事情は極めて技術的で高度な数学が必要であるため、本修士論文で取り上げることはできなかった。少なくとも本論の内容において、この予想が正しいことは具体的に確認できる。

1.2.1 ゲージ化

本修士論文では、その殆どの興味がフェルミオン系にある。フェルミオン場（Dirac スピノル場の直和）を $\psi(x)$ とすると、作用は

$$S[\psi] = \int d^d x \bar{\psi} \gamma \cdot \partial \psi \quad (1.10)$$

で与えられる。ここで S が次の大域的変換 $g \in G$ について不変としよう。ただし G は群である。

$$\psi(x) \mapsto g \cdot \psi(x) \quad (1.11)$$

ここで、 g を時空に依存した関数 $g(x)$ にして、局所変換 $\psi(x) \mapsto \psi^g(x) := g(x) \cdot \psi(x)$ に格上げしよう。このとき、もちろん S は不変ではない。しかし、 G のリー代数 $\mathfrak{g}$ に値をもつ場 A で次のように変換するものを用意しよう。

$$A \mapsto A^g = g(A + d)g^{-1} \quad (1.12)$$

これをゲージ場^{*8}という。このとき、作用を次のように定義し直すと、局所変換の下で不変である。

$$S[\psi, A] = \int d^d x \bar{\psi} \gamma \cdot (\partial + A) \psi \quad (1.13)$$

この一連の手続きをゲージ化といい、局所変換の下での対称性をゲージ対称性という。なお ψ, A 等の諸量の正確な定義は A.1.1 を参照してほしい。

このゲージ場 A を物理的にダイナミカルな場として思う場合もあるし、単なる外場として考える場合もある。前者がゲージ・アノマリーに対応して、後者が't Hooft アノマリーに対応する。また、ダイナミカルなゲージ場と外場を混ぜたような場合を ABJ アノマリーという。

1.2.2 分配関数のゲージ不変性

共変微分 $D_{A\mu} := \partial_\mu + A_\mu$ とするとゲージ化した作用は

$$S[\psi, A] = \int d^d x \bar{\psi} \not{D}_A \psi \quad (1.14)$$

となる。ここで Feynman の記法 $\not{a} = \gamma \cdot a$ を使っている。この分配関数は

$$Z[A] = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-S[\psi, A]} = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-\int \bar{\psi} \not{D}_A \psi} \quad (1.15)$$

で定義される。ここで Grassmann 数 c_i に対する Gauss 積分

$$\int dcd\bar{c} e^{-\bar{c}_i A_{ij} c_j} \propto \det(A) \quad (1.16)$$

^{*8} 本修士論文では、ゲージ場 $A = A^a T^a$ を反エルミートにとっている。ここで、 T^a はエルミート行列で、 A^a は純虚数である。ゲージ場をエルミートにとっている文献との対応を見るには $A \mapsto -iA'$ 、 $A^a \mapsto A'^a$ と置きなおして、 A' をエルミート、 A^a を実数と見做せばよい。

を思い出そう^{*9}。ただし、 A はただの $\mathbb{R}$ 値行列である。これを踏まえると、分配関数 $Z[A]$ は規格化因子を除き次の表式をもつ。

$$Z[A] = \det(\not{D}_A) \quad (1.17)$$

ただし、この $\det$ は汎関数行列式である^{*10}。すなわち、固有値問題 $i\not{D}_A \psi_i = \lambda_i \psi_i$ を考えて^{*11}

$$Z[A] = \prod_i (-i\lambda_i) \quad (1.18)$$

で与えられる。固有値問題をゲージ変換すると $i\not{D}_{A^g} \psi_i^g = \lambda_i \psi_i^g$ となるので、 $\not{D}_A$ と $\not{D}_{A^g}$ の固有値スペクトルは等しい。その様子は下図^{*12}のように表される。

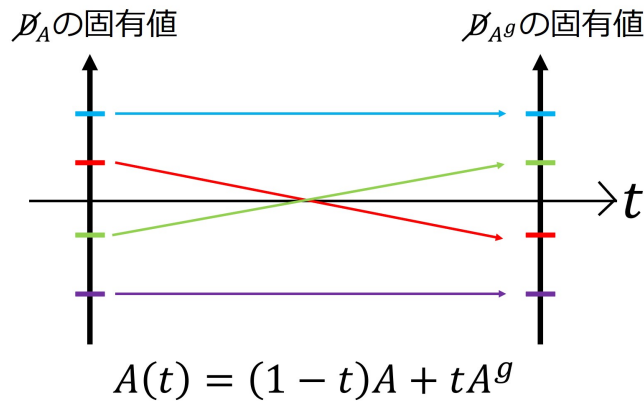


図 1.5 $\not{D}_{A(t)}$ の固有値スペクトル

固有スペクトルが等しいのだから、ナイープには

$$Z[A^g] = Z[A] \quad (1.19)$$

であると思われる。

1.2.3 Pauli-Villars 正則化

分配関数の表式 (1.18) から明らかなように分配関数は無限個の実数の積であるので、発散する。よって正則化が必要である。そのため、分配関数のゲージ不変性は正則化によって破られうる。これがアノマリーの生じる原因である^{*13}。

物理的な正則化とは、UV 構造を適切に deform して有限の値を取り出すことである。良く使われる正則化には以下が存在する。

^{*9} 実数 x_i に対する Gauss 積分は $\int dx e^{-x_i A_{ij} x_j} \propto \frac{1}{\det(A)}$ である。

^{*10} 数学的な定義としては、 ζ 関数正則化が用いられるが、ここでは後に書くように Pauli-Villars 正則化を用いる。

^{*11} $\not{D}_A = \gamma \cdot (\partial + A)$ は反エルミートであるので i 倍している。反エルミート性は $\partial_\mu e^{ipx} = ip_\mu e^{ipx}$ より $\partial_\mu^\dagger = -\partial_\mu$ であることと、Euclid 計量では $\gamma_\mu^\dagger = \gamma_\mu$ であることから確認できる。

^{*12} このような図をスペクトラル・フローという。

^{*13} 言い換えるとアノマリーとは、「ゲージ対称性を保つ正則化が存在しない」ことである。

正則化

カットオフ正則化, 次元正則化, Pauli-Villars 正則化, ...

ここでは Pauli-Villars 正則化を考えてみる．なぜならカットオフ正則化はゲージ対称性を必ず破るし、次元正則化はカイラリティが定義できなくなるという問題をはらむためである．Pauli-Villars 正則化は、重い粒子を入れることで UV の構造を deform する．ここでは質量をもったボゾニックなスピノル χ を導入する^{*14}．

$$S = \int \bar{\psi} \not{D}_A \psi + \bar{\chi} (\not{D}_A + M) \chi \quad (1.20)$$

この分配関数は

$$Z = \frac{\det \not{D}_A}{\det (\not{D}_A + M)} = \prod_{\lambda \in \text{Spec}(i\not{D}_A)} \frac{-i\lambda}{-i\lambda + M} \quad (1.21)$$

となるため、ゲージ対称性を保ちつつ正則化できる．以上より、Pauli-Villars 正則化が出来るときには（その正則化の下では）ゲージ対称性についてアノマリーが生じないとわかる．

しかし、常に Pauli-Villars 正則化ができるとは限らない．問題となるのは χ の質量項がゲージ対称性を保ちつつ無矛盾に導入できるかである．これは ψ に質量項が導入できるかと言い換えても良い．質量項が導入できることを gappable ということにする．結論として、次の重要な結果が得られる．

アノマリー非存在条件

系が gappable ならば、分配関数のゲージ対称性を保つ正則化があるため、アノマリーを取り除ける．

これは非常に強力な条件^{*15}で、摂動アノマリー・非摂動アノマリー関係なく常に使用できる．

しかし、Pauli-Villars 正則化の下ではアノマリーが存在するものの、他の正則化の下ではアノマリーが存在しない場合もある．全てのありうる正則化全てを試してもアノマリーが存在することを示すには、2 章以降で扱うアノマリー流入のアイディアが有効である．

アノマリーが存在する条件を述べることはここでは困難であるが、少なくとも質量項が導入できるときに、アノマリーが取り除けるという主張それ自体は厳密に正しい．これを利用することで、アノマリーに関して様々な性質が次節にて述べられる．

現段階では、Pauli-Villars 正則化の下で分配関数がゲージ不変でないとき、その比をアノマリーの値 J と定義する．

$$Z[A^g] = J(A, g) \cdot Z[A] \quad (1.22)$$

つまりアノマリーがないとは、 $J = 1$ のことである．

^{*14} スピン・統計定理に反するためこれは非物理的な場である．

^{*15} ただし、逆は成立しないことに注意が必要である．例えば、Weinberg-Salam 模型に質量項は導入できないが、アノマリーは相殺されている．

1.2.4 Fujikawa の方法

アノマリー $J(A, g)$ は、物質場の経路積分のヤコビアンであると考えする方法がある。この方法を Fujikawa の方法 [11] といい、概念的に分かりやすく、今後の議論の理解の助けになるため簡単に説明する。

Dirac スピノル ψ とゲージ場 A がいる系を考えてみる。この系の作用

$$S[A, \psi] = \int d^d x \bar{\psi} \gamma \cdot (\partial + A) \psi + (\text{ゲージ場の運動項等}) \quad (1.23)$$

は、次のゲージ変換の下で不変であった：

$$A \mapsto A^g = g A g^{-1} + dg \cdot g^{-1}, \quad (1.24)$$

$$\psi \mapsto \psi^g = g \cdot \psi, \quad (1.25)$$

$$S[A, \psi] \mapsto S[A^g, \psi^g] = S[A, \psi]. \quad (1.26)$$

これをゲージ対称性という。ナイーブには、古典論のもつ対称性は量子論でも成立することが期待されるため、分配関数 Z もゲージ対称性をもつことが期待される。

$$Z = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-S[A, \psi]} \quad (1.27)$$

しかし、このナイーブな期待は一般に成立しない。実際ゲージ変換を施してみよう。

$$Z \mapsto Z' = \int \mathcal{D}A^g \mathcal{D}\psi^g \mathcal{D}\bar{\psi}^g e^{-S[A^g, \psi^g]} \quad (1.28)$$

式 (1.26) より

$$Z' = \int \mathcal{D}A^g \mathcal{D}\psi^g \mathcal{D}\bar{\psi}^g e^{-S[A, \psi]} \quad (1.29)$$

ゲージ場の汎関数積分は、ゲージ同値について割っているので

$$Z' = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\psi^g \mathcal{D}\bar{\psi}^g e^{-S[A, \psi]} \quad (1.30)$$

スピノル場の汎関数積分からはヤコビアン $J(g, A)$ がでるため

$$Z' = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} J(A, g) e^{-S[A, \psi]} \quad (1.31)$$

以上より、ヤコビアン $J(A, g)$ が 1 でないとき、 $Z' \neq Z$ である。すなわち、ゲージ対称性は一般に成立しない。これがアノマリーであった。

実際にヤコビアンとしてアノマリー J を真面目に計算することもできる。実際熱核正則化を使えば、正しい結果が得られることが知られているが、本修士論文では取り扱わない。

ゲージ変換の計算過程からわかるように、ヤコビアンは物質場からのみ出て、ゲージ場のからは by definition で出ない。よって、アノマリーの考察をする上では、ゲージ場について汎関数積分する前の

$$Z[A] := \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-S[A, \psi]} \quad (1.32)$$

にだけ注目すればよい。また、作用 S に含まれるゲージ場 A の運動項等は、スピノルに場 ψ について積分する際には、何も寄与を生まない。それを踏まえて以降の計算では作用 S はスピノル ψ を含む部分だけを指すとする。

$$S[A, \psi] = \int d^d x \bar{\psi} \gamma \cdot (\partial + A) \psi \quad (1.33)$$

1.2.5 Feynman ダイアグラムとの対応

アノマリーの計算方法としては、本修士論文の現代的な方法と Fujikawa の方法の他に Feynman ダイアグラムによる方法が知られている^{*16}。本文で Feynman ダイアグラムによる計算を実行することはしないが、ここで対応するという事実だけ言及しておく。

4 次元理論のアノマリーは次の三角形の Feynman ダイアグラムに対応させることができる。これを三角ダイアグラムと呼ぶ。

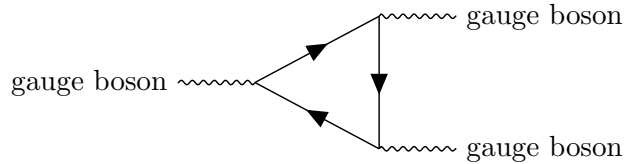


図 1.6 三角ダイアグラム

ここで 3 本の外線はゲージ場 A に対応し、内線はフェルミオン場 ψ に対応する。三角ダイアグラムの値とアノマリーが値が全く同じであるとは限らない。しかし、三角ダイアグラムが 0 であるならばアノマリーが 0 であることが知られており、Adler-Bardeen の定理と呼ばれている。一般に、 $2n$ 次元のアノマリーは、 $n + 1$ 角形の Feynman ダイアグラムに対応することが知られている。

この対応関係は非自明であるが、2 章の議論において $J = 0$ である条件と三角ダイアグラムが 0 である条件が対応することを確認する。

1.3 アノマリーの諸性質

1.3.1 アノマリーの絶対値

アノマリーの絶対値は必ず 1 であることを示す。つまりアノマリーは実数関数 $\mathcal{A}$ を使って

$$J(g, A) = e^{i\mathcal{A}(g, A)} \quad (1.34)$$

^{*16} むしろ歴史的には Feynman ダイアグラムによる方法が最も最初に発見された。

と書ける。この定理を証明する前に、有用な帰結であるアノマリーのトポロジカル不変性を見てみよう。これは単にユークリッド作用に対してアノマリーが虚部として寄与することを見ればわかる^{*17}。

$$Z = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-S+iA} \quad (1.36)$$

アノマリーがトポロジカルであることから、次の重要な結果を得る。

アノマリー一致条件

アノマリーは必ずトポロジカルである。すなわち、繰り込み群の影響を一切受けないため UV と IR で一致しなければならない。

これは強結合領域の物理を探索する上で非常に強力である。ただし、Weyl アノマリーはこの条件を満たさない。これは Weyl 変換が通常のゲージ変換と異なり、多様体の曲率を一般に変形させる故の性質である。詳細は付録 B.1 節にて議論する。

さて、アノマリーの絶対値が必ず 1 であることを証明しよう。等価な主張は分配関数の絶対値 $|Z|$ が正則化できることである。そこで分配関数

$$Z = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-S[\psi, A]} \quad (1.37)$$

のスピンル ψ に対して、複素共役のスピンル $\bar{\psi}$ を考える。 $\bar{\psi}$ の系の作用は元の作用の複素共役 $\bar{S}$ で、分配関数は複素共役 $\bar{Z}$ である。 $\psi \oplus \bar{\psi}$ の複合系を考えるとこれは質量項を構成できるため gappable である。ゆえに複合系の分配関数 $|Z|^2 = Z \cdot \bar{Z}$ はアノマリーを持たないため、 $|Z|$ はアノマリーを持たない。

1.3.2 表現とアノマリー

考えている系のローレンツ対称性 $SO(d)$ とゲージ対称性 G を合わせて K と表記しよう^{*18}。スピノルが受ける K の表現 R として、 R が実・擬実・複素表現のときのアノマリーの振る舞いをおさえておこう。 R の次元を n とし、 α ないし β は $1 \dots n$ を走るとする。

擬実表現のとき、 K 不変な反対称テンソル $\omega_{\alpha\beta}$ がある。よって、スピノル場 ψ_α は質量項 $\omega_{\alpha\beta}\psi_\alpha\psi_\beta$ をもてるゆえに、gappable である。すなわちアノマリーは存在しない^{*19}。

実表現のとき、 K 不変な対称テンソル $h_{\alpha\beta}$ がある。よってスピノル場 ψ_α は質量項 $h_{\alpha\beta}\psi_\alpha\psi_\beta$ をもてる。しかし、スピノル場の統計性よりこの質量項は 0 であるため、アノマリーは存在しうる。た

^{*17} ユークリッド計量で考えたとき、分配関数は

$$Z[A] = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-S[\psi, \bar{\psi}]} \quad (1.35)$$

である。ここで古典的軌道 ψ_{cl} は e^{-S} の絶対値を最小化するように選ばれる。よって、 S を実部と虚部にわけたとき、実部は古典軌道に寄与する一方、虚部は古典軌道に何ら影響を与えない。つまり作用の虚部は軌道の微小な変化について不変である（＝トポロジカルである）。実際 4 次元ゲージ理論の代表的なトポロジカル作用 $\exp(i\theta \int d^4x \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta})$ を Wick 回転してみると、ユークリッド計量で純虚である。

^{*18} K には離散的対称性を含めることも可能である。

^{*19} ただしこの質量項は時間反転不変性をもたない場合があるため、T アノマリーをもちうる。

だし、摂動アノマリーが存在しないことは証明できる。同じスペクトルをもつスピノル場 $\tilde{\psi}$ を加えて、 $\psi \oplus \tilde{\psi}$ の複合系を考えてみる。この複合系では質量項 $h_{\alpha\beta}\psi_\alpha\bar{\psi}_\beta$ が存在するため gappable である。元の系の分配関数 Z に対する複合系の分配関数 Z^2 はアノマリーを持たないため、 Z のアノマリーは次のように $\mathbb{Z}_2$ 値のみ許される^{*20}。

$$Z[A^g] = -Z[A] \quad (1.38)$$

微小変化は存在しないので、摂動アノマリーは存在しない。

複素表現のとき、 K 不変なテンソルは存在しないため、一般にアノマリーは存在しうる。摂動アノマリーが存在できるのは、このケースに限る。また、実表現のように $\mathbb{Z}_2$ 値になるといった制限もないため、バラエティーに富む。実際 $\mathbb{Z}_{16}$ 値のアノマリーが超伝導体のアノマリーとして登場する。

以上をまとめると次を得る。ただし「無」はアノマリーが存在しないこと、「有」はアノマリーが存在しうることを示す。

表 1.1 表現とアノマリーの関係

	擬実表現	実表現	複素表現
摂動アノマリー	無	無	有
非摂動アノマリー	無 (T アノマリーは有)	有	有

1.3.3 ベクトル型とアキシャル型

ゲージ場とスピノルの結合のさせ方によってはゲージアノマリーが存在しえないことを証明する。これまで、Dirac スピノル ψ について扱ってきた。しかし、 d が偶数であるとき、Dirac スピノルは既約表現ではない。 $d = 2n$ 次元クリフォード代数は、 $d + 1$ 次元クリフォード代数を元に導出できる^{*21}。

$$\langle \gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^{2n+1} \rangle \quad (1.48)$$

^{*20} これを mod 2 アノマリーないし $\mathbb{Z}_2$ アノマリーという。

^{*21} $d + 1$ 次元クリフォード代数は、Pauli 行列 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ を用いて

$$\gamma^1 = \sigma_x \otimes 1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1, \quad (1.39)$$

$$\gamma^2 = \sigma_y \otimes 1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1, \quad (1.40)$$

$$\gamma^3 = \sigma_z \otimes \sigma_x \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1, \quad (1.41)$$

$$\gamma^4 = \sigma_z \otimes \sigma_y \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1, \quad (1.42)$$

$$\gamma^5 = \sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \sigma_x \otimes \dots \otimes 1, \quad (1.43)$$

$$\vdots \quad (1.44)$$

$$\gamma^{2n} = \sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \dots \otimes \sigma_y, \quad (1.45)$$

$$\gamma^{2n+1} = \sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \dots \otimes \sigma_z \quad (1.46)$$

$$(1.47)$$

として実現できる。

つまり, $2n+1$ 個の生成子の内 $2n$ 個だけ取り出すと d 次元クリフォード代数が導出できる. ここでは, $\gamma^1, \dots, \gamma^{2n}$ を選ぶ. 余った 1 つの生成子 $\bar{\gamma} := \gamma^{2n+1}$ は他の基底を全て掛け合わせた体積要素に比例し, カイラリティ行列と呼ばれる.

$$\bar{\gamma} \propto \gamma^1 \gamma^1 \dots \gamma^{2n} \quad (1.49)$$

$\bar{\gamma}^2 = 1$ なので, $\bar{\gamma}$ の固有値は ± 1 である^{*22}. 実際, 適当に基底変換すると

$$\bar{\gamma} = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & -1_n \end{pmatrix} \quad (1.50)$$

であることが示される. カイラリティ行列を用いることで射影演算子

$$P_{\pm} := \frac{1 \pm \bar{\gamma}}{2} \quad (1.51)$$

が定義できて, Dirac スピノルは次のように既約分解ができる^{*23}.

$$\psi = P_+ \psi + P_- \psi \quad (1.52)$$

$P_+ \psi$ を右巻きの Weyl スピノル, $P_- \psi$ を左巻きの Weyl スピノルという^{*24}. 以降これらは単に ψ_+, ψ_- と表記する.

よって, 作用を成分も含めて記載すると

$$S[A, \psi] = \int d^d x (\bar{\psi}_- \bar{\psi}_+) \begin{pmatrix} 0 & \sigma_- \cdot (\partial + A_-) \\ \sigma_+ \cdot (\partial + A_+) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} \quad (1.53)$$

となる^{*25}. ただしここで式 (1.50) の表示に合わせたクリフォード代数の表現^{*26}

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_-^\mu \\ \sigma_+^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (1.54)$$

を用いた.

さて, 式 (1.53) を見ればわかる通り, 偶数次元では右巻きと左巻きで異なるゲージ場 $A_{\pm}$ を割り振ることが可能である. ここではゲージ代数は等しいとして, 表現の異なるゲージ場を考えることにしよう.

$$A_+ = A^a T_+^a, \quad (1.55)$$

$$A_- = A^a T_-^a \quad (1.56)$$

さらに

$$T^a = \begin{pmatrix} T_+^a & 0 \\ 0 & T_-^a \end{pmatrix} \quad (1.57)$$

^{*22} これをカイラリティという.

^{*23} 奇数次元では $\bar{\gamma} = 1$ なので, カイラリティという概念はなく, Dirac スピノルが既約表現である.

^{*24} どうでもいいが, 「+は真つ当なので right(右)」とすると覚えやすい.

^{*25} σ_+ と σ_- はエルミート共役の関係にある.

^{*26} これをカイラル表現という.

と定義すると、式 (1.53) は

$$S[A, \psi] = \int d^d x \bar{\psi} \gamma \cdot (\partial + A^a T^a) \psi \quad (1.58)$$

と書ける。式 (1.33) と単に書いているときには以上のように解釈する。そして、特に次の結合に名前がついている。

ベクトル型結合

$$T_+ = T_- \leftrightarrow T_V^a = \begin{pmatrix} T_+^a & 0 \\ 0 & T_+^a \end{pmatrix} \quad (1.59)$$

アキシャル型結合

$$T_+ = -T_- \leftrightarrow T_A^a = \begin{pmatrix} T_+^a & 0 \\ 0 & -T_+^a \end{pmatrix} \quad (1.60)$$

カイラリティ行列 $\bar{\gamma}$ を使うと $T_A = \bar{\gamma} T_V$ と書けるので、実用上はベクトル型を T と表示し、アキシャル型を $\bar{\gamma} T$ と表示することが多い。

ベクトル型とアキシャル型の大きな違いは質量項が作れるか、否かである。Dirac スピノル ψ から作れる Lorentz スカラーは $\bar{\psi}\psi$ の定数倍以外に存在しないため質量項は必ず

$$m\bar{\psi}\psi = m(\bar{\psi}_- \ \bar{\psi}_+) \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} = m\bar{\psi}_- \psi_+ + m\bar{\psi}_+ \psi_- \quad (1.61)$$

である。これを Dirac 質量項という。これをゲージ変換すると

$$\psi_{\pm} \mapsto e^{i\theta(x)T_{\pm}} \psi_{\pm}, \quad \bar{\psi}_{\pm} \mapsto \bar{\psi}_{\pm} e^{-i\theta(x)T_{\pm}} \quad (1.62)$$

であるので、質量項は

$$m\bar{\psi}_- \psi_+ + m\bar{\psi}_+ \psi_- \mapsto e^{i\theta(T_+ - T_-)} m\bar{\psi}_- \psi_+ + e^{i\theta(T_- - T_+)} m\bar{\psi}_+ \psi_- \quad (1.63)$$

と変化する。よって、ゲージ不変な質量項が作れるのはベクトル型の結合 ($T_+ = T_-$) だけである。これより次が与えられる。

ベクトル型のアノマリー

ベクトル型結合のとき、gappable なのでアノマリーは存在しない。

1.3.4 カイラリティとアノマリー

式 (1.53) を書き直して

$$S = S_+ + S_- \quad (1.64)$$

としてみよう。ただし $S_{\pm} := \int d^d x \ \bar{\psi}_{\pm} \sigma_{\pm} \cdot (\partial + A_{\pm}) \psi_{\pm}$ である。分配関数を $Z_{\pm} := \int \mathcal{D}\psi_{\pm} \mathcal{D}\bar{\psi}_{\pm} e^{-S_{\pm}}$ とおくと、

$$Z = Z_+ \cdot Z_- \quad (1.65)$$

である。

ここで、ベクトル型 $T_+ = T_-$ のときを考えてみる。 Z 全体としてはアノマリーは存在しない。しかし、 Z_+ あるいは Z_- だけに着目するとアノマリーはある。なぜなら式 (1.63) を見ての通り、片方の Weyl スピノルだけでゲージ不変な質量項を導入できないからである。よって、次の結果を得る。

カイラリティとアノマリー

右巻きの Weyl スピノルと左巻きの Weyl スピノルの表現が等しいとき ($T_+ = T_-$)、アノマリーは互いに逆数の関係である。つまり

$$Z_+[A^g] = e^{iA} Z_+[A] \Leftrightarrow Z_-[A^g] = e^{-iA} Z_-[A] \quad (1.66)$$

である。

すなわち片方のカイラリティの Weyl スピノルについてのみ計算すれば十分である、よって 2 章の計算では左巻きのスピノルのみがいる系；

$$Z_- = \int \mathcal{D}\psi_- \mathcal{D}\bar{\psi}_- e^{-S_-} \quad (1.67)$$

を考えて、これを記法の簡単のために Z とおく。

第 2 章

摂動アノマリーの計算

第 1 章では、アノマリー J をゲージ変換 $A \mapsto A^g$ に伴う分配関数の変化として次のように定義した。

$$Z[A^g] = J(A, g)Z[A] \quad (2.1)$$

第 2 章では、特にゲージ変換 $g = e^{i\theta^a T^a}$ が微小である場合、つまり $g \sim 1 + i\theta^a T^a$ と近似できるときについてアノマリー J を計算する。このようなケースのアノマリーは摂動アノマリーと呼ばれ、Feynman ダイアグラムによる計算も可能である。ただし本章のメインテーマは、Feynman ダイアグラムによる計算ではない。この章のテーマは、分配関数・有効作用がゲージ代数の表現であるという条件（Wess-Zumino 整合条件）を課すだけで、その具体形が殆ど決定されることを見ることにある。Wess-Zumino 整合条件を満足するような有効作用を決定するには、Stora-Zumino の降下方程式を用いる、この手法により、 d 次元摂動アノマリーが $d+1$ 次元の Chern-Simons 理論および、 $d+2$ 次元 Chern 指標や $\hat{A}$ 種数の積（アノマリー多項式）と対応することがわかる。 d 次元アノマリーと $d+2$ 次元アノマリー多項式との対応は重要で、これにより摂動アノマリーが Feynman ダイアグラムと対応することが確認できる。

以上の物理的内容の殆どは [12],[13] を参考にしているが、数学的内容（Atiyah-Singer の指数定理や特性類）に関しては、[14],[15] を参考にした。

また、最後に具体例を考えることで、安全な代数や可換アノマリーといった概念も導入している。この内容は [16] を参考にしている。

2.1 Wess-Zumino の整合条件

2.1.1 Wess-Zumino の整合条件

この章でのアノマリー J の計算は、ゲージ変換 g が十分に微小であるときに限る。すなわち、ゲージ代数の生成子を T^a 、座標を θ^a として

$$g = e^{i\theta^a T^a} \sim 1 + i\theta^a T^a \quad (2.2)$$

とする。また、ゲージ場 A のゲージ固定を $\hat{A}$ とする。つまり、任意のゲージ配位 A は適切に g を選ぶことで

$$A = \hat{A}^g \quad (2.3)$$

として実現する。この意味でゲージ場の任意の汎関数 $F[A]$ は、ゲージ変換 $g \sim 1 + i\theta^a T^a$ の汎関数 $F[\theta]$ と捉えなおすことができる。

さて、ここで汎関数 $F[A]$ がゲージ代数の表現であるとき、次式が成立する：

Wess-Zumino の整合条件

$$\left[\frac{\delta}{\delta\theta^a}, \frac{\delta}{\delta\theta^b} \right] F[A] = i f^{abc} \frac{\delta}{\delta\theta^c} F[A] \quad (2.4)$$

この条件は、 $Z[A]$ や有効作用 $\Gamma[A] = \log Z[A]$ に対して成立する。これを Wess-Zumino の整合条件という。特に有効作用 $\Gamma[A]$ のゲージ変換は適当な d 形式 $\omega_d(\epsilon)$ を用いて

$$\epsilon^a \frac{\delta}{\delta\theta^a} \Gamma[A] = i \int_{M_d} a_d(A, \epsilon) \quad (2.5)$$

と書ける。ただし、 M_d は時空で $\omega_d(A, \epsilon)$ は ϵ の 1 次 に比例するとしている。この ω_d はアノマリー J に相当する。実際 $\Gamma[A] = \log Z[A]$ なので、

$$\epsilon^a \frac{\delta}{\delta\theta^a} \Gamma[A] = \frac{\epsilon^a \frac{\delta}{\delta\theta^a} Z[A]}{Z[A]} = \frac{Z[A^g] - Z[A]}{Z[A]} \quad (2.6)$$

となる。すなわち

$$Z[A^g] = \left(1 + i \int a_d(A, \epsilon) \right) Z[A] \quad (2.7)$$

よりアノマリーについて

$$J(A, g = e^{i\epsilon}) = 1 + i \int a_d(A, \epsilon) + (\epsilon \text{ の } 2 \text{ 次以上}) \quad (2.8)$$

であることが導かれる。式 (2.5) と Wess-Zumino 整合条件を組み合わせることで、アノマリーの解析がほとんど完遂できてしまう*1。

*1 より正確には Wess-Zumino 整合条件を満たすようなアノマリーのみを対象にしていると言える。このようなアノマリーを consistent アノマリーという。consistent アノマリーの他に、ゲージ不変性をもつ covariant アノマリーが存在する。

2.1.2 BRST 変換を用いた書き換え

BRST 変換を部分的に導入する*2。BRST 変換とは、微小なゲージ変換で、変換パラメーターを Grassmann 奇にとったものである。Grassmann 数が導入されたお陰で BRST 変換は冪零性をもつため、微小なゲージ変換を考えるよりも計算の見通しが遥かに良くなる。

場の BRST 変換 δ_B

ゲージ場 A に対する BRST 変換は、ゴースト場と呼ばれる Grassmann 奇な場 $c = c^a T^a$ を用いて

$$\delta_B A^a = c_x^b \frac{\delta}{\delta \theta_x^b} A^a \quad (2.9)$$

と定義される。また、ゴースト場 c に対する BRST 変換は

$$\delta_B c^a = -\frac{i}{2} f^{abc} c^b c^c \quad (2.10)$$

と定義される。以上の定義式より、BRST 変換 δ_B は Grassmann 奇とわかる。

ただし、ここで時空座標 x についても Einstein 縮約をとっている*3。この BRST 変換の重要な性質として、冪零性がある。ここでは試しに $\delta_B^2 A = 0$ を確認してみよう。まず

$$\delta_B A^a = c_x^b \frac{\delta}{\delta \theta_x^b} A^a \quad (2.11)$$

である。もう一度 BRST 変換をすると

$$\delta_B^2 A^a = \delta_B c_x^b \frac{\delta}{\delta \theta_x^b} A^a - c_x^b \frac{\delta}{\delta \theta_x^b} \delta_B A^a \quad (2.12)$$

第 1 項目について

$$\delta_B c_x^b \frac{\delta}{\delta \theta_x^b} A^a = -\frac{i}{2} f^{bcd} c_x^c c_x^d \frac{\delta}{\delta \theta_x^b} A^a = -\frac{i}{2} f^{dbc} c_x^b c_x^c \frac{\delta}{\delta \theta_x^d} A^a \quad (2.13)$$

第 2 項目について

$$c_x^b \frac{\delta}{\delta \theta_x^b} \delta_B A^a = c_x^b \frac{\delta}{\delta \theta_x^b} c_y^c \frac{\delta}{\delta \theta_y^c} A^a = \frac{1}{2} c_x^b c_x^c \left[\frac{\delta}{\delta \theta_x^b}, \frac{\delta}{\delta \theta_x^c} \right] A^a \quad (2.14)$$

よって、

$$\delta_B^2 A^a = \frac{1}{2} c_x^b c_x^c \left(-i f^{dbc} \frac{\delta}{\delta \theta_x^d} + \left[\frac{\delta}{\delta \theta_x^b}, \frac{\delta}{\delta \theta_x^c} \right] \right) A^a \quad (2.15)$$

であるため、Wess-Zumino の整合条件*4 よりゼロとなる。

*2 完全な導入は付録参照

*3 つまり $A_x B_x := \int dx A(x) B(x)$ の意味である。

*4 尤も、 A がゲージ代数の表現であるのは自明なので、わざわざ Wess-Zumino の整合条件と呼ぶ必要も本来はない。

以上の計算は、任意の汎関数 $F[A]$ に対しても同様に行える。上記の計算で形式的に A を $F[A]$ に置き換えるだけで全く正しい計算過程が得られる。よって

$$\delta_B^2 F[A] = \frac{1}{2} c_x^b c_x^c \left(-i f^{dbc} \frac{\delta}{\delta \theta_x^d} + \left[\frac{\delta}{\delta \theta_x^b}, \frac{\delta}{\delta \theta_x^c} \right] \right) F[A] \quad (2.16)$$

が得られる。よって次がわかる。

次の2つは等価である。

$$\text{Wess-Zumino の整合条件} \quad \left[\frac{\delta}{\delta \theta^a}, \frac{\delta}{\delta \theta^b} \right] F[A] = i f^{abc} \frac{\delta}{\delta \theta^c} F[A] \quad (2.17)$$

$$F[A] \text{ に対する BRST 変換の冪零性} \quad \delta_B^2 F[A] = 0 \quad (2.18)$$

1つ目の表式よりも2つ目の表式の方が見通しが良い。これが BRST 変換を導入したご利益の1つである。これ以降 Wess-Zumino の条件と言ったら、2つ目の表式を使うことにする。

よって有効作用 Γ に対しては、

$$\delta_B^2 \Gamma[A] = 0 \quad (2.19)$$

が成立し、また式 (2.5) で ϵ をゴースト場 c に置き換えると

$$\delta_B \Gamma[A] = \int_{M_d} a_d(A, c) \quad (2.20)$$

を得る。以上2つの式より

$$\delta_B \int_{M_d} a_d(A, c) = 0 \quad (2.21)$$

を得る。これを次節で解く。

2.2 Stora-Zumino の降下方程式

2.2.1 Stora-Zumino の降下方程式

方程式 (2.21) を満たす解を構成する代数的処方を Stora-Zumino の方法という。以降の計算では $d = 2n$ とする^{*5}。ここで天下り的に $2n+2$ 次元閉多様体 M_{2n+2} を考える。この多様体上の $n+1$ 次 Chern 指標は

^{*5} 摂動アノマリーは偶数次元にのみ存在する。

Chern 指標

$$\text{ch}_n(F) = \text{tr} \exp \left(i \frac{F}{2\pi} \right) \Big|_{2n \text{ 形式}} \quad (2.22)$$

で与えられる^{*6}。Chern 指標の $2n$ 形式部分を $\text{ch}_n(F)$ と書くことにすると、定義より

$$\text{ch}_1(F) = \frac{i}{2\pi} \text{tr} F, \quad (2.23)$$

$$\text{ch}_2(F) = -\frac{1}{8\pi^2} \text{tr}(F \wedge F), \quad (2.24)$$

$$\text{ch}_3(F) = -\frac{i}{48\pi^3} \text{tr}(F \wedge F \wedge F) \quad (2.25)$$

と与えられる。一般に

$$\text{ch}_n(F) = \frac{i^n}{(2\pi)^n n!} \text{tr} F^n \quad (2.26)$$

である。この項はトポロジカルである^{*7}ので、 M_{2n+2} が単連結である^{*8}とき、Poincare の補題からある $2n+1$ 形式 $\omega_{2n+1}^{\text{CS}}$ があって

$$\text{ch}_{n+1}(F) = d\omega_{2n+1}^{\text{CS}} \quad (2.27)$$

と書ける。これを Chern-Simons 形式という。この定義は、常に任意の関数 $f(x)$ に関する自由度 $\omega_{2n-1}^{\text{CS}} \sim \omega_{2n-1}^{\text{CS}} + df$ をもつが、閉多様体上では意味をなさないことに注意する^{*9}。また、定義より $\text{tr}(F^{n+1})$ はゲージ不変なので

$$\delta_B \text{ch}_{n+1}(F) = 0 \quad (2.28)$$

である。上の 2 式より

$$\delta_B d\omega_{2n+1}^{\text{CS}} = 0 \quad (2.29)$$

である。 $\{\delta_B, d\} = 0$ なので

$$d\delta_B \omega_{2n+1}^{\text{CS}} = 0 \quad (2.30)$$

が導かれる。よって、 $\delta_B \omega_{2n+1}^{\text{CS}}$ に Poincare の補題を使って

$$\delta_B \omega_{2n+1}^{\text{CS}} = d\omega_{2n} \quad (2.31)$$

^{*6} ただし、 F は $U(n)$ ゲージ場の曲率である。

^{*7} 外微分したら $dF = d(A^2) = [dA, A] = [F, A]$ なので、 $d\text{tr}(F^n) = \text{tr}(F^{n-1}[F, A]) = \text{tr}[F^n, A] = 0$ となる。
ただし、 F^n が $2n$ 形式で A が 1 形式であることと、トレースの中では代数の足について巡回性が成立するため、 $\text{tr}(F^n A) = \text{tr}(AF^n)$ であることを使った。 $d\text{ch}(F) = 0$ であることは、トポロジカル不変性を意味する。

^{*8} ここでは十分近傍の領域で単連結と見做したときの局所的な表式だけを議論している。

^{*9} 後で見るように、アノマリーの計算は閉多様体上での議論で十分である。

を満たす ω_{2n} が存在する．また $\delta_B^2 = 0$ より

$$\delta_B d\omega_{2n} = 0 \quad (2.32)$$

なので,

$$d\delta_B \omega_{2n} = 0 \quad (2.33)$$

するとまた Poincare の補題より

$$\delta_B \omega_{2n} = d\omega_{2n-1} \quad (2.34)$$

となる ω_{2n-1} が存在する．以上の一連の計算を図式で示そう．これが Stora-Zumino の降下方程式そのものである．

Stora-Zumino の降下方程式

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{ch}_{n+1}(F) & \xleftarrow{d} & \omega_{2n+1}^{\text{CS}} & & & & \\
 \delta_B \downarrow & & \delta_B \downarrow & & & & \\
 0 & \xleftarrow{d} & d\omega_{2n} & \xleftarrow{d} & \omega_{2n} & & \\
 & & \delta_B \downarrow & & \delta_B \downarrow & & \\
 & & 0 & \xleftarrow{d} & d\omega_{2n-1} & \xleftarrow{d} & \omega_{2n-1} \\
 & & & & \delta_B \downarrow & & \delta_B \downarrow
 \end{array} \quad (2.35)$$

d と δ_B の冪零性より，上式のような美しい関係をもつ．縦軸がゴースト数（1 段目が 0，2 段目が 1...）で，横軸が次数に対応する．

実は

$$a_{2n}(A, c) = \text{const} \cdot \omega_{2n} \quad (2.36)$$

とすると，これは方程式 (2.21) の解そのものである^{*10}．なぜなら， X_{2n} は式 (2.35) の 2 段目なので，ゴースト数が 1．すなわち c に比例し，また，

$$\delta_B \int_{M_{2n}} \omega_{2n} = \int_{M_{2n}} d\omega_{2n-1} = 0 \quad (2.37)$$

だからである．残念ながら，降下方程式のみからこの定数を決めることはできないが，3 章の計算を踏まえると，

$$\text{const} = 2\pi \quad (2.38)$$

と決定される^{*11}．

^{*10} ただし，方程式 $\delta_B \omega_{2n+1}^{\text{CS}} = d\omega_{2n}$ で $d\omega_{2n} \mapsto d\omega_{2n} + dC$ としても式 (2.30) を満足する．つまり，局所的な項 C だけ解 ω_{2n} の不定性がある．この C は相殺項であり，正則化の違いにより生じる．

^{*11} 3 章の内容を使わずとも族の指数定理により決定することもできる，詳細は [17] を参照

2.2.2 降下方程式の解（1 段目）

この節では、降下方程式 (2.35) の 1 段目の具体的な表式を与える。

$$\text{ch}_2(F) = \frac{1}{8\pi^2} \text{tr} F^2 \quad \xleftarrow{d} \quad \omega_3^{\text{CS}} = \frac{1}{8\pi^2} \text{tr} (AF - \frac{1}{3} A^3) \quad (2.39)$$

$$\text{ch}_3(F) = -\frac{i}{48\pi^2} \text{tr} F^3 \quad \xleftarrow{d} \quad \omega_5^{\text{CS}} = -\frac{i}{48\pi^2} \text{tr} (AF^2 - \frac{1}{2} A^3 F + \frac{1}{10} A^5)$$

上の表式は式 (2.26) と次の式を利用することで導出できる。

$$\text{tr} F^n = \int_0^1 dt \frac{d}{dt} [\text{tr} F_t^n] \quad (2.40)$$

$$= \int_0^1 dt \, n \cdot \text{tr} [(D_t A) F_t^{n-1}] \quad (2.41)$$

$$= \int_0^1 dt \, n \cdot \text{tr} [D_t (AF_t^{n-1})] \quad (2.42)$$

$$= \int_0^1 dt \, n \cdot \text{tr} [d(AF_t^{n-1}) + tA(AF_t^{n-1}) + (AF_t^{n-1})tA] \quad (2.43)$$

$$= \int_0^1 dt \, n \cdot d [\text{tr} AF_t^{n-1}] \quad (2.44)$$

ただし、ここで $A_t = tA$ とし、この場の強さは $F_t = tF + (t^2 - t)A^2$ とした。また、共変微分は $D_t C = dC + A_t C + C A_t$ とかけて、ビアンキ恒等式は $D_t \wedge F_t = 0$ である。

$$\frac{d}{dt} F_t = dA + 2tA^2 = D_t A \quad (2.45)$$

に気を付けると、上の表式が確認できる。より一般には

$$\omega_{2n+1}^{\text{CS}} = \frac{i^{n+2}}{(2\pi)^{n+2}(n+1)!} \int_0^1 dt \, \text{tr} [AF_t^{n+1}] \quad (2.46)$$

で与えられる。

2.2.3 降下方程式の解（2 段目）

降下方程式 (2.35) の 1 段目から 2 段目に移るには、Chern-Simons 形式 ω_{2n} に BRST 変換 δ_B を作用させればよい。 $U(N)$ ゲージ理論の場合は、式 (2.46) を BRST 変換することで

$$\omega_{2n} = -\frac{i^{n+2}}{(2\pi)^{n+2}(n+1)!} \int_0^1 dt \, (1-t) \text{tr} \sum_{r=0}^{n-1} [c \cdot d(F_t^r A F_t^{n-r-1})] \quad (2.47)$$

が得られる。

2.3 AS 指数定理

2.3.1 重力アノマリー

以上の考察は全てゲージ場の効果のみを取り扱っていた．本節では重力の効果を含めた完全な摂動アノマリーの取り扱い方を説明する*¹²．前節で学んだことは， $2n$ 次元の摂動アノマリーは， $2n+2$ 次元のトポロジカル量 $\text{ch}_{2n+2}(F)$ から降下方程式を用いて次元を降ろすことで構成できるということである．ゲージ場の曲率 F から Chern 指標 $\text{ch}_n(F)$ が構成できたように，重力場の曲率 R からも $\hat{A}$ 種数 $\hat{A}_n(R)$ が構成できる．

$\hat{A}$ 種数

$$\hat{A}(R) = \prod_j \frac{x_j/2}{\sinh x_j/2} \quad (2.48)$$

ただし， x_j は曲率形式 R に対して以下のように定義される．

$$\frac{R}{2\pi} = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & 0 & 0 & \cdots \\ -x_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & \cdots \\ 0 & 0 & -x_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

この定義より， $\hat{A}(R)$ の $4n$ 形式部分を $\hat{A}_n(R)$ の書くことにすると

$$\hat{A}_1(R) = \frac{1}{24} \frac{1}{8\pi^2} \text{tr}(R \wedge R) \quad (2.50)$$

とわかる*¹³．

以上で， $2n+2$ 次元における重力も含めた完全なトポロジカル量が定義する準備ができた．ここでは簡単のために 4 次元のアノマリー*¹⁴を考えてみよう．6 次元のトポロジカル量として前節までは

$$\text{ch}_3(F) = -\frac{i}{48\pi^3} \text{tr} F^3 \quad (2.51)$$

だけを考えたが，今や

$$\text{ch}_1(F) \hat{A}_1(R) = \frac{i}{2\pi} \text{tr} F \cdot \frac{1}{192\pi^2} \text{tr}(R \wedge R) \quad (2.52)$$

*¹² ラグランジアンとしては，ゲージ場 A にスピ接続 ω を加えたらよい．詳細は A.1.1 節を参照．

*¹³ 2 次以上の $\hat{A}$ 種数の曲率による表式は，本論文では用いないので省略する．この表式を得るには， $\hat{A}(R) = \prod_j \frac{x_j/2}{\sinh x_j/2} = \prod_j (1 - \frac{1}{24} x_j^2 + \cdots) = 1 - \frac{1}{24} \sum_j x_j^2 + \cdots$ と展開して $\text{tr} \left[\frac{R}{2\pi} \wedge \frac{R}{2\pi} \right] = -2 \sum_j x_j^2$ であることを用いればよい．

*¹⁴ 簡単のため， $SU(N)$ ゲージ理論とする．

もまた、降下方程式の1段目に書き込まなければならない。このような曲率 R によって生じるアノマリーを重力アノマリーという。ここで、式 (2.51) はゲージアノマリーに対応し、式 (2.52) は重力とゲージ場の混合アノマリーを表している。すなわち4次元においては純粋な重力アノマリーは存在しない。

ちなみに2次元においては純粋な重力アノマリーが存在することがすぐに示される。すなわち、1次の $\hat{A}$ 種数

$$\hat{A}_1(R) = \frac{1}{192\pi^2} \text{tr}(R \wedge R) \quad (2.53)$$

が4次元のトポロジカル量を構成しているからである。

2.3.2 Atiyah-Singer の指数定理

先程の議論を、次は Atiyah-Singer の指数定理を用いて見直してみよう。ここで Atiyah-Singer の指数定理は以下のように与えられる。

球面上の Atiyah-Singer の指数定理

$2n+2$ 次元球面 S^{2n+2} に対して、次式が成立する。

$$N_+ - N_- = \int_{S^{2n+2}} \text{ch}(F) \Big|_{2n+2 \text{ 形式}}. \quad (2.54)$$

ここで、 N_+, N_- はそれぞれカイラリティが正ないし負の Dirac 演算子の固有モードの個数である。この式は、藤川の方法を使って物理的に導出できることが知られている。しかし、この定理は球面上に限定されている。球面は平面を無限遠でコンパクト化したものと考えられるので、これは重力の効果を除いたときのアノマリーに対応する。そこで重力の効果を含めた（＝球面以外の多様体考えた）ときのアノマリーの式を考えたい。実は数学的な拡張が存在する。

Atiyah-Singer の指数定理

$2n+2$ 次元多様体 M に対して、次式が成立する。

$$N_+ - N_- = \int_M \hat{A}(R) \text{ch}(F) \Big|_{2n+2 \text{ 形式}}. \quad (2.55)$$

この右辺はちょうど先程の議論で現れた形と全く同じである。つまり、これが重力アノマリーを正しく扱えていると考えられる。

そして強調したいのは、重力とゲージ場のトポロジカル量を組み合わせて、初めて整数値になることが保証される点である。ゲージ場のトポロジカル量だけでは整数値になるとは限らない^{*15}。正しく Dirac 演算子のモード数を扱うには、重力を含めて考えなければいけない。

ここでの議論だけでは、なぜ $2n+2$ 次元の Dirac 演算子の固有モードの数が現れているのか、分

^{*15} 後に扱う Wang-Wen-Witten アノマリーはまさにその例である。

からない．これを説明するには族の指数定理を使う等の様々な方法が存在するが，本論文では 2 章にて Witten-Yonekura の議論に基づいて解説する．

この被積分部分

$$I_{2n+2} = \hat{A}(R)\text{ch}(F) \Big|_{2n+2 \text{ 形式}} \quad (2.56)$$

をアノマリー多項式 I_{2n+2} と呼ぶ． $2n$ 次元の摂動アノマリーは $2n+2$ 次元のアノマリー多項式を用いることで系統的に扱えることが 2 章の要点である．

2.3.3 Feynman ダイアグラムとの関係

このアノマリー多項式は例えば $6 = 4 + 2$ 次元で

$$I_6 = -\frac{i}{48\pi^3} \text{tr} F^3 + \frac{i}{384\pi^3} \text{tr} F \text{tr} R^2 \quad (2.57)$$

と与えられる．4 次元のアノマリーがないことは， $I_6 = 0$ として表される．すなわち，

$$I_6^{\text{gauge}} := -\frac{i}{48\pi^3} \text{tr} F^3 = 0, \quad (2.58)$$

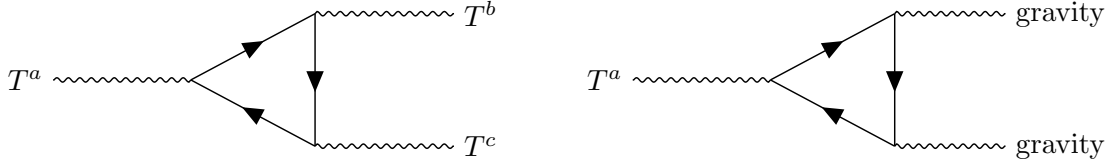
$$I_6^{\text{gauge-gravity}} := \frac{i}{384\pi^3} \text{tr} F \text{tr} R^2 = 0 \quad (2.59)$$

を満たさばよい．ここで， $F = F^a T^a$ として生成子を考えて

$$I_6^{\text{gauge}} \propto \text{tr}[T^a, \{T^b, T^c\}], \quad (2.60)$$

$$I_6^{\text{gauge-gravity}} \propto \text{tr}[T^a] \quad (2.61)$$

この式はちょうど次の Feynman ダイアグラムと等価である．



これを踏まえて，アノマリーの消える十分条件は以下のように示される．

4 次元アノマリー相殺条件

$$\forall T^a, T^b, T^c ; \text{tr}[T^a \{T^b, T^c\}] = 0, \quad (2.62)$$

$$\text{tr} T^a = 0 \quad (2.63)$$

以上の結果は，1 ループの計算でアノマリーの相殺が議論できる Adler-Bardeen の定理の別証とも言える．

2.3.4 Chern-Simons 作用

前節と同様に考えることで， $2n$ 次元のアノマリーは $n+1$ 角形のダイアグラムで描けることがわかる．つまり， I_{2n+2} は曲率 F （または R ）が $n+1$ 個かけてできているので，外線が $n+1$ 本ある．

Feynman ダイアグラムの外線のゲージ群のスポットが $n+1$ 個あるように, I_{2n+2} の生成子の選び方のスポットも $n+1$ 個存在する. それぞれのゲージ群を $G^{(1)}, \dots, G^{(n+1)}$ とおいて

$$I_{2n+2}^{G^{(1)}-G^{(2)}-\dots-G^{(n+1)}} \quad (2.64)$$

と書くことにする. また対応する Chern-Simons 形式を

$$d\omega_{2n+1}^{G^{(1)}-G^{(2)}-\dots-G^{(n+1)}} = I_{2n+2}^{G^{(1)}-G^{(2)}-\dots-G^{(n+1)}}, \quad (2.65)$$

そして Chern-Simons 作用を

$G^{(1)} - G^{(2)} - \dots - G^{(n+1)}$ Chern-Simons 理論

$$S^{G^{(1)}-G^{(2)}-\dots-G^{(n+1)}}[M_{2n+1}] := \int_{M_{2n+1}} \omega_{2n+1}^{G^{(1)}-G^{(2)}-\dots-G^{(n+1)}} \quad (2.66)$$

によって定義する. これは後々ボルディズム群によって系統的にアノマリーを計算する際に用いられる.

2.4 具体例

2.4.1 安全な代数について

具体的にアノマリーを計算する際に, 表現に依らずに消えることが分かっている代数が存在することを覚えておくと大変便利である. そのような代数を安全な代数という. 例えば $T^a \in su(2)$ とすると, 任意の表現で iT^a と $(iT^a)^* = -iT^{a*}$ が同値である^{*16}ことが知られている:

$$T^a = -UT^{a*}U^{-1}. \quad (2.67)$$

これより

$$\text{tr}[T^a\{T^b, T^c\}] = -\text{tr}[T^{a*}\{T^{b*}, T^{c*}\}] \quad (2.68)$$

である. 一方, 転置についてトレースは不変なので

$$\text{tr}[T^a\{T^b, T^c\}] = \text{tr}[T^{at}\{T^{bt}, T^{ct}\}] \quad (2.69)$$

である. エルミート性より $T^t = T^{\dagger*} = T^*$ であることを使うと上の 2 式より

$$\text{tr}[T^a\{T^b, T^c\}] = 0 \quad (2.70)$$

とわかる. 例え $su(2)$ でなくとも, iT^a と $(iT^a)^* = -iT^{a*}$ が同値であれば同様の議論が成立する^{*17}. 単純群^{*18}のリー代数で, この条件を満たすものは

$$so(2k+1), so(4k), usp(2n), g_2, f_4, e_7, e_8 \quad (2.71)$$

^{*16} U は対称ないし反対称行列である. 対称のときを実表現, 反対称のときを擬実表現という.

^{*17} この結果は, 1.3.2 の表の特殊な場合であることに注意.

^{*18} $SU(n), SO(n), USp(2n)$ の古典群と G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 の例外群を指す. ※正確には $SO(4) = SU(2) \times SU(2)$ は単純ではない.

である．さらに， k が 2 以上の $so(4k+2)$ および， e_6 も複素表現をもつものの $\text{tr}[T^a\{T^b, T^c\}] = 0$ が常に成立する．このような代数を総称して安全な代数という．

特に $so(10)$ については，安全でかつ標準模型の対称性 $u(1) \oplus su(2) \oplus su(3)$ を含むという点で，現象論的に重要である．しかし，摂動的に安全であろうとも非摂動アノマリーが存在する可能性は捨てきれない．実際 $so(10)$ の実表現は Wang-Wen-Witten アノマリーを受けうることが知られている．

2.4.2 $u(1), su(2)$ 混合アノマリー（可換アノマリー）

この節では，複数のゲージ代数に値をもつときのアノマリー（混合アノマリー）の取り扱いについて解説する．表式を簡便にするために 4 次元の $u(1)$ と $su(2)$ の混合アノマリーについて特に扱う．

この場合，ゲージ代数は $u(1) \oplus su(2)$ なので，2.2 節の一般論で $U(2)$ とすればよい．よってアノマリー多項式は重力パートを除いて

$$I_6 = -\frac{i}{48\pi^3} \text{tr} F^3 \quad (2.72)$$

である． $U(2)$ ゲージ場の曲率 F は， $U(1)$ の曲率 $F^{u(1)}$ と $SU(2)$ の曲率 $F^{su(2)}$ の和で書けるので

$$\text{tr} F^3 = \text{tr}(F^{u(1)}T + F^{su(2)a}T^a)^3 \quad (2.73)$$

$su(2)$ についての既約表現の次元は isospin j を用いて $2j+1$ と与えられる．これを表現 $\mathcal{R}_j$ とする．実際の模型では幾つかの既約表現の和 $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{j_1} \oplus \mathcal{R}_{j_2} \oplus \cdots \oplus \mathcal{R}_{j_m}$ で与えられる． $u(1)$ の生成子は

$$T = \begin{pmatrix} q_1 \mathbf{1}_{2j_1+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_2 \mathbf{1}_{2j_2+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q_m \mathbf{1}_{2j_m+1} \end{pmatrix} \quad (2.74)$$

と書ける．ここで

$$q := \text{tr} T = \sum_{i=1}^m (2j_i + 1) q_i, \quad (2.75)$$

$$Q := \text{tr} T^3 = \sum_{i=1}^m (2j_i + 1) q_i^3 \quad (2.76)$$

と定義する．また， $su(2)$ の生成子について $\text{tr} T^a = 0$ ， $\text{tr}[T^a\{T^b, T^c\}] = 0$ である．よって式 (2.73) の右辺を展開すると殆どゼロになり，

$$\text{tr} F^3 = Q[F^{u(1)}]^3 + 3qF^{u(1)}\text{tr}(F^{su(2)} \wedge F^{su(2)}) \quad (2.77)$$

である．ただし $F^{su(2)} := F^{su(2)a}T^a$ とした．Chern-Simons 作用の節の notation に従って上式を書き直すと

$$I_6 = QI_6^{u(1)-u(1)-u(1)} + qI_6^{u(1)-su(2)-su(2)} \quad (2.78)$$

である^{*19}．右辺 1 項目が $u(1)$ アノマリーで，2 項目が混合アノマリーに対応する．以下混合アノマリーにのみ注目して計算する．

^{*19} $su(2)$ の表現に関する情報はここでは省略している．

一般論に従い, $I_6^{u(1)-su(2)-su(2)}$ の Chern-Simons 作用を導出しよう.

$$I_6^{u(1)-su(2)-su(2)} = 3 \cdot \frac{-i}{48\pi^3} F^{u(1)} \text{tr}(F^{su(2)} \wedge F^{su(2)}) \quad (2.79)$$

$$= \left[\frac{i}{2\pi} F^{u(1)} \right] \cdot \left[-\frac{1}{8\pi^2} \text{tr}(F^{su(2)} \wedge F^{su(2)}) \right] \quad (2.80)$$

$$= \text{ch}_1(F^{u(1)}) \text{ch}_2(F^{su(2)}) \quad (2.81)$$

なので, Chern-Simons 形式の表式は, $u(1)$ パートに外微分を当てることを想定した

$$\omega_5^{u(1)-su(2)-su(2)} = \omega_1^{u(1)} \text{ch}_2(F^{su(2)}) \quad (2.82)$$

および $su(2)$ パートに外微分を当てる

$$\omega_5^{u(1)-su(2)-su(2)} = \text{ch}_1(F^{u(1)}) \omega_3^{su(2)} \quad (2.83)$$

の 2 通りが存在する. どちらも $d(\dots)$ の違いを除いて等しいことに注意する.

最後に BRST 変換を行う. ただし混合アノマリーにおいては, $u(1)$ の BRST 変換を行う場合と $su(2)$ の BRST 変換を行う 2 つの場合が存在する. この違いは, 藤川メソッドにおいて, どの代数でゲージ変換を行うのかという違いに対応する. 実用上 $u(1)$ で BRST 変換したものがよく見られるため, 今回はその場合について計算する. $u(1)$ BRST 変換するには式 (2.82) の表式が式 (2.83) の表式より便利である. $\omega_1 = \frac{iA}{2\pi}$ なので

$$\omega_5^{u(1)-su(2)-su(2)} = \frac{iA^{u(1)}}{2\pi} \text{ch}_2(F^{su(2)}) \quad (2.84)$$

よって, BRST 変換 $A \mapsto A + dc$ して

$$d\omega_4 = \frac{idc^{u(1)}}{2\pi} \text{ch}_2(F^{su(2)}) \quad (2.85)$$

となるため

$$\omega_4 = \frac{idc^{u(1)}}{2\pi} \text{ch}_2(F^{su(2)}) \quad (2.86)$$

である. ゴースト $c^{u(1)}$ を $U(1)$ ゲージ変換パラメータ $-i\theta$ に置き換えて $J = 1 + i\text{const} \cdot \omega_{2n}$ より

$$J(A, g = e^{i\theta}) = 1 + i\theta q \cdot \text{ch}_2(F^{su(2)}) \quad (2.87)$$

が得られる. このように, $u(1)$ が関わるアノマリーは, Chern 指標を用いて書ける一方, $u(1)$ が関与しないアノマリーではそのような表示を持たない. そのため, 前者を可換アノマリーと呼び, 後者を非可換アノマリーと区別することも多い.

第 3 章

非摂動アノマリーの計算

第 2 章ではゲージ変換が微小である場合について議論した。第 3 章では変換の大きさが有限ある場合について考える。ナイーブには有限変換は微小変換の積み重ねで再現できるため、摂動アノマリー以上のアノマリーは生じないように思われる。しかし、ホモトピー群を用いて議論することで、微小変換の積み重ねでは再現できないような有限変換が確かに存在することを示す。このような非自明な有限変換 g に伴って生じる、摂動アノマリーでないアノマリーを非摂動アノマリーという [8]。

非摂動アノマリーの計算は一般に難しいが、本論文ではアノマリー流入のアイデアを使って議論する。第 2 章で d 次元摂動アノマリーは $d + 1$ 次元 Chern-Simons 理論と対応することを見たが、その対応関係を一般化したものがアノマリー流入と言える [18]。ここでは Dai-Freed および Witten-Yonekura の研究に基づき、アノマリー流入を議論する。その結果、 d 次元摂動アノマリーは $d + 1$ 次元の η 不変量と対応することがわかる。この η 不変量はある意味で Chern-Simons 理論を improve したものである [1][9]。

さらに η 不変量と Chern-Simons 理論の対応を注意深く観察することで、 d 次元非摂動アノマリーが $d + 1$ 次ボルディズム群が対応することが分かる。当初非摂動アノマリーはホモトピー群を用いて発見されたが、現代的にはボルディズム群を用いる方がより正確に非摂動アノマリーが議論できることが知られている [19][20]。

3.1 大域的ゲージ変換

3.1.1 大域的ゲージ変換

第 2 章ではゲージ変換が微小な場合 $g \sim 1 + i\epsilon$ に限って計算してきた。ナイーブには有限のゲージ変換は微小なゲージ変換の足し合わせで実現できるため、摂動アノマリーで全てのアノマリーは尽きているように思われる。

$$g(\theta(x)) = e^{i\theta(x)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + i \frac{\theta(x)}{N} \right)^N \quad (3.1)$$

しかし、我々の考えている場の量子論は本質的にコンパクトな時空上で展開される^{*1}ため、微小なゲージ変換の積み重ねでは再現できないゲージ変換が存在する。

これを理解するには S^1 上の $U(1)$ ゲージ理論を考えると良い。座標を $x \in [0, 2\pi]$ としゲージ変換関数を $g(x) \in U(1)$ と定義しよう。このとき g は写像

$$g : S^1 \rightarrow S^1 \simeq U(1) \quad (3.2)$$

であるので、巻き付き数 N が定義できる。式 (3.1) のゲージ変換は全ての点 x で一斉に $\theta(x) \rightarrow 1$ と連続変形できるので、 g と恒等変換はトポロジカルに同値 $g \sim 1$ である。すなわち $N = 0$ とわかる。以上の議論より、微小なゲージ変換のみを考えている限り、非零の巻き付き数 N をもつ他のゲージ変換（大域的ゲージ変換）を全て無視していることがわかる。大域的ゲージ変換によって新たに生じる摂動アノマリー以外のアノマリーを非摂動アノマリー^{*2}という。

摂動アノマリー・非摂動アノマリーというのは、Feynman ダイアグラムで直接計算^{*3}できるか・否かを表している。Feynman ダイアグラムは、ゲージ群のリー代数（微小なゲージ変換）の情報しか拾わないため、原理的に摂動アノマリーしか計算できない。一方、大域的なゲージ変換はゲージ群の多様体^{*4}としての性質が効いてくるため、Feynman ダイアグラムでは計算できない。ゆえに非摂動アノマリーと呼称される。

3.1.2 ホモトピー群

d 次元球面上の連続的なゲージ群 G の理論^{*5}を考える。このときゲージ変換関数は

$$g : S^d \rightarrow G \quad (3.3)$$

である。ここで g の集合をトポロジカルに同値なもので割ると、 $\mathbb{Z}$ 加群が得られることが知られている。これをホモトピー群という。例えば

$$\pi_4(SU(2)) = \mathbb{Z}_2 \quad (3.4)$$

であるので、4 次元 $SU(2)$ ゲージ理論のゲージ変換 g は、 $[g] \sim 0$ なもの（微小なゲージ変換と同値なもの）と、 $[g] \sim 1$ なもの（大域的ゲージ変換）がある。後者でアノマリーを計算すると非摂動アノマリー（Witten アノマリー）が生じる [8]。

^{*1} もちろん我々の住む時空がコンパクトであるとは限らない。しかし、アノマリーの計算をコンパクトな時空で行っても、その結果は我々の住む世界の記述に有効である。これは冗長性を記述するゲージ変換が無限遠で恒等変換になることに由来している。詳しくは付録を参照。

^{*2} 別名大域的アノマリーとも言うが、後に扱う ABJ アノマリーと混乱しやすいので、本論文では非摂動アノマリーと呼称する。また、摂動アノマリーを局所的アノマリーともいうが、この用語はゲージアノマリーと混乱しやすいので、やはり使わないことにする。

^{*3} 後に述べるボルディズム群の観点と APS 指数定理を使えば非摂動アノマリーが摂動アノマリーを介して計算できるケースがあるので、ここでは「直接」という語を入れた。

^{*4} リー群の定義は群構造をもつ多様体である。

^{*5} 球面（つまり重力を無視）のケースかつ、ゲージ群が連続的なケースでしか考えられないのが、ホモトピー群で考える欠点である。これを乗り越えるにはボルディズム群で計算しなければならない。

d 次元ホモトピー群は $d+1$ 次元のトポロジカル数を決定する事実は、次節のアノマリー流入のアイデアとも関係が深いので、ここで述べておく。例えば S^4 の G ゲージ場を考えてみよう。このとき球面は北半球 U_N と南半球 U_S に分割され、ゲージ場はその赤道 S^3 上のゲージ変換関数 g_{NS} によって操作される。

$$g_{NS} : S^3 \rightarrow G \quad (3.5)$$

なので、ゲージ場のトポロジーは $\pi_3(G)$ によって決まる^{*6}。例えば $G = SU(N)$ のとき

$$\pi_3(SU(N)) = \mathbb{Z} \quad (3.6)$$

なので、4 次元の非可換ゲージ場のトポロジーは整数でラベルされる。この整数はインスタントン数^{*7}に一致する。一般に $d+1$ 次元のゲージ場のトポロジーは d 次元のホモトピー群で決まる。この事実は数学的には

$$\pi_d(G) = \pi_{d+1}(BG) \quad (3.7)$$

と表記される。ただし BG は G の分類空間^{*8}である。

最後にホモトピー群の限界について触れておく。球面上の連続ゲージ理論のアノマリーしか考えられないのがホモトピー群の欠点である。つまり、ホモトピー群の非自明さは、重力的な効果を含めた非摂動アノマリーにとっては必要ではない。さらに、それに目をつぶってもなお決定的な弱点が存在する。それは微妙なケースを考えると、重力を考慮に入れずとも実は必要条件ではないことである。冗長性を記述するようなゲージ変換は無限遠で恒等変換になるため、球面でコンパクト化したときの無限遠点（数学的には基点という）で $g(\infty) = 1$ が課せられる。この条件を保ちつつホモトピー群^{*9}は計算されている。しかし、実はゲージ群が中心群^{*10} C をもつとき、ホモトピー群に属さない冗長なゲージ変換がある。

$$\forall x; g(x) = g^* \in C \quad (3.8)$$

このゲージ変換は定数変換^{*11}であるので、一見冗長性というより対称性に見えるが、 $A^{g^*} = g^* A g^{*-1} = A$ なので

$$Z[A] = Z[A^{g^*}] \quad (3.9)$$

が要請される。すなわち、 g^* についてのアノマリー

$$Z[A^{g^*}] = e^{iA^*} Z[A] \quad (3.10)$$

^{*6} 別の見方としては、我々の 4 次元平坦時空の無限遠方では動径方向が消失し、 S^3 になっていると見ることができる。つまり無限遠でのゲージ場の配位でトポロジーが決まる。しかしこの見方も無限遠を 1 点コンパクト化して球面にすれば、本文の見方と等価である。

^{*7} Chern 指標の積分である。球面では $\hat{A}$ 種数が効かないので、指数定理より整数値である。

^{*8} コホモロジーにおける Eilenberg-MacLane 空間の、ファイバー束における類似物である。つまり多様体 M 上の G ゲージ場は、写像 $BG \rightarrow M$ と同一視される。詳細は付録参照。

^{*9} 数学的に正確な言葉遣いをすれば基点付きホモトピー群というべきかもしれない。

^{*10} 全ての元と可換な部分群。

^{*11} 中心の元による定数変換なので時空をコンパクト化する定式化は問題を起こさない。

は A がダイナミカルになることを阻害する．以上の観点で g^* も考慮に入れなければならないため，たとえホモトピー群が自明でもアノマリーが生じることが論理的にはあり得る^{*12}．これは離散群 $\mathbb{Z}_n$ のアノマリーを探す際に，ホモトピー群が $\pi(\mathbb{Z}_n) = 0$ となってしまうことと全く同様の現象である．すなわち，重力効果を無視したとしても，ホモトピー群は非摂動アノマリー存在のための必要条件ではないのだ．

以上のようにホモトピー群は，そもそも使える場面が限られている上に，非摂動アノマリーの必要条件でもないし，実は十分条件でもないこと^{*13}も知られている [21][22]．ただ示唆を与えてくれるだけの存在というのに注意してほしい．

3.2 アノマリー流入

3.2.1 アノマリー流入

本論文における最も重要なアイディア，アノマリー流入について説明する．アノマリー流入を理解するには，Stora-Zumino の降下方程式 (2.35) を振り返ると良い．その一部を抜粋すると，

$$\begin{array}{ccc} \text{const. } \omega_{2n+1}^{\text{CS}} & & \\ \delta_B \downarrow & & \\ da_{2n} & \xleftarrow{d} & a_{2n} \end{array} \quad (3.11)$$

である．つまり， d 次元のアノマリー a は $d+1$ 次元の Chern-Simons 形式 ω^{CS} と関係づく．

これを利用すると，興味深いことがわかる． d 次元多様体 X 上の分配関数 $Z[A, X]$ と， $d+1$ 次元多様体 Y 上の Chern-Simons 作用 $S^{\text{CS}}[A, Y] = \int_Y \omega^{\text{CS}}$ を組み合わせた

$$Z[A, X] \exp(-iS^{\text{CS}}[A, Y]) \quad (3.12)$$

は常にゲージ不変である．ただし，ここでは const. は省略し，また $X = \partial Y$ とした．このゲージ不変性は次のように直接確認できる．

$$Z[A^g, X] \cdot \exp(-iS^{\text{CS}}[A^g, Y]) \quad (3.13)$$

$$= Z[A, X] e^{i \int_X a(A, \epsilon)} \cdot \exp(-iS^{\text{CS}}[A, Y]) e^{-i \delta_\epsilon \int_Y \omega^{\text{CS}}(A)} \quad (3.14)$$

$$= Z[A, X] e^{i \int_X a(A, \epsilon)} \cdot \exp(-S^{\text{CS}}[A, Y]) e^{-i \int_Y da(A, \epsilon)} \quad (3.15)$$

$$= Z[A, X] \cdot \exp(-iS^{\text{CS}}[A, Y]) \quad (3.16)$$

^{*12} $SU(2)$ は中心 $\mathbb{Z}_2$ をもつため $-1 \in SU(2)$ によって，Witten アノマリーの他に別の非摂動アノマリーが生じる余地があるように思われるが，実はどちらもボルディズム群の観点で見れば同じアノマリーであることが示される．また，球面上の連続群のゲージ理論について，本文のように，ホモトピー群では見えなかったアノマリーが，中心によって生じる可能性はあるように思われるものの，筆者はそのような例を知らない．

^{*13} ホモトピー群の非自明さが非摂動アノマリーの存在に十分ではない例としては，4 次元 $U(2)$ ゲージ理論がある．詳細は標準模型のアノマリー相殺の議論にて触れる．

ただし, $g \sim 1 + i\epsilon$ とした.

このように d 次元の摂動アノマリーは $d+1$ 次元の Chern-Simons 理論と打ち消し合わせることができる. このアイデアを推し進めて, d 次元の任意のアノマリーは適当な $d+1$ 次元のトポロジカル理論によって打ち消すことができると考えよう. これをアノマリー流入仮説^{*14}という. この仮説は少なくともフェルミオニックなアノマリーについては数学的に正しいことが証明されているし^{*15}, ボゾニックなアノマリーでも現在知られている全て例で成立しているため, 本論文では全面的にこの仮説を信じて計算を行う. また, この考えに基づけば, d 次元 (エッジ) のアノマリーは $d+1$ 次元 (バルク) のトポロジカル理論と対応することになる. これをバルク・エッジ対応という.

アノマリー流入仮説

d 次元の理論 $Z[A]$ は, $d+1$ 次元のトポロジカル理論 $S^{\text{top}}[A]$ と結合させることで, 常にゲージ不変にできる.

$$Z[A, \partial M] \exp(-iS^{\text{top}}[A, M]) \quad (3.17)$$

3.2.2 アノマリーの定義 (再訪)

さて, アノマリー流入仮説の見方を変えると, d 次元の理論は本来 $d+1$ 次元時空上で定義すべきだという考えに至る. すなわち, d 次元理論の分配関数を

$$\mathcal{Z}_d(A, \partial M, M) = Z[\partial M] \exp(-iS^{\text{top}}[M]) \quad (3.18)$$

と定義する. このような分配関数 $\mathcal{Z}_d$ はゲージ不変性を保つため, 常に正則化できる. 問題は $d+1$ 次元多様体への依存性を残していることで, d 次元の理論と見做すためには $\partial M_1 = \partial M_2 = \partial M_3 = \dots = X$ となる任意の M_i に対して

$$\mathcal{Z}_d(A, X, M_1) = \mathcal{Z}_d(A, X, M_2) = \mathcal{Z}_d(A, X, M_3) = \dots \quad (3.19)$$

となる必要がある. これを局所性条件といい, 成立しているなら分配関数は単に $\mathcal{Z}_d(A, X)$ と書ける.

ここで新たなアノマリーの定義ができる. すなわち, アノマリーとは「1 次元上の多様体への依存性」である. 比較のために元々の分配関数との比較をまとめておく.

表 3.1 アノマリーの定義の比較

	1 章の定義	3 章の定義
分配関数	$Z[A, X]$	$\mathcal{Z}_d[A, X, Y]$
ゲージ対称性の破れ	$\triangle$	$\bigcirc$
高次元への依存性	$\bigcirc$	$\triangle$

^{*14} $d+1$ 次元からアノマリーが流入して, d 次元のアノマリーと打ち消しあうイメージである.

^{*15} Dai-Freed の定理によって証明された. 詳しくは付録 B.1 参照.

すなわち、 $Z[A, X]$ はゲージ対称性が非自明なので、この破れをアノマリーといい、 $\mathcal{Z}_d[A, X, Y]$ は高次元への依存性が非自明なので、この依存性をアノマリーという。また、アノマリーの値といったときには次の比を表す。

$$\mathcal{J}(A, Y, Y') = \frac{\mathcal{Z}_d[A, X, Y']}{\mathcal{Z}_d[A, X, Y]} \quad (3.20)$$

これは $J(A, g)$ と同様に絶対値が 1 であることが証明できる^{*16}。また $\mathcal{Z}_d$ はゲージ対称性が自明に成立するので、

$$\mathcal{J}(A, Y, Y') = \frac{\mathcal{Z}_d[A^g, X, Y']}{\mathcal{Z}_d[A, X, Y]} \quad (3.21)$$

と書いてもいいことに注意。この新定義は 1 章の旧定義と比較して、回りくどく感じられるかもしれない。しかし、あらゆるゲージ変換について調べるよりも、あらゆる多様体を調べる方が数学的にシンプルで、多様体の圏を考えることで原理的に全てのアノマリーを探索できる。これは非常に大きな利点で、詳しくはボルディズム群の節にて解説する。

Y の向き付けを反転させたものを $\bar{Y}$ と定義すると

$$\mathcal{J}(A, Y, Y') = \frac{\mathcal{Z}_d[A, X, Y']}{\mathcal{Z}_d[A, X, Y]} \quad (3.22)$$

$$= \frac{\exp(-iS^{\text{top}}[A, Y'])}{\exp(-iS^{\text{top}}[A, Y])} \quad (3.23)$$

$$= \exp(-iS^{\text{top}}[A, \bar{Y}]) \cdot \exp(-iS^{\text{top}}[A, Y']) \quad (3.24)$$

$$= \exp(-iS^{\text{top}}[A, \bar{Y} \cup Y']) \quad (3.25)$$

となる。 $\bar{Y} \cup Y'$ は任意の $d+1$ 次元の閉多様体である。これをマッピングトースといい、以降 Y_c と表す。ただし、上の計算ではトポロジカル理論の Hilbert 空間が 1 次元であると仮定した^{*17}。この結果は重要でバルク・エッジ対応と呼称される。

バルク・エッジ対応

d 次元のアノマリー $\mathcal{J}$ は、ある適切な $d+1$ 次元のトポロジカル分配関数と一致する。

$$\mathcal{J} = e^{-iS^{\text{top}}} \quad (3.26)$$

3.3 Witten-Yonekura によるバルク作用の構成

^{*16} これは、単に絶対値をとれば、式 (3.18) よりわかる。

^{*17} より正確な記述を説明すると、境界付き多様体 Y 上のトポロジカル理論 $e^{iS^{\text{top}}[Y]}$ は ∂Y での境界条件 $|b.c.\rangle$ とバルク $|Y\rangle$ の内積で、 $e^{iS^{\text{top}}[Y]} = \langle b.c. | Y \rangle$ と与えられる。特に Hilbert 空間の次元が 1 次元のとき完全系が 1 つの元 $|b.c.\rangle$ で与えられるので、上記のような計算ができる。バルクが状態ベクトルに対応するような記法は、4 章にて正確な定義を与える。

3.3.1 バルク作用の構成

トポロジカル作用 S^{top} の構成を行う。トポロジカルな理論を構成するための簡単な方法は、通常の理論で質量無限大の極限をとればよい。そこで $d+1$ 次元のスピンル $\Psi(t, x)$ を用いて質量無限大^{*18}の理論を構成する。バルク作用を

$$S_m^{\text{bulk}}[Y_c] = \int_{Y_c} dt d^d x \bar{\Psi}(\not{D}_A + m)\Psi \quad (3.27)$$

と定義する。ここで $m = 1, \dots, d+1$ また $\mu = 1, \dots, d$ としている。また Dirac 演算子は

$$\not{D}_A = \gamma^m(\partial_m + A_m) = \gamma^\mu(\partial_\mu + A_\mu) + \bar{\gamma}(\partial_t + A_t) \quad (3.28)$$

で定義する。これの有効作用を求めると $\not{D}\Psi = i\lambda\Psi$ として

$$e^{-S_m^{\text{eff}}[Y_c]} = \int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} e^{-S_m^{\text{bulk}}[Y_c]} = \det(\not{D} + m) = \prod_{\lambda} (-i\lambda + m) \quad (3.29)$$

となる。このままでは発散するので、Pauli-Villars 正則化を実行する。

$$e^{-S_m^{\text{eff}}[Y_c]} = \lim_{M \rightarrow \infty} \prod_{\lambda} \frac{-i\lambda + m}{-i\lambda + M} \quad (3.30)$$

ここで M は Pauli-Villars 正則因子の質量パラメーターである。この理論 $e^{iS_m^{\text{eff}}[Y_c]}$ で質量 m に対し無限大の極限をとったものを $e^{iS^{\text{top}}[Y_c]}$ とみなすのであった。よって式 (3.26) より

$$\mathcal{J}_1 = \left[\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{M \rightarrow \infty} \prod_{\lambda} \frac{-i\lambda + m}{-i\lambda + M} \right]^{-1} \quad (3.31)$$

という関係が導かれる。ここで質量 m に対して正負どちらに極限をとっても、トポロジカルになることに違いはないので、

$$\mathcal{J}_2 = \left[\lim_{m \rightarrow -\infty} \lim_{M \rightarrow \infty} \prod_{\lambda} \frac{-i\lambda + m}{-i\lambda + M} \right]^{-1} \quad (3.32)$$

の場合も考えなければならない。簡単な計算より

$$\mathcal{J}_1 = 1, \mathcal{J}_2 = e^{-2i\pi\eta[Y_c]} \quad (3.33)$$

である。ただし $\eta := 1/2 \sum_{\lambda} \text{sign}(\lambda)$ である^{*19}。つまり、アノマリーに対応するトポロジカル作用は、常に η 不変量でかける。この結果はフェルミオンアノマリーを計算する上で基本公式である。

^{*18} 質量無限大の極限をとると、真空と第一励起状態の差（質量ギャップ）が無限大になるため、Hilbert 空間の次元が 1 次元となり、前節の仮定を満たす。

^{*19} $\text{sign}(0) = 1$ と定める。

フェルミオンアノマリーの基本公式

d 次元のフェルミオンアノマリーは, $d+1$ 次元の η 不変量に一致する.

$$\mathcal{J} = e^{2i\pi\eta[Y_c]} \quad (3.34)$$

これをバルク・エッジ対応と呼称することもしばしばある. またこの結果は数学的には Dai-Freed の定理に対応する (詳細は付録 B.1 節参照.).

3.3.2 境界条件

前節の脚注で見たように, 境界付き多様体 Y 上のトポロジカルな分配関数は, ∂Y での境界条件に依存し,

$$e^{iS^{\text{top}}[Y]} = \langle b.c.[Y] \rangle \quad (3.35)$$

と表される. この節では特別な境界条件を選ぶと, エッジモードとしてカイラルフェルミオンが実現していることを見よう. さて, Y は境界 $X = \partial Y$ の近傍で $X \times (-\epsilon, 0]$ となっていることを仮定する. 以下 x を X の座標, t を $(-\epsilon, 0]$ の座標とする. 境界条件は次で定義される.

境界条件

スピノル場 Ψ が境界 ∂Y の近傍で次を満たすような境界条件を境界条件という.

$$\bar{\gamma}\Psi = \Psi \quad (3.36)$$

さて, この境界条件の下で, 運動方程式 $(\mathcal{D}_A + m)\Psi = 0$ の解を求める. ただし $A_t = 0$ つまり

$$\mathcal{D}_A = \gamma^\mu(\partial_\mu + A_\mu) + \bar{\gamma}\partial_t \quad (3.37)$$

とおく. この解は次式で与えられる.

$$\Psi(t, x) = \chi(x)e^{-mt} \quad (3.38)$$

ただし χ は $\bar{\gamma}\chi = \chi$ と $D\chi := \bar{\gamma}\gamma^\mu(\partial_\mu + A_\mu)\chi = 0$ を満たすような d 次元スピノル場である. 実際

$$(\mathcal{D}_A + m)\Psi = (\mathcal{D}_A + m) \chi e^{-mt} \quad (3.39)$$

$$= \bar{\gamma}^2(\mathcal{D}_A + m) \chi e^{-mt} \quad (3.40)$$

$$= \bar{\gamma}(D + \partial_t + \bar{\gamma}m) \chi e^{-mt} \quad (3.41)$$

$$= 0 \quad (3.42)$$

のように確認できる. また $\bar{\gamma}\chi = \chi$ より境界条件を自明に満たす. この解から 2 つのことが読みとれる.

$$\Psi(t, x) = \chi(x)e^{-mt} \text{ は}$$

A. $m \rightarrow \infty$ の極限で境界 ∂Y に集中する.

B. 境界に無質量カイラルフェルミオン χ が現れる.

A については, $t = 0$ が境界 ∂Y であることを踏まえるとわかる. また, B は

$$\bar{\gamma}\chi = \chi, \quad (3.43)$$

$$\gamma^\mu(\partial_\mu + A_\mu)\chi = 0 \quad (3.44)$$

より理解できる. すなわち $d+1$ 次元で本節の境界条件を満たすような解は, d 次元で無質量カイラルフェルミオンを実現する.

3.3.3 η 不変量と表現の関係

η 不変量を計算する際には, 次の事実を念頭に置くと便利である*20.

表 3.2 表現と η 不変量の関係

	擬実表現	実表現	複素表現
非摂動アノマリー 不変量	無 (T アノマリーは有)	$\mathbb{Z}_2$ アノマリー	$\mathbb{Z}_{n \geq 2}$ アノマリー
表式	無	mod 2 指数	η 不変量
	無	ζ	η

例えば実表現のときには

$$i\not{D}\psi = \lambda\psi \quad (3.45)$$

に対して複素共役をとると

$$-i\not{D}\psi^* = \lambda\psi^* \quad (3.46)$$

となるので, 必ず非零固有値はペア $(\lambda, -\lambda)$ をなす. よって

$$\eta = \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \text{sign}(\lambda) = \frac{1}{2} (\text{零モードの数}) \equiv \frac{1}{2} \zeta \pmod{1} \quad (3.47)$$

となる*21. ここで零モードの数を mod 2 reduction した $\zeta = 0, 1$ を mod 2 指数という. アノマリーは

$$e^{2\pi i \eta} = (-1)^\zeta \quad (3.48)$$

のように mod 2 指数で決定されることがわかる.

*20 この結果は 1 章で与えたものと同一である.

*21 $\text{sign}(0) = 1$ であることに注意.

擬実表現の場合も実表現と同じく固有値のペアができるため、mod 2 指数でアノマリーが決まる。しかし、擬実の場合は、ゼロ固有値についてもペアをなす。それゆえ mod 2 指数が常に自明になるためアノマリーは存在しない*22。

これを理解するには、反エルミート演算子 $\mathcal{T}$ を定義するとよい。ただし ψ^α に対して

$$(\mathcal{T}\psi)^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta}(\psi^\beta)^* \quad (3.49)$$

となる。擬実表現の場合、 $[i\mathcal{D}, \mathcal{T}] = 0$ である。そして $\mathcal{T}^2 = -1$ である。よって、 $(\psi, \mathcal{T}\psi)$ についてペアをなす。そして $\psi = \mathcal{T}\psi$ となることは、 $\mathcal{T}^2 = -1$ に反するのであり得ない。よって、ゼロ固有値であってもペアをなす。

3.4 APS 指数定理

3.4.1 APS 指数定理

η 不変量の重要な性質として、APS 指数定理がある。 $d+1$ 次元の閉多様体 Y_c を境界にするような $d+2$ 次元多様体 Z の存在を仮定する。このとき

$$\text{index}(Z) = \int_Z I_{d+2} - \eta(Y_c) \quad (3.50)$$

が成立する。ここで、 $\text{index}(Z)$ は Z 上の Dirac 演算子の零モード N_+, N_- の差

$$\text{index}(Z) = N_+ - N_- \quad (3.51)$$

で定義される。なので、境界無し ($Y_c = \emptyset$) のとき APS 指数定理 (3.50) は AS 指数定理 (2.55) に帰着される。

3.4.2 Chern-Simons 作用（再訪）

さて、Chern-Simons 形式 ω_{d+1} の定義より $I_{d+2} = d\omega_{d+1}$ なので、

$$\int_Z I_{d+2} = \int_{Y_c} \omega_{d+1} = S^{CS}(Y_c) \quad (3.52)$$

である。index は整数なので APS 指数定理を指数の肩に乗せて

$$1 = e^{2\pi i \eta(Y_c)} e^{-2\pi i S^{CS}(Y_c)}. \quad (3.53)$$

すなわち、アノマリーは

$$\mathcal{J} = e^{2\pi i \eta(Y_c)} = e^{2\pi i S^{CS}(Y_c)} \quad (3.54)$$

*22 ただし T アノマリーは存在しうる。その時には Dirac 指数で記述される。

で決定される．これは Stora-Zumino の降下方程式の解を係数も含めて完全に決めたことに相当する．

ただし，以上の解析は $d+1$ 次元の閉多様体 Y_c を境界にするような $d+2$ 次元多様体 Z の存在を仮定したときに限る．実際， Y_c として

$$Y_c = \bar{S} \cup N, \quad (3.55)$$

$$N = (D^{d+1}, A), \quad (3.56)$$

$$S = (D^{d+1}, A^g) \quad (3.57)$$

のように構成される場合を考えてみよう．多様体 Y_c のインスタント数は，概ね北半球 N と南半球 S の境目（赤道） S^d 上のゲージ変換 $g: S^d \rightarrow G$ のホモトピー群 $\pi_d(G)$ で決定される．よって，ゲージ変換が十分 1 に近いとき ($g \sim 1$)， Y_c のインスタント数は自明であるため， Y_c を Z に拡張する上で障害が存在しないことが期待される．すなわち，「微小なゲージ変換を考えること」と「 $d+2$ 次元に拡張できること」が対応している．

$$\begin{array}{ccc} \text{微小なゲージ変換} & \xlongequal{\quad} & d+2 \text{ 次元への拡張} \\ \parallel & & \parallel \\ \text{摂動アノマリー} & & \text{Chern-Simons 理論} \end{array} \quad (3.58)$$

さらに

- ・微小なゲージ変換に対するアノマリーが摂動アノマリーであること
- ・ $d+2$ 次元に拡張できるとき， η 不変量は Chern-Simons 理論になっていること

を踏まえると，(3.58) が得られる．

以上より，摂動アノマリーが Chern-Simons 作用で記述できることが再導出された．

3.4.3 ボルディズム群

前節では，微小なゲージ変換の場合に $d+2$ 次元多様体への拡張が存在するとして考察を行ったが，より一般に $d+1$ 次元閉多様体 Y_c が $d+2$ 次元多様体 Z への拡張をもつかどうかを判定する方法を解説する．そのためにボルダントという概念を導入する．

ボルダント

$d+1$ 次元閉多様体 Y, Y' に対して，

$$\partial M = Y \cup \bar{Y}' \quad (3.59)$$

を満たす $d+2$ 次元多様体 M が存在するとき， Y と Y' はボルダント

$$Y \sim Y' \quad (3.60)$$

である．

すなわち， $d+1$ 次元多様体 Y_c が空集合とボルダントであることが， $d+2$ 次元多様体 Z への拡張を

もつことの必要十分条件である。

$d+1$ 次元閉多様体の集合 Σ_{d+1} に対して、ボルダント $\sim$ で割ったとき、多様体間に次の演算が定義できる。

$$[Y] + [Y'] := [Y \cup Y'], [\bar{Y}] := -[Y] \quad (3.61)$$

多様体は $[\emptyset]$ を単位元とするような可換群を成している。これをボルディズム群 $\Omega_{d+1} := (\Sigma_{d+1}/\sim, +)$ と呼ぶ。 Y_c が自明元であるとき

$$[Y_c] = [\emptyset] \therefore Y_c \sim \emptyset \quad (3.62)$$

なので、 $d+2$ 次元へ拡張できる。ゆえに、摂動アノマリーはボルディズム群の自明元に対応する。言い換えると、ボルディズム群が自明元しかもたないとき、非摂動アノマリーは存在しない^{*23}。

非摂動アノマリーの非存在条件

ボルディズム群 $\Omega_{d+1} = 0$ のとき、 d 次元で非摂動アノマリーは存在しない。

さらにボルダント $\sim$ を定義する際に幾何学的構造を付与することが出来る。例えば、向き付け可能な閉多様体の集合 Σ_{d+1}^{SO} の元 Y, Y' に対して、向きを保つような M が存在して

$$\partial M = Y \cup \bar{Y}' \quad (3.63)$$

となるときに、 $Y \sim^{SO} Y'$ と定義する。このとき SO ボルディズム群 Ω_{d+1}^{SO} を

$$\Omega_{d+1}^{SO} := (\Sigma_{d+1}^{SO}/\sim^{SO}, +) \quad (3.64)$$

と定義する。同様に、スピン構造を保つときには $Spin$ ボルディズム群 Ω_{d+1}^{Spin} を考え、主 G 束を保つときには G の情報も付与する。我々は G ゲージ理論におけるフェルミオンを考察しているので、

$$\Omega_{d+1}^{Spin \times G} \quad (3.65)$$

が主な考察対象となる^{*24}。

ボルディズム群は一般に $\mathbb{Z}$ や $\mathbb{Z}_n$ の直和で書けて、下表のようになる [20]。

表 3.3 ボルディズム群 Ω_{d+1}^H

$d+1$	0	1	2	3	4	5	6
$H = Spin$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0
$H = Spin \times SU(2)$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$
$H = Spin \times SU(N \geq 3)$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	0	-

^{*23} 逆は成立しない。ボルディズム群が非自明でも非摂動アノマリーは存在するとは限らない。しかし、後に見るようにボルディズム群が捻じれ部分 $\mathbb{Z}_n$ をもつならば非摂動アノマリーの存在が保証される。※自由部分 $\mathbb{Z}$ は非摂動アノマリーを表さないことに注意。

^{*24} $Spin$ は理論の次元に依存して $Spin(4), Spin(5), \dots$ と対称性が変化する。このように時空の次元に依存した対称性を「構造」といい、スペクトル

$$\dots Spin(n-1) \subset Spin(n) \subset Spin(n+1) \dots \quad (3.66)$$

を用いて扱う。対して、 G は構造でなく単なるバンドルなので扱いは大きく異なり、分類空間 BG を用いて扱う。よって正確には $\Omega_{d+1}^{Spin \times G}$ は、 $\Omega_{d+1}^{Spin}(BG)$ として定義される。

例えば、4次元理論に興味があるとき、5次のボルディズム群を確認すれば良い。4次元 $SU(N \geq 3)$ ゲージ理論に非摂動アノマリーは存在し得ないことが上図よりわかる。例えばこれは $SU(5)$ 大統一理論のアノマリー相殺は摂動的に確認すれば十分であることを意味している。一方、4次元 $SU(2)$ ゲージ理論の場合、非摂動アノマリーが存在する可能性がある。実際、Witten アノマリーと呼ばれる非摂動アノマリーが存在しており、3.5 節で計算する。

3.4.4 ボルディズム群 vs ホモトピー群

歴史的に非摂動アノマリーの導入においては、ホモトピー群が重要な役割を果たした。しかし、前節で述べたように非摂動アノマリーの完全な記述はむしろボルディズム群によって与えられる。例えば、4次元 $U(2)$ ゲージ理論のホモトピー群・ボルディズム群は

$$\pi_4(U(2)) = \mathbb{Z}_2, \quad (3.67)$$

$$\Omega_5^{Spin \times U(2)} = 0 \quad (3.68)$$

である。ホモトピー群を見ると非摂動アノマリーが存在するかのように見えるが、ボルディズム群が自明であるので、存在しない。また、3次元 $\mathbb{Z}_2$ ゲージ理論の場合

$$\pi_3(\mathbb{Z}_2) = 0, \quad (3.69)$$

$$\Omega_4^{Spin \times \mathbb{Z}_2} = \mathbb{Z}_8 \quad (3.70)$$

である。一見ホモトピー群からはアノマリーが存在しないように見えるが、ボルディズム群を見ると非摂動アノマリーの非存在性は結論付けられないように見える。実際、この例では $\mathbb{Z}_8$ 非摂動アノマリーが存在する。このようにホモトピー群は、離散変換に関するアノマリーを detect できない点で、ボルディズム群に劣っている。また、連続群 G でも、8次元で $G = E_7, E_8$ の場合にボルディズム群の優位性が確認できる。

$$\pi_8(G) = 0, \quad (3.71)$$

$$\Omega_9^{Spin \times G} = \mathbb{Z}_2 \quad (3.72)$$

ホモトピー群を見ると非摂動アノマリーがないように見えるが、ボルディズム群を見るとあるように見える。実際、これはボルディズム群の方が正しい予想を与えている。なぜなら、ホモトピー群 $\pi_d(G) = \pi_{d+1}(BG)$ は球面 S^{d+1} 次元上のアノマリーを探索しているのに対して、ボルディズム群 $\Omega_{d+1}^{Spin \times G}$ は全ての閉多様体を探索しているからである。つまりボルディズム群の $\mathbb{Z}_2$ はマッピングトーラスとして S^9 以外の何らかの閉多様体で計算して、初めて見つけることができる。

3.5 具体例

3.5.1 Witten $SU(2)$ アノマリー

4次元 $SU(2)$ ゲージ理論は、 $\Omega_5^{Spin \times SU(2)} = \mathbb{Z}_2$ なので、非摂動アノマリーがあるように見える。実際、この予想は正しく次の Witten アノマリーが存在することが知られている。

Witten アノマリー

4次元 $SU(2)$ ゲージ理論で、左巻きのアイソスピン $j = 1/2 + 2n$ の Weyl スピノルが奇数個いるとき、その理論はアノマラスである。(ただし n は整数.)

これを導出するには、マッピングトーラス Y_c として次のような 5次元多様体を考える^{*25}。

$$Y_c = S^4 \times S^1 \quad (3.73)$$

ここで S^4 の座標を x 、 S^1 の座標を $t \in [0, 2\pi]$ とする。ゲージ場 A^m について

$$A^0(t, x) = 0, \quad A^\mu(t, x) = A_{1-\text{inst}}^\mu(x) \quad (3.74)$$

とする(ただし、0 は t 方向、 μ は x 方向である.)。 $A_{1-\text{inst}}^\mu(x)$ は S^4 上の 1-インスタントンである。また、スピノル $\Psi(t, x)$ について 周期的境界条件をとる。

$$\Psi(t + 2\pi, x) = \Psi(t, x) \quad (3.75)$$

このとき、マッピングトーラス Y_c 上で η 不変量を計算しよう。ただし、今回のケースでは η 不変量は mod 2 指数に reduction している。なぜなら、 $Spin(5)$ のスピノル表現は擬実で、また $SU(2)$ の j が半整数の表現も擬実である^{*26}ので、これらのテンソル積は実表現を成しているからである。よって、Dirac 演算子の零モードを考えよう。

$$\mathcal{D}_5 \Psi = 0 \quad (3.76)$$

ただし

$$\mathcal{D}_5 = \gamma^5 \frac{\partial}{\partial t} + \gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + A_{1-\text{inst}}^\mu \right) \quad (3.77)$$

$$= \gamma^5 \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{D}_4 \quad (3.78)$$

である。Dirac 演算子の 2 乗を考えると

$$(\mathcal{D}_5)^2 = (\gamma^5 \partial_t + \mathcal{D}_4)^2 \quad (3.79)$$

$$= \partial_t^2 + \gamma^5 \partial_t \mathcal{D}_4 + \mathcal{D}_4 \gamma^5 \partial_t + (\mathcal{D}_4)^2 \quad (3.80)$$

A に t 依存性がないので $\gamma^5 \partial_t \mathcal{D}_4 = \gamma^5 \mathcal{D}_4 \partial_t = -\mathcal{D}_4 \gamma^5 \partial_t$ である。よって

$$(\mathcal{D}_5)^2 = \partial_t^2 + (\mathcal{D}_4)^2 \quad (3.81)$$

^{*25} この方法はオリジナルの方法 [8] よりむしろ [23] に記載された方法に近い。

^{*26} もし j が整数なら $SU(2)$ の実表現なので、テンソル積すると擬実表現である。すなわち、非摂動アノマリーは存在しない。

となる。よって零モードについて

$$\not{D}_5 \Psi = 0 \quad (3.82)$$

$$\therefore (\not{D}_5)^2 \Psi = 0 \quad (3.83)$$

$$\therefore [\partial_t^2 + (\not{D}_4)^2] \Psi = 0 \quad (3.84)$$

$$\therefore \partial_t^2 \Psi = 0, (\not{D}_4)^2 \Psi = 0 \quad (3.85)$$

である。周期的境界条件を取っている^{*27}ので $\partial_t^2 \Psi = 0$ の解は

$$\Psi(t, x) = \Psi(x) \quad (3.86)$$

である。よって、残りは $(\not{D}_4)^2 \Psi(x) = 0$ についてのみ考えれば良い。これはただの 4 次元の Dirac 演算子について考えているに等しい。つまり

$$(5 \text{ 次元の零モードの数 } N^{(5)}) = (4 \text{ 次元の零モードの数 } N^{(4)}) \quad (3.87)$$

である^{*28}。右辺はカイラリティの正負で零モード数を N_+, N_- とおくと $N^{(4)} = N_+ + N_-$ である。よって、mod 2 指数 ζ は

$$\zeta \equiv N^{(5)} \quad (3.88)$$

$$= N^{(4)} \quad (3.89)$$

$$= N_+ + N_- \quad (3.90)$$

$$= N_+ - N_- + 2N_- \quad (3.91)$$

$$\equiv N_+ - N_- \quad (3.92)$$

$$= \text{index}(\not{D}_4) \quad (3.93)$$

ここで 4 次元球面上で AS 指数定理 (2.54) を使う。

$$\text{index}(\not{D}_4) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{S^4} \text{tr}(F \wedge F) \quad (3.94)$$

右辺被積分関数の生成子だけ取り出すと $\text{tr}(F \wedge F) \sim \text{tr}(T_j^a T_j^b) = \frac{1}{2} T(j) \delta^{ab}$ である。ここで $T(j)$ は Dynkin 指数である。よって

$$\text{index}(\not{D}_4) = \frac{T(j)}{T(1/2)} \quad (3.95)$$

である。ただし基本表現 $j = 1/2$ のとき、インスタントン数が 1 なので右辺は必ず 1 であることに注意。Dynkin 指数は次のような手続きで求まる。まず $\text{tr}(T_j^a T_j^b) = \frac{1}{2} T(j) \delta^{ab}$ で $a = b$ の場合を考えたと

$$\sum_{a=1}^3 \text{tr}(T_j^a T_j^a) = \frac{1}{2} T(j) \times 3 \quad (3.96)$$

^{*27} もし反周期境界条件をとっていたら、 $\Psi(t, x) = 0$ しか解として存在しない。mod 2 指数は 0 となる。

^{*28} この結果は数学的に知られた公式 $\eta(S^4 \times S^1) = \text{index}(S^4) \eta(S^1)$ から理解できる。

である． $\sum_a T_j^a T_j^a = \mathbf{T}_j^2$ はカシミア演算子で固有値は $j(j+1)$ であるので適当な基底をとって

$$\sum_{a=1}^3 T_j^a T_j^a = \text{const} \cdot j(j+1) \mathbf{1} \quad (3.97)$$

である． $\mathbf{1}$ は $2j+1$ 次元単位行列なので

$$\sum_{a=1}^3 \text{tr}(T_j^a T_j^a) = \text{const} \cdot j(j+1)(2j+1) \quad (3.98)$$

である． よって

$$T(j) = \text{const} \cdot j(j+1)(2j+1) \quad (3.99)$$

である． 以上より

$$\text{index}(\mathcal{D}_4) = \frac{T(j)}{T(1/2)} = \frac{2}{3} j(j+1)(2j+1) \quad (3.100)$$

と求まる．

以上よりアノマリー $\mathcal{J}$ は

$$\mathcal{J} = e^{2\pi i \eta} = (-1)^\zeta = (-1)^{\text{index}(\mathcal{D}_4)} = (-1)^{\frac{2}{3} j(j+1)(2j+1)} \quad (3.101)$$

と求まる． $\mathcal{J} = -1$ となるのは $j = \frac{1}{2} + 2n$ のときに限る． また， $j = \frac{1}{2} + 2n$ であるような Weyl スピノルが n 個いるときのアノマリーは

$$\mathcal{J}^n = (-1)^n \quad (3.102)$$

となるので， 奇数個のときに限りアノマラスである．

3.5.2 Wang-Wen-Witten $SU(2)$ アノマリー

ボルディズム群 $\Omega_5^{Spin \times SU(2)} = \mathbb{Z}_2$ に対応するアノマリー (Witten アノマリー) を前節で計算した． ナイーブには Witten アノマリーで $SU(2)$ ゲージ理論のアノマリーは尽きているように思われる． しかし， 実は 4 次元 $SU(2)$ ゲージ理論にはより微妙な問題が残っている． 考えている物質の表現が $(-1)^F = (-1)^{2j+1}$ を満たすとき， 対称性として $Spin \times SU(2)$ でなく $\frac{Spin \times SU(2)}{\mathbb{Z}_2}$ を考えることができる． このときのボルディズム群は驚くべきことに

$$\Omega_5^{\frac{Spin \times SU(2)}{\mathbb{Z}_2}} = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \quad (3.103)$$

となり [24]， Witten アノマリーに加えて新たなアノマリー (Wang-Wen-Witten アノマリー) の存在が示唆される [23]．

Wang-Wen-Witten アノマリー

4 次元 $SU(2)$ ゲージ理論で， 左巻きのアイソスピン $j = 3/2 + 4n$ の Weyl スピノルが奇数個いるとき， その理論はアノマラスである． (ただし n は整数．)

このようなアノマリーを計算する前に、 $\frac{Spin \times SU(2)}{\mathbb{Z}_2}$ 束の構成から始めよう。この構造を Spin-SU(2) 構造という。これは各点で $\frac{Spin \times U(1)}{\mathbb{Z}_2}$ 束を考える Spin-c 構造の類似物である。 $\frac{Spin \times SU(2)}{\mathbb{Z}_2}$ のリー代数は $spin \oplus su(2)$ であるので、接続形式はスピン接続 ω と $su(2)$ 接続 $\hat{A} = \hat{A}^a T_j^a$ の和で与えられる。さて、最も簡単な Spin-SU(2) 構造の構成は、Spin-c 構造を利用することである。つまり、 $su(2)$ 接続が 3 方向にのみ値をもつとして、 $\hat{A}^3$ に Spin-c がもつ $U(1)$ 接続 $\hat{a}$ を埋め込むのである。

$$\hat{A} = \hat{A}^3 T_j^3 = \hat{a} T_j^3 \quad (3.104)$$

ただし、 $\hat{a}$ は $U(1)$ 束の接続というよりむしろ $U(1)/\mathbb{Z}_2$ 束の接続である。なぜなら、 $\frac{Spin \times U(1)}{\mathbb{Z}_2}$ 束を与えるには

$$\begin{aligned} [SO \text{ 束}] & \xrightarrow{\mathbb{Z}_2 \text{ lift}} [Spin \text{ 束}^*] \\ [U(1)/\mathbb{Z}_2 \text{ 束}] & \xrightarrow{\mathbb{Z}_2 \text{ lift}} [U(1) \text{ 束}^*] \\ [SO \text{ 束}] \times [U(1)/\mathbb{Z}_2 \text{ 束}] & \xrightarrow{\mathbb{Z}_2 \text{ lift}} [\frac{Spin \times U(1)}{\mathbb{Z}_2} \text{ 束}] \end{aligned} \quad (3.105)$$

のように予め $U(1)/\mathbb{Z}_2$ を考え、その $\mathbb{Z}_2$ lift した $U(1)$ 束^{*29}を物理的な $U(1)$ ゲージ場と見做しているからである。

$$U(1) \ni e^{i\theta} \mapsto e^{2i\theta} \in U(1)/\mathbb{Z}_2 \quad (3.106)$$

なので、 $U(1)$ 束のゲージ場 a に対して、 $U(1)/\mathbb{Z}_2$ 束のゲージ場 $\hat{a}$ は $\hat{a} = 2a$ で与えられる。また、Spin-c 構造が成立するための条件^{*30}

$$\int_S w_2 \equiv \int_S \frac{id\hat{a}}{2\pi} \pmod{2} \quad (3.107)$$

は、 $\hat{a} = 2a$ なので

$$\frac{1}{2} \int_S w_2 \equiv \int_S \frac{ida}{2\pi} \pmod{1} \quad (3.108)$$

である^{*31}。

さて、具体的な 4 次元多様体として $\mathbb{CP}^2$ を選択しよう。これは Spin-c 構造をもった代表的な多様体で、そのトポロジーは次のように表される。

$$H_{2n}(\mathbb{CP}^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad (3.109)$$

$$H^{2n}(\mathbb{CP}^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \quad (3.110)$$

^{*29} コサイクル条件を満たさないため、正確にはこれは「束」ではない。束ではないものに対しては数式中で*を付与している。

^{*30} ここで w_2 は第 2 Stiefel-Whitney 類である。

^{*31} この条件は、半端者な「束」である $[Spin \text{ 束}^*]$ と $[U(1) \text{ 束}^*]$ が 2 人で力を合わせて 1 つのちゃんとした束 $[\frac{Spin \times U(1)}{\mathbb{Z}_2} \text{ 束}]$ を作るためのものである。

$\mathbb{CP}^2$ の (コ) ホモロジーは, $2n = 0, 2, 4$ 以外の次数で 0 である. これを直観的に理解するには, $\mathbb{CP}^2$ が次の表式をもつことを思い出すと良い^{*32}.

$$\mathbb{CP}^2 = \mathbb{C}^2 \cup \mathbb{C} \cup \{pt\} \quad (3.111)$$

右辺の各要素がホモロジーに対応し, これに普遍係数定理^{*33}を適用することでコホモロジーが導出できる. $H^2(\mathbb{CP}^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ の生成子は第 2Chern 類 $\frac{id\hat{a}}{2\pi}$ である. これを *mod 2 reduction* した $H^2(\mathbb{CP}^2, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ の生成子は非零であり, 第 2Stiefel-Whitney 類 w_2 で表される^{*34}. $H_2(\mathbb{CP}^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ および $H_2(\mathbb{CP}^2, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ の生成子は $\mathbb{CP}^1$ である. よって,

$$\langle \mathbb{CP}^1, \frac{id\hat{a}}{2\pi} \rangle \equiv \langle \mathbb{CP}^1, w_2 \rangle = 1. \quad (3.112)$$

ただし, $\langle x, y \rangle = \int_x y$ であり^{*35}, 上式の合同は 2 を法としている. よって

$$\int_{\mathbb{CP}^1} \frac{id\hat{a}}{2\pi} = 1 + 2n, \quad (3.113)$$

$$\therefore \int_{\mathbb{CP}^1} \frac{id\hat{a}}{2\pi} = \frac{1}{2} + n \quad (3.114)$$

と求まる. 接続に右辺の整数 n を添え字つけて $\hat{a}_{1+2n}$ および $a_{1/2+n}$ と書くことにする^{*36}. ここで $SU(2)$ ゲージ場 $\hat{A}$ への $U(1)$ ゲージ場の埋め込み (3.104) で $\hat{a}$ を $\hat{a}_1$ にしたとき

$$i\hat{A} = i\hat{a}_1 T_j^3 = \begin{pmatrix} \hat{a}_{2j} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{a}_{2j-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{a}_{-2j} \end{pmatrix} \quad (3.115)$$

で与えられる. この曲率を積分すると

$$\int_{\mathbb{CP}^1} \frac{iF}{2\pi} = \begin{pmatrix} 2j & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2j-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -2j \end{pmatrix} \quad (3.116)$$

であるため, スピノル場の電荷 Q は

$$Q = \begin{pmatrix} 2j & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2j-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -2j \end{pmatrix} \quad (3.117)$$

^{*32} 一般に体 K 上の射影空間 $K\mathbb{P}^n$ は $K\mathbb{P}^n = K^n \cup K\mathbb{P}^{n-1}$ を繰り返し使うことで $K\mathbb{P}^n = K^n \cup K^{n-1} \cup \cdots \cup K \cup \{pt\}$ と書ける.

^{*33} H_n の自由部分を F_n , 捻じれ部分を T_n とすると, 普遍係数定理は $H^n = F_n \oplus T_{n-1}$ である. 今回は捻じれ部分がないので単に $H^n = H_n$ が成立する.

^{*34} ここで述べていることは式 (3.107) と同様内容である.

^{*35} これはホモロジー・コホモロジー間の標準的な積 $H_n(X, A) \times H^n(X, A) \rightarrow A$ である.

^{*36} つまり, 曲率の積分値をそのまま添え字にしている.

であり、これを用いて

$$\hat{A} = Qa_{1/2} \quad (3.118)$$

と書ける。以降簡単のために $a = a_{1/2}, \hat{a} = \hat{a}_1$ とする。

いよいよマッピングトーラス Y_c の構成を行う。ここでは Dold 多様体と呼ばれる多様体をマッピングトーラスに選択する。これは

$$Y_c = \frac{\mathbb{CP}^2 \times S^1}{\mathbb{Z}_2} \quad (3.119)$$

と表される。ただし $\mathbb{Z}_2$ は $\mathbb{CP}^2$ に対して複素共役として作用する。つまり、 $\mathbb{CP}^2$ の斉次座標を $[z_1, z_2, z_3]$ としたとき

$$\varphi : [z_1, z_2, z_3] \mapsto [z_1^*, z_2^*, z_3^*] \quad (3.120)$$

のように作用する。Dold 多様体を構成するには、最初に $\mathbb{CP}^2 \times [0, 2\pi]$ を考えて、両端の $([z_1, z_2, z_3], 0)$ と $([z_1, z_2, z_3], 2\pi)$ に対して、同一視

$$([z_1, z_2, z_3], 0) \sim ([z_1^*, z_2^*, z_3^*], 2\pi) \quad (3.121)$$

を入れたと考えれば良い。以降、斉次座標 $[z_1, z_2, z_3]$ を x と略記し、 S^1 の座標を t と表す。

Dold 多様体の特徴の 1 つに、Spin- $SU(2)$ 構造が入ることが挙げられる。これは、Dold 多様体上で $SU(2)$ ゲージ場の曲率 $F(x, t)$ が定義できることを確認すればよい。まず $\mathbb{CP}^2 \times [0, 2\pi]$ 上のゲージ場 $F(x, t)$ は単に $\mathbb{CP}^2$ 上のゲージ場 $F(x)$ をそのまま使えばよい。

$$F(x, t) = F(x) = d\hat{a}T_j^3 \quad (3.122)$$

しかし、複素共役は 2 形式に対して -1 倍として作用する^{*37}

$$F(\varphi \cdot x, 2\pi) = -F(x, 2\pi) \quad (3.123)$$

そのため、 $F(x, 0)$ と $-F(x, 2\pi)$ はゲージ同値でなければならない。

$$F(x, 0) \sim -F(x, 2\pi) ? \quad (3.124)$$

これは、実際ゲージ同値である。なぜなら

$$W = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in SU(2) \quad (3.125)$$

を用いて

$$WFW^{-1} = W(d\hat{a}T_j^3)W^{-1} = -F \quad (3.126)$$

であるからだ。それゆえに Dold 多様体には Spin- $SU(2)$ 構造が入る^{*38}。

^{*37} これは、複素共役が 2 次元部分多様体 $\mathbb{CP}^1$ の向き付けを反転させることから理解できる。

^{*38} $U(1)$ には W のような符号を反転する元が含まれていない。それゆえに Dold 多様体には Spin-c 構造は入らない。

以上のセットアップの下で mod 2 指数 $\zeta(Y_c)$ を計算しよう．ただし直接 Dold 多様体 Y_c 上の mod 2 指数の計算は困難なので，代わりに

$$Y'_c = \mathbb{CP}^2 \times S^1 \quad (3.127)$$

上の mod 2 指数 $\zeta(Y'_c)$ を計算する．両者には

$$\zeta(Y_c) = \frac{\zeta(Y'_c)}{2} \quad (3.128)$$

という関係がある．これを理解するには， Y'_c 上の零モード $\Psi(x, t)$ の集合 $\mathcal{N}$ が $\hat{\varphi} = W \circ \varphi$ について固有値分解されることを見ればよい．ここで $\hat{\varphi}$ の零モード Ψ に対する作用は

$$\hat{\varphi}\Psi(x, t) = W[\Psi(\varphi \cdot x, t)] \quad (3.129)$$

と定義している．よって $W^2 = -1$ および， φ^2 が 2π 回転に相当することを踏まえると

$$\hat{\varphi}^2\Psi(x, t) = W^2[\Psi(\varphi^2 \cdot x, t)] = \Psi(x, t) \quad (3.130)$$

である．よって， $\mathcal{N}$ 上で $\hat{\varphi}^2 = 1$ なので， $\hat{\varphi}$ の固有値は ± 1 である．その固有空間を $\mathcal{N}_{\pm}$ とすると，

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_+ \oplus \mathcal{N}_- \quad (3.131)$$

と書ける．また，埋め込み (3.104) より零モード $\Psi \in \mathcal{N}$ には $U(1)$ 電荷が定義できている．

$$\hat{A} = Qa, \quad Q = \begin{pmatrix} 2j & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2j-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -2j \end{pmatrix} \quad (3.132)$$

と書ける．これは， $W = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対して， $\{Q, W\} = 0$ である^{*39}． $[Q, \varphi] = 0$ と合わせる^{*40}と

$$\{Q, \hat{\varphi}\} = 0 \quad (3.133)$$

である．よって， $\Psi_+ \in \mathcal{N}_+$ に対して

$$\hat{\varphi}(Q\Psi_+) = -Q\hat{\varphi}\Psi_+ = -Q\Psi_+ \quad (3.134)$$

なので， $Q\Psi_+ \in \mathcal{N}_-$ である．このように $\mathcal{N}_+ \oplus \mathcal{N}_-$ のペア $(\Psi_+, Q\Psi_+)$ ができるので，

$$\dim(\mathcal{N}_+) = \dim(\mathcal{N}_-) \quad (3.135)$$

である．ここで mod 2 指数について $\zeta(Y'_c) \equiv \dim \mathcal{N}$ で $\zeta(Y_c) \equiv \dim \mathcal{N}_+$ なので，式 (3.131) より式 (3.128) が証明された．

^{*39} この式は本質的に式 (3.126) と同一である．

^{*40} φ は単なる座標変換なので，電荷 Q を変化させない．

Y'_c 上のゲージ場 $\hat{a}$ は t 依存性を持たない。よって、周期的境界条件を選択すると、Witten アノマリーのとくと全く同じ議論で、5 次元 mod 2 指数 $\zeta(Y'_c)$ は 4 次元 Dirac 指数 $\text{index}(\mathbb{CP}^2)$ と 2 を法として一致する。この Dirac 指数 $\text{index}(\mathbb{CP}^2)$ を計算するには、よって AS 指数定理 (2.55) より

$$\zeta(Y'_c) \equiv \text{index}(\mathbb{CP}^2) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{CP}^2} \text{tr} F \wedge F + \frac{1}{192\pi^2} \int_{\mathbb{CP}^2} \text{tr} R \mathbf{1}_{2j+1} \wedge R \mathbf{1}_{2j+1} \quad (3.136)$$

最右辺第 2 項目について $p_1(R) = -\frac{1}{8\pi^2} R \wedge R$ は、 $H^4(\mathbb{CP}^2, \mathbb{Z})$ の生成子^{*41}であり、この積分値は Hirzebruch の符号定理から

$$-\frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{CP}^2} \text{tr} R \wedge R = 3\sigma(\mathbb{CP}^2) = 3 \quad (3.137)$$

と与えられる^{*42}。よって、

$$\frac{1}{192\pi^2} \int_{\mathbb{CP}^2} \text{tr} R \mathbf{1}_{2j+1} \wedge R \mathbf{1}_{2j+1} = -\frac{1}{8}(2j+1) \quad (3.138)$$

また式 (3.136) の最右辺第 1 項目について $F = \frac{1}{2}Qd\hat{a}$ なので

$$-\frac{1}{8\pi^2} \text{tr} F \wedge F = \frac{\text{tr}[Q^2]}{8} \cdot \left[-\frac{1}{4\pi^2} d\hat{a} \wedge d\hat{a} \right] \quad (3.139)$$

ここで、 $\hat{a} = \hat{a}_1$ と選んだため、 $\frac{i\hat{a}}{2\pi} = w_2$ である。よって

$$-\frac{1}{4\pi^2} d\hat{a} \wedge d\hat{a} = (w_2)^2 \equiv p_1(R) \pmod{2} \quad (3.140)$$

となる^{*43}。従って、 $\mathbb{Z}$ 値コホモロジー $p_1(R)$ の積分値 (3.137) を mod 2 reduction することで

$$-\frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{CP}^2} d\hat{a} \wedge d\hat{a} = 1 \quad (3.142)$$

が得られる。以上より

$$\text{index}(\mathbb{CP}^2) = \frac{\text{tr}[Q^2]}{8} - \frac{1}{8}(2j+1) = \frac{1}{24}(4j^2 - 1)(2j+3) \quad (3.143)$$

である。よって式 (3.128) より

$$\zeta(Y_c) \equiv \frac{1}{48}(4j^2 - 1)(2j+3) \quad (3.144)$$

が導かれる。 $\zeta(Y_c) = 1$ となるのは、 $j = \frac{3}{2} + 4n$ のときである。以上により Wang-Wen-Witten アノマリーが導出された。

^{*41} ただし $p_i(\cdot)$ を曲率 $\cdot$ に対する第 i 次 Pontryagin 類とした。

^{*42} この計算の詳細は [22] や [25] が詳しい。

^{*43} 一般に Pontryagin 類と Stiefel-Whitney 類の間には

$$p_i \equiv (w_{2i})^2 \pmod{2} \quad (3.141)$$

という関係がある。

第 4 章

一般的なアノマリーの計算

既に何度も見てきたように、 d 次元のアノマリーは、 $d+1$ 次元のトポロジカルな理論 (TQFT) として計算すると見通しが良い。実は、アノマリーに対応するのは、TQFT の中でも特にヒルベルト空間が 1 次元であるようなもの、すなわち可逆な場の量子論 (Invertible Field Theory; IFT) であることが知られている。この IFT は数学的に良い性質を持ち、ボルディズム群の Anderson 双対に相当すること、そして代数トポロジーの技術を使って系統的に調べる事が可能であることを説明する。

本章の具体的な計算はスペクトル系列と呼ばれる非常にテクニカルな方法を必要とする。本修士論文では [20][24][21][26][14] を参考にした。

4.1 TQFT について

4.1.1 TQFT の公理

$d+1$ 次元 TQFT $\mathcal{Z}$ の公理を述べる。これは、ボルディズムの圏 $\mathcal{M}_{d+1}$ からベクトル空間の圏 $\mathcal{V}$ への関手として定義される。ここでそれぞれの圏の定義は以下の通りである。

ボルディズムの圏 $\mathcal{M}_{d+1}$ $\cdots$ 対象 : d 次元閉多様体 Σ_d , 射 : $d+1$ 次元多様体 M_{d+1}

ただし射は次式で定義されている。

$$M_{d+1} : \Sigma_d \rightarrow \Sigma'_d \quad (4.1)$$

$$\Leftrightarrow_{\text{def}} \partial M_{d+1} = \bar{\Sigma}'_d \cup \Sigma_d \quad (4.2)$$

ベクトル空間の圏 $\mathcal{V} \dots$ 対象: $\mathbb{C}$ ベクトル空間 V , 射: $\mathbb{C}$ ベクトル v

ただし射は次式で定義されている.

$$v: V \rightarrow W \quad (4.3)$$

$$\Leftrightarrow_{\text{def}} v \in W \otimes V^* \quad (4.4)$$

つまり, V から W への線形写像の集合は, ベクトル空間 $W \otimes V^*$ である事実を用いている. $\mathcal{M}_{d+1}$ から $\mathcal{V}$ への関手 $\mathcal{Z}$ は, 対象・射をそれぞれ対応させる.

$$d \text{ 次元多様体 } \Sigma_d \quad \text{ベクトル空間 } V \quad (4.5)$$

$$d+1 \text{ 次元多様体 } M_{d+1} \quad \text{ベクトル } v \quad (4.6)$$

物理的には d 次元多様体は時間一定面と見做し, ベクトル空間 V はその時間一定面に対応した Hilbert 空間と思うと分かりやすい. また後で見るように, ベクトル v は Hilbert 空間上の演算子と同定される. さらに, この 2 つの圏 $\mathcal{M}_{d+1}, \mathcal{V}$ には対照的な演算が定義されていることに注意し, 関手 $\mathcal{Z}$ はこれらの演算も移すと定めておく^{*1}.

$$\text{向き付け反転 } \Sigma \mapsto \bar{\Sigma} \quad \text{エルミート共役 } V \mapsto V^\dagger \quad (4.7)$$

$$\text{非交和 } \Sigma \cup \Sigma' \quad \text{テンソル積 } V \otimes V' \quad (4.8)$$

以上を踏まえた上で, TQFT $\mathcal{Z}$ は次のように定義される^{*2}.

TQFT の定義

$\mathcal{M}_{d+1}$ から $\mathcal{V}$ への関手 $\mathcal{Z}$ で

$$\mathcal{Z}[M_{d+1}] \in \mathcal{Z}[\partial M_{d+1}] \quad (4.9)$$

を満たすとき, $\mathcal{Z}$ を TQFT と呼ぶ.

この定義の意味を知るには, 3 つほど具体例を触るのが良い.

(具体例 1) まず, M_{d+1} が 1 つの境界 Σ_d をもつケースを考えてみよう. このとき定義に従い

$$\mathcal{Z}[M_{d+1}] \in \mathcal{Z}[\Sigma_d] \quad (4.10)$$

が得られる. $\mathcal{Z}[\Sigma_d]$ は定義よりベクトル空間であるが, これは物理的には時間一定面 Σ_d に対応した Hilbert 空間と考えられる. よって $\mathcal{Z}[\Sigma_d] = \mathcal{H}[\Sigma_d]$ と表記しよう. すると, $\mathcal{Z}[M_{d+1}] \in \mathcal{H}[\Sigma_d]$ より, $\mathcal{Z}[M_{d+1}]$ は時間一定面 Σ_d に住む状態 $|M_{d+1}\rangle_{\Sigma_d}$ と解釈できる. この結果の意味することは, 過去の時空の歴史 M_{d+1} によって, 現在の状態 $|M_{d+1}\rangle_{\Sigma_d}$ が決まるということである.

(具体例 2) $\partial M = \Sigma'_d \cup \bar{\Sigma}_d$ の場合を考える. このとき

$$\mathcal{Z}[M] \in \mathcal{Z}[\Sigma'_d \cup \bar{\Sigma}_d] \quad (4.11)$$

^{*1} ここでは向き付け可能な多様体のみを扱っている. これは物理的に時間の向き付けが可能であることを意味している.

^{*2} この節の最後に述べるように本当は $\mathcal{Z}[\emptyset] = \mathbb{C}$ も要請しなければならない.

である。ただし非交和 $\cup$ とテンソル積 $\otimes$ 、そして向き付け反転 $\bar{\cdot}$ とエルミート共役 † がそれぞれ対応するため

$$\mathcal{Z}[\Sigma'_d \cup \bar{\Sigma}_d] = \mathcal{Z}[\Sigma'_d] \otimes \mathcal{Z}[\bar{\Sigma}_d] \quad (4.12)$$

$$= \mathcal{H}_{\Sigma'_d} \otimes \mathcal{H}_{\Sigma_d}^\dagger \quad (4.13)$$

と表せる。よって、 $\mathcal{H}_{\Sigma_d}$ の基底を $|i\rangle_{\Sigma_d}$ などと表記すると約束すると、

$$\mathcal{Z}[M_d] = \sum_{i,j} c_{M_d}^{ij} \left(|i\rangle_{\Sigma'_d} \otimes \langle j|_{\Sigma_d} \right) \quad (4.14)$$

と書ける。すなわち、 $\mathcal{Z}[M_d]$ は Σ_d から Σ'_d への時間発展演算子 $U(M_d)$ と解釈される。この意味するところは、幾何学的な2つの時間一定面を結ぶ時間の流れ M_d の存在と、代数的な時間発展演算子 $U(M_d)$ の存在が対応しているということである。

(具体例3) $\partial M_{d+1} = \bar{\Sigma}_d \cup \Sigma'_d \cup \Sigma''_d$ の場合を考える。このとき

$$\mathcal{Z}[M_{d+1}] \in \mathcal{Z}[\Sigma'_d \cup \Sigma''_d \cup \bar{\Sigma}_d] \quad (4.15)$$

である。ただし、

$$\mathcal{Z}[\Sigma'_d \cup \Sigma''_d \cup \bar{\Sigma}_d] = \mathcal{Z}[\Sigma'_d] \otimes \mathcal{Z}[\Sigma''_d] \otimes \mathcal{Z}[\bar{\Sigma}_d] \quad (4.16)$$

$$= \mathcal{H}_{\Sigma'_d} \otimes \mathcal{H}_{\Sigma''_d} \otimes \mathcal{H}_{\Sigma_d}^\dagger \quad (4.17)$$

となる。よって、 $\mathcal{Z}[M_{d+1}]$ は始状態 $\mathcal{H}_{\Sigma_d}$ から終状態 $\mathcal{H}_{\Sigma'_d} \otimes \mathcal{H}_{\Sigma''_d}$ への時間発展演算子であると考えられる。ここで終状態の Hilbert 空間がテンソル積になっているのは、未来において空間が Σ'_d と Σ''_d に分離していることを反映している*3。

少し話は変わるが、ボルディズムの圏 $\mathcal{M}_{d+1}$ 、およびベクトル空間の圏 $\mathcal{V}$ に備わった代数構造について触れる。 $\mathcal{M}_{d+1}$ の対象である d 次元閉多様体 Σ_d 、 Σ'_d に対して非交和 $\cup$ が定義されている。

$$\cup : (\Sigma_d, \Sigma'_d) \mapsto \Sigma_d \cup \Sigma'_d \quad (4.18)$$

非交和 $\cup$ に関する単位元は空集合 $\emptyset$ である。

$$\Sigma_d \cup \emptyset = \emptyset \cup \Sigma_d = \Sigma_d \quad (4.19)$$

同様に、 $\mathcal{V}$ の対象であるベクトル空間 V 、 V' にはテンソル積 $\otimes$ が定義されていて：

$$\otimes : (V, V') \mapsto V \otimes V', \quad (4.20)$$

この単位元は $\mathbb{C}$ である。

$$V \otimes \mathbb{C} = \mathbb{C} \otimes V = V \quad (4.21)$$

実は $\mathcal{Z}$ が TQFT であるには、単位元同士を対応させることも要請しなければならない。

$$\mathcal{Z}[\emptyset] = \mathbb{C} \quad (4.22)$$

*3 Schwarzschild 時空の未来が、光的未来と BH に分けられる状況と類似している。

この性質より、分配関数が定義される。すなわち、 $d+1$ 次元閉多様体 M_{d+1}^c はボルディズムとして射

$$M_{d+1}^c : \emptyset \rightarrow \emptyset \quad (4.23)$$

であるため、

$$\mathcal{Z}[M_{d+1}^c] : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad (4.24)$$

とわかる。従って、 $\mathcal{Z}[M_{d+1}^c]$ はただの複素数値をとる。

分配関数

$d+1$ 次元閉多様体 M_{d+1}^c に対して

$$\mathcal{Z}[M_{d+1}^c] \in \mathbb{C} \quad (4.25)$$

である。 $\mathcal{Z}[M_{d+1}^c]$ を分配関数という。

最後に、 $\mathcal{M}_{d+1}$ や $\mathcal{V}$ の代数構造について単位元 $\emptyset$ や $\mathbb{C}$ はあっても逆元はないことに注意されたい、すなわち通常の場合の量子論は群構造はもっていないため、「非可逆的」である。それと比べて、逆元が定義できるような理論を「可逆な」場の量子論という。

4.1.2 ボルディズム群と IFT の関係

前節で TQFT の定義を与えたが、特に任意の d 次元多様体 Σ_d に対する Hilbert 空間 $\mathcal{H}_{\Sigma_d} := \mathcal{Z}[\Sigma_d]$ が複素 1 次元であるとき、これを可逆な場の理論 (IFT ; Invertible Field Theory) という。

IFT の定義

TQFT $\mathcal{Z}$ で、任意の d 次元閉多様体 Σ_d に対して

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Z}[\Sigma_d] = 1 \quad (4.26)$$

であるとき、 $\mathcal{Z}$ を IFT という。

さて、ベクトル空間の圏 $\mathcal{V}$ の代数構造 $\otimes$ を考えてみよう。ただし対象 $\mathcal{H}$ が全て 1 次元であるので $\mathbb{C}$ と同型である。

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}|\psi\rangle \quad (4.27)$$

ここで、 $|\psi\rangle$ のノルムを規格化すると、これは大きさ 1 の複素数なので、

$$|\psi\rangle = e^{i\theta} \quad (4.28)$$

である。すると、双対ベクトル $\langle\psi| = e^{-i\theta}$ を使って「逆元」

$$\mathcal{H}^\dagger = \langle\psi|\mathbb{C} \quad (4.29)$$

が定義できる．実際

$$\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^\dagger = \mathbb{C} \cdot (|\psi\rangle \otimes \langle\psi|) \quad (4.30)$$

$$= \mathbb{C} \quad (4.31)$$

である*4．このように Hilbert 空間がテンソル積 $\otimes$ について可逆であるため，IFT の空間 $\{\mathcal{Z}^{(i)}\}_i$ は群構造が定義される．その点で，IFT は最も簡単な場の量子論のクラスを与える．より具体的には理論 $\mathcal{Z}$ と $\mathcal{Z}'$ の積 $\mathcal{Z} \times \mathcal{Z}'$ は，

$$\mathcal{Z} \times \mathcal{Z}'[\Sigma_d] = \mathcal{Z}[\Sigma_d] \otimes \mathcal{Z}'[\Sigma_d], \quad (4.32)$$

$$\mathcal{Z} \times \mathcal{Z}'[M_{d+1}] = \mathcal{Z}[M_{d+1}] \otimes \mathcal{Z}'[M_{d+1}] \quad (4.33)$$

を満たす関手として定義される． $\mathcal{Z}$ が IFT であるときには， $\times$ について可換群を成す．

ここで興味をそそられるのは，この群構造がいったいどのようなものであるか，という問題である．それは，あり得る IFT を全て列挙することに等しい，難しい問いであるが，Freed と Hopkins[10] により答えが提案されている．

Freed-Hopkins の予想

$d+1$ 次元 IFT の空間 $\{\mathcal{Z}^{(i)}\}_i$ の $\times$ に関する群構造は

$$(I_{\mathbb{Z}}\Omega)^{d+2} \quad (4.34)$$

により与えられる．ただし， Ω はボルディズム群で， $I_{\mathbb{Z}}$ はその Anderson 双対をとることを意味する．

例えば， $U(1)$ 対称性をもつフェルミオン系の $d+1$ 次元 IFT を知りたければ

$$(I_{\mathbb{Z}}\Omega^{Spin \times U(1)})^{d+2} \quad (4.35)$$

を計算すれば，全て列挙することができる．実際

$$\Omega_5^{Spin \times U(1)} = 0, \quad (4.36)$$

$$\Omega_6^{Spin \times U(1)} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \quad (4.37)$$

$$(4.38)$$

であるため，

$$(I_{\mathbb{Z}}\Omega^{Spin \times U(1)})^6 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \quad (4.39)$$

とわかる．すなわち 5 次元の IFT は本質的に 2 種類しか存在しないことがわかる．実際この 2 つの $\mathbb{Z}$ は Chern-Simons 理論に対応している．

$$S_{CS}^{u(1)-u(1)-u(1)}, S_{CS}^{u(1)-grav-grav} \quad (4.40)$$

これらは，それぞれ Chern-Simons レベルにより整数で相が分類される．その整数が $(I_{\mathbb{Z}}\Omega^{Spin \times U(1)})^6$ の 2 つの自由部分 $\mathbb{Z}$ を生成していると考えられる．

*4 完全系 $|\psi\rangle \otimes \langle\psi| = 1$ を使ったと理解できる．

4.1.3 アノマリーへの応用方法

さて、以上の知見をアノマリーの計算に応用しよう。バルク・エッジ対応により、 d 次元のアノマリーは $d+1$ 次元のTQFT（より正確にはIFT）に対応しているのだった。そして、 $d+1$ 次元のIFTは $d+2$ 次のコボルディズム群（より正確にはボルディズム群のAnderson 双対^{*5}）に対応している。すなわち、 d 次元のアノマリーを調べるという問題は、 $d+2$ 次のコボルディズム群を調べることに等価である。ただし、コボルディズム群には対称性 $Spin \times G$ の情報しか入力できない。理論のmatter content等の情報はごっそり抜け落ちている。よって、アノマリーの計算は以上のようなフローで行われる。

(1) d 次元理論の対称性 $Spin \times G$ に対する $d+2$ 次コボルディズム群を計算する^{*6}。

(2) $d+2$ 次コボルディズム群を生成する $d+1$ 次元理論 S を特定する。

(3) d 次元理論のmatterの表現と、 $d+1$ 次元理論 S の関係を調べる。

例えば、4次元 $SU(2)$ ゲージ理論の場合なら

$$(1) (I_{\mathbb{Z}} \Omega^{\frac{Spin \times SU(2)}{\mathbb{Z}_2}})^6 = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$$

(2) 2つの $\mathbb{Z}_2$ はそれぞれ $S = \zeta(\mathcal{P}_{c_2})$ と $S' = \int w_2 w_3$ で生成される^{*7}。

(3) それぞれ表現について計算すると、 $(-1)^S = (-1)^{N(\frac{1}{2}+2n)}$ および $(-1)^{S'} = (-1)^{N(\frac{3}{2}+4n)}$ である。ただし $N(j)$ はisospin j であるWeylスピノルの数である。これがアノマリーの値そのものと一致する。

以上より、4次元 $SU(2)$ ゲージ理論のアノマリーがWitten アノマリーとWang-Wen-Witten アノマリーで尽きていることがわかる。ただし、各手続きを実行することは非常に難しいので、次節で詳しく解説する。

4.2 具体例

^{*5} 以降、「ボルディズム群のAnderson 双対」と毎回述べるのは面倒なので単に「コボルディズム群」ということにする。

^{*6} $Spin \times G$ をその中心で割っても良い。

^{*7} ζ は1次元のmod 2指数で $\mathcal{P}$ はPoincare 双対を表す。また c_2 は $SU(2)$ の第2Chern類である。

4.2.1 Witten $SU(2)$ アノマリー（再訪）

本節では 4 次元 $SU(2)$ ゲージ理論のアノマリーを摂動・非摂動いずれも全て導出する．前節で説明したように，これは（１）6 次コボルディズム群の計算，（２）5 次元 IFT の特定，（３）表現との関係を調べる，という手続きで実行されるが，各工程が非常に長いため先に概略を見せて，その後詳細を記述する．

（１）6 次コボルディズム群の計算

ファイブレーション $pt \rightarrow X \rightarrow X$ に対する Atiyah-Hirzebruch スペクトル系列

$$E_{p,q}^2 = H_p(X, \Omega_q^{Spin}(pt)) \Rightarrow \Omega_{p+q}^{Spin}(X) \quad (4.41)$$

を $X = BSU(2)$ として計算して，

$$\Omega_5^{Spin \times SU(2)} := \Omega_5^{Spin}(BSU(2)) = \mathbb{Z}_2, \quad (4.42)$$

$$\Omega_6^{Spin \times SU(2)} := \Omega_6^{Spin}(BSU(2)) = \mathbb{Z}_2 \quad (4.43)$$

である．よってこの Anderson 双対は

$$(I_{\mathbb{Z}} \Omega^{Spin \times SU(2)})^6 = \mathbb{Z}_2 \quad (4.44)$$

と求まる．

※ここで 5 次ボルディズム群の $\mathbb{Z}_2$ は $E_{4,1}^2$ 由来であることが後々重要になる．

ファイブレーション $pt \rightarrow X \rightarrow X$ に対する Atiyah-Hirzebruch スペクトル系列は

$$E_{p,q}^2 = H_p(X, \Omega_q^{Spin}(pt)) \Rightarrow \Omega_{p+q}^{Spin}(X) \quad (4.45)$$

である．ここで，もし $H_p(X, \mathbb{Z})$ が自由ならば

$$E_{p,q}^2 = H_p(X, \Omega_q^{Spin}(pt)) = H_p(X, \mathbb{Z}) \otimes \Omega_q^{Spin}(pt) \quad (4.46)$$

である*⁸． $X = BSU(2)$ のとき， $H^p(BSU(2), \mathbb{Z})$ は自由である：

$$H^*(BSU(2), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[c_2]. \quad (4.47)$$

ここで， c_2 は $SU(2)$ に対する 2 次 Chern 類である*⁹．よって，普遍係数定理より自由なコホモロジーとホモロジーは同型なので

$$H_p(BSU(2), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \quad (\text{iff } p = 4k) \quad (4.48)$$

*⁸ $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ や $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_n$ を踏まえると，例えば $H(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ のとき成立することがわかる．より正確にはホモロジーに対する普遍係数定理を適用した結果である．

*⁹ 一般に $H^p(BSU(n), \mathbb{Z})$ は， $SU(n)$ の Chern 類 c_i により生成される． $SU(2)$ の場合 $i \neq 2$ で $c_i = 0$ である．

である．この結果は $BSU(2) = \mathbb{H}\mathbb{P}^\infty$ であることを知っていれば，ホモロジーが $\mathbb{H}\mathbb{P}^n$ によって生成されることより理解できる．よって $H_p(X, \mathbb{Z})$ は自由なので式 (4.46) より

$$E_{p,q}^2 = \Omega_q^{Spin}(pt) \quad (\text{iff } p = 4k) \quad (4.49)$$

と求まる．点に対する Spin ボルディズム群 $\Omega_q^{Spin}(pt)$ は良く知られている．

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Omega_q^{Spin}(pt)$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}^2$	$(\mathbb{Z}_2)^2$	$(\mathbb{Z}_2)^3$

(4.50)

上式 2 つより E^2 ページは次のようになる．

E^2 ページ

6							
5							
4	$\mathbb{Z}$				$\mathbb{Z}$		
3							
2	$\mathbb{Z}_2$				$\mathbb{Z}_2$		
1	$\mathbb{Z}_2$				$\mathbb{Z}_2$		
0	$\mathbb{Z}$				$\mathbb{Z}$		
	0	1	2	3	4	5	6

E^4 ページの非自明な微分

6							
5							
4	$\mathbb{Z}$				$\mathbb{Z}$		
3							
2	$\mathbb{Z}_2$				$\mathbb{Z}_2$		
1	$\mathbb{Z}_2$				$\mathbb{Z}_2$		
0	$\mathbb{Z}$				$\mathbb{Z}$		
	0	1	2	3	4	5	6

E^2 ページを見ての通り，非自明な微分は一切ない． E^3 ページも同様に非自明な微分は存在せず，よって $E^2 = E^3 = E^4$ である．しかし， E^4 ページには，非自明な微分

$$d_{4,1}^4 : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z} \quad (4.51)$$

が存在する．これは準同型写像なので $d_{4,1}^4 = 0$ が必要である．よって $\ker(d_{4,1}^4) = \mathbb{Z}_2$ であるため

$$E_{4,1}^5 = \frac{\ker(d_{4,1}^4)}{\text{im}(d_{8,-2}^4)} = \mathbb{Z}_2 \quad (4.52)$$

となる．以上の手続きを繰り返して，結局

$$E_{4,1}^\infty = \mathbb{Z}_2 \quad (4.53)$$

を得る．また， $E_{4,2}^2$ には非自明な微分が全く飛ばないため

$$E_{4,2}^2 = E_{4,2}^3 = \cdots = E_{4,2}^\infty. \quad (4.54)$$

よって、ボルディズム群は

$$\Omega_5^{Spin}(BSU(2)) = \bigoplus_{r+s=5} E_{r,s}^\infty = \mathbb{Z}_2, \quad (4.55)$$

$$\Omega_6^{Spin}(BSU(2)) = \bigoplus_{r+s=6} E_{r,s}^\infty = \mathbb{Z}_2 \quad (4.56)$$

であるため、この Anderson 双対は

$$(I_{\mathbb{Z}}\Omega^{Spin \times SU(2)})^6 = \left(\Omega_5^{Spin}(BSU(2)) \text{ の捻じれ部分} \right) \oplus \left(\Omega_6^{Spin}(BSU(2)) \text{ の自由部分} \right) \quad (4.57)$$

$$= \mathbb{Z}_2 \quad (4.58)$$

と求まる。以上の計算から分かる通り、この $\mathbb{Z}_2$ は $E_{4,1}^2$ 由来である。

(2) 5 次元 IFT の特定

$(I_{\mathbb{Z}}\Omega^{Spin \times SU(2)})^6 = E_{4,1}^2 = \mathbb{Z}_2$ であった。ここで

$$E_{p,q}^2 = H_p(BSU(2), \mathbb{Z}) \otimes \Omega_q^{Spin}(pt) \quad (4.59)$$

であったので、5 次元 IFT は $H_4(BSU(2), \mathbb{Z}) \otimes \Omega_1^{Spin}(pt)$ の双対である。この生成子は

$$S = \zeta(\mathcal{P}c_2) \quad (4.60)$$

となる。

考えるべきは $E_{4,1}^2 = H_4(BSU(2), \mathbb{Z}) \otimes \Omega_1^{Spin}(pt)$ の双対である。(1) の計算を思い出すと、 $H^4(BSU(2), \mathbb{Z})$ の生成子は c_2 であった。また、 $\Omega_1^{Spin}(pt)$ の双対の IFT は、1 次元 mod 2 指数 $\zeta(\cdot)$ であることが知られている。ここで形式的に ζ を mod 2 指数 $\zeta(\cdot)$ を与えるようなコホモロジーの生成子として導入しよう。

$$\zeta(*) = \int_* \zeta \quad (4.61)$$

よって求めるべき IFT は、 c_2 と ζ の積

$$S(M) = \int_M \zeta \wedge c_2 \quad (4.62)$$

で与えられる。ここでポアンカレ双対 $\mathcal{P}$ は次式を満たすような双対であった：

$$\int_M \omega \wedge \eta = \int_{\mathcal{P}\eta} \omega. \quad (4.63)$$

なので

$$S(M) = \int_{\mathcal{P}c_2} \zeta \quad (4.64)$$

$$= \zeta(\mathcal{P}c_2) \quad (4.65)$$

となる。

以上の推論より 2 つの生成子の積がポアンカレ双対で与えられることがわかった．この事実を $H_4(BSU(2), \mathbb{Z}) \otimes \Omega_1^{Spin}(pt)$ の生成子が $S^4 \times S^1$ であることから見てみよう．ただし， S^4 には 1-インスタントンを置いて^{*10}， S^1 は周期的境界条件にしたスピノル場が存在するとしている． S^4 上の $H_4(BSU(2), \mathbb{Z})$ に相当する作用は

$$s(S^4) = \int_{S^4} c_2 = 1 \quad (4.66)$$

であり， S^1 上の作用は

$$s'(S^1) = \zeta(S^1) \quad (4.67)$$

である．よって，求めたい IFT は $S^4 \times S^1$ 上で

$$S(S^4 \times S^1) = s(S^4)s'(S^1) = \zeta(S^1) \quad (4.68)$$

となる．これは $\mathcal{P}_{C_2} = S^1$ であることから，上の表式と整合的である．

(3) 表現との関係

$S = \zeta(\mathcal{P}_{C_2})$ であるので，これを $S^4 \times S^1$ 上で計算して

$$(-1)^S = (-1)^{N(\frac{1}{2}+2n)} \quad (4.69)$$

となる．ただし， $N(j)$ は isospin j の Weyl スピノルの数である．

$S^4 \times S^1$ 上で作用を計算すると

$$S(S^4 \times S^1) = \int_{S^4} c_2 \cdot \zeta(S^1) \quad (4.70)$$

であった．ここで S^4 上に isospin j のスピノル場がいるとし， S^1 方向は周期的境界条件にとると，

$$S(S^4 \times S^1) \equiv \int_{S^4} c_2 \pmod{2} \quad (4.71)$$

$$= \frac{2}{3}j(j+1)(2j+1) \quad (4.72)$$

である．よって， $j = \frac{1}{2} + 2n$ のとき，かつその時に限り

$$(-1)^S = -1 \quad (4.73)$$

である．よって，isospin j の Weyl スピノルが $N(j)$ 個いるとすると，

$$(-1)^S = (-1)^{N(\frac{1}{2}+2n)} \quad (4.74)$$

である．

^{*10} $\mathbb{H}P^1 = S^4$ であることから， $H_4(BSU(2), \mathbb{Z})$ の生成子が理解できる．

4.2.2 Wang-Wen-Witten $SU(2)$ アノマリー（再訪）

さて，次は Wang-Wen-Witten アノマリーも含めて導出しよう．この節も前節と同様に（１）６次コボルディズム群の計算，（２）５次元 IFT の特定，（３）表現との関係を調べる，という手続きを行う．ただし，対称性が $\frac{Spin \times SU(2)}{\mathbb{Z}_2}$ のように中心で割っていることから，Atiyah-Hirzebruch スペクトル系列によるコボルディズム群の計算ができない．そのため，ここでは Adams スペクトル系列^{*11}を用いる．Adams スペクトル系列は計算能力が高く，あらゆるコボルディズム群がわかる．しかし，その代償として生成子（IFT）の特定に難があり，やや迂遠な方法で（２，３）を実行することになる．

（１）６次コボルディズム群の計算

Adams スペクトル系列

$$E_2^{s,t} = \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{s,t}(H^*(Y, \mathbb{Z}_2), \mathbb{Z}_2) \Rightarrow \Omega_{t-s}^H(pt), \quad (4.75)$$

$$Y = MTH \quad (4.76)$$

を用いて計算する． $H = \frac{Spin \times SU(2)}{\mathbb{Z}_2}$ に対して，

$$MTH = MSpin \wedge \Sigma^{-3}MSO(3) \quad (4.77)$$

であることを認めると，

$$E_2^{s,t} = \text{Ext}_{\mathcal{A}_1}^{s,t}(H^{*+3}(MSO, \mathbb{Z}_2), \mathbb{Z}_2) \Rightarrow \Omega_{t-s}^{\frac{Spin \times SU(2)}{\mathbb{Z}_2}}(pt) \quad (4.78)$$

となる．これを計算して

$$\Omega_5^{\frac{Spin \times SU(2)}{\mathbb{Z}_2}}(pt) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \quad (4.79)$$

$$\Omega_6^{\frac{Spin \times SU(2)}{\mathbb{Z}_2}}(pt) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \quad (4.80)$$

$$(4.81)$$

となるので，

$$(I_{\mathbb{Z}} \Omega^{\frac{Spin \times SU(2)}{\mathbb{Z}_2}})^6 = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \quad (4.82)$$

$$(4.83)$$

と求まる．

※もし， $\Omega^H(X)$ を求める場合には， $Y = MTH \wedge X_+$ と変更すれば良い．ただし， X_+ は X と点の非交和である．

^{*11} Adams スペクトル系列は Atiyah-Hirzebruch スペクトル系列に比べて多くの前提知識が必要である．ここでは [24] や [26] を参考にした．

Adams スペクトル系列^{*12}の E^2 ページは

$$E_2^{s,t} = \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{s,t}(H^*(Y, \mathbb{Z}_2), \mathbb{Z}_2), \quad Y = MTH \quad (4.84)$$

であった。ここで $H = \frac{Spin \times SU(2)}{\mathbb{Z}_2}$ に対して、

$$MTH = MSpin \wedge \Sigma^{-3}MSO(3) \quad (4.85)$$

であることを認めて計算していく。まず $H^*(Y, \mathbb{Z}_2)$ は

$$H^*(Y, \mathbb{Z}_2) = H^*(MSpin \wedge \Sigma^{-3}MSO(3), \mathbb{Z}_2) \quad (4.86)$$

$$= H^*(MSpin, \mathbb{Z}_2) \otimes H^{*+3}(MSO(3), \mathbb{Z}_2) \quad (4.87)$$

である。ここで、式 (C.86) を用いると

$$H^*(Y, \mathbb{Z}_2) = \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}_1} H^{*+3}(MSO(3), \mathbb{Z}_2) \quad (4.88)$$

となる。よって E^2 ページは

$$E_2^{s,t} = \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{s,t}(\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}_1} H^{*+3}(MSO(3), \mathbb{Z}_2), \mathbb{Z}_2) \quad (4.89)$$

$$= \text{Ext}_{\mathcal{A}_1}^{s,t}(H^{*+3}(MSO(3), \mathbb{Z}_2), \mathbb{Z}_2) \quad (4.90)$$

とわかる。ただし、ここで Change of ring 公式

$$\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{s,t}(\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}_1} L, \mathbb{Z}_2) = \text{Ext}_{\mathcal{A}_1}^{s,t}(L, \mathbb{Z}_2) \quad (4.91)$$

を用いた。 $\text{Ext}_{\mathcal{A}_1}^{s,t}(H^{*+3}(MSO(3), \mathbb{Z}_2), \mathbb{Z}_2)$ は、 $H^{*+3}(MSO(3), \mathbb{Z}_2)$ の $\mathcal{A}_1$ 加群としての拡大を表す。コホモロジーは

$$H^{*+3}(MSO(3), \mathbb{Z}_2) = H^*(BSO(3), \mathbb{Z}_2)U = \mathbb{Z}[w_2, w_3]U \quad (4.92)$$

であるので、これに Steenrod 平方根 Sq^i を当てていくと、 $\mathcal{A}_1$ 加群構造が求まる。ただしここで Thom 類 U に対して

$$\text{Sq}^i U = \bar{w}_i U \quad (4.93)$$

であること（ただし、 $\bar{w}_i$ は w_i に対して $(1 + w_1 + w_2 + \cdots)(1 + \bar{w}_1 + \bar{w}_2 + \cdots)$ を満たすようなものである。）、および Wu 公式

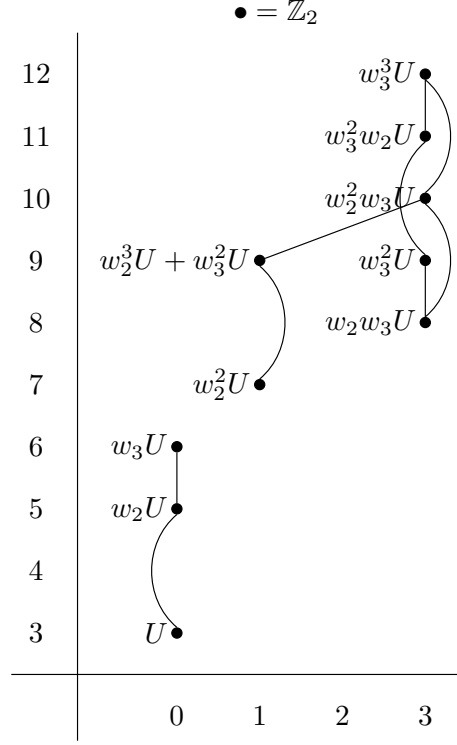
$$\text{Sq}^i(w_j) = 0, \quad (i > j) \quad (4.94)$$

$$\text{Sq}^i(w_i) = w_i^2, \quad (4.95)$$

$$\text{Sq}^i(w_j) = w_i w_j + \sum_{k=1}^i \binom{j-i-1+k}{k} w_{i-k} w_{j+k} \quad (i < j) \quad (4.96)$$

を使う。

^{*12} ここで使用している諸概念については付録の C.1.11 を参照。



$H^{*+3}(MSO(3), \mathbb{Z}_2)$ の $\mathcal{A}_1$ 加群構造が求まったので、これに対応する E^2 ページを計算する．上図の通り， $\mathcal{A}_1$ 加群構造は 2 つの独立な部分に分かれているので，左側・右側をそれぞれ $\mathcal{L}, \mathcal{R}$ と定義する：

$$H^{*+3}(MSO(3), \mathbb{Z}_2) = \mathcal{L}^* \oplus \mathcal{R}^*. \quad (4.97)$$

ここで，右辺と左辺で次数の定義をずらしていることに注意． $\mathcal{L}$ の minimal resolution を計算すると

$$\mathcal{L} \leftarrow P_L^0 = \mathcal{A}_1 \quad (4.98)$$

$$\leftarrow P_L^1 = \Sigma^1 \mathcal{A}_1 \oplus \Sigma^5 \mathcal{A}_1 \quad (4.99)$$

$$\leftarrow P_L^2 = \Sigma^2 \mathcal{A}_1 \oplus \Sigma^6 \mathcal{A}_1 \oplus \Sigma^7 \mathcal{A}_1 \quad (4.100)$$

$$\leftarrow \cdots \quad (4.101)$$

であるので，

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}_1}^{s,t}(\mathcal{L}, \mathbb{Z}_2) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_1}(P_L^s, \Sigma^t \mathbb{Z}_2) \quad (4.102)$$

を計算すると， $\mathbb{Z}_2$ が残るのは

$$s = 0, t = 0, \quad (4.103)$$

$$s = 1, t = 1, 5, \quad (4.104)$$

$$s = 2, t = 2, 6, 7, \quad (4.105)$$

$$\vdots \quad (4.106)$$

のときである．よって結果をまとめると下左図のようになる．ただしここで横軸を $t - s$ で縦軸を s としている．また，1 つ 1 つの点は $\mathbb{Z}_2$ に対応する．また下右図は， $\mathcal{R}$ について同様に計算した結果である．

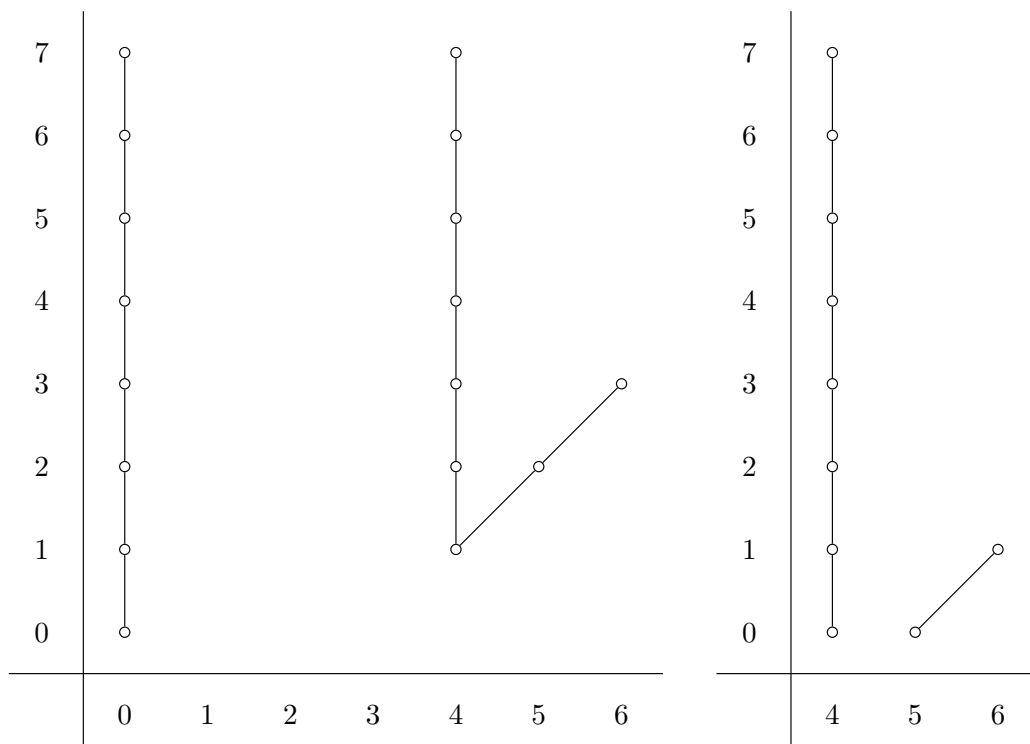


図 4.1 $\mathcal{L}$ と $\mathcal{R}$ の E^2 ページ

この 2 つを合わせて、完全な E^2 ページを得る.

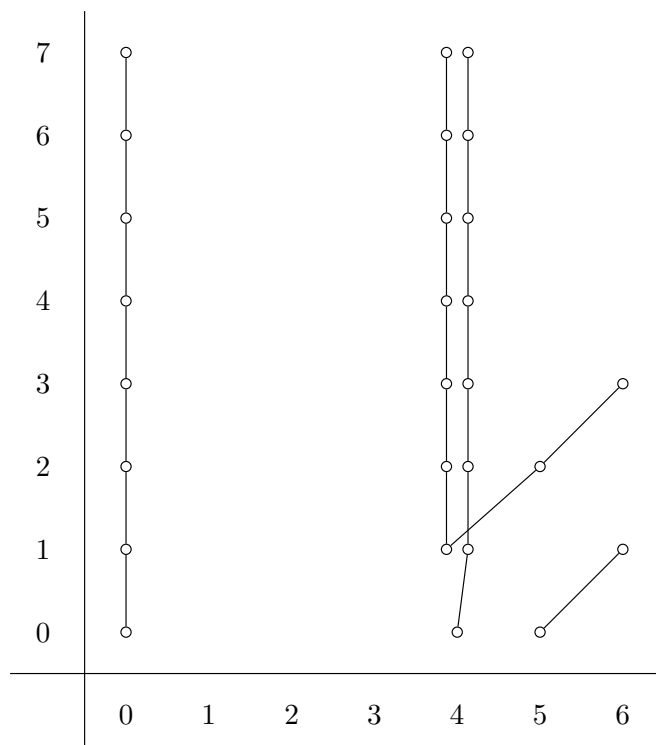


図 4.2 $\frac{Spin \times SU(2)}{\mathbb{Z}_2}(pt)$ の E^2 ページ

微分を飛ばしても変化はないので、 $E^2 = E^\infty$ である。横軸は $t - s$ であったので、収束先のボルディズム群 $\Omega_{t-s}^{\frac{Spin \times SU(2)}{\mathbb{Z}_2}}(pt)$ の次数そのものである。縦に伸びている線は $\mathbb{Z}$ に対応し、点は $\mathbb{Z}_2$ に対応することを踏まえると

p	0	1	2	3	4	5	6
$\Omega_p^{\frac{Spin \times SU(2)}{\mathbb{Z}_2}}(pt)$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	0	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$

(4.107)

であることがわかる。よってコボルディズム群は

$$(I_{\mathbb{Z}} \Omega^{\frac{Spin \times SU(2)}{\mathbb{Z}_2}})^6 = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \quad (4.108)$$

$$(4.109)$$

である。

(2) 5次元 IFT の特定

$(I_{\mathbb{Z}} \Omega^{Spin \times SU(2)})^6 = \Omega_5^{\frac{Spin \times SU(2)}{\mathbb{Z}_2}}(pt) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ であった。ここで 1 つの $\mathbb{Z}_2$ は $S = \zeta(\mathcal{P}c_2)$ で生成されることは知っているので、もう 1 つの生成子の特定に集中する。実は 5次元以下の向き付け可能多様体は必ず Spin-SU(2) 構造をもつことから、SO ボルディズム群を介して de Rham 不変量

$$S' = \int w_2 w_3 \quad (4.110)$$

が生成子になることがわかる。これは特に Spin 多様体上でゼロなので $S \neq S'$ である。よって S' がもう 1 つの生成子だとわかる。

多様体が構造をもつときには、対応する障害類が存在する。例えば、向き付け可能であるための条件は 1 次 Stiefel Whitney 類の消滅 $w_1 = 0$ であり、Spin 構造をもつための条件は 2 次 Stiefel Whitney 類の消滅 $w_2 = 0$ である。同様に Spin-c 構造をもつための条件は 3 次整係数 Stiefel Whitney 類が消えることである： $W_3 := \beta w_2 = 0$ 。ただし、 β は短完全列： $\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{mod } 2} \mathbb{Z}_2$ から導かれる Bockstein 準同型写像である。

$$\cdots \xrightarrow{\beta} H^*(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\times 2} H^*(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{mod } 2} H^*(X, \mathbb{Z}_2) \quad (4.111)$$

$$\xrightarrow{\beta} H^{*+1}(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\times 2} H^{*+1}(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{mod } 2} H^{*+1}(X, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\beta} \cdots \quad (4.112)$$

W_3 が障害類であることを示す。まず、Spin-c 構造をもつための条件が $w_2 \equiv c_1 \pmod{2}$ であったことを思い出そう。 c_1, w_2 はそれぞれ $H^2(X, \mathbb{Z}), H^2(X, \mathbb{Z}_2)$ の生成子である。従って完全列

$$\cdots \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow[\text{mod } 2]{\rho} H^2(X, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\beta} H^3(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \cdots \quad (4.113)$$

において、 $w_2 \in \text{im}(\rho)$ が Spin-c 構造をもつための条件を与える。これは完全性より

$$w_2 \in \ker(\beta) \Leftrightarrow \beta w_2 = 0 \quad (4.114)$$

であるため、 $W_3 = \beta w_2$ が Spin-c の障害類を与える。

Spin-SU(2) 構造の場合も同様に整係数 Stiefel-Whitney 類が障害類となり, 実際 primary obstruction は $W_5 := \beta w_4$ である [27]. ただし, Spin-SU(2) 構造の場合, 6 以上にさらなる障害類 a が存在する. これらの事実を認めると, 5 次元以下の向き付け可能な多様体はすべて Spin-SU(2) 構造をもつことが理解できる^{*13}. なぜなら, 4 次元以下の多様体 X については

$$H^5(X, \mathbb{Z}) = 0 \quad (4.115)$$

であるため, 自動的に $W_5 = 0$ であり, またより高次の障害類 a も解消されるからである. 5 次元多様体についても, 同様の理由で $a = 0$ である. また

$$H^5(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \quad (4.116)$$

であるが, これは $w_1 = 0$ であるとき W_5 で生成することはできない. よって, $W_5 = 0$ である.

5 次元以下の向き付け可能な多様体が Spin-SU(2) 構造をもつため,

$$\Omega_*^{SO}(pt) \subset \Omega_*^{\frac{Spin \times SU(2)}{\mathbb{Z}_2}}(pt) \quad (* \leq 5) \quad (4.117)$$

である. SO ボルディズム群に対する Adams スペクトル系列の E^2 ページを見てみると

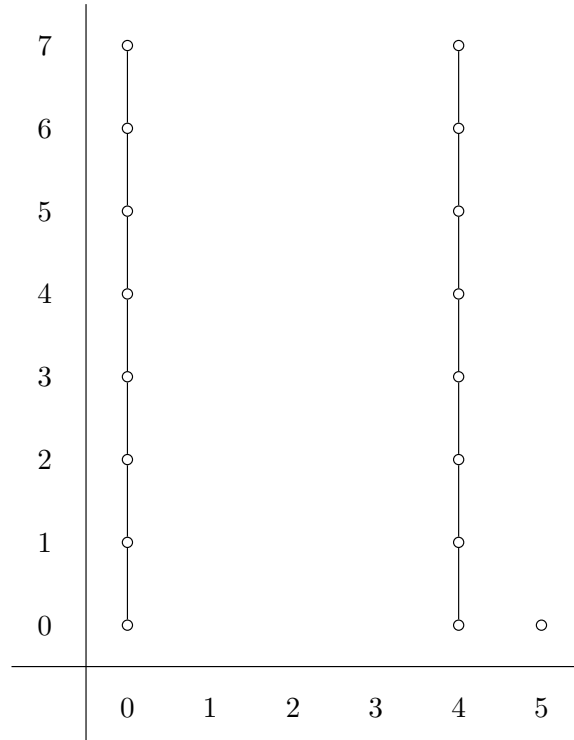


図 4.3 $\Omega_{t-s}^{SO}(pt)$ の E^2 ページ

である. $\Omega_{t-s}^{\frac{Spin \times SU(2)}{\mathbb{Z}_2}}(pt)$ の E^2 ページと見比べると, 式 (4.117) が良く理解できる. 今回は

$$(I_{\mathbb{Z}} \Omega^{Spin \times SU(2)})^6 = \Omega_5^{\frac{Spin \times SU(2)}{\mathbb{Z}_2}}(pt) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \quad (4.118)$$

^{*13} 実際はより強く, 7 次元以下の向き付け可能な多様体はすべて Spin-SU(2) 構造をもつ.

の生成子を考えていたが、代わりに 5 次元の SO ボルディズム群

$$\Omega_5^{SO}(pt) = \mathbb{Z}_2 \quad (4.119)$$

で考えてよい。

さて、SO ボルディズム群は Pontryagin 類 p_i と Stiefel-Whitney 類 w_i で完全に分類できることが知られている。つまり、 p_i, w_i のそれぞれを組み合わせることができる数 (Pontryagin 数, Stiefel-Whitney 数)

$$\int_M p_1, \int_M w_2 w_3, \int_M w_4, \dots \quad (4.120)$$

が M, M' で一致しているなら、 M と M' は SO ボルダントである。この中で 5 次元において唯一非自明なのは

$$S' = \int_M w_2 w_3 \quad (4.121)$$

である。この量を de Rham 不変量という。よって、これが $\Omega_5^{SO}(pt) = \mathbb{Z}_2$ に対応する。

この量は興味深いことに、Spin 構造が存在するときは $w_2 = 0$ なので $S' = 0$ である。一方、 $S = \zeta(\mathcal{P}c_2)$ は一般にゼロでない。ゆえに $S \neq S'$ であるため S' が求めたい IFT であることがわかった。

(3) 表現との関係

$\zeta(j)$ を isospin j に対する mod 2 指数とする。 $S = \zeta(\mathcal{P}c_2)$ は mod 2 指数を用いて

$$S = \zeta(1/2 + 2n) \quad (4.122)$$

とかける。同様に $S' = \int_M w_2 w_3$ も mod 2 指数と関係づけられることが期待できる。実は、 $SU(2)$ ゲージ理論に対する 5 次元 mod 2 指数 $\zeta(j)$ は、 j が半整数であるとき常にボルディズム不変量である。したがって、 $S' \neq 0$ かつ $S = 0$ であるような多様体上で mod 2 指数 $\zeta(j)$ を計算すればよい。Dold 多様体 $P(m, n)$ は

$$P(m, n) := \frac{S^m \times \mathbb{CP}^n}{\mathbb{Z}_2} \quad (4.123)$$

と定義されるが、 $m = 1, n = 2$ のとき向き付け可能でかつ de Rham 不変量 S' が非ゼロである。 $P(m, n)$ 上で mod 2 指数を計算することで

$$S' = \zeta(3/2 + 4n) \quad (4.124)$$

であることがわかる。つまり、isospin $3/2 + 4n$ の Weyl スピノルが奇数個いるとアノマラスである。

まず、 $SU(2)$ ゲージ理論に対する 5 次元 mod 2 指数 $\zeta(j)$ がボルディズム不変量であることを証明する。ただし j は半整数としているので、 $Spin(5) \times SU(2)$ の表現は実である。ゆえに mod 2 指数 $\zeta(j)$ は η 不変量と

$$e^{2\pi i \eta(j)} = (-1)^{\zeta(j)} \quad (4.125)$$

となる．ここで，ボルダントな 5 次元多様体 M, M' を考える．すなわち，ある 6 次元多様体 N があって

$$\partial N = \bar{M} \cup M' \quad (4.126)$$

となっている． N に対して APS 指数定理を用いると

$$-\eta(j) + \eta'(j) = \int_N I_6(j) - \text{index}(N) \quad (4.127)$$

である．ただし， $\eta(j), \eta'(j)$ はそれぞれ M, M' の η 不変量とした． $SU(2)$ は安全群なので 6 次元のアノマリー多項式 $I_6(j)$ は j に依らずゼロである．また $\text{index}(N)$ は整数である．以上より，

$$e^{2\pi i(-\eta(j)+\eta'(j))} = 1 \quad (4.128)$$

なので，

$$(-1)^{\zeta(j)} = (-1)^{\zeta'(j)} \quad (4.129)$$

である．つまり， $\text{mod } 2$ 指数 $\zeta(j)$ はボルディズム不変量である．ゆえに p, q を 0 または 1 の定数として

$$\zeta(j) = pS + qS' \quad (4.130)$$

とかける．

次に Dold 多様体について考える．

$$P(m, n) := \frac{S^m \times \mathbb{CP}^n}{\mathbb{Z}_2} \quad (4.131)$$

ただし， $\mathbb{Z}_2$ の作用は， S^m に対しては点をその対蹠点へ移し， $\mathbb{CP}^n$ に対しては斉次座標 z_i の複素共役 $z_i \mapsto \bar{z}_i$ をとるものとしている．ファイバー束 $p: P(m, n) \rightarrow \mathbb{RP}^m$ には大域切断 s が存在して，実数 r を使って

$$s: \mathbb{RP}^m \ni x \mapsto (x, r) \in P(m, n) \quad (4.132)$$

と定義される．よって， $\mathbb{RP}^m$ の 1 次コホモロジー a を用いて

$$\alpha := p^*(a) \in H^1(P(m, n), \mathbb{Z}_2) \quad (4.133)$$

が定義される．また，ファイバー方向に対応して

$$\beta \in H^2(P(m, n), \mathbb{Z}_2) \quad (4.134)$$

も定義できる．ただし， $s^*(\beta) = 0$ である．Dold 多様体のコホモロジーは

$$H^*(P(m, n), \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}[\alpha, \beta] / \sim, \quad (4.135)$$

$$\alpha^{m+1} \sim 0, \beta^{n+1} \sim 0 \quad (4.136)$$

で与えられる。また、全 Stiefel-Whitney 類 w は

$$w = (1 + \alpha)^n (1 + \alpha + \beta)^{n+1} \quad (4.137)$$

であることも知られている。

さて、 $X = P(1, 2)$ は 5 次元多様体であるが、その Stiefel-Whitney 類 w_i は

$$w_1 = 0, w_2 = \alpha, w_3 = \alpha\beta, w_4 = \beta^2, w_5 = 0 \quad (4.138)$$

よって、de Rham 不変量は非零である。

$$S'[X] = \int_X w_2 w_3 = \int_X \alpha^2 \beta \neq 0 \quad (4.139)$$

以上より、 X 上で mod 2 指数を計算すれば良いことがわかった。結果は 3 節を参照すると

$$\zeta(j)[X] = 1 \text{ iff } j = \frac{3}{2} + 4n \quad (4.140)$$

である。この式より $S[X] = \zeta(1/2 + 2n) = 0$ である。式 (4.130) に X を代入して

$$\zeta(j)[X] = p \cdot 0 + q \cdot 1 \quad (4.141)$$

となるので、 $j = \frac{3}{2} + 4n$ のとき、かつそのときに限り、 $q = 1$ である。よって

$$S' = \zeta\left(\frac{3}{2} + 4n\right) \quad (4.142)$$

が示された。

第II部

アノマリーの物理への応用

第1部では、アノマリーの計算方法に主眼を置いて、解説してきた。そこではアノマリーを単なる分配関数の比 $J(A, g) = Z[A^g]/Z[A]$ として導入したが、実はアノマリーには豊富な物理的意味が存在する。第2部の目的はアノマリーの物理的意味とその各物理現象への応用である。アノマリーは、ゲージ場がダイナミカルか、そうでないか、あるいはそれらの混同かによって区別され、それぞれそれぞれゲージ・アノマリー、't Hooft アノマリー、ABJ アノマリーという。これら3種類はそれぞれ大変異なる物理的意味をもっている。

- ゲージ・アノマリー… 理論の矛盾
- 't Hooft アノマリー… 繰り込み群不変量
- ABJ アノマリー… ネーター保存則の破れ

これらの物理的意味の導出は一言で言えるものはないので、詳しい説明は避け、改めて各章で行うことにするが、各アノマリー毎に全く違う応用方法が存在し、結果として物理の多方面に重要な応用をもつことだけここでは述べておこう。例えば、ゲージ・アノマリーは、理論の矛盾を意味し新たな模型構築の指針を与える。また、理論は高エネルギーでも低エネルギー側でも同じ't Hooft アノマリーをとることから、QCD の低エネルギーの構造に様々な知見をもたらす。そして、ABJ アノマリーはバリオン数・レプトン数の非保存性や、 η' メソンの質量の大きさを説明する。このようにアノマリーはあらゆる現象の理解につながる大変重要な概念である。

第 5 章

ゲージアノマリー

5.1 ゲージアノマリーの意味

ゲージ・アノマリーが存在するということは、古典的にその理論が定義できたとしても、量子化したとき、ill-defined になることを意味する。従って、何らかの物理現象を記述する新たな模型を構成したいとき、ゲージ・アノマリーの相殺は 1 つの有用な指針を与える。現に素粒子の標準模型や超弦理論の成立の歴史において、ゲージ・アノマリー相殺の証明は重要な寄与を与えてきた。例えば、標準模型では $U(1)$ ハイパーチャージや $SU(2)$ アイソスピンの割り振りに大きな制限を与えており、これらの勝手に値を変えるような改変は、実験事実と関係なく純粋に理論的に禁止される。また超弦理論におけるアノマリー相殺は、大変非自明であり、ヘテロ型超弦理論（正確には Type 1 超重力理論）では Green-Schwarz 機構と呼ばれる興味深い仕組みにより初めて達成される。この機構の発見は、その後の超弦理論革命の契機となった。このように歴史的にゲージ・アノマリーの果たしてきた役割は大変大きい。現在でも、標準模型を超えた理論（BSM）を構築する際には、ゲージ・アノマリー相殺を達成できるように電荷の値を定める^{*1}ため、模型構築の指針という点でその重要性は未だに色褪せてはいない。

標準模型の摂動アノマリー相殺については [28] の他多数の文献で取り扱われている。標準模型や $so(10)$ GUT の非摂動アノマリーについては [20][21][22][24][6][7] を参考にした。

5.1.1 ダイナミカルにすることの障害

ゲージ化とは何だったか思い出すと、理論 $Z = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-S[\psi]}$ について大域的対称性 G が存在して、これについてゲージ場 A を次のような置き換えで導入することであった。

$$\partial_\mu \mapsto D_\mu := \partial_\mu + A_\mu \quad (5.1)$$

^{*1} 例えば、BSM の中でも $so(10)$ 大統一理論と呼ばれる理論の 1 つの動機は、摂動ゲージ・アノマリーの相殺を自然に果たすこととも言える。

このような置き換えを経た理論を $S_{\text{gauged}}[\psi, A]$ と書くことにしよう．これだけではゲージ場 A は伝播しないため，運動項を加えてさらに A について経路積分を実行することで，ゲージ理論が得られる．

$$Z_{\text{gauged}} = \int_{\Omega} \mathcal{D}A \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-S_{\text{gauged}} + (\text{ゲージ場の運動項})} \quad (5.2)$$

$$= \int_{\Omega} \mathcal{D}A Z[A] \times e^{(\text{ゲージ場の運動項})} \quad (5.3)$$

ただし $Z[A]$ は式 (1.32) の定義と同じく，ゲージ場以外の経路積分を済ませたものを表す．このゲージ場の積分範囲 Ω が特別なトポロジをもっていることに注意する．すなわち，ゲージ変換の自由度を $\mathcal{G}_*$ と書き^{*2}，ゲージ場の配位空間を $\mathcal{A}$ と書くと，

$$\Omega = \mathcal{A}/\mathcal{G}_* \quad (5.4)$$

と表される．すなわち，ゲージ同値な場 $A \sim A^g$ について

$$Z[A] = Z[A^g] \quad (5.5)$$

が成立するときのみ， $Z[A]$ は Ω 上で一価であるため $\int_{\Omega} \mathcal{D}A Z[A]$ が well-defined である．また $Z[A] \neq Z[A^g]$ であるような g が存在した^{*3}ならば，ill-defined である．これをゲージ・アノマリーと呼称する．以上の議論からわかる通り，ゲージ・アノマリーは「ゲージ場をダイナミカルにする」ことにその矛盾の起源がある．逆にゲージ場をダイナミカルにさえしなければ，理論に矛盾は生じない．そのようなケースが't Hooft アノマリーと ABJ アノマリーである．

以上のことを踏まえると，ゲージ対称性に対してアノマリーを計算し，その全てが消されているときに限り，理論が定義できることが理解できる．本章の残りではそれを具体的に第1部のテクニックを用いて計算していく．

5.2 標準模型への応用

5.2.1 ゲージ群の不定性とその意義

標準模型についてアノマリーの相殺を確認する．手続きは 4.1.3 で示したもので全く尽きている．すなわち，まずゲージ対称性 $G_{\text{SM}} = U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ について6次コボルディズム群を計算すれば良い．しかし，実は標準模型の対称性には中心で割るだけの自由度が存在する．

$$G_{\text{SM}}^I := \frac{U(1) \times SU(2) \times SU(3)}{\Gamma_I} \quad (5.6)$$

^{*2} * を付けているのは，空間的無限遠方で恒等変換になるようなゲージ変換の集合を意味している．詳細は付録 A.2.1 を参照

^{*3} この g は $\mathcal{G}_*$ のときだけでなく，ゲージ群 G の中心群の元の場合も同様に言える．なぜなら中心群は任意の元と可換なので $A^g = gAg^{-1} = A$ より自明に $Z[A^g] = Z[A]$ が要請されるからである．

ここで、 $I = 0$ で $\Gamma_0 = 1$ であり、 $I = 2, 3, 6$ で $\Gamma_I = \mathbb{Z}_I$ としている。このような中心の違いで非摂動アノマリーの振る舞いは大きく変わるため、慎重に場合分けして議論しなければならない。すなわち論理的には、 I がある値のときのみにアノマリーが相殺されているということすらあり得るのだ。その結果 I の値に制限がつくと物理的に非常に面白い。例えば、仮にもしも $I = 6$ のときにアノマリーが発見されたら、大事件である。なぜなら、 G_{SM}^I が $SU(5)$ や $Spin(10)$ に埋め込めるのは、 $I = 6$ のときに限るからである。すなわち、これは大統一理論の否定である。このように中心で割った値によって、アノマリーの振る舞いがどのように変化するか調べることは重要な意味を持つ。

5.2.2 $I = 0$ のコボルディズム群の計算

まず $I = 0$ の場合について計算しよう。ここでは Atiyah-Hirzebruch スペクトル系列を用いてコボルディズム群の計算を行う。ファイブレーション $pt \rightarrow X \rightarrow X$ に対する E^2 ページ

$$E_{p,q}^2 = H_p(X, \Omega_q^{Spin}(pt)) \Rightarrow \Omega_{p+q}^{Spin}(X) \quad (5.7)$$

で $X = B[U(1) \times SU(2) \times SU(3)]$ として計算しよう。ただし群 $G \times H$ に対する分類空間は $B[G \times H] = BG \times BH$ と分解できる。よって、 X のコホモロジーは

$$H^*(X, \mathbb{Z}) = H^*(BU(1), \mathbb{Z}) \otimes H^*(BSU(2), \mathbb{Z}) \otimes H^*(BSU(3), \mathbb{Z}) \quad (5.8)$$

$$= \mathbb{Z}[c_1] \otimes \mathbb{Z}[c'_2] \otimes \mathbb{Z}[c''_2, c''_3] \quad (5.9)$$

である。ここで、 $U(1)$ の第1Chern類を c_1 、 $SU(2)$ の第2Chern類を c'_2 、 $SU(3)$ の第2,3Chern類を c''_2, c''_3 とした。それぞれの次数に注目すると

$$H^i(BU(1), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \quad (\text{iff } i \in 2\mathbb{Z}) \quad (5.10)$$

$$H^i(BSU(2), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \quad (\text{iff } i \in 4\mathbb{Z}) \quad (5.11)$$

$$H^i(BSU(3), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \quad (\text{iff } i \in 4\mathbb{Z} \text{ or } 6\mathbb{Z}) \quad (5.12)$$

よって、これらのテンソル積によって $H^*(X, \mathbb{Z})$ は与えられて、

$$H^0(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \quad (5.13)$$

$$H^2(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \quad (5.14)$$

$$H^4(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^3 \quad (5.15)$$

$$H^6(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^4 \quad (5.16)$$

$$H^8(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^5 \quad (5.17)$$

となる。それぞれの生成子は上から順に $\{1\}, \{c_1\}, \{c_1^2, c'_2, c''_2\}, \{c_1^3, c_1 c'_2, c_1 c''_2, c''_3\}, \{c_1^4, c_1^2 c'_2, c_1^2 c''_2, c_1 c''_3, c'_2 c''_2\}$ である。このように捻じれがないため、普遍係数定理より

$$H^{2k}(X, \mathbb{Z}) = H_{2k}(X, \mathbb{Z}) \quad (5.18)$$

である。よって、 E^2 ページは簡単になって

$$H_p(X, \Omega_q^{Spin}(pt)) = H_p(X, \mathbb{Z}) \otimes \Omega_q^{Spin}(pt) \quad (5.19)$$

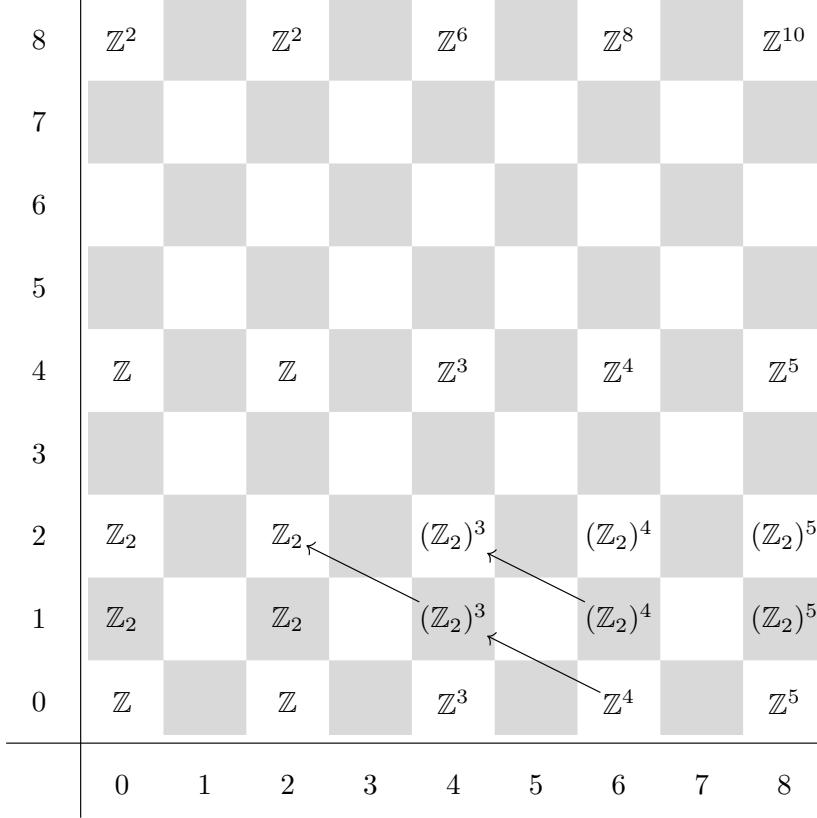
と書ける.

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Omega_q^{Spin}(pt)$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}^2$	$(\mathbb{Z}_2)^2$	$(\mathbb{Z}_2)^3$

(5.20)

であることも踏まえると E^2 ページは下の通りになる.

E^2 ページ



これを見て分かる通り, 5 次のボルディズム群を計算するには $E_{4,1}^2$ について

$$E_{6,0}^2 \xrightarrow{\alpha} E_{4,1}^2 \xrightarrow{\beta} E_{2,2}^2, \therefore \mathbb{Z}^4 \xrightarrow{\alpha} (\mathbb{Z}_2)^3 \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}_2 \quad (5.21)$$

を考えなければならないし, 6 次のボルディズム群を計算するには $E_{4,2}^2$ について

$$E_{6,1}^2 \xrightarrow{\gamma} E_{4,2}^2 \xrightarrow{\delta} E_{2,3}^2, \therefore (\mathbb{Z}_2)^4 \xrightarrow{\gamma} (\mathbb{Z}_2)^3 \xrightarrow{\delta} 0 \quad (5.22)$$

を考えなければならない. これらの微分を計算するのは, 一般に非常に難しい問いであるが, Atiyah-Hirzebruch スペクトル系列の場合, 幸いにして低次における微分が特定されており,

$$d = \widetilde{\text{Sq}}^2 \circ \rho \quad (5.23)$$

で表される. ただし, Sq^2 は 4.2.2 で導入した Steendrod 平方根でコホモロジーへの作用素である. $\widetilde{}$ は双対をとることを意味し, これによりホモロジーへの作用素になっている. さらに ρ は mod 2 reduction を表す.

これを用いて α の作用を計算してみよう． $E_{6,0}^2 = \mathbb{Z}^4$ に ρ を作用させると， $(\mathbb{Z}_2)^4$ に落ちる．そしてこれは $\{c_1^3, c_1 c'_2, c_1 c''_2, c_3''\}$ の双対で生成されるため，

$$\rho \cdot E_{6,0}^2 = \langle \widetilde{c_1^3}, \widetilde{c_1 c'_2}, \widetilde{c_1 c''_2}, \widetilde{c_3''} \rangle_{\mathbb{Z}_2} \quad (5.24)$$

であり， $E_{4,2}^2$ は

$$E_{4,2}^2 = \langle \widetilde{c_1^2}, \widetilde{c'_2}, \widetilde{c''_2} \rangle_{\mathbb{Z}_2} \quad (5.25)$$

である．さて，今計算したいのは

$$\alpha E_{6,0}^2 = \widetilde{\text{Sq}}^2 \cdot \langle \widetilde{c_1^3}, \widetilde{c_1 c'_2}, \widetilde{c_1 c''_2}, \widetilde{c_3''} \rangle_{\mathbb{Z}_2} \quad (5.26)$$

であった．この計算には Kronecker ペア $\langle \cdot, * \rangle$ を使えばよい．Kronecker ペア内では $\langle \widetilde{\text{Sq}}^2 X, Y \rangle = \langle X, \text{Sq}^2 Y \rangle$ となる．すなわち，

$$\langle \widetilde{\text{Sq}}^2 \widetilde{c_1^3}, Y \rangle = \langle \widetilde{c_1^3}, \text{Sq}^2 Y \rangle, \quad (5.27)$$

$$\langle \widetilde{\text{Sq}}^2 \widetilde{c_1 c'_2}, Y \rangle = \langle \widetilde{c_1 c'_2}, \text{Sq}^2 Y \rangle, \quad (5.28)$$

$$\langle \widetilde{\text{Sq}}^2 \widetilde{c_1 c''_2}, Y \rangle = \langle \widetilde{c_1 c''_2}, \text{Sq}^2 Y \rangle, \quad (5.29)$$

$$\langle \widetilde{\text{Sq}}^2 \widetilde{c_3''}, Y \rangle = \langle \widetilde{c_3''}, \text{Sq}^2 Y \rangle \quad (5.30)$$

を全ての Y について計算すればよい．ただし，ここでの Y は $E_{4,2}^2$ の双対である $\{c_1^2, c'_2, c''_2\}$ の線形結合で与えられる．よって，これらに対する Sq^2 の作用を考えよう． $SU(N)$ の i 次 Chern 類 $\bar{c}_i$ に対しては

$$\text{Sq}^2 \bar{c}_i = (i-1) \bar{c}_{i+1} \quad (5.31)$$

で与えられるため，

$$\text{Sq}^2 c'_2 = 0, \quad (5.32)$$

$$\text{Sq}^2 c''_2 = c_3'', \quad (5.33)$$

$$\text{Sq}^2 c_3'' = 0 \quad (5.34)$$

となる． $U(1)$ の 1 次 Chern 類に対しては

$$\text{Sq}^2 c_1 = c_1^2 \quad (5.35)$$

$$\therefore \text{Sq}^2 c_1^2 = 2c_1^3 \quad (5.36)$$

となる．以上の結果を用いることで，式 (5.27) から式 (5.30) が計算できるようになる．例えば式 (5.27) の $\langle \widetilde{\text{Sq}}^2 \widetilde{c_1^3}, Y \rangle = \langle \widetilde{c_1^3}, \text{Sq}^2 Y \rangle$ については $Y = c_1^2$ のときだけ，非自明になりえるが

$$\langle \widetilde{\text{Sq}}^2 \widetilde{c_1^3}, c_1^2 \rangle = \langle \widetilde{c_1^3}, 2c_1^3 \rangle = 2 \equiv 0 \pmod{2} \quad (5.37)$$

$$\therefore \widetilde{\text{Sq}}^2 \widetilde{c_1^3} = 0 \quad (5.38)$$

のように自明となることが計算からわかる．他の場合も計算していくと結局式 (5.30) の場合だけが非自明で， $Y = c_2''$ のとして

$$\langle \widetilde{\text{Sq}^2 c_3'', c_2''} \rangle = \langle \widetilde{c_3'', \text{Sq}^2 c_2''} \rangle = \langle \widetilde{c_3'', c_3''} \rangle = 1 \quad (5.39)$$

$$\therefore \widetilde{\text{Sq}^2 c_3''} = \widetilde{c_2''} \quad (5.40)$$

がわかる．すなわち， $\alpha E_{6,0}^2$ は $\widetilde{c_2''}$ だけで生成されるため，

$$\text{im}(\alpha) = \mathbb{Z}_2 \widetilde{c_2''} \quad (5.41)$$

である．

次に β の作用を計算しよう． $E_{4,2}^2 = (\mathbb{Z}_2)^3$ なので， ρ の作用は自明である．よって

$$\beta E_{4,2}^2 = \widetilde{\text{Sq}^2 E_{4,2}^2} = \widetilde{\text{Sq}^2 \langle \widetilde{c_1^2}, \widetilde{c_2'}, \widetilde{c_2''} \rangle_{\mathbb{Z}_2}} \quad (5.42)$$

である．一方， $E_{2,2}^2 = \langle \widetilde{c_1} \rangle_{\mathbb{Z}_2}$ であつたので， $\text{Sq}^2 c_1 = c_1^2$ であるため，

$$\widetilde{\text{Sq}^2} : \widetilde{c_1^2} \mapsto \widetilde{c_1}, \quad (5.43)$$

$$\widetilde{\text{Sq}^2} : \widetilde{c_2'} \mapsto 0, \quad (5.44)$$

$$\widetilde{\text{Sq}^2} : \widetilde{c_2''} \mapsto 0 \quad (5.45)$$

である．ゆえに

$$\ker(\beta) = \mathbb{Z}_2 \widetilde{c_2'} \oplus \mathbb{Z}_2 \widetilde{c_2''} \quad (5.46)$$

がわかる．従って

$$E_{4,2}^3 = \frac{\ker(\beta)}{\text{im}(\alpha)} = \mathbb{Z}_2 \widetilde{c_2'} \quad (5.47)$$

である*⁴．以上で 5 次元ボルディズム群の計算について E^2 ページをめくって， E^3 ページに到達したが，これ以降の計算は明らかに 4.2.1 と同一のものである．つまり，

$$E_{4,2}^\infty = \mathbb{Z}_2 \quad (5.48)$$

である．もちろんこれは Witten アノマリーを意味する．結論として

$$\Omega_5^{\text{Spin} \times G_{\text{SM}}^{I=0}} = \mathbb{Z}_2 \quad (5.49)$$

となる．

次に 6 次ボルディズム群の計算に移ろう． δ の作用を計算する．と言っても $\delta = 0$ であるので

$$\ker(\delta) = (\mathbb{Z}_2)^3 \quad (5.50)$$

*⁴ 4.2.1 で議論したように，本来は Spin ボルディズム群由来の 1 次元 mod 2 指数の双対 $\widetilde{\zeta}$ も生成子として表記すべきだが，ここでの計算に効いてこないため省略している．

である。しかし、 $\delta = \text{Sq}^2$ として計算すると、 β のときと全く同じ計算になるので、

$$\ker(\delta) = (\mathbb{Z}_2)^2 \quad ??? \quad (5.51)$$

になってしまう。これは明らかな矛盾である。このような事態が発生するのは、そもそも微分 $d = \widehat{\text{Sq}}^2 \circ \rho$ は低次でのみ成立する表式であったからである。今次数は高くなりすぎたため、この表式はもはや役に立たない。ゆえに微分を計算することはできず、 $E_{4,2}^\infty$ を決定することはできない^{*5}。ただ 6 次コボルディズム群を決定するという今回の目的に限って言えば、問題ない。なぜなら、6 次コボルディズム群を決定するために必要なのは、5 次ボルディズム群の捻じれ部分と、6 次ボルディズム群の自由部分だけである。そして $E_{4,2}^2$ は

$$E_{4,2}^2 = \frac{\ker(\delta)}{\text{im}(\gamma)} = (\mathbb{Z}_2)^3, (\mathbb{Z}_2)^2, \mathbb{Z}_2, 0 \quad (5.52)$$

のどれかなので、決して自由部分にはなり得ない。以上から 6 次ボルディズム群の自由部分に寄与するのは、 $E_{6,0}^2 = \mathbb{Z}^4$ と $E_{2,4}^2 = \mathbb{Z}$ だけである。ゆえに

$$\Omega_6^{\text{Spin} \times G_{\text{SM}}^{I=0}}|_{\text{free}} = \mathbb{Z}^5 \quad (5.53)$$

である。以上より、6 次コボルディズム群は

$$(I_{\mathbb{Z}} \Omega^{\text{Spin} \times G_{\text{SM}}^{I=0}})^6 = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^5 \quad (5.54)$$

と導かれる。

5.2.3 $I = 0$ のコボルディズム群の物理的解釈

前節の結果に対して物理的解釈を与える。そのために 6 次コボルディズム群がどの E^2 項由来であったか見直そう。すると

$$(I_{\mathbb{Z}} \Omega^{\text{Spin} \times G_{\text{SM}}^{I=0}})^6 = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^4 \quad (5.55)$$

$$= E_{4,2}^2 \oplus E_{6,0}^2 \oplus E_{2,4}^2 \quad (5.56)$$

であることが見出される。それぞれの生成子をまとめよう。

- $E_{4,2}^2 = \mathbb{Z}_2 \cdots \zeta c'_2$
- $E_{6,0}^2 = \mathbb{Z}^4 \cdots c_1^3, c_1 c'_2, c_1 c''_2, c'_3$
- $E_{2,4}^2 = \mathbb{Z} \cdots p_1 c_1$

$E_{4,2}^2$ 項は 4.2.1 の議論により生成子が特定され、Witten アノマリーであることも理解できる。 $E_{6,0}^2$ 項はよく見ると 2.3.2 で導入したアノマリー多項式そのものである。すなわち、摂動ゲージ・アノマリーに対応する。また、 $E_{2,4}^2$ は一見すると c_1 だけで生成されているようだが、 E^2 ページの縦軸方

^{*5} もちろん Atiyah-Hirzebruch スペクトル系列では計算できないというだけであり、Adams スペクトル系列を使えば計算できる。その結果によると $\Omega_6^{\text{Spin} \times G_{\text{SM}}^{I=0}} = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^5$ である。

向が Spin ボルディズム群由来なので重力^{*6}の 4 次の寄与である 1 次 Pontryagin 類 p_1 とカップルして $p_1 c_1$ をなす。これは明らかに重力込みのアノマリー多項式であり、 $U(1) - grav - grav$ 混合アノマリーに対応する。このように、コボルディズム群を用いることで、2 章から 3 章にかけて導入した数々の概念を統一的に扱える。またこの計算で最も重要なことは、摂動アノマリーと Witten アノマリーの他に決してアノマリーが存在し得ないことを厳密に証明したことにある。かつての議論では、何らかのアノマリーを見落としている可能性が常に存在した。特に非摂動アノマリーを全て見つけることは非常に大きな困難があった。しかし今や、コボルディズム群により全ての存在しうるアノマリーを全て列挙できたことは特筆に値する。

最後に対応する 5 次元 IFT を書いておこう。

- $E_{4,2}^2 = \mathbb{Z}_2 \cdots \zeta(\mathcal{P}c'_2)$
- $E_{6,0}^2 = \mathbb{Z}^4 \cdots S_{CS}^{u(1)-u(1)-u(1)}, S_{CS}^{u(1)-su(2)-su(2)}, S_{CS}^{u(1)-su(3)-su(3)}, S_{CS}^{su(3)-su(3)-su(3)}$
- $E_{2,4}^2 = \mathbb{Z} \cdots S_{CS}^{u(1)-grav-grav}$

ただし、 S_{CS} は Chern-Simons 理論であり、その notation は式 (2.66) を参照してほしい。ここで $\mathbb{Z}$ は Chern-Simons レベルを意味している。また、 $\mathbb{Z}_2$ は mod 2 アノマリーであることを意味している。

ところで、なぜ $su(2) - su(2) - su(2)$ に対応するアノマリーが存在しないのか、その理由は 2.4.1 で示したようにこれが安全な代数だからである。すなわち matter content に依らず、ゲージ代数の性質のみから相殺が約束されているため、ここには現れてこないのである。このようにコボルディズム群は、安全な代数を予め除外しておくという機能も備えており、非常に便利である。

5.2.4 $I = 0$ のアノマリー相殺

標準模型の matter content からアノマリーが相殺していることを確認しよう。 $u(1)_Y$ ハイパーチャージ、および $su(2)$ と $su(3)$ の表現の次元を表にまとめた^{*7}。

表 5.1 標準模型の第 1 世代 (左巻き)

	アップクォーク・ダウクォーク	電子・ニュートリノ
$u(1)_Y$	1/6	-1/2
$su(2)_L$	2	2
$su(3)_c$	3	1

^{*6} 重力の対称性は *Spin* である。

^{*7} 右巻きニュートリノは観測されていないので、括弧を付けている。

表 5.2 標準模型の第 1 世代 (右巻き)

	アップクォーク	ダウンクォーク	電子	(ニュートリノ)
$u(1)_Y$	2/3	-1/3	-1	0
$su(2)_L$	1	1	1	1
$su(3)_c$	3	3	1	1

まず Witten アノマリーの相殺から確認しよう。これは、 $su(2)$ isospin が $1/2$ である Weyl スピノルが偶数個いれば相殺する。実際見れば明らかのように、第 1 世代に 4 つの Weyl スピノルがいるので、3 世代合計で $4 \times 3 = 12$ なので、アノマリーは相殺している。

次に摂動的な $u(1) - grav - grav$ 混合アノマリーについて見る。これは 2 章で示した式 (2.63) より $u(1)$ 生成子 T について

$$\text{tr} T = 0 \quad (5.57)$$

を示せばよい。左巻きについて計算すると

$$\text{tr} T_L = \text{tr} \begin{pmatrix} 1/6 \times 2 \times 3 & & & \\ & -1/2 \times 2 \times 1 & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} = 0 \quad (5.58)$$

であり、右巻きについて計算すると

$$\text{tr} T_R = \text{tr} \begin{pmatrix} 2/3 \times 1 \times 3 & & & \\ & -1/3 \times 1 \times 3 & & \\ & & -1 \times 1 \times 1 & \\ & & & 0 \times 1 \times 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (5.59)$$

ここで 1 章で証明したアノマリーとカイラリティの関係式 (1.66) より、 T_L, T_R は互いに符号が反対の寄与をもつので

$$\text{tr} T = \text{tr}(T_L - T_R) = 0 \quad (5.60)$$

となる。ゆえにこのアノマリーは相殺している。

ゲージ・アノマリーの相殺を見てみよう。これも 2 章で示したが、式 (2.62) すなわち $\text{tr}[T^a \{T^b, T^c\}] = 0$ を用いる。まず $u(1) - u(1) - u(1)$ から見てみよう。このとき条件は単に

$$\text{tr}(T_L^3 - T_R^3) = 0 \quad (5.61)$$

に落ち着く。よって、

$$\text{tr} T_L^3 = \text{tr} \begin{pmatrix} 1/6^3 \times 2 \times 3 & & & \\ & (-1/2)^3 \times 2 \times 1 & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} = -\frac{2}{9} \quad (5.62)$$

および

$$\text{tr} T_R^3 = \text{tr} \begin{pmatrix} (2/3)^3 \times 1 \times 3 & & & \\ & (-1/3)^3 \times 1 \times 3 & & \\ & & (-1)^3 \times 1 \times 1 & \\ & & & 0^3 \times 1 \times 1 \end{pmatrix} = -\frac{2}{9} \quad (5.63)$$

から, $\text{tr}(T_L^3 - T_R^3) = 0$ が示された.

次に $u(1) - su(2) - su(2)$ の場合を見てみよう. $su(2)$ の基本表現 (2 次元表現) については,

$$\{T^a, T^b\} = \frac{1}{2}\delta^{ab} \quad (5.64)$$

が成立するため, 条件 $\text{tr}[T^a\{T^b, T^c\}] = 0$ は, 単に $u(1)$ のトレース計算に落ち着く. $su(2)$ ゲージ場と相互作用するのは, 左巻き粒子だけなので

$$\text{tr}T_L = \text{tr} \begin{pmatrix} 1/6 \times 2 \times 3 & \\ & -1/2 \times 2 \times 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (5.65)$$

であることがわかる.

$u(1) - su(3) - su(3)$ についても, $u(1) - su(2) - su(2)$ とほぼ同様に計算できる. なぜなら, $su(3)$ の基本表現 (3 次元表現) について

$$\{T^a, T^b\} = \frac{1}{3}\delta^{ab} + h^{abc}T^c \quad (5.66)$$

が成立するため, $su(3)$ ゲージ場と相互作用する物質についてのみ, $u(1)$ トレースを取ればよい. 左巻き粒子については

$$\text{tr}T_L = 1/6 \times 2 \times 3 = 1 \quad (5.67)$$

で, 右巻き粒子については

$$\text{tr}T_R = \text{tr} \begin{pmatrix} 2/3 \times 1 \times 3 & \\ & -1/3 \times 1 \times 3 \end{pmatrix} = 1 \quad (5.68)$$

なので, $\text{tr}T = \text{tr}(T_L - T_R) = 0$ である.

最後に $su(3) - su(3) - su(3)$ を考えるが, これは計算するまでもなくアノマリーが相殺している. なぜなら, ベクトル型の結合であるとき, アノマリーは必ず存在しないからである. 詳細は 1.3.3 の議論を参照してほしい.

以上により, $I = 0$ のとき標準模型にアノマリーが存在しないことが証明された.

5.2.5 $I \neq 0$ のアノマリー相殺

以上で $I = 0$ のときのアノマリー相殺を確認した. $I \neq 0$ についても同様に Atiyah-Hirzebruch スペクトル系列を用いて計算することができる. その結果以下が与えられる.

$$(I_{\mathbb{Z}}\Omega^{Spin \times G_{SM}^{I=0}})^6 = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^5 \quad (5.69)$$

$$(I_{\mathbb{Z}}\Omega^{Spin \times G_{SM}^{I=2}})^6 = \mathbb{Z}^5 \quad (5.70)$$

$$(I_{\mathbb{Z}}\Omega^{Spin \times G_{SM}^{I=3}})^6 = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^5 \quad (5.71)$$

$$(I_{\mathbb{Z}}\Omega^{Spin \times G_{SM}^{I=6}})^6 = \mathbb{Z}^5 \quad (5.72)$$

この結果から, $I = 0$ でアノマリーが相殺しているならば, $I \neq 0$ でもアノマリーが相殺していることが結論付けられる. 以上の結果は, 次の 2 点を知っていれば, ある程度納得できるものである.

- 摂動アノマリーは、微小なゲージ変換由来であるため、ゲージ群の中心といった大域的構造に影響されず、ゲージ代数によってのみ振る舞いが決まる。
- $SU(2)$ 対称性があると Witten アノマリーがあるが、 $U(2) = \frac{U(1) \times SU(2)}{\mathbb{Z}_2}$ 対称性に Witten アノマリーは存在しない。

これらから、割り方に依らずコボルディズム群に $\mathbb{Z}_5$ が存在することと、 $\mathbb{Z}_2$ で割ったときにコボルディズム群に $\mathbb{Z}_2$ が存在しないことがわかる。($\mathbb{Z}_6$ は部分群として $\mathbb{Z}_2$ を含むため、コボルディズム群に $\mathbb{Z}_2$ が存在しない。)

特に後者の $U(2)$ 対称性に Witten アノマリーが存在しないという事実は驚きである。なぜなら、ホモトピー群を見る限り、 $U(1) \times SU(2)$ と $U(2)$ は同等であるからだ。

$$\pi_4(U(1) \times SU(2)) = \mathbb{Z}_2, \quad (5.73)$$

$$\pi_4(U(2)) = \mathbb{Z}_2 \quad (5.74)$$

これは 1 次以上のホモトピー群が、中心 C の割り算について鈍感であることに由来する。

$$\pi_{i \geq 0}(G) = \pi_{i \geq 0}(G/C) \quad (5.75)$$

ホモトピー群を見る限り、 $U(2)$ ゲージ理論は $U(1) \times SU(2)$ ゲージ理論と同様に Witten アノマリーをもつように見える。しかし、5 次ボルディズム群を計算すると

$$\Omega_5^{Spin \times U(1) \times SU(2)} = \mathbb{Z}_2 \quad (5.76)$$

$$\Omega_5^{Spin \times U(2)} = 0 \quad (5.77)$$

のように、明確に $U(2)$ ゲージ理論に Witten アノマリーが存在しないことが確認できる。これは非常に興味深い事実であるので、次節で詳しく取り扱う*8。

5.2.6 $U(1) \times SU(2)$ vs $U(2)$

前節の通り、 $U(1) \times SU(2)$ に Witten アノマリーが存在する一方、 $U(2)$ ゲージ理論に Witten アノマリーは存在しない。この事実はボルディズム的には $\Omega_5^{Spin \times U(1) \times SU(2)} = \mathbb{Z}_2$ および $\Omega_5^{Spin \times U(2)} = 0$ ということによって表される。これらの違いは、常コホモロジーでも見出すことはできず、Steenrod 平方根によって初めて区別される [20][21][22][24]。

まず比較のために、Atiyah-Hirzebruch スペクトル系列の E^2 ページを書いてみよう。

$$E_{p,q}^2 = H_p(BG, \Omega_q^{Spin}(pt)) \Rightarrow \Omega_{p+q}^{Spin}(BG) \quad (5.78)$$

ここで、 $G = U(1) \times SU(2)$ ないし、 $G = U(2)$ である。ここでそれぞれの分類空間の常コホモロジーを書き下すと

$$H^*(BU(1) \times BSU(2)) = \mathbb{Z}[c_1, c'_2], \quad (5.79)$$

$$H^*(BU(2)) = \mathbb{Z}[c_1, c'_2] \quad (5.80)$$

*8 これは [22] や [20] と良く関係している。

のように, $U(1)$ の第 1 次 Chern 類 c_1 と $SU(2)$ の第 2 次 Chern 類 c'_2 で生成される. すなわち, E^2 ページに両者とも違いは存在せず以下のようなになる.

$U(1) \times SU(2)$ ゲージ理論の E^2 ページ

6							
5							
4	$\mathbb{Z}$		$\mathbb{Z}$		$(\mathbb{Z})^2$		$\mathbb{Z}$
3							
2	$\mathbb{Z}_2$		$\mathbb{Z}_2$		$(\mathbb{Z}_2)^2$		$\mathbb{Z}_2$
1	$\mathbb{Z}_2$		$\mathbb{Z}_2$		$(\mathbb{Z}_2)^2$		$\mathbb{Z}_2$
0	$\mathbb{Z}$		$\mathbb{Z}$		$(\mathbb{Z})^2$		$\mathbb{Z}$
	0	1	2	3	4	5	6

$U(2)$ ゲージ理論の E^2 ページ

6							
5							
4	$\mathbb{Z}$		$\mathbb{Z}$		$(\mathbb{Z})^2$		$\mathbb{Z}$
3							
2	$\mathbb{Z}_2$		$\mathbb{Z}_2$		$(\mathbb{Z}_2)^2$		$\mathbb{Z}_2$
1	$\mathbb{Z}_2$		$\mathbb{Z}_2$		$(\mathbb{Z}_2)^2$		$\mathbb{Z}_2$
0	$\mathbb{Z}$		$\mathbb{Z}$		$(\mathbb{Z})^2$		$\mathbb{Z}$
	0	1	2	3	4	5	6

しかし, 微分 d の作用について大きな違いが存在する. ここでは低次の微分なので

$$d = \widetilde{\text{Sq}}^2 \circ \rho \quad (5.81)$$

と表されるため, 本質的に Steenrod 平方根 Sq^2 の作用で区別される. コホモロジー $H^*(BU(1) \times BSU(2)) = \mathbb{Z}[c_1, c'_2]$ 上の Sq^2 は

$$\text{Sq}^2 c_1 = c_1^2, \quad (5.82)$$

$$\text{Sq}^2 c'_2 = 0 \quad (5.83)$$

のように独立に作用する. しかし $H^*(BU(2)) = \mathbb{Z}[c_1, c'_2]$ の場合,

$$\text{Sq}^2 c_1 = c_1^2, \quad (5.84)$$

$$\text{Sq}^2 c'_2 = c_1 c'_2 \quad (5.85)$$

のように少し混ざった作用になる. これは, 本来今考えている Chern 類は $U(1), SU(2)$ のものではなく, $U(2)$ の Chern 類 C_i であり,

$$\text{Sq}^2 C_i = C_1 C_i + (i-1) C_{i+1} \quad (5.86)$$

と, $C_1 = c_1$, $C_2 = 1/2(c_1)^2 + c'_2$ から理解できる. このように作用が違いため, E^2 ページをめくるときに違いが生じる. 具体的に計算するとわかるように $U(2)$ ゲージ理論の場合

$$E_{4,1}^3 = 0 \quad (5.87)$$

になる. このため, Witten アノマリーをもたないことが理解できる.

さて、 $U(2)$ ゲージ理論の場合に具体的に微分の計算を行おう。特に興味があるのは

$$E_{6,0}^2 \xrightarrow{\alpha} E_{4,1}^2 \xrightarrow{\beta} E_{2,2}^2, \therefore \mathbb{Z}c_1c_2' \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}_2(c_2' + c_1^2) \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}_2c_1 \quad (5.88)$$

である。 $U(1) \times SU(2)$ のときと異なり^{*9}, $\alpha = \widetilde{Sq^2}$ と式 (5.85) より $\alpha: c_1c_2' \mapsto c_2'$ である。ゆえに

$$\text{im}(\alpha) = \mathbb{Z}_2. \quad (5.89)$$

一方、 $\beta: c_1^2 \mapsto c_1$ であるので、

$$\ker(\beta) = \mathbb{Z}_2 \quad (5.90)$$

よって、 $E_{4,1}^3 = 0$ である。

最後に Atiyah-Hirzebruch スペクトル系列でなく、Adams スペクトル系列で計算した場合について検討しておく。この時にも結局 Sq^2 の作用の違いが、Witten アノマリーの有無を区別する。Adams スペクトル系列の場合、 $\mathbb{Z}[c_1, c_2']$ 上の $\mathcal{A}_1$ 加群構造が必要であるからだ。このようにゲージ群の中心についての割り算で、Steenrod 平方根は基本的な役割を果たす。

5.3 $so(10)$ 大統一理論への応用

5.3.1 $so(10)$ 大統一理論のゲージ・アノマリーについて

この節では、 $so(10)$ 大統一理論 (Grand Unification Theory: GUT) のアノマリーについて調べる。この理論は、標準模型を超える理論 (Beyond the Standard Model: BSM) の 1 つで、様々な動機から研究されているが、ここでは詳細には触れずにアノマリーに関連する事項にだけ言及する。ゆえにゲージ群および物質場の表現のみを議論に引用する。

$so(10)$ ゲージ理論の特徴の 1 つは、摂動アノマリーが表現に依存せず自動的に相殺していることである。これは $so(10)$ が安全な代数であるということに由来する。しかし、非摂動アノマリーが解消しているか否かは全く非自明な問題である。そして調べてみると、次の 2 段階の議論が成立することがわかる。

- 対称性が $Spin \times Spin(10)$ のとき、非摂動アノマリーは表現に依らず存在しない。
- 対称性が $\frac{Spin \times Spin(10)}{\mathbb{Z}_2}$ のとき、表現によっては非摂動アノマリーが存在しうるが、 $so(10)$ GUT の表現では相殺している。

ここで、ゲージ代数は $so(10)$ であるが、ゲージ群は $SO(10)$ でなく $Spin(10)$ であることに注意^{*10}。また、対称性と言っているのは構造とバンドルを総じて指して^{*11}、 $Spin$ は $Spin$ 構造であるが、

^{*9} $U(1) \times SU(2)$ ゲージ理論では $\text{im}(\alpha) = 0$ である。

^{*10} $Spin(10)$ は $SO(10)$ の二重被覆をとったもので、 $SO(10) = \frac{Spin(10)}{\mathbb{Z}_2}$ である。

^{*11} 構造は時空に依存して変化する対称性で、バンドルは内部対称性をここでは表す。

$Spin(10)$ は単なるバンドルである．詳細は脚注*24 を参照．このように $so(10)$ 大統一理論の非摂動アノマリー相殺の議論は，決して摂動アノマリーのように自明の事柄ではない．

5.3.2 $Spin \times Spin(10)$ のボルディズム群

■準備

まず対称性が $Spin \times Spin(10)$ のときについて調べる．時空次元は 4 次元なので 6 次のボルディズム群の Anderson 双対を調べればよい．*12そこで Adams スペクトル系列を用いてこれを計算しよう*13．4.2.2 で書いた Admas スペクトル系列の E^2 ページは

$$E_2^{s,t} = \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{s,t}(H^*(Y, \mathbb{Z}_2), \mathbb{Z}_2) \Rightarrow \Omega_{t-s}^H(pt), \quad (5.91)$$

$$Y = MTH \quad (5.92)$$

であり，もし $\Omega^H(X)$ を求める場合には， $Y = MTH \wedge X_+$ と変更すれば良いのであった（ただし， X_+ は X と点の非交和である．）．今回計算するボルディズム群は

$$\Omega_{t-s}^{Spin \times Spin(10)} = \Omega_{t-s}^{Spin}(BSpin(10)) \quad (5.93)$$

なので，

$$Y = MTSpin \wedge BSpin(10) \quad (5.94)$$

にすればよい．ここで， $MTSpin$ はよく調べられていて*14，

$$MTSpin \sim MSpin \quad (5.95)$$

である．以下で表記の簡略化のために $Spin(10) = Spin_{10}$ とする． E^2 ページの計算は Wang-Wen-Witten のときとほぼ同様の手順で計算すればよい．すなわち，

$$E_2^{s,t} = \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{s,t}(H^*(MSpin, \mathbb{Z}_2) \otimes H^*(BSpin_{10}, \mathbb{Z}_2), \mathbb{Z}_2) \quad (5.96)$$

$$= \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{s,t}([\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}_1} \{\mathbb{Z}_2 \oplus M\}] \otimes H^*(BSpin_{10}, \mathbb{Z}_2), \mathbb{Z}_2) \quad (5.97)$$

であるが， $i < 8$ で $M_i = 0$ なので， M の寄与を無視して，さらに Change of ring 公式 4.91 を使うと，

$$E_2^{s,t} = \text{Ext}_{\mathcal{A}_1}^{s,t}(H^*(BSpin_{10}, \mathbb{Z}_2), \mathbb{Z}_2) \quad (5.98)$$

である．

*12 本当は摂動アノマリー（6 次ボルディズム群の自由部分）が解消しているのは自明なので，ここでは 5 次ボルディズム群の捻じれ部分だけを調べれば十分である．しかし，Adams スペクトル系列で計算すると，5 次も 6 次も一挙に求まるので，あまり気にしないことにする．

13 最初，Atiyah-Hirzebruch スペクトル系列で計算しようとしたが， $H^(Bspin, \mathbb{Z})$ の計算の仕方がわからなかったので諦めた． $H^*(Bspin, \mathbb{Z}_2)$ は $H^*(Bspin, \mathbb{Z})$ の単なる mod 2 reduction になっていない．例えば [20] の 3.6.3 を参照．

*14 $H = Spin, Spin_c, Pin^+, Pin^-, Pin_c, Spin_{SU(2)}$ のような有名な構造の MTH は [10] に記載されている．

■ $H^*(BSpin(10), \mathbb{Z}_2)$ の計算

ここでは $H^*(BSpin(10), \mathbb{Z}_2)$ を計算するが、これは少し難しい。例えば $H^*(BSU(2), \mathbb{Z}_2)$ ならば、単に Chern 類によって生成されるので、簡単に計算できたが、 $H^*(BSpin(10), \mathbb{Z}_2)$ の生成子は決して自明ではない。

ここでは $H^*(BSO(10), \mathbb{Z}_2)$ を介した計算の概略だけ記す。詳細は [29] の theorem 6.5 を参照。 $H^*(BSO(10), \mathbb{Z}_2)$ は $SO(10)$ 束についての Stiefel Wytney 類 w'_i で生成される。

$$H^*(BSO(10), \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[w'_2, w'_3, \dots, w'_{10}] \quad (5.99)$$

ここで群が $O(10)$ でなく $SO(10)$ なので $w_1 = 0$ であることに注意。 $\mathbb{Z}_2 \rightarrow Spin(10) \rightarrow SO(10)$ よりファイブレーション

$$B\mathbb{Z}_2 \rightarrow BSpin(10) \rightarrow BSO(10) \quad (5.100)$$

誘導される。これにファイブレーション $F \rightarrow E \rightarrow B$ に対する Serre スペクトル系列^{*15}を使おう。この E_2 ページ

$$e_2^{p,q} = H^p(B, H^q(F, \mathbb{Z}_2)) \Rightarrow H^{p+q}(E, \mathbb{Z}_2) \quad (5.101)$$

は今回の場合

$$e_2^{p,q} = H^p(BSO(10), \mathbb{Z}_2) \otimes H^q(B\mathbb{Z}_2) \Rightarrow H^{p+q}(BSpin(10), \mathbb{Z}_2) \quad (5.102)$$

なので、計算すると

$$H^*(BSpin(10), \mathbb{Z}_2) = \frac{H^*(BSO(10), \mathbb{Z}_2)}{\sim} \otimes \mathbb{Z}_2[z^D] \quad (5.103)$$

となる。ただし $\sim$ は

$$w'_2 \sim 0 \quad (5.104)$$

$$Sq^1 w'_2 \sim 0 \quad (5.105)$$

$$Sq^2 Sq^1 w'_2 \sim 0 \quad (5.106)$$

$$Sq^4 Sq^2 Sq^1 w'_2 \sim 0 \quad (5.107)$$

$$\vdots \quad (5.108)$$

$$Sq^{D/4} \dots Sq^2 Sq^1 w'_2 \sim 0 \quad (5.109)$$

で生成されるイデアルである。ここで D は $Spin(10)$ の実スピノル表現の次元 $D = 32$ である。また、 z は $H^*(B\mathbb{Z}_2)$ の生成子で、 z^D の次数は 32 となる。今回の計算では 5 次周辺の低次しかみないので、 $\mathbb{Z}_2[z^D]$ は無視する。

イデアルの関係式を Wu 公式を使って計算する。

$$Sq^1 w'_2 = w'_3 \sim 0, \quad (5.110)$$

$$Sq^2 Sq^1 w'_2 = Sq^2 w'_3 = w'_2 w'_3 + w'_5 \sim 0 \quad (5.111)$$

^{*15} これは単に Atiyah-Hirzebruch スペクトル系列である。一般コホモロジーでなく、常コホモロジーのときに特別にこう呼ばれる。

よって,

$$H^*(BSpin(10), \mathbb{Z}_2) = \frac{H^*(BSO(10), \mathbb{Z}_2)}{\sim} = \mathbb{Z}[w'_4 w'_6, w'_7, \dots] \quad (5.112)$$

となる. ただし $\dots$ はより高次の Stiefel-Whytney 類を表す.

■ E^2 ページ

上式を元に低次の $H^*(BSpin(10), \mathbb{Z}_2)$ の $\mathcal{A}_1$ 加群構造を書くと,

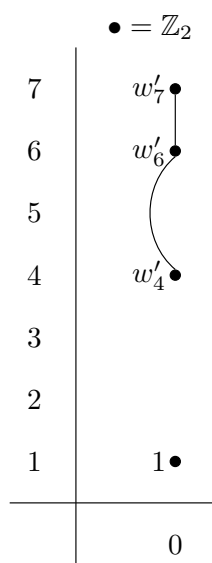


図 5.1 $H^*(BSpin(10), \mathbb{Z}_2)$ の $\mathcal{A}_1$ 加群構造

低次の $\mathcal{A}_1$ 加群構造は図で見てわかる通り, 2つの独立な部分: 点の部分 A とその他の部分 B に分けられることが知られている. 点の $\mathcal{A}_1$ 加群構造 A を minimal resolution を計算して E^2 ページを書けば図 5.2 のようになる^{*16}. また $\mathcal{A}_1$ 加群構造 B の E^2 ページは 4.2.2 で計算した $\mathcal{L}$ の E^2 ページで次数を 4 つずらせばいいので図 5.3 のようになる. ただし, 2つの図どちらも横軸が $t - s$ の次数で, 縦軸が s である.

^{*16} この結果は基本的で [24] や [26] で取り扱われている.

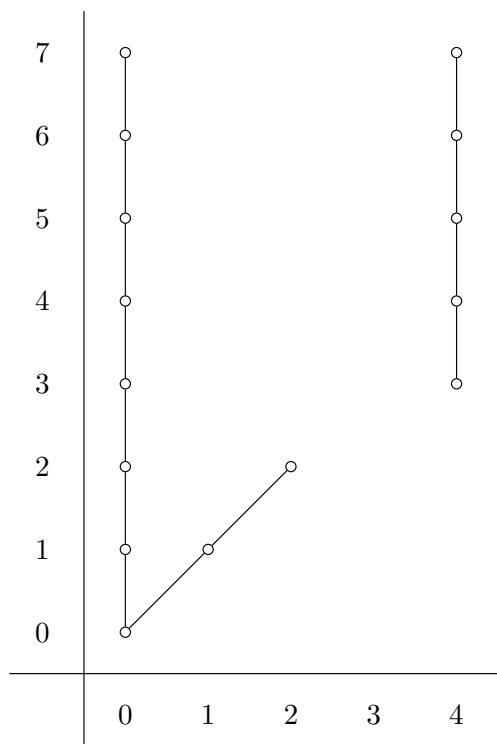


図 5.2 A の E^2 ページ

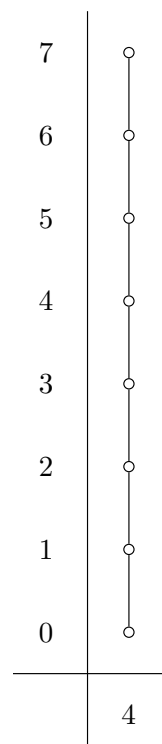


図 5.3 B の E^2 ページ

上図では表示されていないが、これは $5 \leq t-s \leq 7$ には何も無い。以上より

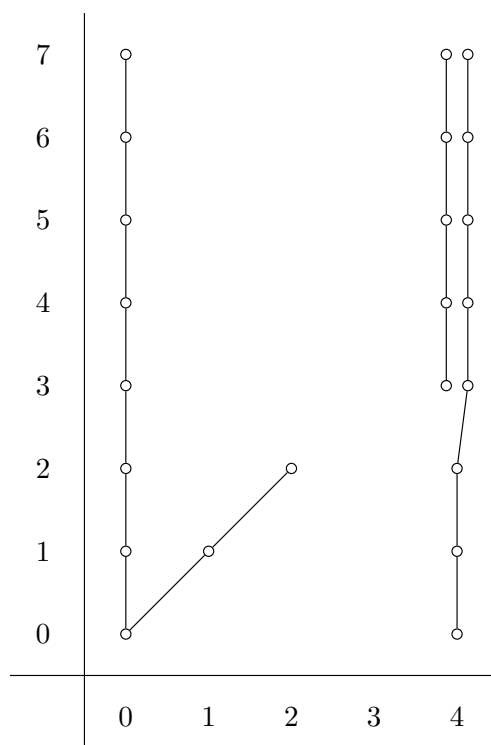


図 5.4 $\Omega_{t-s}^{Spin \times Spin(10)}$ の E^2 ページ

であるので,

$t-s$	0	1	2	3	4	5	6
$\Omega_{t-s}^{Spin \times Spin(10)}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}^2$	0	0

(5.113)

が得られる. よって

$$(I_{\mathbb{Z}} \Omega^{Spin \times Spin(10)})^6 = 0 \quad (5.114)$$

なので, $Spin(10)$ ゲージ理論には摂動アノマリーも非摂動アノマリーも存在しない.

5.3.3 $\frac{Spin \times Spin(10)}{\mathbb{Z}_2}$ のボルディズム群

次に対称性が $\frac{Spin \times Spin(10)}{\mathbb{Z}_2}$ で与えられる場合について考えよう. ただしこのように群の割り算が成立するのは, 物質場全ての表現について以下の条件を満たす場合である.

$$(-1)^F = (-1)^{\dim(R)+1} \quad (5.115)$$

ただし, R は $so(10)$ の表現の次元である. この式は次のように考えればよい. 表現を考える前の群の段階として $\frac{Spin(4) \times Spin(10)}{\mathbb{Z}_2}$ は同値関係

$$(-1, 1) \sim (1, -1) \in Spin(4) \times Spin(10) \quad (5.116)$$

を満たす. この表現としては

$$((-1)^F, 1) \sim (1, (-1)^{\dim(R)+1}) \quad (5.117)$$

となる^{*17}. よって, 式 (5.115) が理解できる. さて, 今考えている $so(10)$ GUT のスピノル場は確かにこの関係を満たしている. なぜならば, $F=1$ で R は **16** 表現であるので

$$(-1)^1 = (-1)^{16+1} \quad (5.120)$$

であるからだ. しかし, Higgs 場の表現がこれを満足するかは非自明である. 現実的に用いられているものとして, 例えば **126** 表現がある. Higgs 場はスカラー ($F=0$) なので

$$(-1)^0 \neq (-1)^{126+1} \quad (5.121)$$

^{*17} 例えば R が偶数次元表現ならば

$$R: -1 \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix} \quad (5.118)$$

であるが, 奇数次元表現ならば, $\det R = 1$ なので

$$R: -1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (5.119)$$

であることに注意.

であるため、この場合対称性として $\frac{Spin(4) \times Spin(10)}{\mathbb{Z}_2}$ はもたない。つまり、Higgs 場が $so(10)$ の奇数次元であるときにのみ、本節の議論は成立する。もし、偶数次元表現の Higgs が 1 つでもあれば、本節で議論するアノマリーは何ら矛盾を生まない。そして現実に応用する際には偶数次元表現の Higgs 場を導入することが多い。

しかしここでは一度、現実的なモデルへの応用は脇において、Higgs 場が $so(10)$ の奇数次元であるか、そもそも存在しないとして、形式的にアノマリーが生じるかどうかを議論しよう。この場合、計算結果だけ書けば

$$(I_{\mathbb{Z}} \Omega^{Spin \times Spin(10)})^6 = \mathbb{Z}_2 \quad (5.122)$$

のように非摂動アノマリーが存在する。この生成子は

$$S = \int w_2 w_3 \quad (5.123)$$

で与えられるため、これは本質的に Wang-Wen-Witten アノマリーである。そこで $Spin(10)$ の **16** 表現を $SU(2)$ の表現として分解することを考えよう。このとき、

$$\mathbf{16}_{Spin(10)} \supset \mathbf{2}_{SU(2)} \oplus \mathbf{2}_{SU(2)} \oplus \mathbf{2}_{SU(2)} \oplus \mathbf{2}_{SU(2)} \quad (5.124)$$

のように $SU(2)$ の 2 次元表現 ($j = 1/2$) に分解できる^{*18}。よって、Wang-Wen-Witten アノマリーは相殺している。

以上のように、 $so(10)$ GUT は非摂動アノマリーを含めてもなお相殺している。しかし、その相殺はかつて考えられてきた「表現に依らず $so(10)$ のゲージ理論はアノマリーが自動的に相殺する」というような単純な話ではなく、表現によってはゲージ・アノマリーが存在しうること、そして $so(10)$ GUT は良い表現を選んでいることによりゲージ・アノマリーが相殺していることがわかった。

^{*18} 4 次元表現 ($j = 3/2$) は埋め込めないことに注意。

第 6 章

't Hooft アノマリー

6.1 't Hooft アノマリーの意味

't Hooft アノマリーは、理論の矛盾を導かないアノマリーである。ただし、繰り込み群不変という強力な性質をもつため、理論の低エネルギーの振る舞いを研究する際の、有用な手段の 1 つとなっている。なぜ低エネルギーの解析手段が必要か、その動機を与えるものとして量子色力学 (QCD; Quantum Chromodynamics) がある。QCD は強い相互作用の性質を完全に記述すると信じられている。しかし、低エネルギーでは摂動展開のパラメーターが大きくなりすぎる (強結合領域である) ため、摂動論による描像が破綻してしまう。そのため、QCD の低エネルギーの振る舞いには、理論物理における重要な課題として未だ数多く残っている。例えば、実験・観測結果より、QCD の基本粒子であるクォークは、低エネルギーで直接観測できず、代わりにその複合粒子のみが観測されること (カラーの閉じ込め) が知られているが、この理論的証明は未だ誰も成功していない。また、メソン・バリオン以外の複合粒子として、エキゾチックハドロンも観測されているが、これも摂動論の範囲では捉えることができない。このような現象を理解するために、理論の低エネルギー領域を探索する手法の開発が必要であるが、その代表例が 't Hooft アノマリーである。これを応用することで、例えば π^0 粒子が光子の崩壊することが示される。この現象はシグマ模型の単なるダイアグラム計算から導出することはできず、アノマリーを考えることで初めて理解できる。また、無質量 QCD について 't Hooft アノマリーを解析することで、低エネルギー領域には必ず無質量モードが存在しなければならないことが、厳密に証明できる。特に 3-flavor の場合には、この無質量モードをメソン・バリオンとしても矛盾が生じる [12],[30] ため、これは自発的対称性の破れにより Nambu-Goldstone 粒子が生じた [12],[16],[13] と考えざるをえず、 π メソンの起源が説明できる。このように 't Hooft アノマリーを用いることで様々な QCD の低エネルギー現象を理解することができる。

6.1.1 't Hooft アノマリーの定義と繰り込み群不変性

ゲージ・アノマリーの導出で注意したように、ゲージ場がダイナミカルでないときそのアノマリーは理論の矛盾を導かない。この性質を最大限利用したのが't Hooft アノマリーである。't Hooft アノマリーは、大域的対称性 G を「形式的に」ゲージ化した際に生じるアノマリーとして定義される。ここで「形式的に」と述べているのは、実際上ダイナミカルで物理的な場としてゲージ場を導入しているのではなく、単にある種の無限次元のパラメーターとしてゲージ場を捉えているからである。

$$\text{ゲージ化: } Z = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-S[\psi, A]} \mapsto Z[A] = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-S_{\text{gauged}}[\psi, A]} \quad (6.1)$$

A について汎関数積分は実行しないため、 A は単なる外場である。よって $A = 0$ とすることで元の理論に戻る。

$$\text{非ゲージ化: } Z[A] \xrightarrow{A=0} Z \quad (6.2)$$

このように、 Z と $Z[A]$ は互いに行き来することができる。

さて、 $Z[A]$ について繰り込み群変換を実行することを考えよう。このときの高エネルギー側を $Z_{\text{UV}}[A]$ 、低エネルギー側を $Z_{\text{IR}}[A]$ とする。

$$\text{繰り込み群変換: } Z_{\text{UV}}[A] \mapsto Z_{\text{IR}}[A] \quad (6.3)$$

上式で $A = 0$ とすれば、元の理論 Z における繰り込み群変換が誘導される。

$$\text{繰り込み群変換: } Z_{\text{UV}} \mapsto Z_{\text{IR}} \quad (6.4)$$

もし Z_{UV} と Z_{IR} が正しく繰り込み群変換で繋がっているならば、そのゲージ化した $Z_{\text{UV}}[A]$ と $Z_{\text{IR}}[A]$ についても繰り込み群変換で繋がっていると考えられる。

$Z_{\text{UV}}[A]$ と $Z_{\text{IR}}[A]$ が繰り込み群変換で繋がっているならば、そのアノマリーは必ず一致せねばならない。これは単にアノマリーがトポロジカルで繰り込み群不変量であるからと考えても良いし、次のようにアノマリー流入を使って捉えることもできる。つまり、今アノマリーが $e^{-iS_{\text{top}}[A]}$ (バルク) と $Z[A]$ (エッジ) で互いに相殺しているとしよう。

$$Z[A]_{\text{UV}} \times e^{-iS_{\text{top}}[A]} \quad (6.5)$$

この繰り込み群変換をしたら、

$$Z[A]_{\text{IR}} \times e^{-iS_{\text{top}}[A]} \quad (6.6)$$

が得られるが、当然これもアノマリーが相殺している。よって、同じ TQFT S_{top} でアノマリーが相殺しているので、UV 側と IR 側でアノマリーは一致しなければならない*1。

*1 以上の議論は、't Hooft によるものと少し異なる。彼はスペクテイター・フェルミオンと呼ばれる物質場をバルクの TQFT の代わりに用いた。

以上の議論により、 $Z[A]_{\text{UV}}$ と $Z[A]_{\text{IR}}$ のアノマリーが一致することは、 Z_{UV} と Z_{IR} が繰り込み群変換で繋がるための必要条件を与えることがわかる。これを't Hooft の UV-IR アノマリー一致条件という。QCD のように直接繰り込み群変換を実行することが難しい系において、アノマリー一致条件は IR 側の分配関数を繰り込む有効な手段である。

6.2 massless QCD への応用

6.2.1 問題意識（カイラル対称性の破れ）

この節では、特にクォークの質量を 0 とした massless QCD に着目する。このような系を考えたのは、現実世界における次のような問題に答えるためであった。

- バリオンが非常に重い。
- π メソンが非常に軽い。

1 つ目の問題について説明する。陽子 p はアップ・クォーク u とダウン・クォーク d の組み合わせで構成されているバリオンの代表例である ($p = uud$)。ここで質量はアップ・クォーク u の質量は 1.7-3.1 MeV でダウン・クォーク d の質量は 4.1-5.7 MeV であるのに対して、陽子 p の質量は 938 MeV にも及ぶ。すなわちクォークの質量の和に比べて、陽子 p は圧倒的に重い。これは他のバリオンについても同様である。よって、バリオンの質量にはクォーク以外の寄与があると考えられている。

$$(\text{バリオンの質量}) = (\text{クォークの質量}) + (\text{その他の寄与}) \quad (6.7)$$

この（その他の寄与）を探るための方法論は、一般にクォークの質量をゼロと近似して、バリオンが有質量であることを示すことである。クォークの質量はアップ・クォーク u とダウン・クォーク d 、ストレンジ・クォーク s について特に小さいので、基本的に u, d だけの系 (2-flavor massless QCD) と u, d, s だけの系 (3-flavor massless QCD) が主な考察の対象になる。

2 つ目の問題について、1 GeV 以下のメソンの内、 η' メソンを除くスピン 0 の擬スカラーメソン (擬スカラーメソン 8 重項)

$$\pi^0, \pi^+, \pi^-, K^0, \bar{K}^0, K^+, K^-, \eta \quad (6.8)$$

が、その他のメソンと比較して軽いという性質をもつ。この問題についてもクォークの質量が 0 として、massless のスカラー粒子が存在することを示すことが目標となる。

以上、2 つの問題を提起したが、これはカイラル対称性の破れを仮定することで一挙に解決された。つまり、 N -flavor massless QCD を考える。

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^N \bar{q}_i i\gamma^\mu (\partial_\mu + A_\mu) q_i + \mathcal{L}_{\text{gluon}} \quad (6.9)$$

$$= \sum_{i=1}^N \bar{q}_{iL} i\gamma^\mu (\partial_\mu + A_\mu) q_{iL} + \sum_{i=1}^N \bar{q}_{iR} i\gamma^\mu (\partial_\mu + A_\mu) q_{iR} + \mathcal{L}_{\text{gluon}} \quad (6.10)$$

ここでスピノル場 q_i の添え字 i はフレーバーを表し、それぞれ $u, d, s, \dots$ が対応していると考え、ここでフレーバーについて左右に独立に回す対称性が存在する。

$$G = U(N)_L \times U(N)_R \quad (6.11)$$

$$= SU(N)_L \times SU(N)_R \times U(1)_A \times U(1)_V \quad (6.12)$$

ここで、 $U(1)_A$ 対称性は後の ABJ アノマリーにより効いてなくなる。

$$G' = SU(N)_L \times SU(N)_R \times U(1)_V \quad (6.13)$$

この大域的対称性 G' が

$$H = SU(N)_V \times U(1)_V \quad (6.14)$$

に破れていると仮定すると、低エネルギーには商空間 G'/H に対応した Nambu-Goldstone 粒子が現れる。特に $N = 3$ のとき $\dim(G'/H) = 8$ であるため、8 個の massless 粒子がある（2 つ目の問題の解決）^{*2} ^{*3}。さらに、自発的対称性の破れに伴い、バリオンは質量を獲得する（1 つ目の問題の解決）。

このようにカイラル対称性の破れは、非常に重要な帰結をもたらした。しかし、このカイラル対称性の破れは必然的に生じるのであろうか？もし、't Hooft アノマリーの議論により、カイラル対称性の破れが起きなければならないと結論づけられれば、QCD の低エネルギーの理解に対する理解を進展させることができる。そこで本章では「カイラル対称性の破れが't Hooft アノマリー一致条件より導出できるか？」ということに焦点を当てて議論する。

6.2.2 Weinberg-Witten の定理

't Hooft アノマリーの議論に移る前に、幾らか前提となる知識が存在する。その 1 つが Weinberg-Witten の定理 [31] である。この定理により、スピン 1 以上のハドロンは必ず有質量であることが結論づけられる。そのため以降の't Hooft アノマリーの議論では、スピン 0 のメソン、およびスピン 1/2 のバリオンについてのみ議論すればいいことがわかる。

さて、この定理の主張は 2 種類に分けられる。

- ローレンツ共変なカレントをもつ、スピンが 1 以上の粒子は無質量ではありえない。
- ローレンツ共変なエネルギー・運動量テンソルをもつ、スピンが 3/2 以上の粒子は無質量ではありえない。

^{*2} 以上の議論は、スピン 0 の擬スカラーメソンと Nambu-Goldstone 粒子を同一視しているが、もちろん本来メソンは質量をもつため、近似的な Nambu-Goldstone 粒子である。これをしばしば擬 Nambu-Goldstone 粒子という。今回、メソンを Nambu-Goldstone 粒子と見做す理論的根拠はそのエネルギースケールにある。つまり、明示的破れのスケール（クォークの質量）に比べて、カイラル対称性の自発的破れのスケールは約 1 GeV と著しく大きいため、この近似が妥当性をもつ。

^{*3} もし $U(1)_A$ が残っていたら、Nambu-Goldstone 粒子が 9 つになる。これでは η' メソンの質量も軽くなってしまい現実と矛盾する。これを $U(1)_A$ 問題といい、ABJ アノマリーの発見により解決された。

一見すると、スピンの観点からは前者の方が強力な主張かのようにであるが、前者は何らかの対称性の非自明表現である粒子に対してその粒子の有質量性を保証する一方、後者はほぼ任意の粒子に対して有質量性を保証している点に注意してほしい。証明自体は前者さえ追えば、後者も自ずと理解できるので、ここでは前者の主張のみを証明する。

— 証明 —

(仮定)

$\partial_\mu J^\mu = 0$ を満たすカレントの存在を仮定する。1 粒子状態を無質量と仮定し、 $|p, h\rangle$ のように運動量 p とヘリシティ h についてラベルする。また、非零のチャージの存在を仮定する。

(証明前半)

ここで、

$$W = \int d^3\mathbf{x} \langle p', \pm h | J^0(\mathbf{x}, 0) | p, \pm h \rangle$$

を考える。仮定より p, p' はヌルである。… (1) ここで、チャージを q としよう。

$$W = \int d^3\mathbf{x} \langle p', \pm h | J^0(\mathbf{x}, 0) | p, \pm h \rangle = \langle p', \pm h | Q | p, \pm h \rangle = q \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdots (2)$$

(1) より $p' - p$ は空間的である。… (3) また、

$$W = \int d^3\mathbf{x} \langle p', \pm h | e^{-iP'x} J^0(0, 0) e^{iPx} | p, \pm h \rangle = \int d^3\mathbf{x} e^{i(p-p')x} \langle p', \pm h | J^0(0, 0) | p, \pm h \rangle$$

よって

$$W = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \langle p', \pm h | J^0(0, 0) | p, \pm h \rangle \cdots (4)$$

(2), (4) より $p' \rightarrow p$ で

$$\langle p', \pm h | J^0(0, 0) | p, \pm h \rangle = \frac{q}{(2\pi)^3}$$

ローレンツ対称性も加味すれば

$$\langle p', \pm h | J^\mu(0, 0) | p, \pm h \rangle = \frac{qp^\mu}{(2\pi E)^3}$$

である。仮定より、 $q \neq 0$ なので、 $\lim_{p' \rightarrow p} \langle p', \pm h | J^\mu(0, 0) | p, \pm h \rangle$ は非零である。(A)

(証明後半)

(3) より次のような座標系がとれる。

$$p = (E, 0, 0, E), \quad p' = (E, 0, 0, -E)$$

ここで、 z 軸周りの回転行列 $R(\theta)_\mu^\nu$ の作用を考える。

$$\begin{aligned} |p, \pm h\rangle &\mapsto e^{\pm i\theta h} |p, \pm h\rangle \\ |p', \pm h\rangle &\mapsto e^{\mp i\theta h} |p', \pm h\rangle \end{aligned}$$

よって

$$e^{\pm 2ih\theta} \langle p', \pm h | J^\mu | p, \pm h \rangle = R(\theta)_\nu^\mu \langle p', \pm h | J^\nu | p, \pm h \rangle$$

ここで、フーリエ展開を考えると、回転行列には $\sin \theta, \cos \theta$ しかいないので

$$e^{\pm 2ih\theta} \langle p', \pm h | J^\mu | p, \pm h \rangle = A^\mu e^{-i\theta} + B^\mu + C^\mu e^{i\theta}$$

と展開できる。よって、 $2|h| > 1$ のとき、 $\langle p', \pm h | J^\mu | p, \pm h \rangle = 0$ である。(B)

(結論)

(A) と (B) は矛盾する。よって、 $|h| > 1/2$ のときに仮定を満たす状態は存在しない。

カレントをエネルギー・運動量テンソルに置き換えてもほぼ同様の議論ができる。このときは、ヘリシティ $|h| > 1$ の状態が存在しなくなる。

— 証明終わり —

さて、この定理の応用の 1 つはもちろんハドロンの有質量性の保証であるが、他に「重力子が複合粒子ではあり得ない」ことも保証してくれる。これは本筋から外れるが、興味深い結論なので、軽く触れておこう。重力子は無質量であることは仮定する。スピン 2 なので、もし重力子が複合粒子であるならばカレント J^μ をもつため無質量性と矛盾する。しかし素粒子であるならば、Wigner 分類における無質量表現 $ISO(2)$ に相当する。 $ISO(2)$ は非コンパクトであるため、次のように非物理的自由度を取り出す必要がある。

$$ISO(2) = SO(2) \times (\text{非物理的自由度}) \quad (6.15)$$

この非物理的自由度は、ゲージ対称性に相当するため、重力子のカレントは共変微分 D_μ について

$$D_\mu J^\mu = 0 \quad (6.16)$$

となり、Weinberg-Witten の定理の前提条件 $\exists \partial_\mu J^\mu = 0$ から外れるため、矛盾が生じない。以上より、重力子は複合粒子ではあり得ず、必ず素粒子である。この議論は、重力子以外の他のゲージ・ボゾンについても同様に成立する。

6.2.3 2-color massless QCD

まず、2-color massless QCD に対する 't Hooft アノマリー一致条件の応用を考える。本来 massless QCD のゲージ群は $SU(3)_c$ であるが、代わりに $SU(2)_c$ の場合を考えたのがこの 2-color massless QCD である。もちろんこれは非現実的であるが、最も簡単に 't Hooft アノマリー一致条件を考えることができる、便利なトイモデルである。

さて、クォーク模型におけるメソン・バリオンの定義は次である。 n -color, つまり、ゲージ群を $SU(n)_c$ とする。この m 次元表現を $\mathbf{m}$ と書くことにする。このとき、基本色（基本表現、クォーク）とその”補色”を混ぜることで白色（白明表現）が作れる。

$$\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}^* = \mathbf{1} \oplus \cdots \quad (6.17)$$

この自明表現をメソンという。また、基本色を全色混ぜることで白色（自明表現）が作れるので、 $\mathbf{n}$ の n 回のテンソル積表現を考える。

$$\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \cdots \otimes \mathbf{n} = \mathbf{1} \oplus \cdots \quad (6.18)$$

この自明表現をバリオンという。

さて、2-color の場合を考えてみよう。このとき、メソンはクォークと反クォークのテンソル積で得られるので、ボゾンである。また、バリオンはクォーク 2 つのテンソル積なのでボゾンである。すなわち、2-color massless QCD の低エネルギーが、メソン場とバリオン場で記述されると仮定すると、そこにフェルミオン場は一切存在しない。一般にアノマリーを生み出すのは、無質量モードに限定される。2-color の場合、低エネルギー側にフェルミオン場が全くいない。

- スピン 0... 有質量ないし無質量。
- スピン 1... Weinberg-Witten の定理より必ず有質量。

ここで、低エネルギー側のスピン 0 粒子は一般に量子補正により質量を獲得する。しかし、低エネルギー側には必ず無質量スピン 0 粒子（ π 粒子）が存在せねば、't Hooft アノマリーが一致しない。よって、最も合理的なシナリオは、この低エネルギー側で存在する無質量スカラー粒子は Nambu-Goldstone 粒子であると考えることである。すなわち、自発的対称性の破れが起きる。

6.2.4 3-color massless QCD

次はより現実的な 3-color massless QCD を考える。特に u, d, s が無質量であると近似した 3-flavor に興味があるが、議論を見やすくするために $N(\geq 3)$ -flavor の場合を考えよう*4。このとき低エネルギー側にはメソン・バリオン場が存在するが、バリオン場は $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}$ の自明表現であるので、クォーク 3 つ分のフェルミオン場である。また、メソン場はボゾンである。Weinberg-Witten の定理より、スピン 3/2 以上のバリオンは必ず有質量である。よって、't Hooft アノマリーに寄与しうるのはスピン 1/2 のバリオン、そしてスピン 0 のメソンに限定される。

- スピン 0... 有質量ないし無質量。
- スピン 1/2... 有質量ないし無質量。
- スピン 1... Weinberg-Witten の定理より必ず有質量。
- スピン 3/2... Weinberg-Witten の定理より必ず有質量。

ここで対称性の破れが起きていないと仮定し、背理法により対称性が破れることを示す。つまりスピン 1/2 粒子について対称性がフルに生き残っていて

$$G' = SU(N)_L \times SU(N)_R \times U(1)_V \quad (6.19)$$

*4 s は無質量と考えるにはいささか重すぎると考える向きもあるので、本当は u, d だけ存在する 2-flavor の場合でアノマリー一致条件から何か強いことが言えるといいのだが、残念ながらあまり制限をかけることはできない。

であるとしよう。この対称性が存在する限り、スピン 1/2 粒子は質量項を構成できない。一方、スピン 0 粒子が質量項をもつのに何ら障害はないので、量子補正により質量項をもつと仮定しよう。すなわち、低エネルギー側で無質量なスピン 0 粒子は Nambu-Goldstone 粒子をおいて他にないとする。このとき、't Hooft アノマリーに寄与できるのは、スピン 1/2 のバリオンに限定される。

ここで、't Hooft アノマリーを計算する。対称性は $SU(N) \times U(1)$ であるので、

$$(I_{\mathbb{Z}} \Omega^{Spin \times SU(N) \times U(1)})^6 = \mathbb{Z}^4 \quad (6.20)$$

となる*5。ここで生成子は Chern-Simons 理論で、対称性は $u(1) - u(1) - u(1)$ と $u(1) - grav - grav$ と $u(1) - su(N) - su(N)$ および $su(N) - su(N) - su(N)$ である。ただし、今 $U(1)$ はベクトル型に結合しているので、 $u(1) - u(1) - u(1)$ 型と $u(1) - grav - grav$ 型の摂動アノマリーはゼロである。ゆえに $u(1) - su(N) - su(N)$ と $su(N) - su(N) - su(N)$ についてだけ考察する。つまり考えるアノマリーは

$$d_1^{\alpha\beta\gamma}(r) := \text{tr}[T_r^\alpha \{T_r^\beta, T_r^\gamma\}], \quad (6.21)$$

$$d_2^{\alpha\beta}(r) := Q \text{tr}\{T_r^\alpha, T_r^\beta\} = Q \times 2 \text{tr}(T_r^\alpha T_r^\beta) \quad (6.22)$$

の 2 つだけである。ただし、 $U(1)_V$ のチャージが Q であるとした。また、 r は $SU(N)$ の表現を表す。計算を簡便にするためにアノマリー係数 $A(r)$ を定義する。これは基本表現のアノマリーとの比で定義される。

$$d_1^{\alpha\beta\gamma}(r) = A(r) \cdot d_1^{\alpha\beta\gamma}(\text{基本表現}) \quad (6.23)$$

また、Dynkin 指数 $\mu(r)$ は、生成子の積のトレースと次のように関係する。

$$\text{tr}(T_r^\alpha T_r^\beta) = \frac{1}{2} \mu(r) \delta^{\alpha\beta} \quad (6.24)$$

$$\therefore d_2^{\alpha\beta}(r) = Q \mu(r) \delta^{\alpha\beta} \quad (6.25)$$

である。つまり、アノマリー係数 $A(r)$ と Dynkin 指数 $\mu(r)$ によってアノマリーが決定される。特に $SU(N)_L$ に注目して計算することにする。

- $su(3)_L - su(3)_L - su(3)_L$ アノマリー $\dots a_L^1 = A(r)$
- $u(1) - su(3)_L - su(3)_L$ アノマリー $\dots a_L^2 = Q \mu(r)$

ここで、アノマリー係数の計算方法は次の通りである。

アノマリー係数 $A(r)$ の計算方法 ($\bar{r}$ は r の共役表現)

$$A(r_1 \oplus r_2) = A(r_1) + A(r_2), \quad (6.26)$$

$$A(r_1 \otimes r_2) = A(r_1) \dim(r_2) + \dim(r_1) A(r_2), \quad (6.27)$$

$$A(\bar{r}) = -A(r) \quad (6.28)$$

*5 この結果は、標準模型のゲージ・アノマリーの結果を流用すれば理解できる。

また, Dynkin 指数は Casimir 演算子 $C(r) := \sum_a T_r^a T_r^a$ と

$$\dim(G) \frac{1}{2} \mu(r) = C(r) \dim(r) \quad (6.29)$$

という関係があるので, Casimir 演算子を介して計算される. 以上から, 各表現について次が求まる.

表現 r	$\dim(r)$	$\mu(r)$	$A(r)$
$\begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array}$	N	1	1
$\begin{array}{ c } \hline \square \\ \square \\ \hline \end{array}$	$\frac{1}{2}N(N+1)$	$N+2$	$N+4$
$\begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$	$\frac{1}{2}N(N-1)$	$N-2$	$N-4$
$\begin{array}{ c } \hline \square \\ \square \\ \square \\ \hline \end{array}$	$\frac{1}{6}N(N+1)(N+2)$	$\frac{1}{2}(N+2)(N+3)$	$\frac{1}{2}(N+3)(N+6)$
$\begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \square & \square \\ \hline \end{array}$	$\frac{1}{6}N(N-1)(N-2)$	$\frac{1}{2}(N-2)(N-3)$	$\frac{1}{2}(N-3)(N-6)$
$\begin{array}{ c c c } \hline \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$	$\frac{1}{3}N(N^2-1)$	N^2-3	N^2-9

(6.30)

(UV 側のアノマリー) 左巻きクォークの $SU(N)_L$ 表現は $r = \square$ である. これが 3-color 分いるので

$$a_L^{1,\text{UV}} = 3 \quad (6.31)$$

である. また, $U(1)_V$ 電荷は $Q = 1$ である. よって

$$a_L^{2,\text{UV}} = 3 \quad (6.32)$$

(IR 側のアノマリー) 左巻きバリオンの表現を求めよう. これは左巻きクォーク 3 つないし, 左巻きクォーク 1 つと右巻きクォーク 2 つの組み合わせで作られる. よって前者については

$$L_1 = \begin{array}{|c|} \hline l \\ \hline \end{array}, L_2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline l & l & l \\ \hline \end{array}, L_3 = \begin{array}{|c|c|} \hline l & l \\ \hline \end{array} \quad (6.33)$$

の 3 種類があり得る. また, 後者については

$$L_4 = \begin{array}{|c|} \hline l \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline r \\ \hline \end{array}, L_5 = \begin{array}{|c|} \hline l \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline r & r \\ \hline \end{array} \quad (6.34)$$

の 2 種類があり得る. 同様に右巻きバリオンの表現は

$$R_1 = \begin{array}{|c|} \hline r \\ \hline \end{array}, R_2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline r & r & r \\ \hline \end{array}, R_3 = \begin{array}{|c|c|} \hline r & r \\ \hline \end{array}, R_4 = \begin{array}{|c|} \hline r \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline l \\ \hline \end{array}, R_5 = \begin{array}{|c|} \hline r \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline l & l \\ \hline \end{array} \quad (6.35)$$

の 5 種類がある. 以上のバリオンでアノマリーに関係してくるのは, 左巻きクォークを含む L_i および R_4, R_5 である. ここで, 指数 p_i を導入しよう. ただし, 絶対値 $|p_i|$ は L_i ないし R_i の数を表し, その符号は L に対してプラス, R に対してマイナスと定める. よって

$$a_L^{1,\text{IR}} = \sum_i p_i A(L_i) - p_4 A(R_4) - p_5 A(R_5), \quad (6.36)$$

$$a_L^{2,\text{IR}} = 3 \left[\sum_i p_i \mu(L_i) - p_4 \mu(R_4) - p_5 \mu(R_5) \right] \quad (6.37)$$

である。ただし、バリオンはクォーク 3 つ分なので $Q = 3$ であることを使った。具体的に計算すると

$$a_L^{1,\text{IR}} = \frac{p_1}{2}(N-3)(N-6) + \frac{p_2}{2}(N+2)(N+3) + p_3(N^2-9) \quad (6.38)$$

$$+ p_4 \left[\frac{1}{2}N(N-1) - N(N-4) \right] + p_5 \left[\frac{1}{2}N(N+1) - N(N+4) \right], \quad (6.39)$$

$$\frac{a_L^{2,\text{IR}}}{3} = \frac{p_1}{2}(N+2)(N+3) + \frac{p_2}{2}(N-2)(N-3) + p_3(N^2-3) \quad (6.40)$$

$$+ p_4 \left[\frac{1}{2}N(N-1) - N(N-2) \right] + p_5 \left[\frac{1}{2}N(N+1) - N(N+2) \right] \quad (6.41)$$

ここで、 $N = 3\text{-flavor}$ としよう。

$$a_L^{1,\text{IR}} = 27p_2 - 15p_5, \quad (6.42)$$

$$\frac{a_L^{2,\text{IR}}}{3} = 15p_2 + 6p_3 - 9p_5 \quad (6.43)$$

一方、UV 側では $a_L^{1,\text{UV}} = a_L^{2,\text{UV}} = 3$ であった。ここで $\frac{a_L^{2,\text{IR}}}{3}$ は 3 の倍数なので、いかなる p_i をもってしても $a_L^{2,\text{UV}} = a_L^{2,\text{IR}}$ にはならない。よって、矛盾。以上より、対称性 G' は必ず破れなければならない。

6.2.5 Wess-Zumino-Witten 項

前節までの議論により、't Hooft アノマリー一致条件の観点から、3-flavor massless QCD は低エネルギー側でカイラル対称性の破れを起こすことが理解できた。破れた後の群については何も言っていなかったが、ここでは次のように対角部分 $SU(3)_V \times U(1)_V$ に破れるとしよう。

$$SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V \xrightarrow{SSB} SU(3)_V \times U(1)_V \quad (6.44)$$

破れた後の群はベクトル的に結合しているので、バリオン場からは全く 't Hooft アノマリーが生じない。よって、全ての 't Hooft アノマリーが Nambu-Goldstone 粒子により生じると考える。

一般に自発的対称性の破れ $G \rightarrow H$ によって生じる Nambu-Goldstone 粒子のラグランジアンは、トポロジカルな部分を除き殆ど定まることが知られている。これを低エネルギーエネルギー定理という。ここでは、この定理の証明はせず、その議論の概観を述べる。Nambu-Goldstone 場を $\pi(x)$ としよう。これはコセット空間 G/H のリー代数の元として表される。

$$U(x) := e^{i\pi(x)} = e^{i\pi^a(x)T^a} \in G/H \quad (6.45)$$

ただし、 T^a は G/H のリー代数の生成子である。この U のラグランジアン（の主要項）は

$$\mathcal{L}(U) = \text{tr}[U^{-1}\partial_\mu U \cdot U^{-1}\partial^\mu U] \quad (6.46)$$

と書けるのが、低エネルギー定理の主張である。

今回のケースでは、 $G' = SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ で $H = SU(3)_V \times U(1)_V$ であるので、

$$G'/H = \frac{SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V}{SU(3)_V \times U(1)_V} = SU(3) \quad (6.47)$$

となる．最後の等号はコセット空間の構成より理解できる． $G' = SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ の元を (U_L, U_R, U_V) とすると，コセット空間上では

$$(U_L, U_R, U_V) \sim (U_L u, U_R u, U_V u') \quad (6.48)$$

という同値関係がある．ただし， $(u, u) \in SU(3)_V \subset SU(3)_L \times SU(3)_R$ で $u' \in U(1)_V$ である．ここで特に $u = U_R^{-1}$, $u' = U_V^{-1}$ とおけば

$$(U_L, U_R, U_V) \sim (U_L U_R^{-1}, 1, 1) \quad (6.49)$$

である．つまり， G'/H の元は常に $U = U_L U_R^{-1}$ とかけるが，これはユニタリで行列式が 1 なので $SU(3)$ の元である．よって $G'/H = SU(3)$ となる．

$U \in G/H = SU(3)$ のラグランジアン $\mathcal{L}(U)$ に対して，'t Hooft アノマリー一致条件を考える．大域的対称性 G' のゲージ化をしよう． $SU(3)_L \times SU(3)_R$ のゲージ場を A_L, A_R とし， $U(1)_V$ のゲージ場を A_V とする．このとき， $D^\mu = \partial^\mu + A_L^\mu + A_R^\mu + A_V^\mu$ と定義して

$$\mathcal{L}_{\text{gauged}} = \text{tr}[U^{-1} D_\mu U \cdot U^{-1} D^\mu U] \quad (6.50)$$

が得られる．このラグランジアンのアノマリーが，UV 側のアノマリーと一致すればよいが，残念ながらそれは不可能である．なぜなら，上式でゲージ変換

$$A_L^\mu \rightarrow g_L(A_L^\mu + \partial^\mu)g_L^{-1}, \quad (6.51)$$

$$A_R^\mu \rightarrow g_R(A_R^\mu + \partial^\mu)g_R^{-1}, \quad (6.52)$$

$$A_V^\mu \rightarrow g_V(A_V^\mu + \partial^\mu)g_V^{-1}, \quad (6.53)$$

$$U \rightarrow g_L U g_R^{-1} \quad (6.54)$$

の下で，不変であるからである．ただし，最後の式で g_V が出てこないのは $U = U_L U_R^{-1}$ と表示すれば，ゲージ変換 $U_L \rightarrow g_L U_L, U_R \rightarrow g_R U_R$ より理解できる．

このように，ナイーブな作用 $S_{\text{gauged}} = \int \mathcal{L}_{\text{gauged}}$ ではアノマリー一致条件は満たせない．そこで，低エネルギー定理では定まらないトポロジカルな項よりアノマリー一致が達成され则认为することに．このトポロジカルな項を Wess-Zumino-Witten 項 [5] という．

$$S = S_{\text{gauged}}[U, A_L, A_R, A_V] + S_{\text{WZW}}[U, A_L, A_R, A_V] \quad (6.55)$$

ただし， $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V \xrightarrow{SSB} SU(3)_V \times U(1)_V$ に対する Wess-Zumino-Witten 項を考えると煩雑であるので，最初は簡単のために $SU(3)_L \rightarrow 1$ に破れる場合を議論しよう．

■ $SU(3) \xrightarrow{SSB} 1$ の場合の Wess-Zumino-Witten 項

このとき Nambu-Goldstone 粒子 U はコセット空間 $SU(3)$ の元である．このとき高エネルギー側で生じるアノマリー J は，

$$(I_{\mathcal{Z}} \Omega^{Spin \times SU(3)})^6 = \mathbb{Z} \quad (6.56)$$

の生成子： $su(3) - su(3) - su(3)$ の 5 次元 Chern-Sions 理論で書ける．

$$J(g) = e^{2\pi i S_{CS}[M_5]} = e^{2\pi i \int_{M_5} \omega_{CS}} \quad (6.57)$$

ただし， M_5 の構成は以下の通りであった．

$$M_5 = \bar{M}' \cup M, \quad (6.58)$$

$$M = (D^5, A), \quad (6.59)$$

$$M' = (D^5, A^g) \quad (6.60)$$

よって，

$$J(g) = \exp \left(2\pi i \int_{D^5} \omega_{CS}(A^g) - 2\pi i \int_{D^5} \omega_{CS}(A) \right) \quad (6.61)$$

と表示できる．このアノマリーを IR 側で再現するための最も単純な方法は Nambu-Goldstone 場 $U(x)$ を 5 次元上に拡張し，

$$kS_{WZW}[A, U] = k \int_{D^5} [\omega_{CS}(A^U) - \omega_{CS}(A)] \quad (6.62)$$

という作用を考えることである．この作用において Nambu-Goldstone 場 U とゲージ変換関数 g はどちらも $SU(3)$ の元であるので，同じ値をもつことができる．この kS_{WZW} は一見すると，5 次元への依存性があるように見えるが，Chern-Simons 作用と同じく， k が整数ならば 5 次元への依存性はない．WZW 項は，

$$\omega_{CS}(A^U) - \omega_{CS}(A) = \Omega(U) + d\alpha(A, U) \quad (6.63)$$

のように完全形式で書ける部分 $d\alpha$ と絶対に書けない^{*6}部分 $\Omega(U)$ に分離できる．

$$\Omega = \frac{i}{480\pi^3} \text{tr}[dUU^{-1}]^5, \quad (6.64)$$

$$\alpha = -\frac{i}{48\pi^3} \text{tr} \left[U^{-1} dU \left(\frac{1}{2} AdA + \frac{1}{2} dAA + \frac{1}{2} A^3 \right) + \frac{1}{4} (U^{-1} dU A U^{-1} dU A) - \frac{1}{2} (U^{-1} dU)^3 A \right] \quad (6.65)$$

ちなみにこの Ω こそ，アノマリーが正則化に依らず除去できないことを表している．なぜなら，正則化の違いは 4 次元の作用に局所的^{*7}な相殺項 C を加えることで表されるが，これは

$$\int_{S^4} C = \int_{D^5} dC \quad (6.66)$$

のように，5 次元で完全形式になるため， Ω と等しくなり得ない．

^{*6} 閉形式ではあるが，完全形式ではないということ．

^{*7} 「局所的な」とは，多様体およびその接空間上の場だけを考えていることである．すなわちゲージ場 A が裸の状態に含まれる Chern-Simons 形式等は含まない．※ゲージ場 A は接空間上のベクトル場ではなく，接続である．

■ $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V \xrightarrow{SSB} SU(3)_V \times U(1)_V$ の場合の Wess-Zumino-Witten 項

$SU(3)_L \rightarrow 1$ の議論を拡張すれば、 $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V \rightarrow SU(3)_V \times U(1)_V$ の場合も同様の手順で得られる。ただ、ここでの計算はむしろ $U(3)_L \times U(3)_R \rightarrow U(3)_V$ と思う方が便利である。2つの $U(3)$ ゲージ変換 g_L, g_R があるので、アノマリーは

$$J(g_L, g_R, A_L, A_R) = J(g_L, A_L) - J(g_R, A_R), \quad (6.67)$$

$$J(g_*, A_*) = \exp \left(2\pi i \int_{D^5} \omega_{CS}(A_*^{g_*}) - 2\pi i \int_{D^5} \omega_{CS}(A_*) \right) \quad (6.68)$$

と書ける。ここで $\omega_5^{CS}(A_L, A_R) := \omega_5^{CS}(A_L) - \omega_5^{CS}(A_R)$ と定義したら、上式は単に

$$J(g_L, g_R, A_L, A_R) = \exp \left(2\pi i \int_{D^5} \omega_{CS}(A_R^{g_R}, A_L^{g_L}) - 2\pi i \int_{D^5} \omega_{CS}(A_L, A_R) \right) \quad (6.69)$$

とまとまる。しかし、注意せねばならないのは、これは一般にベクトル型のゲージ変換に関するアノマリーについて $J(g, g, A_L, A_R) = 1$ を満たさないことである。これを満足させるには、Wess-Zumino の降下方程式の解 ω_{2n} の不定性 X に着目すればよい。

$$d\delta_B \omega_{2n+1}^{CS} = 0, \quad (6.70)$$

$$\delta_B \omega_{2n+1}^{CS} = d\omega_{2n}, \quad (6.71)$$

$$d\omega_{2n} \mapsto d\omega_{2n} + dX \quad (6.72)$$

ただし、 $\delta_B X = 0$ でなければならない。そのような項を見つけるために、変形した Chern-Simons 形式を考えてみよう。

$$\tilde{\omega}_{CS}(A_L, A_R) := \omega_{CS}(A_L, A_R) + dC(A_L, A_R) \quad (6.73)$$

ただし、 $C(A_L, A_R)$ そのものが X に相当する訳ではない。なぜならばこの項は一般に BRST 変換 (ゲージ変換) について不変でないからだ。しかし、 C に対して

$$C(A_L^{g_L}, A_R^{g_R}) \quad (6.74)$$

を考えると、これは

$$g_L \mapsto (h_L)^{-1} g_L, \quad (6.75)$$

$$g_R \mapsto (h_R)^{-1} g_R, \quad (6.76)$$

$$A_L \mapsto A_L^{h_L}, \quad (6.77)$$

$$A_R \mapsto A_R^{h_R} \quad (6.78)$$

の下で不変であるため、解の不定性 X となる。またもし新たな Chern-Simons 形式 $\tilde{\omega}_{CS}$ が、任意の $g \in SU(3)$ について

$$\tilde{\omega}_{CS}(A_L^g, A_R^g) = \tilde{\omega}_{CS}(A_L, A_R) \quad (6.79)$$

であれば、式 (6.68) で ω_{CS} を $\tilde{\omega}_{CS}$ に置き換えた新たな量 K について

$$K(g, g, A_L, A_R) = 1 \quad (6.80)$$

が成立する.

$$K(g_L, g_R, A_L, A_R) = \exp \left(2\pi i \int_{D^5} \tilde{\omega}_{CS}(A_L^{g_L}, A_R^{g_R}) - 2\pi i \int_{D^5} \tilde{\omega}_{CS}(A_L, A_R) \right) \quad (6.81)$$

$$= J \times \exp \left(2\pi i \int_{D^5} dC(A_L^{g_L}, A_R^{g_R}) - 2\pi i \int_{D^5} dC(A_L, A_R) \right) \quad (6.82)$$

であるので, $X = C(A_L^{g_L}, A_R^{g_R})$ も含めたアノマリーを

$$\tilde{J} := J \times \exp \left(2\pi i \int_{D^5} dC(A_L^{g_L}, A_R^{g_R}) \right) \quad (6.83)$$

$$= \exp \left(2\pi i \int_{D^5} \tilde{\omega}_{CS}(A_L^{g_L}, A_R^{g_R}) - 2\pi i \int_{D^5} \omega_{CS}(A_L, A_R) \right) \quad (6.84)$$

とし, 作用に相殺項 $-C(A_L, A_R)$ を含めれば, 全体としてベクトル型のゲージ変換のときに不変になる^{*8}.

そのような $\tilde{\omega}_{CS}$ は一般の $2n - 2$ 次元で次のようにして定義可能であることが知られている.

$$\tilde{\omega}_{CS} := \omega_{CS} + dC, \quad (6.85)$$

$$C = \int_0^1 ds \int_0^1 dt \frac{n(n-1)}{2n-2} \text{Str}[\bar{\gamma} V_- V_+ F_{s,t}^{n-2}] \quad (6.86)$$

ここで, V_+, V_- の定義は以下の通りである. ただし, $\bar{\gamma}$ はカイラリティである.

$$V := \frac{1}{2}(A_L + A_R), \quad (6.87)$$

$$A := \frac{1}{2}(A_L - A_R), \quad (6.88)$$

$$V_{\pm} := V \pm \bar{\gamma} A. \quad (6.89)$$

また, 場の強さ $F_{s,t}$ は接続 $A_{s,t} := sV_+ + tV_-$ に対して定義される.

以上で, アノマリー $\tilde{J}$ が

$$\tilde{J}(g_L, g_R, A_L, A_R) = \exp \left(2\pi i \int_{D^5} \tilde{\omega}_{CS}(A_L^{g_L}, A_R^{g_R}) - 2\pi i \int_{D^5} \omega_{CS}(A_L, A_R) \right) \quad (6.90)$$

で与えられることがわかった. $\tilde{\omega}_{CS}$ の g_L, g_R への依存性を調べてみよう.

$$T(g_L, g_R) \cdot \tilde{\omega}_{CS}(A_L, A_R) := \tilde{\omega}_{CS}(A_L^{g_L}, A_R^{g_R}) \quad (6.91)$$

と書く. すると,

$$T(g_L, g_R) \cdot \tilde{\omega}_{CS}(A_L, A_R) = T(g_R, g_R) T(g_L(g_R)^{-1}, 1) \cdot \tilde{\omega}_{CS}(A_L, A_R) \quad (6.92)$$

$$= T(g_R, g_R) \cdot \tilde{\omega}_{CS}(A_L^{g_L(g_R)^{-1}}, A_R) \quad (6.93)$$

$$= \tilde{\omega}_{CS}(A_L^{g_L(g_R)^{-1}}, A_R) \quad (6.94)$$

$$= T(g_L(g_R)^{-1}, 1) \cdot \tilde{\omega}_{CS}(A_L, A_R) \quad (6.95)$$

^{*8} $U(1)$ ゲージ変換についてはアキシャル型のゲージ変換のときに不変になるような正則化/相殺項を考えることもできるが, $SU(N)$ のアキシャル変換は群をなさないので, ベクトル型を不変にする他ほかない. このようにベクトル型の変換について不変になるような処方原型は元々 Bardeen によって与えられた. ここでは J.L. Manes[32] によって改良された手法を参考に行っている.

のように結局 $U := g_L(g_R)^{-1}$ にしか依存しないことがわかる． よって

$$\tilde{J}(g_L, g_R, A_L, A_R) = \exp \left(2\pi i \int_{D^5} \tilde{\omega}_{CS}(A_L^U, A_R) - 2\pi i \int_{D^5} \omega_{CS}(A_L, A_R) \right) \quad (6.96)$$

となる．

これを打ち消すように，Wess-Zumino-Witten 項が定義される． よって

$$2\pi k S_{WZW} = \frac{-ik}{240\pi^2} \int_{D^5} \text{tr}[dUU^{-1}]^5 \quad (6.97)$$

$$+ \frac{ik}{48\pi^2} \int_{S^4} \text{tr}[(A_L dA_L + dA_L A_L + A_L^3) dUU^{-1}] - (L \leftrightarrow R) \quad (6.98)$$

$$- \frac{ik}{96\pi^2} \int_{S^4} \text{tr}[A_L dUU^{-1}]^2 + (L \leftrightarrow R) \quad (6.99)$$

$$- \frac{ik}{48\pi^2} \int_{S^4} \text{tr}[(A_L (dUU^{-1})^3) - (L \leftrightarrow R)] \quad (6.100)$$

$$- \frac{ik}{48\pi^2} \int_{S^4} \text{tr}[(dA_L dU A_R U^{-1}] + (L \leftrightarrow R) \quad (6.101)$$

$$- \frac{ik}{48\pi^2} \int_{S^4} \text{tr}[(A_R U^{-1} A_L U (U^{-1} dU)^2) + (L \leftrightarrow R)] \quad (6.102)$$

$$+ \frac{ik}{48\pi^2} \int_{S^4} \text{tr}[(dA_R A_R + A_R dA_R) U^{-1} A_L U] - (L \leftrightarrow R) \quad (6.103)$$

$$+ \frac{ik}{48\pi^2} \int_{S^4} \text{tr}[A_L U A_R U^{-1} A_L dUU^{-1}] - (L \leftrightarrow R) \quad (6.104)$$

$$- \frac{ik}{48\pi^2} \int_{S^4} \text{tr}[(A_R^3 U^{-1} A_L^3 U] + (L \leftrightarrow R) \quad (6.105)$$

$$- \frac{ik}{96\pi^2} \int_{S^4} \text{tr}[U A_R U^{-1} A_L U A_R U^{-1} A_L] \quad (6.106)$$

と求まる． この表式を見ての通り， $L \leftrightarrow R$ は次の入れ替えを指す．

$$A_L \leftrightarrow A_R, \quad (6.107)$$

$$U \leftrightarrow U^{-1}, \quad (6.108)$$

$$dUU^{-1} \leftrightarrow -U^{-1} dU. \quad (6.109)$$

この L と R の入れかえについて，（反）対称性である． 以上より， $A_L = A_R = 0$ にして正しいラグランジアンが

$$S[U] + 2\pi i k S_{WZW}[U] \quad (6.110)$$

$$= \int_{S^4} d^4 x \text{tr}[U^{-1} \partial_\mu U \cdot U^{-1} \partial^\mu U] + \frac{-ik}{240\pi^2} \int_{D^5} \text{tr}[dUU^{-1}]^5 \quad (6.111)$$

と求まる． この整数 k はカラーに対応するため， 以下 $k = 3$ ととる．

6.2.6 $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ 崩壊

本章の最後に中性 π メソンの崩壊を扱う． かつて実験により

$$\pi^0 \rightarrow 2\gamma \quad (6.112)$$

という崩壊現象が確認された^{*9}。しかし、この実験事実を低エネルギー有効理論から理論的に導出することは当時問題であった。低エネルギー定理より導かれるラグランジアン（の主要項）は

$$S[U] = \int_{S^4} d^4x \operatorname{tr}[U^{-1} \partial_\mu U \cdot U^{-1} \partial^\mu U] \quad (6.113)$$

であり、これを電弱場 A でゲージ化した

$$S[U, A] = \int_{S^4} d^4x \operatorname{tr}[U^{-1} D_\mu U \cdot U^{-1} D^\mu U], \quad (6.114)$$

$$D_\mu = \partial_\mu + A_\mu \quad (6.115)$$

には、 π^0 と電磁場 A_{EM} の結合が含まれていないからである。現代となつては、この問題は Wess-Zumino-Witten 項により解決されている。 $S_{\text{WZW}}[U]$ をゲージ化した式は、式 (6.106) で、フレーバー・ゲージ場 A_L, A_R を電弱場 A に制限したものと同じである。今回のケースでは特に電磁場 A_{EM} に依存する項で A について低次のところだけ取り出すと

$$\frac{ie}{16\pi^2} \int_{S^4} \operatorname{tr}[A(dUU^{-1})^3 + A(U^{-1}dU)^3] \quad (6.116)$$

$$+ \frac{ie}{16\pi^2} \int_{S^4} \operatorname{tr}[dAA(dUU^{-1} + U^{-1}dU)] \quad (6.117)$$

$$- \frac{ie}{32\pi^2} \int_{S^4} \operatorname{tr}[dAdUAU^{-1} + dAUAdU^{-1}] \quad (6.118)$$

となる。これより、 $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ 崩壊が導かれる。

^{*9} スピン 1 の粒子は 2 つの光子に崩壊できないという Yang の定理とこの実験事実より、 π^0 はスピン 0 ではないかと予測が立てられた。

第 7 章

ABJ アノマリー

7.1 ABJ アノマリーの意味

最後に ABJ アノマリーを解説する。これは歴史的に最初に発見されたアノマリーであるが、ダイナミカルなゲージ場と外場の混合を考えるという点で難しい概念である。特徴は微小な大域の変換と結びつくことと、それゆえ Noether カレントの破れとして理解できる点である。ABJ アノマリーは現象論的に 2 つの有名な応用をもつ。1 つはバリオン数・レプトン数非保存で、もう 1 つは $U(1)_A$ 問題である。標準模型においてバリオン数 B とレプトン数 L は古典的には保存する。しかし、量子化すると ABJ アノマリーが生じて、これらが保存しなくなることが知られている。ただ、興味深いことにその差 $B - L$ には、アノマリーが生じない。この事実は初期宇宙におけるバリオン数生成を議論するときの基礎になっている。 $U(1)_A$ 問題とは、簡単に言うと η' メソンが重すぎるという問題である。 π メソンの質量と η' メソンの質量は、どちらも Nambu-Goldstone 粒子由来と思えばほぼ同じくらいのスケール^{*1}であるはずが、現実としては π^0 メソンが 135 MeV くらいであるのに、 η メソンは 550 MeV であり、予想から著しく逸脱する。この問題は、フレーバー対称性の部分群 $U(1)_A$ が ABJ アノマリーを受けて破れるため、 $U(1)_A$ に対応する粒子 (η' メソン) が Nambu-Goldstone 粒子として解釈できないことで解決される。

7.1.1 ABJ アノマリーと Feynman ダイアグラム

4 次元摂動アノマリーは、三角ダイアグラムと対応しているのであった、この三角ダイアグラムで、3 本の外線が全て実際に伝播している場合（ダイナミカルである場合）をゲージ・アノマリーといった。

^{*1} π メソンの質量を m 、 η' メソンの質量を m' とすると、 $m' \leq \sqrt{3}m$ と予想される。

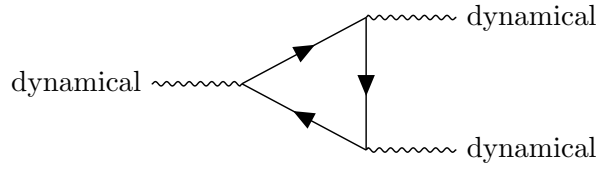


図 7.1 ゲージ・アノマリー

一方, 3 本の外線全てが外場であるような場合を, 't Hooft アノマリーと言った.

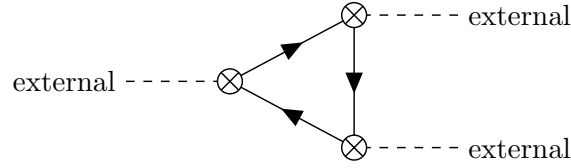


図 7.2 't Hooft アノマリー

本章で扱うのは, 上記を混成したような次のアノマリーである.

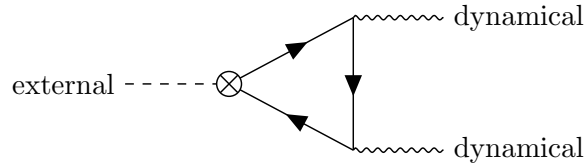


図 7.3 ABJ アノマリー

これを 4 次元の ABJ アノマリーという. 一般に $2n$ 次元の摂動アノマリーは, $n+1$ 角形のダイアグラムに対応したので, その内 1 本が外場で残り n 本がダイナミカルなゲージ場に結合しているようなアノマリーが, $2n$ 次元の ABJ アノマリーである^{*2}. このようなアノマリーが生じるのは, G ゲージ理論において, 大域的対称性 H をさらにゲージ化した場合である. ここで G, H は無関係な群としてよい. 元々の分配関数 Z は

$$Z = \int_{\mathcal{A}/G^*} \mathcal{D}A Z[A], \quad (7.1)$$

$$Z[A] = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-S[A]} \quad (7.2)$$

で与えられた. ただし A は G ゲージ場で, このゲージ・アノマリーは存在しないと仮定する. この $S[A]$ の持っている大域的対称性 H をゲージ化して外場 a を導入し

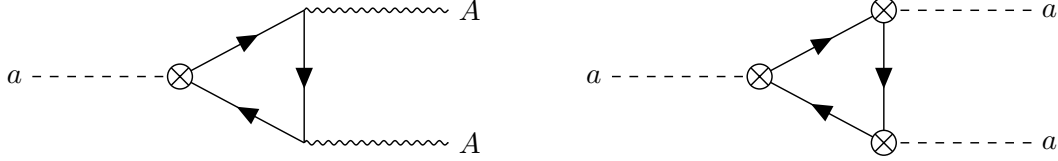
$$Z[A, a] = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-S[A, a]} \quad (7.3)$$

^{*2} このような表記をしている文献として [6] がある.

が得られる．ここで $Z[A, a = 0] = Z[A]$, $S[A, a = 0] = S[A]$ である．このような分配関数 $Z[A, a]$ に対して H についてのゲージ変換 h を施すと

$$Z[A, a^h] = J(A, a, h)Z[A, a] \quad (7.4)$$

のようにアノマリー $J(A, a, h)$ が生じる． h が十分微小であるとき，このアノマリーはダイアグラムの



の2つから生じる．この内，左側を ABJ アノマリーといい，右側を't Hooft アノマリーというのである．これらのアノマリーは，理論の矛盾を全く意味しない．理由は2つある．まず第一にこれらのアノマリーは，外場 a を0にしたら，明らかに消えるものであるからだ．第二に，そもそも矛盾を意味するアノマリーというのは，ゲージ場をダイナミカルにする際に，その汎関数積分の障害となるものを指すのであったからだ．今回のケースではゲージ場 A の積分範囲 $\mathcal{A}/\mathcal{G}^*$ 上で

$$A \sim A^g, g(x) \in G \quad (7.5)$$

であるため，ゲージ変換 g に伴うアノマリーは矛盾を意味する．しかし，ABJ アノマリーや't Hooft アノマリーのように， h についてゲージ変換した結果得られるアノマリーは矛盾を導かない．

7.1.2 Noether カレントの破れ

前節で ABJ アノマリーを定義したが，本節では ABJ アノマリーの物理的な意味について調べる．章の始めでも述べたように，ABJ アノマリーは Noether カレントの破れとして理解することができる．それを理解するには Noether の定理の導出を復習すると良い．大域的対称性 H を持った G ゲージ理論の作用は，

$$S[A, \psi] = \int d^d x \bar{\psi} \gamma \cdot (\partial + A) \psi, \quad (7.6)$$

$$S[A, \psi^h] = S[A, \psi] \quad (7.7)$$

で与えられる．ここで h を局所的な変換に置き換えると，式 (7.7) はもはや成立せず，余剰な項から Noether カレントが得られる．

$$S[A, \psi^h] = S[A, \psi] + \int d^4 x \epsilon (\partial_\mu j^\mu) \quad (7.8)$$

ただしここで， $h \sim 1 + \epsilon$ とした．これが保存することを見るには，経路積分すると分かりやすい．分配関数は

$$Z[A] = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-S[A, \psi]} \quad (7.9)$$

であるが、 ψ はただのダミー変数に過ぎないので ψ^h に置き換えても良い。

$$\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-S[A,\psi]} = \int \mathcal{D}\psi^h \mathcal{D}\bar{\psi}^h e^{-S[A,\psi^h]} \quad (7.10)$$

ここでもしアノマリーが存在しないと仮定すると $\int \mathcal{D}\psi^h \mathcal{D}\bar{\psi}^h = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi}$ であるため、

$$\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-S[A,\psi]} = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-S[A,\psi]} e^{-\int d^4x \epsilon (\partial_\mu j^\mu)} \quad (7.11)$$

とわかる。すなわち、カレント保存則

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (7.12)$$

が導かれる。もし、アノマリー $J = \exp(i\epsilon \int d^4x a)$ が生じるならば $\int \mathcal{D}\psi^h \mathcal{D}\bar{\psi}^h = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} J$ であるため、カレントの破れ

$$\partial_\mu j^\mu = ia \quad (7.13)$$

が導かれる。ここで、右辺が純虚なのは Euclid 計量で計算しているからである。Euclid 計量 $\delta = (+, +, \dots, +)$ から Lorentz 計量 $\eta = (-, +, \dots, +)$ への Wick 回転は

$$A^d = iA^0, \quad (7.14)$$

$$A_d = -iA_0 \quad (7.15)$$

となる。ただし、 $A^d = A_d$, $A^0 = -A_0$ である。よってトポロジカルな項 T については

$$iT_{\text{Euclid}} = T_{\text{Lorentz}} \quad (7.16)$$

となる^{*3}。以上を踏まえると Lorentz 時空上でのカレントの破れが

$$(\partial_\mu j^\mu)_{\text{Lorentz}} = a_{\text{Lorentz}} \quad (7.18)$$

のように実で与えられる^{*4}。

7.1.3 ABJ アノマリーとの関係

前節で”アノマリー”が存在すると、Noether カレントの破れとして理解できることを示した。ここでは、その”アノマリー”が ABJ アノマリーと同一であることを示す。そのために、大域的対称性 H をゲージ化してゲージ場 a を導入しよう。

$$S[A, a, \psi] = \int d^4x \bar{\psi} \gamma \cdot (\partial + A + a) \psi \quad (7.19)$$

^{*3} 例えば $T_{\text{Euclid}} = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}$ とすると、 $T_{\text{Euclid}} \sim \epsilon^{4123} F_{41} F_{23}$ なので、

$$T_{\text{Euclid}} \sim -i\epsilon^{0123} F_{01} F_{23} \sim -iT_{\text{Lorentz}} \quad (7.17)$$

となる。

^{*4} 詳細は付録 A.1.2 を参照

この系はゲージ変換 $h(x) \in H$ について不変なので

$$S[A, a^h, \psi^h] = S[A, a, \psi] \quad (7.20)$$

である。また、 $a = 0$ としたとき $S[A, \psi^h] = S[A, \psi] + \int d^4x \epsilon (\partial_\mu j^\mu)$ が成立したのと同様に

$$S[A, a, \psi^h] = S[A, a, \psi] + \int d^4x \epsilon (\partial_\mu j^\mu) \quad (7.21)$$

である。よって上 2 式より

$$S[A, a, \psi^h] = S[A, a^h, \psi^h] + \int d^4x \epsilon (\partial_\mu j^\mu) \quad (7.22)$$

である。

さて、ABJ アノマリー J とは $Z[A, a^h] = J(a, h) \cdot Z[A, a] = e^{i\epsilon \int d^4x b} \cdot Z[A, a]$ であった。物質場の汎関数積分として書けば

$$\int \mathcal{D}\psi^h \mathcal{D}\bar{\psi}^h e^{-S[A, a^h, \psi^h]} = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{i\epsilon \int d^4x b} e^{-S[A, a, \psi]} \quad (7.23)$$

ここで左辺に式 (7.22) を用いて

$$\int \mathcal{D}\psi^h \mathcal{D}\bar{\psi}^h e^{-S[A, a, \psi^h] - \int d^4x \epsilon (\partial_\mu j^\mu)} = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{i\epsilon \int d^4x b} e^{-S[A, a, \psi]} \quad (7.24)$$

である。最後にダミー変数 ψ^h を ψ に置き換えると

$$\partial_\mu j^\mu = -ib \quad (7.25)$$

と求まる。すなわち、Noether カレントの破れは ABJ アノマリー b と等しいことが示された。

7.1.4 4次元の ABJ アノマリーの表式

特に 4次元 $SU(n)$ ゲージ理論の ABJ アノマリーを考えてみよう。この理論が $U(1)$ 大域的対称性をもつとする。このときのアノマリーの大きさは、左巻き Weyl スピノル 1 つにつき

$$J_L = e^{-\frac{iq_L}{8\pi^2} \int \text{tr} F \wedge F} \quad (7.26)$$

で与えられる。このアノマリーは式 (2.87) で $SU(2)$ ゲージ場を $SU(n)$ ゲージ場に置き換えれば得られる。また右巻き Weyl スピノルのアノマリーは左巻きの逆符号であるので、

$$J_R = e^{\frac{iq_R}{8\pi^2} \int \text{tr} F \wedge F} \quad (7.27)$$

よって、 $U(1)_A$ 変換のときには $q = q_L = -q_R$ であるので、その変換に対する Dirac スピノルの ABJ アノマリーは

$$J = J_L J_R = e^{2 \times \frac{-iq}{8\pi^2} \int \text{tr} F \wedge F} \quad (7.28)$$

で与えられる．よってカレントの破れは

$$\partial_\mu j^\mu = 2 \times \frac{iq}{8\pi^2} \text{tr} F \wedge F \quad (7.29)$$

である．

7.2 massless QCD への応用

7.2.1 $U(1)_A$ 問題の解決

6章で扱ったように、アップ・クォーク、ダウン・クォーク、ストレンジ・クォークを無質量と近似した 3-flavor massless QCD は、 $G = U(3)_L \times U(3)_R$ の大域的なカイラル対称性をもつ．これが低エネルギーでは、この対称性は $H = U(3)_V$ に破れているとすると、

$$G/H = U(3) \quad (7.30)$$

の対称性に対応した Nambu-Goldstone 粒子が生じる． $\dim(G/H) = 9$ なので、この議論によると 9 つの軽い粒子（メソン）が低エネルギーにあるように思われる．しかし、対応するであろうメソン（擬スカラーメソン 9 重項）を見てみると

表 7.1 擬スカラーメソン 9 重項

メソン	π^0	$\pi^\pm$	η	η'	$K^\pm$	$K^0(\bar{K}^0)$
質量	140 MeV	135 MeV	548 MeV	958 MeV	494 MeV	498 MeV

のように、 η' 粒子が重くなっている．実際、理論的な計算によると、 π^0 の質量 m と η' の質量 m' の間の関係は

$$m' \leq \sqrt{3}m \quad (7.31)$$

であるので、その結果から著しく逸脱している．この問題が $U(1)_A$ 問題である．この問題は ABJ アノマリーによって解決された．対称性 G を組みなおすと

$$U(3)_L \times U(3)_R = SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V \times U(1)_A \quad (7.32)$$

となる．つまり $U(1)_A$ が ABJ アノマリーを受けて破れるためため、実際の自発的対称性の破れは

$$G' = SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V \xrightarrow{SSB} H' = SU(3)_V, \quad (7.33)$$

$$G'/H' = SU(3) \quad (7.34)$$

となる．すなわち、 $\dim(G'/H') = 8$ であるため、実際に生じる Nambu-Goldstone 粒子は 8 つのみである．実際、 η' を除く 8 重項は $SU(3)$ の随伴表現をなす一方で、 η' は自明表現である．ゆえに、 η' は Nambu-Goldstone 粒子でないため、他の 8 重項に比べて重くなると説明づけられる．

7.3 標準模型への応用

7.3.1 バリオン数 B とレプトン数 L に関する話題

バリオン数 B ・レプトン数 L とは、各フェルミオン・およびその複合粒子に対して次の規則で与えられる量子数である。

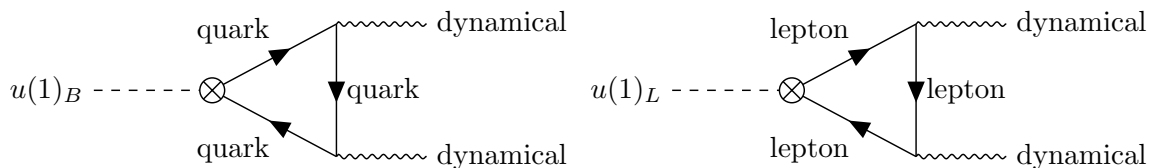
- クォーク 1 つにつき $B = 1/3$, $L = 0$
- 反クォーク 1 つにつき $B = -1/3$, $L = 0$
- レプトン 1 つにつき $B = 0$, $L = 1$
- 反レプトン 1 つにつき $B = 0$, $L = -1$

これは古典的（ツリーレベル）では反応の前後で保存する値である。しかし、ABJ アノマリーにより、量子的にこの対称性は破れる。しかし、興味深いことにその差 $B - L$ は ABJ アノマリーを受けず、量子的にも厳密な大域的対称性となる。

この事実を基礎として、いくつかの BSM やバリオン数生成が議論されている。例えば、 $B - L$ 大域的対称性はよく保存しているため、高エネルギー領域でゲージ化していると考えられる理論がある^{*5}。大統一理論はその代表例で、この理論ではクォーク-クォークの反クォーク-レプトンへの遷移を許す（この遷移でバリオン数が 1 減っている。）。これが陽子内でおきると、メソンとレプトンに崩壊することを意味している（陽子崩壊）。また、元々初期宇宙ではバリオン数は 0 であったと考えられており、そのバリオン数をどのように生成するのかは現象論的に興味深い問題である。これをバリオン数生成問題という。これは様々な模型により説明を与えることが試みられており、大統一理論のようにバリオン数を変化させる理論を用いたり、レプトン数を先に生成したのちに $B - L$ が保存することを利用してバリオン数を生成したりする。このように B, L の ABJ アノマリーは、現象論的に面白い取り組みの基礎を与えている。

7.3.2 バリオン数 B とレプトン数 L のアノマリー

ここではバリオン数とレプトン数に対応して、外場を導入する。ここで取り扱うアノマリーは次の 2 つである。



^{*5} 高エネルギー領域には大域的対称性はないと信じられている。例えば、超弦理論は大域的対称性をもたない。そのため、良く保存する大域的対称性は高エネルギー領域でゲージ化していると考えられることがある。

ここで, "dynamical" とは, 標準模型のダイナミカルな各ゲージ場を指している. 議論を見やすくするためにカラー自由度を N とする.

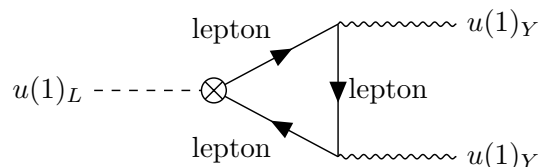
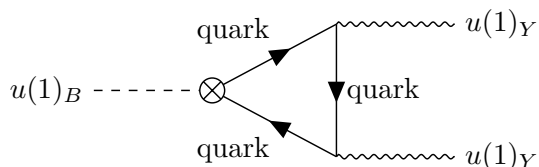
表 7.2 標準模型の第1世代 (左巻き)

	アップクォーク・ダウルクォーク	電子・ニュートリノ
$u(1)_Y$	1/6	-1/2
$su(2)_L$	2	2
$su(N)_c$	N	1
$u(1)_B$	1/3	0
$u(1)_L$	0	1

表 7.3 標準模型の第1世代 (右巻き)

	アップクォーク	ダウルクォーク	電子	(ニュートリノ)
$u(1)_Y$	2/3	-1/3	-1	0
$su(2)_L$	1	1	1	1
$su(N)_c$	N	N	1	1
$u(1)_B$	1/3	1/3	0	0
$u(1)_L$	0	0	1	1

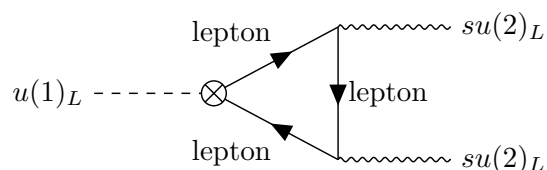
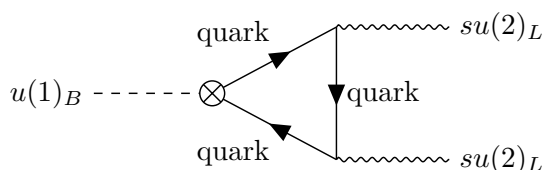
よって各ゲージ場の計算は次のようになる.



$$(B \text{ のアノマリー}) = \frac{N}{3} \left(\frac{1}{6} \right)^2 + \frac{N}{3} \left(\frac{1}{6} \right)^2 - \frac{N}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^2 - \frac{N}{3} \left(-\frac{1}{3} \right)^2 = -\frac{N}{3} \cdot \frac{1}{2}, \quad (7.35)$$

$$(L \text{ のアノマリー}) = 1 \left(-\frac{1}{2} \right)^2 + 1 \left(-\frac{1}{2} \right)^2 - 1 \cdot (-1)^2 - 1 \cdot 0^2 = -\frac{1}{2} \quad (7.36)$$

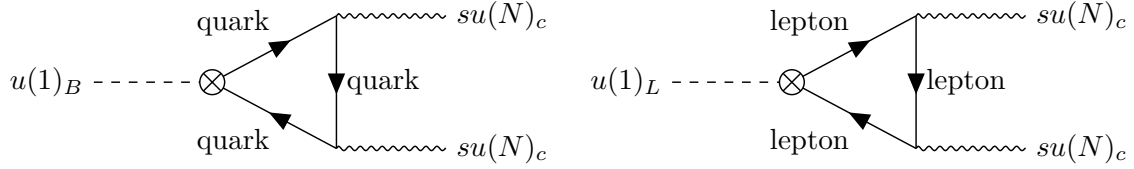
よって, $N = 3$ のとき $B - L$ のアノマリーは相殺している.



$$(B \text{ のアノマリー}) = \text{tr}(BT^a T^b) = \frac{N}{3} \frac{1}{2} \delta^{ab}, \quad (7.37)$$

$$(L \text{ のアノマリー}) = \text{tr}(LT^a T^b) = 1 \cdot \frac{1}{2} \delta^{ab} \quad (7.38)$$

よって、 $N = 3$ のとき $B - L$ のアノマリーは相殺している。

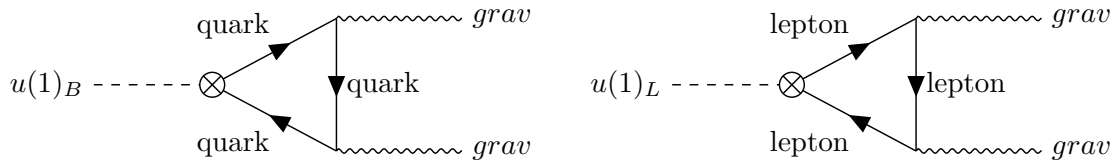


これは $u(1)_B, u(1)_L, su(N)_c$ 全てについてベクトル的な結合なので、

$$(B \text{ のアノマリー}) = 0, \quad (7.39)$$

$$(L \text{ のアノマリー}) = 0 \quad (7.40)$$

である。



これは $u(1)_B, u(1)_L$ についてベクトル的な結合なので、

$$(B \text{ のアノマリー}) = 0, \quad (7.41)$$

$$(L \text{ のアノマリー}) = 0 \quad (7.42)$$

である。ただし、この計算が成立するには、右巻きニュートリノのが必要である。もし、右巻きニュートリノが存在しない場合

$$(L \text{ のアノマリー}) = 1 \quad (7.43)$$

となる。

第 8 章

まとめと課題

■まとめ

本修士論文の第 I 部では現代的なアノマリーの理解をまとめた。第 1 章でアノマリーを導入し、第 2 章で Wess-Zumino 条件を元に Stora-Zumino の降下方程式から、 d 次元の摂動アノマリーが $d+1$ 次元の Chern-Simons 理論および $d+2$ 次元の Chern 指標（および $\hat{A}$ 種数）に対応することを示した。そして、第 3 章で非摂動アノマリーを導入し、これがアノマリー流入を介して η 不変量で記述できることや、ボルディズム群と対応することを説明した。第 4 章において、IFT を導入した。これは Chern-Simons 理論や η 不変量を含むトポロジカルな場の量子論のクラスで、ボルディズム群の Anderson 双対で与えることができる。この事実とアノマリー流入を組み合わせることで、 d 次元アノマリーが $d+2$ 次のボルディズム群の Anderson 双対 $(I_{\mathbb{Z}}\Omega)^{d+2}$ と対応することがわかった：

$$[\text{Anomaly}]_d = (I_{\mathbb{Z}}\Omega)^{d+2}. \quad (8.1)$$

第 II 部ではこの公式を各物理現象に応用した。第 5 章でゲージ・アノマリーを用いて、標準模型のアノマリーがゲージ群の中心に依らず相殺されることを示した。第 6 章では 't Hooft アノマリーを用いて、3-flavor massless QCD が低エネルギーでカイラル対称性の破れを起こすことを示した。第 7 章では ABJ アノマリーを用いて、 η' メソンが他の擬スカラーメソン 8 重項と比較して重いことを示した。また、バリオン数やレプトン数の ABJ アノマリーも計算し、結果その差 $B-L$ のみが ABJ アノマリーを受けないこと、すなわち保存することを示した。

■課題

このように基本公式 $[\text{Anomaly}]_d = (I_{\mathbb{Z}}\Omega)^{d+2}$ を使うことで d 次元アノマリーを系統的に計算できる。計算の流れとしては

1. ゲージ群に対応した $(I_{\mathbb{Z}}\Omega)^{d+2}$ の計算
2. $(I_{\mathbb{Z}}\Omega)^{d+2}$ の生成子の決定
3. d 次元物質場の表現との関係を調べる。

となる。これは方法論としては正しいのだが、本論で見たように実際に行うのは難しい。各手続きについて、その困難さを以下にまとめた。

表 8.1 アノマリーを計算する困難さについて

	困難さの度合い	何が困難か
手続き 1	低	計算が複雑である.
手続き 2	中 (部分的に困難)	フェルミオン由来でないときが非自明.
手続き 3	高 (原理的に困難)	IFT とアノマリーが 1 対 1 対応しない.

フェルミオン由来の IFT ならば少なくとも η 不変量で書けることが知られているので手続き 2 の困難は比較的小さい. しかし, 手続き 3 の困難は大きい. なぜならば, 1 つの $d+1$ 次元 IFT に対して複数の d 次元アノマリーが対応しうるからだ. 例えば Wang-Wen-Witten の IFT である de Rham 不変量 $S = \int w_2 w_3$ の場合, フェルミオンに対して考えれば isospin $3/2 + 4n$ の粒子に対するアノマリーであるが, 実はライン演算子に対して考えれば高次形式対称性由来のアノマリーに対応することがわかる. よって, IFT が求められたとして, そのアノマリーが物理的にどのような内容であるのか特定するには, 物質場の表現や次元等の情報を使う必要がある. しかし, そのような情報をどのように使えば, アノマリーが計算できるのかその手続きは未だ明らかでない. よって, 今後 IFT からアノマリーを特定する手法を開発していくことがアノマリーの応用範囲を広げていくために必要不可欠である.

謝辞

本研究を進めるにあたり，多くの方々にご指導ご鞭撻を賜りました．

指導教員の杉本茂樹教授には，研究生生活・学生生活両面において多大なるサポートをして頂きました．この場をお借りして心よりお礼申し上げます．また，本多正純助教・谷崎佑弥助教には貴重なご指導とご助言を賜りました．深く感謝申し上げます．

基礎物理学研究所素粒子論グループ所属の村上耕太郎氏・菅野颯人氏・瀧祐介君とは，日頃より多くの議論をしており，その議論を通じて数多くのことを教えていただきました．深く感謝申し上げます．また，基礎物理学研究所凝縮系理論の大山修平氏には，本修士論文の内容の要である可逆な場の量子論やその周辺の数学的内容について数多くのことを教えていただきました．深く感謝申し上げます．

そして，学部時代に同期であった名古屋大学の神田行宏君・大阪市立大学の中西智輝君にはそれぞれの専門分野である大統一理論・弦理論について多くのことを教わりました．これらの理論について学んだ結果，本修士論文のテーマであるアノマリーの理解も大いに進みました．感謝申し上げます．また，京都大学素粒子論研究室の久代翔大君・筑波大学素粒子論グループの菅野聡君・大阪大学核物理センターの岩中章紘君・京都大学数理解析研究所の古田悠馬君には，数々の議論にお付き合い頂きました．感謝申し上げます．

また，修士課程2年間の生活は，家族・友人・恋人の支え無しには成し得ないものでありました．心より感謝申し上げます．

付録 A

ゲージ理論の基礎事項

A.1 Notation について

A.1.1 諸量の定義のまとめ

連続群のゲージ場と言ったときには、接続形式の局所表示 A_α を指す^{*1}。これは座標変換 $U_\alpha \mapsto U_\beta$ に伴って、

$$A_\alpha \mapsto A_\beta = g_{\alpha\beta}^{-1}(A_\alpha + d)g_{\alpha\beta} \quad (\text{A.1})$$

と変換される。変換関数 $g_{\alpha\beta}$ をゲージ変換と呼ぶ。また、ゲージ場の強さとは、曲率形式を指す。つまり

$$F = dA + A \wedge A \quad (\text{A.2})$$

と定義される。これは、ゲージ変換の下で随伴に変化する。実際

$$F_\beta = dA_\beta + A_\beta \wedge A_\beta \quad (\text{A.3})$$

$$= d(g_{\alpha\beta}^{-1}(A_\alpha + d)g_{\alpha\beta}) + (g_{\alpha\beta}^{-1}(A_\alpha + d)g_{\alpha\beta})^2 \quad (\text{A.4})$$

$$= g_{\alpha\beta}^{-1}(dA_\alpha + A_\alpha \wedge A_\alpha)g_{\alpha\beta} \quad (\text{A.5})$$

$$= g_{\alpha\beta}^{-1}F_\alpha g_{\alpha\beta} \quad (\text{A.6})$$

となることが具体計算から確認できる。なお、物理の計算においては往々にして開集合 U_α, U_β への依存性を省略することが多い^{*2}。しかし、ゲージ場が局所的概念でないことは、本質的である。すなわち、ゲージ場の性質は局所表示 A_α だけで記述することは原理的に不可能であり、Wilson ライン等の大域的な演算子も含めて初めて完全な記述を与える^{*3}。これは離散的なゲージ場^{*4}を理解すると

^{*1} U_α を開集合とし、その上の関数を f_α と書いている。

^{*2} 例外としては n 次元球面 S^n 上のゲージ場を考えるとことがある。このときしばしば S^n を北半球 U_N と南半球 U_S に分けて、それぞれのゲージ場を A_N, A_S と書く。

^{*3} その意味で、AB 効果はゲージポテンシャルの実在性を示したというより、ゲージ場の大域的性質を示したという方が適切かもしれない。

^{*4} 離散群はリー代数を持たないため、大域的性質が重要な役割を果たす。

きに大切である。

ゲージ群を G として、その表現空間をベクトル束 E に取ろう。このとき

$$\phi_\alpha \mapsto \phi_\beta = g_{\beta\alpha} \phi_\alpha \quad (\text{A.7})$$

と変化する場 ϕ が得られる^{*5}。さらに共変微分 D を

$$D\phi = d\phi + A\phi = dx^\mu (\partial_\mu + A_\mu) \phi \quad (\text{A.8})$$

と定めると、 $D\phi$ もまた ϕ と同じく

$$(D\phi)_\alpha \mapsto (D\phi)_\beta = g_{\beta\alpha} (D\phi)_\alpha \quad (\text{A.9})$$

と変化する。

考えている時空が曲がっている場合、さらに多様体の向き付けを定める SO 束 P を使って、 $P \oplus E$ を考える。束 P 由来の接続を ω とすると

$$D\phi = d\phi + A\phi + \omega\phi = dx^\mu (\partial_\mu + \omega_\mu + A_\mu) \phi \quad (\text{A.10})$$

となる。

スピン構造がある際にはスピノル場が定義できる。スピン構造の詳細は後述するが、簡単に言うと、多様体の向き付けを定める SO 束 P が $Spin$ 束 Q に簡約できることを意味する。この $Spin$ 束の表現にあたるのが、スピノル場である。ここではゲージ場 A と相互作用できるケースを考えるので、 $Q \oplus E$ の元 ψ を考える。この共変微分は式 (A.10) の dx を γ に置換して

$$(\gamma \cdot D)\psi := \gamma^\mu (\partial_\mu + \omega_\mu + A_\mu) \psi \quad (\text{A.11})$$

で与えられる。

A.1.2 Wick 回転について

本修士論文は殆どの計算が Euclid 計量で行われている。Euclid 計量 $\delta_{\mu\nu} = (+, +, \dots, +)$ から Lorentz 計量 $\eta_{mn} = (-, +, \dots, +)$ への Wick 回転をここで与えておこう。ただし、 $\mu, \nu = 0, 1, \dots, d$ で $m, n = 1, 2, \dots, d-1$ である。これは作用^{*6}の具体的な形を見ると分かりやすい。

- Euclid 計量でのスカラー場の作用

$$S_E = \int d\mu_E \mathcal{L}_E = \frac{1}{2} \int d\mu_E \delta_{\mu\nu} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi, \quad (\text{A.12})$$

$$d\mu_E := dx^1 dx^2 \dots dx^{d-1} dx^d \quad (\text{A.13})$$

- Lorentz 計量でのスカラー場の作用

$$S_L = \int d\mu_L \mathcal{L}_L = -\frac{1}{2} \int d\mu_L \eta_{\mu\nu} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi, \quad (\text{A.14})$$

$$d\mu_L := dx^0 dx^1 dx^2 \dots dx^{d-1} \quad (\text{A.15})$$

^{*5} $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}^{-1}$ である。

^{*6} 作用において、ハミルトニアン of 正值性より、時間成分が常に正であることに注意する。

$e^{-S_E} = e^{iS_L}$ であるので、肩の部分から時空積分測度とラグランジアンからそれぞれ時間成分に関するところを取り出すと

$$-dx^d \left(\frac{\partial}{\partial x^d} \phi \right)^2 = i dx^0 \left(\frac{\partial}{\partial x^0} \phi \right)^2 \quad (\text{A.16})$$

とわかる。これを満たすには

$$x^d = i x^0 \quad \therefore x_d = -i x_0 \quad (\text{A.17})$$

とすれば良い。

次にトポロジカルなラグランジアンについて考えよう。Euclid 計量の反対称テンソル $F^{\mu\nu}$ を用いて

$$S_E^{\text{top}} = \int d\mu_E \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \quad (\text{A.18})$$

としてみよう。これは $d = 4$ のとき典型的なトポロジカル作用である。このとき

$$S_E^{\text{top}} \supset \int d\mu_E \epsilon^{4123} F_{41} F_{23} \quad (\text{A.19})$$

である。ここで、 $\epsilon^{4123} = \epsilon^{0123} = 1$ で、 $F_{4i} = -i F_{0i}$ かつ、 $\mu_E = i\mu_L$ なので、

$$\int d\mu_E \epsilon^{0123} F_{01} F_{23} = \int d\mu_L \epsilon^{4123} F_{41} F_{23} \quad (\text{A.20})$$

となる。よって、

$$S_E^{\text{top}} = S_L^{\text{top}} \quad (\text{A.21})$$

であるため、経路積分は $e^{iS_E^{\text{top}}} = e^{iS_L^{\text{top}}}$ のように関係づけることができる。このようにトポロジカルな作用は、Euclid 計量か Lorentz 計量かに依らず、常に i 倍がついてくる。

以上の結果は以下のようにまとめられる。

- トポロジカルでない作用・ラグランジアン

$$-S_E = iS_L, \quad (\text{A.22})$$

$$\mu_E = i\mu_L, \quad (\text{A.23})$$

$$-\mathcal{L}_E = \mathcal{L}_L \quad (\text{A.24})$$

- トポロジカルな作用・ラグランジアン

$$iS_E = iS_L, \quad (\text{A.25})$$

$$\mu_E = i\mu_L, \quad (\text{A.26})$$

$$i\mathcal{L}_E = \mathcal{L}_L \quad (\text{A.27})$$

トポロジカルなラグランジアンに関する結果を使えば、Euclid 計量で計算したアノマリー密度の値が $i\mathcal{A}$ ならば、Lorentz 計量では $\mathcal{A}$ であることがわかる。

A.2 ゲージ場の汎関数積分

A.2.1 対称性と冗長性

「ゲージ対称性は、対称性でなく理論の冗長性である」と言われる。冗長性と言ってもわかりにくいので、思い切って言ってしまうと、理論の「遊び」の部分こそゲージ対称性だと呼んでしまってもいいかもしれない。この「遊び」がないと、理論の記述にガタがきてしまう。対称性と言っている分には、理論の対する華美な飾りであるように思えるが、冗長性という言葉には、理論の定義に必要な不可欠なものだという感覚が含まれているように思われる。それがわかると、ゲージ・アノマリーとはゲージ対称性の破れであるが、それが理論の基盤を揺るがす大事件であることが理解できるようになる。そこでまず「冗長性」という言葉の意味を数式を用いて正しく理解するから始めよう。

さて、ゲージ理論の量子化を復習しよう。ゲージ固定を $A_0^a = 0$ で選ぶことにすると、ゲージ場の正準交換関係は

$$[A_i^a, \frac{1}{e^2} F_{0j}^b] = i\delta^{ab}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (\text{A.28})$$

で与えられる。そして、更に拘束条件としてガウス則

$$G^a = \frac{1}{e^2} (D_i F^{i0})^a + \psi^\dagger t^a \psi = 0 \quad (\text{A.29})$$

を満たす必要がある。ただし、 a はゲージ群の足で、 i は空間方向を表し、 t^a はゲージ代数の生成子である。ガウス則の取り扱い方は複数存在する。1 つには、具体的にガウス則を解いて縦波成分を除去し、拘束条件を持たない場のみで議論する方法がある。しかし、ここでは物理的な状態に対して

$$G^a |\text{phys}\rangle = 0 \quad (\text{A.30})$$

を課す方法で議論する。より正確には第 1 類拘束条件 $\phi^i = 0$ については全て

$$\phi^i |\text{phys}\rangle = 0 \quad (\text{A.31})$$

としている。この方法では一見すると今ゲージ固定を勝手に手で決めてしまっているように見える。しかし第 1 類拘束条件は閉じている

$$[\phi^i, \phi^j] = f^{ijk} \phi^k \quad (\text{A.32})$$

ため、ある力学量 F との交換関係の期待値

$$\langle \text{phys} | [F, \phi^i] | \text{phys} \rangle \quad (\text{A.33})$$

は、ゲージ固定の仕方によらないため問題ない。式 (A.30) は、空間上の任意関数 $\theta^a(x)$ に対して

$$G[\theta] |\text{phys}\rangle = \int d^3x \theta^a(x) G^a(x) |\text{phys}\rangle = 0 \quad (\text{A.34})$$

としても良い．ここで $G[\theta] := \int d^3x \theta^a \left[\frac{1}{e^2} (D_i F^{i0})^a + \psi^\dagger t^a \psi \right]$ と定義した．ここで， $G[\theta]$ を部分積分した量として $\tilde{G}[\theta]$ を定義しよう．

$$\tilde{G}[\theta] = \int d^3x \left[\frac{1}{e^2} F^{0ia} (D_i \theta)^a + \theta^a \psi^\dagger t^a \psi \right] \quad (\text{A.35})$$

ここで， $|x| \rightarrow \infty$ で $\theta \rightarrow 0$ とは限らないので，表面項を無視して $G[\theta] = \tilde{G}[\theta]$ としてはいけない． $\tilde{G}[\theta]$ にはゲージ変換の生成子という物理的意味が備わっている．実際に各場 φ に対して $i\delta\varphi := [\varphi, \tilde{G}[\theta]]$ を計算すると，

$$\delta A_i^a = -(D_i \theta)^a, \quad (\text{A.36})$$

$$\delta\psi = -it^a \theta^a \psi \quad (\text{A.37})$$

となり，ゲージ変換を生成していることが見て取れる．すなわち，状態 $|\psi\rangle$ に対してゲージ変換は

$$\delta|\psi\rangle = i\tilde{G}[\theta]|\psi\rangle \quad (\text{A.38})$$

と定義される．ここで特に状態 $|\psi\rangle$ が物理的状態である場合を考えよう．すると，表面項だけが効いてきて

$$\delta|\text{phys}\rangle = \frac{i}{e^2} \int_{|x| \rightarrow \infty} dS^i \theta^a F^{a0i} |\text{phys}\rangle \quad (\text{A.39})$$

$$= iQ^a \theta^a |\text{phys}\rangle \quad (\text{A.40})$$

となる．ここで積分値を Q と定義したが，これは明らかに状態の電荷を意味する．

- 空間の無限遠方で恒等変換つまり $\theta \rightarrow 0$ となるような変換を考えると $|\text{phys}\rangle$ は不変である．
- 空間の無限遠方で定数 θ_∞ となる変換については $\delta|\text{phys}\rangle = iQ^a \theta_\infty^a |\text{phys}\rangle$ である．

すなわちゲージ変換 $g(x) = e^{it^a \theta^a(x)}$ は2種類に分類される．

$$\mathcal{G}_* = \{|x| \rightarrow \infty \text{ で } g \rightarrow 1 \text{ となる } g(x)\}, \quad (\text{A.41})$$

$$\mathcal{G} = \{|x| \rightarrow \infty \text{ で恒等変換になるとは限らない } g(x)\} \quad (\text{A.42})$$

$\mathcal{G}_*$ の元について物理的状態は単に共変というだけでなく不変である．すなわち，これは非物理的状態ゆえに重複した自由度を表していると考えられるため，理論の「冗長性」である．そして，変換全体をこの冗長性の分だけ割ると，これはゲージ群 G と同型である．

$$\mathcal{G}_*/\mathcal{G} = G \quad (\text{A.43})$$

これこそが理論の「対称性」に他ならない．すなわち，「対称性」，「冗長性」というと曖昧な感があるが，これらはそれぞれ数学的には G , $\mathcal{G}_*$ の元として定義される．そしてゲージ・アノマリーを議論する際のゲージ対称性とは，基本的*7に $\mathcal{G}$ でなく， $\mathcal{G}_*$ だけを指していることは十分に注意しなければならない．

7 ここで「基本的に」と断ったのは，実は G の中心群の破れもまた， $\mathcal{G}_$ の元の破れと同様に理論の矛盾を引き起こすからである．

A.2.2 コンパクト化とユークリッド化について

前節より冗長性に対応するゲージ変換 $g(x)$ は無限遠で 1 になるようなものに限定されることがわかった。つまり、 $g(x)$ の感じる定義域は $\mathbb{R}^d$ というより、無限遠方を 1 点コンパクト化した S^d である。

$$\mathbb{R}^d \cup \{\infty\} = S^d \quad (\text{A.44})$$

これは決して、我々の時空が球面であると主張している訳ではない。ただ、 $g(x)$ の定義域はトポロジカルに球面と同型であるというだけである。このようにコンパクト化を実行する動機は存在するものの、実際コンパクト化するには基本的にユークリッド化も必要である。なぜならば、閉多様体で Lorentz 計量を入れることができるのは、基本的に種数が 1 のものに限定されるからだ。これを理解するには、球面 S^2 とトーラス T^2 を考えるとわかりやすい。 S^2 に Lorentz 計量を入れるその最もナイーブな試みの 1 つは、3 次元 Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{1,2}$ に S^2 を埋め込むことである。 $\mathbb{R}^{1,2}$ の座標を (x, y, z) として埋め込みは

$$t = \cos \theta, \quad (\text{A.45})$$

$$x = \sin \theta \cos \phi, \quad (\text{A.46})$$

$$y = \sin \theta \sin \phi \quad (\text{A.47})$$

で表される。ただし、 $\theta \in (0, \pi)$ で $\phi \in [0, 2\pi)$ である。このとき、 S^2 上の誘導計量を計算すると $\theta = -\pi/2 \sim +\pi/2$ で Lorentz 計量であり、 $|\theta| > \pi/2$ で Euclid 計量になる。このように、 S^2 上に Lorentz 計量を入れる試みはことごとく失敗する。一方、 T^2 に Lorentz 計量を入れることは易しい。なぜなら、 T^2 は局所的には $\mathbb{R}^2$ と同一であり、ただその座標 (x, y) について $x = 0, 1$ および $y = 0, 1$ で同一視を入れるだけだからだ。以上のように、Lorentz 計量を入れるためには、そのトポロジーについて強い制限が課せられる。このような困難をさけるには、一般に Euclid 計量で考えるのが楽である。

A.2.3 BRST 変換

アノマリーの計算においては、ある配位（例えばインスタントン）にゲージ場を固定するため、ゲージ固定について煩く考える必要はあまりない。しかし、BRST 変換は摂動アノマリーの計算で未だ有用である。2 章では不完全な導入しかできなかったため、BRST 処方によるゲージ固定によって動機付けて、BRST 変換の完全な導入をここで行う。

■ゲージ場の配位空間

ゲージ場の配位空間 $\mathcal{A}$ は次のようにファイバー束の概念で考えると分かりやすい。

全空間： $\mathcal{A}$

底空間： $\mathcal{A}/\mathcal{G}_*$

射影： $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}_*, A \mapsto [A]$

ここで、 $\mathcal{A}/\mathcal{G}_*$ はゲージ同値な場 A, A^g を同一視した空間で、その同値類を $[A] = [A^g]$ と表す。物理をやる上では $[A]$ という表記は不便なのでしばしば代表元を定めておく。この手続きをゲージ固定という。ゲージ固定した場を A_{Fix} と書くことにする。このノーテーションではそれぞれの空間の元は次のように書ける。

底空間： $A_{\text{Fix}} \in \mathcal{A}/\mathcal{G}$

全空間： $A_{\text{Fix}}^g \in \mathcal{A}$

射影： $\pi : A_{\text{Fix}}^g \mapsto A_{\text{Fix}}$

2行目の式が意味しているのは、あるゲージ固定した場 A_{Fix} を適切にゲージ変換することで、任意のゲージ場の配位が再現されるということである。よって、通例ゲージ場 A と表記しているものは $A = A_{\text{Fix}}^g$ と表される。また底空間 $\mathcal{A}/\mathcal{G}_*$ の各点 A_{Fix} 上のファイバーは

$$\pi^{-1}(A_{\text{Fix}}) = \{A_{\text{Fix}}^g \mid g \in \mathcal{G}_*\} =: \mathcal{G}_{*A_{\text{Fix}}} \quad (\text{A.48})$$

と表される。

■ゲージ場の経路積分測度

以降煩雑さを防ぐためにゲージ固定した場を A_{Fix} でなく $\hat{A}$ と表記する。ゲージ場の経路積分は $A = \hat{A}^g$ であることを踏まえると

$$\int_{\mathcal{A}} \mathcal{D}A = \int_{\mathcal{A}/\mathcal{G}_*} \mathcal{D}\hat{A} \int_{\mathcal{G}_{*\hat{A}}} \mathcal{D}\theta \quad (\text{A.49})$$

と書ける。（各点のファイバーで積分した後、底空間で積分することで、全空間での積分を実現する。）ここで $\theta(x)$ は関数空間 $\mathcal{G}$ の座標で

$$g = e^{i\theta^a T^a} \in \mathcal{G}_* \quad (\text{A.50})$$

として定めた。（もちろんこれは $\hat{A}^\theta := \hat{A}^g \in \mathcal{G}_{*\hat{A}}$ を通じて $\mathcal{G}_{*\hat{A}}$ の座標も同時に定めている。）

注意として $\theta(x)$ はローカルな座標であるので、本来は式 (A.49) では $\mathcal{G}_{*\hat{A}}$ の各連結な成分について積分していると解釈する。

$$\int_{\mathcal{A}} \mathcal{D}A = \int_{\mathcal{A}/\mathcal{G}} \mathcal{D}\hat{A} \left(\int_{U_1} \mathcal{D}\theta_1 + \int_{U_2} \mathcal{D}\theta_2 + \cdots \right) \quad (\text{A.51})$$

しかし、以下で見るように実用上は $\mathcal{G}_{*\hat{A}}$ 上のデルタ汎関数を被積分汎関数に挿入するため、ローカルな表式で全く問題が生じない。

■ゲージ固定に依らない経路積分

分配関数はゲージ固定した場について行われる。

$$Z = \int_{\mathcal{A}/\mathcal{G}} \mathcal{D}\hat{A} e^{-S[\hat{A}]} \quad (\text{A.52})$$

この表式は by definition でゲージ固定に依らない。しかし、表式上はゲージ固定に依っているように見える。

これを解決するために、次のデルタ汎関数を挿入する。

$$\int_{\mathcal{G}_{\hat{A}}} \mathcal{D}\theta \delta[\theta - \tilde{\theta}] = 1 \quad (\text{A.53})$$

ここで $\tilde{\theta}$ は自由にとれる。

挿入の結果、

$$Z = \int_{\mathcal{A}/\mathcal{G}} \mathcal{D}\hat{A} \int_{\mathcal{G}_{\hat{A}}} \mathcal{D}\theta \delta[\theta - \tilde{\theta}] e^{-S[\hat{A}]} \quad (\text{A.54})$$

$$= \int_{\mathcal{A}/\mathcal{G}} \mathcal{D}\hat{A} \int_{\mathcal{G}_{\hat{A}}} \mathcal{D}\theta \delta[\theta - \tilde{\theta}] e^{-S[\hat{A}^\theta]} \quad (\text{A.55})$$

が得られる。ただし最後の式変形では作用のゲージ不変性を用いた。

最後に式 (A.49) や $A = \hat{A}^\theta$ と合わせることで

$$Z = \int_{\mathcal{A}} \mathcal{D}A \delta[\theta - \tilde{\theta}] e^{-S[A]} \quad (\text{A.56})$$

が得られる。

最後の表式はデルタ汎関数によってゲージ固定 $A = \hat{A}^{\tilde{\theta}}$ することで、全空間 $\mathcal{A}$ での積分がゲージ固定した部分空間のみの積分に落ちていることを意味している。また、 $\tilde{\theta}$ を自由を選ぶことから、この分配関数がゲージ固定に依らないことがより明示的に理解できる。

■ゲージ固定条件と FP 行列式

前節でゲージ固定を $A = \hat{A}^{\tilde{\theta}}$ と定めた。このような表式によるゲージ固定は実用性に欠いている。より実用的な方法は次のようなゲージ固定条件を課すことである。

$$\partial \cdot A = 0 \text{ or } \partial \cdot A + A^2 = 0 \text{ etc...} \quad (\text{A.57})$$

一般に作用素 $\mathcal{F}$ を用いてゲージ固定条件を

$$\mathcal{F}A = 0 \quad (\text{A.58})$$

あるいはより簡便に

$$f(x) := \mathcal{F}A(x) = 0 \quad (\text{A.59})$$

と書くことにする。

$\mathcal{F}A = 0$ は全空間 $\mathcal{A}$ 上に閉曲線を描く。これがバンドル $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}$ の global chapter になっていると仮定して以下の議論を行う。なぜなら、global chapter でないとゲージ固定を定める $\tilde{\theta}$ と f が一対一に対応しないためである。ただしこの仮定は非可換ゲージ理論では成立しないため、注意が必要であるらしい。（この問題を Gribov 問題という。）

f は A を通じて次のようにゲージ変換 θ への依存性がある。

$$f = \mathcal{F}\hat{A}^\theta \quad (\text{A.60})$$

これを用いると式 (A.56) のデルタ汎関数を次のように書き換えられる。(ここで $f = \mathcal{F}\hat{A}^{\tilde{\theta}} = 0$ と約束した。)

$$\delta[\theta - \tilde{\theta}] = \det \left(\frac{\delta f}{\delta \theta} \right) \delta[f] \quad (\text{A.61})$$

この行列式をファデーエフ・ポポフ行列式 (FP 行列式) という。^{*8}

(A.56) 式と (A.61) 式より

$$Z = \int_{\mathcal{A}} \mathcal{D}A \det \left(\frac{\delta f}{\delta \theta} \right) \delta[f] e^{-S[A]} \quad (\text{A.62})$$

を得る。

FP ゴースト場と NL 場式 (A.62) に含まれる次の 2 つの因子を書き換える。

$$\det \left(\frac{\delta f}{\delta \theta} \right) = \int \mathcal{D}c \mathcal{D}b e^{-\int b \frac{\delta f}{\delta \theta} c}, \quad (\text{A.63})$$

$$\delta[f] = \int \mathcal{D}B e^{i \int B f} \quad (\text{A.64})$$

1 行目の c, b は実グラスマン数でそれぞれゴースト場, 反ゴースト場という。2 行目の B は中西・ロートラップ場 (NL 場) という。

この書き換えにより式 (A.62) は

$$Z = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}B \mathcal{D}c \mathcal{D}b e^{-S[A] + i \int B f - \int b \frac{\delta f}{\delta \theta} c} \quad (\text{A.65})$$

となる。つまりゲージ固定とは作用 $S[A]$ を

$$S[A] \rightarrow S[A] - i \int B f + \int b \frac{\delta f}{\delta \theta} c \quad (\text{A.66})$$

と置き換えることに等しい。ゆえに付加される 2 つの項をゲージ固定項という。

通常式 (A.66) には NL 場の 2 乗 $\int \frac{1}{2\xi} B^2$ も含めた表式が用いられる。実はより一般の対称行列 M_{ab} を用いて $\int M_{ab} B^a B^b$ という項を足すことが許される。しかし、ここまでの導出を見ての通りこの項は必須ではない。ちなみにこの項を足すことは、式 (A.62) のデルタ汎関数をガウシアン汎関数に置き換えることに相当する。この置き換えが許されるのは、分配関数がゲージ固定関数 f に依存しないため、 f がガウシアン分布に従って様々な値を取っても構わないためである。ちなみに、作用に NL 場について 3 次以上を加えることも論理的には可能である。これはガウシアン分布をより一般の分布に置換することに相当する。ただしこれは恐らく繰り込み不可能なので通常禁止されると思われる。

■BRST 変換

ゲージ理論の作用 $S[A]$ を ゲージ固定したものは次のように書ける。

$$S'[A, B, b, c] := S[A] - i \int B^a (\mathcal{F}A)^a + \int b^a \frac{\delta(\mathcal{F}A)^a}{\delta \theta^b} c^b + \int M^{ab} B^a B^b \quad (\text{A.67})$$

^{*8} 注意：デルタ（汎）関数の変数変換をすると、本来は $\det$ に絶対値がつくが大体気にしないことが多い。ここら辺の事情については次の文献の脚注 10 を参照。 <http://aries.phys.cst.nihon-u.ac.jp/~ohya/qft/main.pdf>

この作用は BRST 変換と呼ばれる次のような変換について不変（BRST 不変）である。

$$\delta_B A^a = ic^b \frac{\delta}{\delta \theta^b} A^a, \quad (\text{A.68})$$

$$\delta_B c^a = -\frac{i}{2} f^{abc} c^b c^c, \quad (\text{A.69})$$

$$\delta_B b^a = B^a, \quad (\text{A.70})$$

$$\delta_B B^a = 0 \quad (\text{A.71})$$

右辺と左辺を見比べたら分かる通り、 δ_B はグラスマン奇である。

この変換の重要な性質として次の冪零性がある。（証明は後で行う。）

$$\delta_B^2 = 0 \quad (\text{A.72})$$

S' が BRST 変換を用いて

$$S' = S[A] - i\delta_B \int b^a (\mathcal{F}A)^a + \delta_B \int M^{ab} b^a B^b = S[A] + \delta_B(\cdots) \quad (\text{A.73})$$

と書ける。これを踏まえると作用の不変性は次のように簡単にわかる。

$$\delta_B S' = \delta_B S[A] + \delta^2(\cdots) = \delta_B S[A] \quad (\text{A.74})$$

ここでゲージ不変性を用いて

$$\delta_B S[A] = \delta_B A \frac{\delta S[A]}{\delta A} = ic \frac{\delta A}{\delta \theta} \frac{\delta S[A]}{\delta A} = ic \frac{\delta S[A]}{\delta \theta} = 0 \quad (\text{A.75})$$

となる。

■BRST 変換の冪零性

任意の汎関数 $F[A, B, c, b]$ について

$$\delta_B^2 F = 0 \quad (\text{A.76})$$

を示す。これはチェーンルールより

$$\delta_B^2 A = 0, \quad (\text{A.77})$$

$$\delta_B^2 B = 0, \quad (\text{A.78})$$

$$\delta_B^2 c = 0, \quad (\text{A.79})$$

$$\delta_B^2 b = 0 \quad (\text{A.80})$$

を示せば十分である。

(1) $\delta_B^2 B = 0$ と $\delta_B^2 b = 0$ は自明である。

(2) $\delta_B^2 c = 0$ を示す。まず

$$\delta_B c^a = f^{abc} c^b c^c \quad (\text{A.81})$$

である．（係数は重要でないので省略した．）もう一度 BRST 変換すると

$$\delta_B^2 c^a = f^{abc} \delta_B (c^b c^c) \quad (\text{A.82})$$

$$= f^{abc} f^{bde} c^d c^e c^c - f^{abc} c^b f^{cde} c^d c^e \quad (\text{A.83})$$

$$= f^{abc} f^{bde} c^d c^e c^c - f^{abc} f^{cde} c^d c^e c^b \quad (\text{A.84})$$

$$= 2f^{abc} f^{bde} c^d c^e c^c \quad (\text{A.85})$$

これはヤコビ恒等式より零である．

(3) $\delta_B^2 A = 0$ を示す．まず

$$\delta_B A^a = ic^b \frac{\delta}{\delta \theta^b} A^a \quad (\text{A.86})$$

である．もう一度 BRST 変換すると

$$\delta_B^2 A^a = i\delta_B c^b \frac{\delta}{\delta \theta^b} A^a - ic^b \frac{\delta}{\delta \theta^b} \delta_B A^a \quad (\text{A.87})$$

第 1 項目について

$$i\delta_B c^b \frac{\delta}{\delta \theta^b} A^a = \frac{1}{2} f^{bcd} c^c c^d \frac{\delta}{\delta \theta^b} A^a = \frac{1}{2} f^{dbc} c^b c^c \frac{\delta}{\delta \theta^d} A^a \quad (\text{A.88})$$

第 2 項目について

$$ic^b \frac{\delta}{\delta \theta^b} \delta_B A^a = ic^b \frac{\delta}{\delta \theta^b} ic^c \frac{\delta}{\delta \theta^c} A^a = -\frac{1}{2} \left[\frac{\delta}{\delta \theta^b}, \frac{\delta}{\delta \theta^c} \right] c^b c^c A^a \quad (\text{A.89})$$

以上より

$$\delta_B^2 A^a = \frac{1}{2} \left(f^{dbc} \frac{\delta}{\delta \theta^d} - \left[\frac{\delta}{\delta \theta^b}, \frac{\delta}{\delta \theta^c} \right] \right) c^b c^c A^a \quad (\text{A.90})$$

であるので，これは Wess-Zumino 条件より零である．

付録 B

アノマリーの諸性質

B.1 アノマリーの微分幾何学的解釈

B.1.1 アノマリーと切断

アノマリーを理解する上で、微分幾何学に基づいた議論は大変わかりやすいので、ここで紹介する。Dirac スピノルの分配関数は

$$Z[A] = \det(\not{D}_A) \quad (\text{B.1})$$

と書ける。また、Weyl スピノルの分配関数はこの平方根で与えられるため、Pfaffian を用いて

$$Z[A] = \text{Pf}(\not{D}_A) \quad (\text{B.2})$$

と表される。以下 Dirac スピノルについて議論するが、 $\det$ を Pf に読み替えることで常に Weyl スピノルの議論に移ることができる。

アノマリーを議論するには、ゲージ同値な 2 つの場合 A, A^g およびそれをつなぐ曲線

$$A(t) = (1-t)A + tA^g \quad (\text{B.3})$$

を考えるとわかりやすい。この曲線はゲージ場の配位空間 $\mathcal{A}$ 上で 2 つの端点 A, A^g をもっており、曲線に沿って値を $Z[A]$ から $Z[A^g] = JZ[A]$ へと変化させる。ただし J はアノマリーである。曲線 $A(t)$ は $\mathcal{A}/\mathcal{G}_*$ 上では閉曲線となる。なぜなら、 $A \sim A^g$ であるからだ。よって、アノマリー J が存在するとき、 $Z[A]$ は $\mathcal{A}/\mathcal{G}_*$ 上では一価な関数でない。分配関数は関数というよりむしろ一般には切断である。そして、その切断が大域的切断であるとき、分配関数は一価であるため、アノマリーが存在しないと言える。しかし、分配関数が大域的切断であるかどうか判断するのは非常に難しい問題である。

この問題に対する一応の回答として、ホロノミーを考える方法がある。つまり、微小なループ $A(t)$ を $\mathcal{A}/\mathcal{G}_*$ 上で考えて、そのループに沿った $Z[A]$ の変化を捉えるのである。もし、 $\mathcal{A}/\mathcal{G}_*$ が単連結であると仮定すると、ホロノミーが常に自明であるならば分配関数は大域的切断となり、アノマリーが

存在しないことが結論付けられる．このように微小なループ $A(t)$ を考えることが，摂動アノマリーの議論に相当する．

しかし， $\mathcal{A}/\mathcal{G}_*$ は一般に単連結ではない．それゆえに $\mathcal{A}/\mathcal{G}_*$ には非自明な「穴」が存在して，その周りの非自明なループ $A(t)$ は，微小なループの積み重ねで得ることはできない．このようなループを調べることが，非摂動アノマリーに相当する．もちろん，そのような非自明なループを全て調べ上げることは非常に難しい．この問題に対する数学者のアプローチを概説する．

B.1.2 Dai-Freed の定理

前節の内容をもう少し数学的に丁寧述べる．分配関数は $\mathcal{A}$ 上の関数であるが $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ 上の関数ではない．分配関数（の位相）は $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ 上の直線束の切断である． A^g を A のゲージ変換した場とすると

$$\det(\not{D}_{A^g}) = \det(\not{D}_A) \times e^{iw(g,A)} \quad (\text{B.4})$$

である．ここで $\mathcal{A}$ と複素数体 $\mathbb{C}$ の直積 $\mathcal{A} \times \mathbb{C}$ に次の同値類を入れよう．

$$(A, c) \sim (A^g, e^{-iw(g,A)} c) \quad (\text{B.5})$$

この同値類の空間が複素直線束

$$L_w := (\mathcal{A} \times \mathbb{C}) / \sim \quad (\text{B.6})$$

を定める．底空間への射影は $\pi : [(A, c)] \rightarrow [A]$ であり，切断 ψ は

$$\psi([A]) := [(A, \det(\not{D}_A))] \quad (\text{B.7})$$

である．このように定義された直線束をディラック演算子の行列式直線束という．分配関数が L_w の大域的切断であるとき，この理論はアノマリーフリーであるという．

さて，この行列式直線束に対して一般に大域的切断が存在するかどうかは難しい問題だが，Dai-Freed によって見出されたのは， d 次元多様体 X 上のゲージ場 A を， $d+1$ 次元の境界付き多様体 Y に拡張することであった．ただし $\partial Y = X$ とする．このとき Y 上のゲージ場の配位空間上の行列式直線束は次の大域的切断

$$\det(\not{D}_A) e^{2\pi i \eta(\not{D}_A)} \quad (\text{B.8})$$

をもっていることが明らかとなった．この事実の意味するところは，適切な分配関数 $e^{2\pi i \eta(\not{D}_A)}$ と元の分配関数 $\det(\not{D}_A)$ を結合することで互いにアノマリーを打ち消しあうということである．この数学的事実に対してドメインウォール・フェルミオンを用いた物理的解釈を与えたのが，Witten-Yonekura[9] であった．彼らの解析により， $e^{2\pi i \eta(\not{D}_A)}$ はバルクのドメインウォール・フェルミオンの TQFT に相当することがわかった．

B.2 Weyl アノマリーの特殊性

B.2.1 Weyl アノマリーの特殊性

Weyl 変換とは、多様体上の計量 $g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$ に対して、

$$g_{\mu\nu} \mapsto e^{f(x)} g_{\mu\nu} \quad (\text{B.9})$$

と変化させることである。当然この変化に伴って曲率テンソル $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ も変化するため、ただの座標変換ではない。これは通常のゲージ変換と大きく異なる点である。この性質のために、Weyl 変換に伴うアノマリー（Weyl アノマリー）は他のアノマリーと同じように計算することはできない。例えば、 d 次元のゲージ・アノマリーを計算するには 5 次元の mapping torus M としてしばしば

$$M = \bar{S} \cup N, \quad (\text{B.10})$$

$$N = (D^{d+1}, A), \quad (\text{B.11})$$

$$S = (D^{d+1}, A^g) \quad (\text{B.12})$$

を選択する。これは、 N と S の境界が (S^4, A) と (S^4, A^g) のようにゲージ同値で多様体の形も全く同一であるから「貼り合わせる」ことができる。しかし、Weyl 変換すると多様体の形を変えてしまうため、上手く貼り合わせるができない。ゆえに Weyl アノマリーは本修士論文の formalism で計算することが出来ない。

B.2.2 Weyl アノマリーの計算

2 次元 Weyl アノマリーに関しては、簡単に決定することができる^{*1}。物質場を ϕ としゴースト場を b, c とする、このとき計量 g を固定した分配関数

$$Z[g] = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}b \mathcal{D}c e^{-S[\phi, b, c, g]} \quad (\text{B.13})$$

を考える。このとき、他の局所的対称性として Poincare 対称性もある。Weyl 対称性と Poincare 対称性の両者を同時に保つ正則化は存在しない。そこで、ここでは Poincare 対称性を保つような正則化を選んだとしよう。すると、Weyl 変換して生じるアノマリーは、必ず Poincare 対称性を持たなければならない。そのため次元解析と合わせると

$$J \sim 1 + \frac{1}{2\pi} \int d^2x \sqrt{\det g(x)} f(x) [aR + b] \quad (\text{B.14})$$

という形に絞られる。ここで $f(x)$ は Weyl 変換 $g_{\mu\nu} \mapsto e^{f(x)} g_{\mu\nu}$ のパラメーターで、十分微小であると仮定している。また、作用について計量で変分すると、エネルギー・運動量テンソル T^{ab} を用いて

$$\frac{4\pi}{\sqrt{\det g(x)}} \frac{\delta S}{\delta g_{ab}(x)} = T^{ab}(x) \quad (\text{B.15})$$

^{*1} これは恐らく、2 次元の曲率 R の積分はトポロジカルでオイラー類という特性類になることが理由だと思われる。しかし、オイラー類は安定な特性類でないため、やはり他のアノマリーのようにボルディズムを用いて計算することは困難だと思われる。

となるので、作用を Weyl 変換すると

$$S \mapsto S - \frac{1}{2\pi} \int d^2x \sqrt{\det g(x)} f(x) T_a^a(x) \quad (\text{B.16})$$

である。以上より Weyl アノマリーはエネルギー・運動量テンソル T^{ab} のトレースによって表されて

$$T_a^a(x) = aR + b \quad (\text{B.17})$$

である。この形から、Weyl アノマリーはしばしばトレース・アノマリーと呼称される。しかし、Poincare 不変な相殺項が存在して、それは宇宙項

$$S_{\text{ct}} = \lambda \int d^2x \sqrt{\det g(x)} \quad (\text{B.18})$$

である。この項は上手く選ぶことで Weyl アノマリーから定数項 b を差し引くことができ

$$T_a^a(x) = aR \quad (\text{B.19})$$

となる。これは、平坦時空で Weyl・アノマリーが消えるように正則化を選んだことを意味する。また、この係数 a は Virasoro 代数の中心に対応する。このように代数の中心が出現する背景には射影表現があると思われる。

付録 C

幾何学について

C.1 コホモロジーについて

本論で使用したコホモロジーに関連する事項にまとめた．[24][26][15][14] が主な参考文献である．

C.1.1 コホモロジーの導入

コホモロジー群 H^* とは，簡単に言うところある多様体 M 上のゲージ場から構成できる，ラグランジアン^{*}のトポロジカル項を集めたものである．トポロジカル項 X, Y を考えると，その和 $X + Y$ もまたトポロジカル項であるので，コホモロジー群とはざっくりいうとトポロジカル項を基底とするようなベクトル空間のようなものである．しかし，トポロジカル項の係数が常に実数である保証はない．しばしば整数や離散群に取られることすらある．これは対称性が離散的であるとき，特にそのような自体が生じる．そのため，コホモロジー群に対してある可換群 A を定めて，基底が A および A の捻じれ A/kA を係数にするようなものとして，実現される．

$$H^n(M, A) = AX_1 \oplus AX_2 \oplus \cdots \oplus AX_m \oplus A/kAY_1 \oplus \cdots \quad (\text{C.1})$$

基底はしばしば省略して単に

$$H^n(M, A) = A^m \oplus A/kA \oplus \cdots \quad (\text{C.2})$$

とも書く．ここで，右肩の n は，このコホモロジー群が n 形式のトポロジカル項 X, Y で貼られる空間であることを意味する^{*1}．そして，右辺について A^m のコホモロジー群の自由部分といい，それ以外の $A/kA \oplus \cdots$ を捻じれ部分という．また， H^n の整数 n について直和を取ることで，コホモロジーに環構造が入る．

$$H^*(M, A) := \bigoplus_{n \geq 0} H^n(M, A) \quad (\text{C.3})$$

^{*1} 微分形式は実数係数しかとれないので， n 形式より n コチェインと言った方が正確であるが，ここではラフに n 形式と言っている．

つまり、和 $X + Y$ に加えて積 $X \wedge Y$ も定義されている*2。この環構造は物理的にも重要であるが、群構造に比べて特定することが一般に難しい。以下、コホモロジー群やコホモロジー環と毎度言うのは面倒なので、単にコホモロジーと言うことにする。

C.1.2 de Rham コホモロジー

コホモロジーの中でも特に de Rham コホモロジーと Čech コホモロジーは実用上重要である。de Rham コホモロジーとは、微分形式でトポロジカル項 X を表記することで得られるコホモロジーである。つまり、トポロジカルであるとはナイーブには、積分区間の微小変化 δS について、その積分値が不変であることである。

$$\int_S X = \int_{S+\delta S} X \quad (\text{C.4})$$

言い換えると

$$\int_{\delta S} X = 0 \quad (\text{C.5})$$

である。ここで、 δS を十分微小とすると、そのトポロジーは自明であると見做せるので内部を埋めて B が得られる： $\partial B = \delta S$ 。よって Stokes の定理より

$$\int_{\partial B} X = \int_B dX = 0 \quad (\text{C.6})$$

が得られる。すなわち、 X がトポロジカルであるとは、外微分して 0 であることとして特徴づけられる： $dX = 0$ 。しかし、トポロジカルな項には自明な不定性が存在する。

$$X \sim X + d(\cdots) \quad (\text{C.7})$$

ただし、 $(\cdots)$ は局所的な項である。上記の違いは外微分すると自明に消えるため、同一視しておくのが良い。ここで、 $d\eta = 0$ になるような n 形式 η を閉 n 形式といい、閉 n 形式 η でも特に $\eta = d\theta$ と書けるようなものを完全 n 形式という。 n 次の de Rham コホモロジー H_{dR}^n とは、

$$H_{\text{dR}}^n = \frac{\{\text{閉 } n \text{ 形式}\}}{\{\text{完全 } n \text{ 形式}\}} \quad (\text{C.8})$$

として定義される。 n 形式の集合を Ω_n としたとき、特に Ω_n から Ω_{n+1} への微分を $d^{(n)}$ と表記することにすれば、上式は

$$H_{\text{dR}}^n = \frac{\ker(d^{(n)})}{\text{im}(d^{(n-1)})} \quad (\text{C.9})$$

と表される。

de Rham コホモロジーの定義は非常に明快だが、その係数 A が常に実数 $\mathbb{R}$ に限定されていることが弱点である。この弱点を克服できているのが Čech コホモロジーである。これは層係数コホモロ

*2 ただしこの Wedge 積 $\wedge$ も微分形式に対してのみ定義されていて、本当は一般のコチェインに対してはカップ積 $\cup$ で表記しなければならない。

ジーで層として実数の層の他、整数の層等の一般の加群の層を考えることで、様々な係数が扱える。物理的には、微分形式を使わずに、代わりに topological defect を用いてゲージ場のトポロジを考えている等の違いはあるが、実際計算する上では単に係数が一般の加群であるような de Rham コホモロジーと思えば、殆どの計算は可能である。また、重要な点として $\mathbb{R}$ 係数 Čech コホモロジーは de Rham コホモロジーと同型である (de Rham の定理)。

C.1.3 一般の係数に対するコホモロジー

Čech コホモロジー等を用いることで、実数 $\mathbb{R}$ 以外の可換群 $\mathbb{A}$ を係数にするようなコホモロジーを考えることが出来る。可換群 $\mathbb{A}$ としては主に $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n, U(1) = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ を考えることが多い。

X を時空とする。 X の中で p 次元部分多様体の集合 (を連続変形で割ったもの) を $C_p(X)$ とする。境界を取る操作を ∂ とする。 ∂ は $C_p(X)$ から $C_{p-1}(X)$ への写像である。境界に現れる多様体は必ず閉なので

$$\partial^2 = 0 \quad (\text{C.10})$$

である。

さて de Rham コホモロジーの場合、その元は微分形式によって生成される。 p 形式 ω は $C_p(X)$ から $\mathbb{R}$ への写像である。

$$\omega : M \mapsto \int_M \omega \quad (\text{C.11})$$

また、その外微分形式 $d\omega$ は $C_{p+1}(X)$ から $\mathbb{R}$ への写像である。

$$d\omega : N \mapsto \int_N d\omega = \int_{\partial N} \omega \quad (\text{C.12})$$

これらの概念を一般化する。すなわち微分形式の代わりにコチェインと呼ばれる概念を導入する。 p コチェイン x は $C_p(X)$ から $\mathbb{A}$ への写像である。

$$x : M \mapsto x(M) \quad (\text{C.13})$$

また、外微分の代わりにコバウンダリ δ を導入する。これも de Rham コホモロジーに習い、 $C_{p+1}(X)$ から $\mathbb{A}$ への写像で

$$\delta x : N \mapsto x(\partial N) \quad (\text{C.14})$$

となるものとして定義される。 $\partial^2 = 0$ なので $\delta^2 = 0$ である。

p コチェイン x で特に

$$\delta x = 0 \quad (\text{C.15})$$

となるものを、コサイクルという。これは de Rham コホモロジーの閉形式の概念を一般化したものである。また、 $p-1$ コチェイン y を用いて

$$x = \delta y \quad (\text{C.16})$$

とかけるとき、これはコバウンダリという。これは de Rham コホモロジーの完全形式の概念を一般化したものである。

n 次の de Rham コホモロジー H_{dR}^n は、

$$H_{\text{dR}}^n(X) = \frac{\{\text{閉 } n \text{ 形式}\}}{\{\text{完全 } n \text{ 形式}\}} \quad (\text{C.17})$$

として定義される。同様に一般の係数 $\mathbb{A}$ に対するコホモロジーは

$$H^n(X, \mathbb{A}) = \frac{\{n \text{ コサイクル}\}}{\{n \text{ コバウンダリ}\}} \quad (\text{C.18})$$

で定義される。

ここで導入した p コチェインの台 $C_p(X)$ は、物理的には topological defect として考えれば良い。

便宜上、ここでは数学的に正しい言葉遣い (p コチェイン等) を用いたが、実際計算する上では微分形式のように扱って差し支えないことが多いので、本文ではしばしば de Rham コホモロジーと同じような言葉遣い (p 形式等) をしていることに注意してほしい。

C.1.4 Čech コホモロジーとの対応

簡単に p コチェインの台 $C_p(X)$ を X 上の p 次元部分多様体の集合として定義したが、実際の数学の文献ではより精密の定義される。1 つの方法は三角形分割する特異ホモロジーの方法であるが、ここでは Čech コホモロジーでの考え方を簡単に説明する。

まず、 X 上の n 次元開集合を U^n とする。2 つの開集合 U_1^n, U_2^n の積集合を U_{12}^n と定義しよう、

$$U_{12}^n = U_1^n \cap U_2^n \quad (\text{C.19})$$

ここで 2 つの開集合の重なりが十分に「薄く」なる極限を考える。このとき U_{12}^n は $n-1$ 次元のオブジェクトとして捉えることができる。薄くなる極限という代わりに、 U_{12}^n から代表元として $n-1$ 次元のオブジェクトを取り出し、そのオブジェクトは連続変形の下で同一視していると考えても同じことである。

また、同様に 3 つの開集合 U_1^n, U_2^n, U_3^n の積集合を U_{123}^n と定義しよう、

$$U_{123}^n = U_1^n \cap U_2^n \cap U_3^n \quad (\text{C.20})$$

この 3 つの開集合の重なりが十分小さいならば U_{123}^n は $n-2$ 次元のオブジェクトとして捉えることができる。

以上のようにして積集合を取る操作をオブジェクトの次元と対応させる。実は積集合を取る操作自体が層の概念と密接に関係している。

また、物理的にはあるパッチ U_1^n と別のパッチ U_2^n の境界には座標変換関数・ゲージ変換関数が住んでいると考える。つまり、 $n-1$ 次元のオブジェクト U_{12}^n を粒子が通過すると、その粒子はゲージ変換を受ける。すなわちこれは物理的には defect に他ならない。また、上で説明したように連続変形を許すので、これは topological な defect である。

C.1.5 特性類

数学的にはコホモロジーの基底として機能するのが特性類である。物理的にはコホモロジーの基底はトポロジカル項であったので、特性類＝トポロジカル項と思えば良い。

■Chern 類

代表的な特性類としては、ランク N の複素ベクトル束 $E \rightarrow M$ に対して定義される Chern 類 c_i がある。これは $H^{2i}(M, \mathbb{Z})$ の基底をなし、以下の 4 公理を満足するものとして定義される。

- $c_0(E) = 0$ で、 $i > N$ のとき $c_i = 0$ である。
- $f: N \rightarrow M$ に対する引き戻し束 $f^*E \rightarrow N$ について、 $f^*c_i(E) = c_i(f^*E)$ である。
- 2 つのベクトル束 $E \rightarrow M, F \rightarrow M$ の直和について、 $c(E \oplus F) = c(E)c(F)$ である。
- $\mathbb{CP}^1$ の tautological 直線束 l について、 $\langle \mathbb{CP}^1, c_1(l) \rangle = -1$ である。

また、これらの和

$$c(E) := c_1(E) + c_2(E) + \cdots \quad (\text{C.21})$$

を全 Chern 類と呼ぶ。

物理的にランク N の複素ベクトル束を考えると、各点 x で N 個並べた複素スカラー場を考えることに等しい。

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \vdots \\ \phi_N(x) \end{pmatrix} \quad (\text{C.22})$$

これを $U(N)$ の表現だと思えば、各点で $U(N)$ ゲージ場が定義されることになるので、その場の強さ F によって作られるトポロジカル項が Chern 類 c_i である。すなわち

$$c(E) = \det \left(1 + \frac{iF}{2\pi} \right) \quad (\text{C.23})$$

で与えられる。これより

$$c_1(E) = \frac{iF}{2\pi}, \quad (\text{C.24})$$

$$c_2(E) = \frac{1}{8\pi^2} [\text{tr}(F \wedge F) - \text{tr} F \wedge \text{tr} F] \quad (\text{C.25})$$

と与えられる。本修士論文では特に $U(N)$ の部分群 G に対するゲージ場の曲率を f とすると、これを

$$c_i(f), c_i(G), c_i(G \text{ 束}) \quad (\text{C.26})$$

と表記する。例えば $G = SU(N)$ のとき

$$c_2(f) = c_2(SU(N)) = c_2(SU(N) \text{ 束}) = \frac{1}{8\pi^2} \text{tr}(F \wedge F) \quad (\text{C.27})$$

である。

■Pontryagin 類

複素ベクトル束に対して Chern 類を定義したように、実ベクトル束 $E \rightarrow M$ に対して Pontryagin 類が定義される。これは

$$p_i(E) := (-1)^i c_{2i}(E \otimes \mathbb{C}) \quad (\text{C.28})$$

と定義される。つまり、これは $H^{4i}(M, \mathbb{Z})$ の基底である。ちなみに $c_{2i+1}(E \otimes \mathbb{C}) = 0$ である。

物理では実用上、実ベクトル束として接束 $E = TM$ を考えることが多い。この場合場の貯砂 F は曲率 2 形式 R に置き換わる。普通のゲージ場でも実表現ならば Pontryagin 類で書ける。あまり、Chern 類と Pontryagin 類の違いは本質的でなく、その表現次元が複素か実かの違いに過ぎない。

また、定義より $2p(E \oplus F) = p(E)p(F)$ である。

■Stiefel-Whitney 類

Stiefel-Whitney 類 w_i の定義の動機付けには、SO 構造（向き付け構造）や Spin 構造を考えるのが良いが、それは後で書いている Spin 構造の節に譲る。ここでは、実用的な特徴づけ：

$$w_{2i}(E)^2 \equiv p_i(E) \pmod{2} \quad (\text{C.29})$$

についてのみ触れる。ここで $\text{mod } 2$ としているのは、

$$\int_X p_i(E) = n \in \mathbb{Z} \quad (\text{C.30})$$

であるときに、

$$\int_X w_i(E)^2 = 0, 1 \quad (\text{C.31})$$

であることを意味する。ただし最後の等号は n が偶数なら 0 で、 n が奇数なら 1 である。 w_i は積分値が 0, 1 の値だけを取る $\mathbb{Z}_2$ 値のコホモロジー $H^i(M, \mathbb{Z}_2)$ の基底である。

また、 $w(E \oplus F) = w(E)w_i(F)$ である。

また、實際上重要な性質として

$$w_i(E) = c_{2i}(E) \pmod{2} \quad (\text{C.32})$$

がある。

C.1.6 ホモロジー群

コホモロジーが n 形式 ω_i を基底にするような A 加群

$$H^n = \langle \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m \rangle_A \quad (\text{C.33})$$

であるのに対して、ホモロジーは n 次元多様体を基底 X_i にした A 加群

$$H_n = \langle X_1, X_2, \dots, X_m \rangle_A \quad (\text{C.34})$$

である。ここで、ホモロジー-コホモロジー間に積を定義できる。

$$\langle X_i, \omega_j \rangle := \int_{X_i} \omega_j \quad (\text{C.35})$$

ここで、上式が δ_{ij} になるように X_i のセットは選ばれているものとする。このとき一般の元

$$X = \sum_i a_i X_i, \quad (\text{C.36})$$

$$\omega = \sum_i b_i \omega_i \quad (\text{C.37})$$

に対する積は

$$\langle X, \omega \rangle = \sum_i a_i b_i \quad (\text{C.38})$$

で与えられる。このようにコホモロジーをベクトル空間と思えば、ホモロジーとはコホモロジーの双対ベクトル空間のような存在である。そう考えると、 $\langle X_i, \omega_j \rangle = \delta_{ij}$ としているので、 X_i は ω_i の双対な元である。それを反映して本修士論文では

$$X_i = \tilde{\omega}_i \quad (\text{C.39})$$

と表示している。

コホモロジーとホモロジーの間には幾つかの双対が存在する。ここでは Poincare 双対について簡単に言及しておこう。今 d 次元多様体 M を考えている。任意の $d-n$ 形式 ω に対して以下を満たすような n 形式 η と $n-d$ 次元多様体 Y は Poincare 双対であるという。

$$\int_M \omega \wedge \eta = \int_Y \omega \quad (\text{C.40})$$

このとき、本修士論文では $Y = \mathcal{P}\eta$ と表示している。

C.1.7 Eilenberg-MacLane 空間・分類空間

代数トポロジーの精神は、幾何を写像に置き換えることにある。それを実現するのが Eilenberg-MacLane 空間や分類空間である。

■Eilenberg-MacLane 空間

Eilenberg-MacLane 系列 HA とは、常コホモロジー $H^*(X, A)$ を考えたとき

$$H^*(X, A) = [X, HA] \quad (\text{C.41})$$

によって特徴づけられるような系列である。ここで、 $[\cdot, *]$ は $\cdot$ から $*$ への写像の集合 $\text{Map}(\cdot, *)$ を連続変形（ホモトピック）で割ったものである。

つまり、コホモロジー $H^*(X, A)$ の元 x をとるとこれは

$$x : X \rightarrow HA \quad (\text{C.42})$$

として捉えられる。

このような空間を考える動機は、「空間 X 上」のコホモロジーという概念を離れることにある。つまり、任意の次元の任意の空間のコホモロジーを、 HA によって一挙に考えることが出来る。これは、任意のバルクを考えるアノマリーの現代的 formalism とよくマッチする。

ここで、各次数に分解して議論することもできる。つまり、Eilenberg-MacLane 空間 $K(A, n)$ とは

$$H^n(X, A) = [X, K(A, n)] \quad (\text{C.43})$$

が成立するような空間として特徴づけられる。よって、Eilenberg-MacLane 系列 HA は Eilenberg-MacLane 空間の列

$$HA = \{K(A, n)\}_{n \in \mathbb{Z}} \quad (\text{C.44})$$

で表される。

■分類空間

Eilenberg-MacLane 空間がコホモロジーを写像に置き換えるものならば、分類空間はファイバー束を写像に置き換えることである。

まず引き戻し束の定義を確認しよう。ファイバー束 $\pi: E \rightarrow B$ と、連続写像 $f: B' \rightarrow B$ があったとき、以下のようにして B' 上のファイバー束が定義できる。これを引き戻し束という。

$$\text{全空間: } f^*E := \{(b', e) \in B' \times E \mid f(b') = \pi(e)\}$$

$$\text{射影: } \pi': f^*E \rightarrow B', (b', e) \mapsto b'$$

ここで分類空間の特徴づけを述べる。群 G に対して、分類空間と呼称される無限次元空間 BG がある。分類空間 BG は以下のように全空間 EG があってファイバーが構成できる。

$$\pi: EG \rightarrow BG \quad (\text{C.45})$$

上記は全然定義になっていないが、次の定理さえ知っていればとりあえず事足りる。つまり、任意の多様体 X 上の主 G 束

$$\pi': E \rightarrow X \quad (\text{C.46})$$

は分類空間と引き戻し束として実現できる。すなわちファイバー束 $\pi: EG \rightarrow BG$ と適切な連続写像 $f: X \rightarrow BG$ を使った引き戻し束

$$\pi': f^*EG \rightarrow X \quad (\text{C.47})$$

$$E = f^*EG \quad (\text{C.48})$$

として表せる。

つまり、 X 上の主 G 束（ゲージ群 G であるゲージ場）を調べることは、 X から分類空間 BG への連続写像 f を調べることに等価である。連続写像 f の集合は

$$[X, BG] = \text{Map}(X, BG) / \text{homotopy} \quad (\text{C.49})$$

である。

このように、多様体 X 上の建造物（ファイバー、コホモロジー）などを、 X から適切な空間への写像と読み替えることが代数トポロジーの中心的アイディアとなる。

C.1.8 一般コホモロジー

先ほど導入した de Rham コホモロジーと $\mathbb{R}$ 係数 Čech コホモロジーは同型であった．一般にこれらのような「普通」のコホモロジーを常コホモロジーという^{*3}．常コホモロジーは次の性質をもつ：

$$H^*(pt, A) = 0 \quad (* \geq 1) \quad (\text{C.50})$$

これを次元公理という．つまり 1 点集合に対するコホモロジーは 0 次を除き自明である．

しかし，現代では次元公理を満たさないような（コ）ホモロジー，つまり一般（コ）ホモロジーの存在が知られている．K 理論やボルディズム群もこの枠組みで捉えることが可能である．ここでは常コホモロジー H^* に対して一般コホモロジーを h^* と表記しよう．

一般コホモロジーの特徴づけとしては次の Brown の表現定理が便利である．

Brown の表現定理

任意の一般コホモロジー h^* に対して， E_n ($n \in \mathbb{Z}$) が一意に存在して

$$h^*(X) = [X, E_n] \quad (\text{C.51})$$

でまた

$$E_n = \Omega E_{n+1} \quad (\text{C.52})$$

を満たす．ここで， E_n を h^* の分類空間といい， $\{E_n\}$ を Ω 系列という．

ただしループ空間 ΩX は基点 $*$ 付き空間 X に対して

$$\Omega X = \{\gamma : S^1 \rightarrow X \mid \gamma(0) = \gamma(1) = *\} \quad (\text{C.53})$$

と定めた．

ここで言っている分類空間 E_n とは，Eilenberg-MacLane 空間の一般化に他ならない．そして， E_n さえ与えておけば一般コホモロジーの詳細を気にせずともあらゆる計算可能である．

- 常コホモロジー $H^n(X, A) \cdots K(A, n)$
- ボルディズム群 $\Omega_n^H(X) \cdots MH(n)$

である．ただし $MH(n)$ は本論で導入した Thom 空間である．実際上はこれらの系列 HA や MH を扱うことが多い．

C.1.9 普遍係数定理と Anderson 双対

コホモロジーは物理的にトポロジカル項という意味をもつため，求めたいことが多い．しかし，実際上コホモロジーよりむしろホモロジーの方が計算が容易であることが多い．そこでここではホモ

^{*3} これは正確には Eilenberg-Steenrod の 4 公理によって定義されるらしい．その内の 1 つが次元公理である．

ロジーからコホモロジーを得るための定理である普遍係数定理を紹介する。

■常 (コ) ホモロジーに対する普遍係数定理

まず常ホモロジー $H_n(X, \mathbb{Z})$ から常コホモロジー $H^n(X, \mathbb{Z})$ を得る場合について考える。ここで普遍係数定理は次で与えられる。

普遍係数定理

常ホモロジー $H_n(X, \mathbb{Z})$ と常コホモロジー $H^n(X, \mathbb{Z})$ について次の短完全列が成立する。

$$0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \rightarrow H^n(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \rightarrow 0 \quad (\text{C.54})$$

が成立する。また、これは自然にはないが分裂する。

この形式で定理を述べても実用上は扱いにくいので、短完全列^{*4}を使わない形に少し変形する。

(m, n) を m, n の最大公約数としたとき、エクステンションとホムについて以下が成立する。

エクステンションについて

$$\text{Ext}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0 \quad (\text{C.55})$$

$$\text{Ext}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_{\times}) = 0 \quad (\text{C.56})$$

$$\text{Ext}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_m \quad (\text{C.57})$$

$$\text{Ext}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) = \mathbb{Z}_{(m,n)} \quad (\text{C.58})$$

ホムについて

$$\text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \quad (\text{C.59})$$

$$\text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n) = \mathbb{Z}_n \quad (\text{C.60})$$

$$\text{Hom}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}) = 0 \quad (\text{C.61})$$

$$\text{Hom}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) = \mathbb{Z}_{(m,n)} \quad (\text{C.62})$$

これらと、普遍係数定理を組み合わせることで、次の重要な結果^{*5}を得る。

$$H^n(X, \mathbb{Z}) = F_n \oplus T_{n-1} \quad (\text{C.63})$$

ここで、 F_n は $H_n(X, \mathbb{Z})$ の自由部分で、 T_{n-1} は $H_{n-1}(X, \mathbb{Z})$ の捻じれ部分である。

■一般 (コ) ホモロジーに対する普遍係数定理

次に一般コホモロジーに対する普遍係数定理を考えたい、しかし、実は一般コホモロジーでは、常コホモロジーのように上手い対応は存在しない。しかし、コホモロジー h^* の代わりに、Anderson 双対 $I_{\mathbb{Z}} : h_* \rightarrow (I_{\mathbb{Z}}h)^*$ を考えると上手く対応づけることが知られている。

$$0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}}(h_{n-1}(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \rightarrow (I_{\mathbb{Z}}h)^n(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(h_n(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \rightarrow 0 \quad (\text{C.64})$$

^{*4} 短完全列 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ では概ね $B/A = C$ という意味である。そして自然に分裂するとは、 $B = A \times C$ が成立することを意味する。

^{*5} [15] の系 15.14.1

ここでは、Anderson 双対の定義をする代わりに、その特徴づけを上の定理で行っていると思うことにする。

これを踏まえると、常コホモロジー H_* に対する普遍係数定理は

$$(I_{\mathbb{Z}}H)^* = H^* \quad (\text{C.65})$$

となる。また一般に 2 回 Anderson 双対を取れば元に戻って

$$I_{\mathbb{Z}}I_{\mathbb{Z}}h = h \quad (\text{C.66})$$

である。

特に本修士論文の主役であるボルディズム群の Anderson 双対 $(I_{\mathbb{Z}}\Omega)^*$ は、 $*$ - 1 次元の IFT を与えるため、物理的に非常に重要である。

C.1.10 スペクトル系列

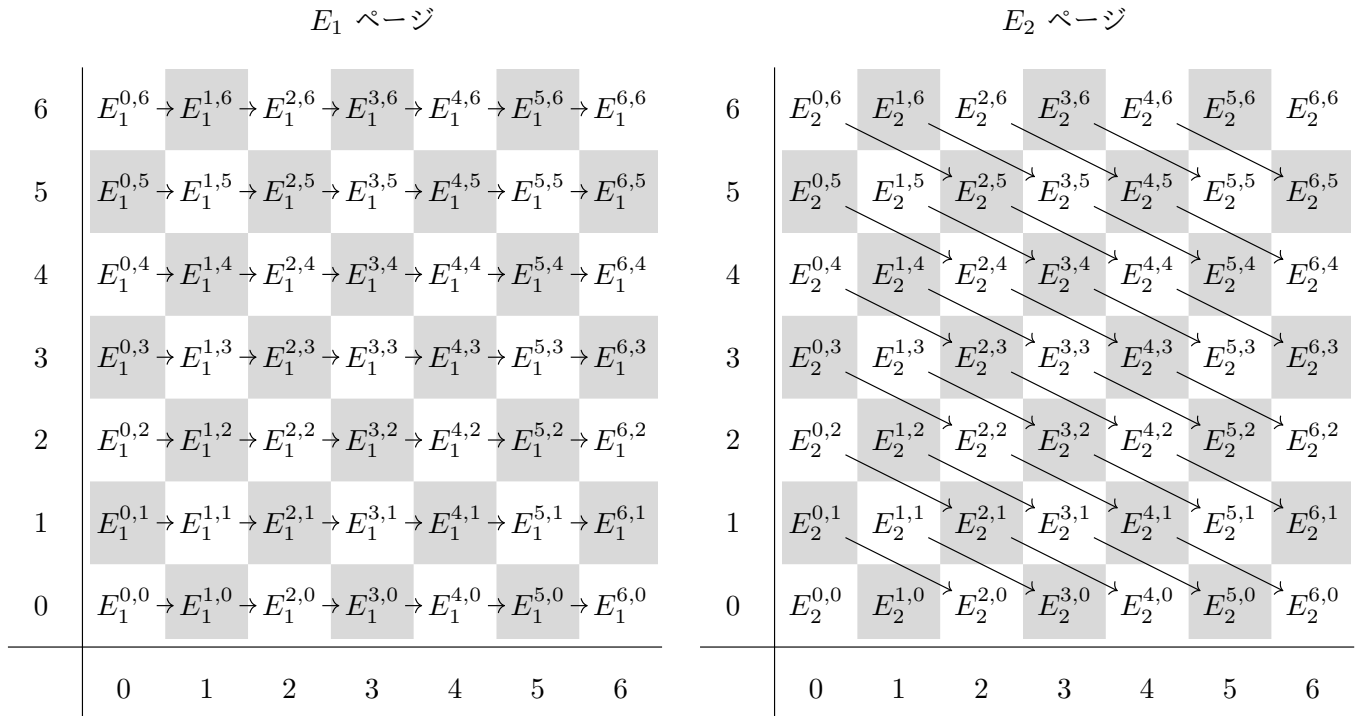
さて、本論で何度も使用したスペクトル系列を導入しよう。これはいわば「パッケージ化された計算手順」と思えば良い。この手順に従って計算すると、欲しい一般コホモロジーの値を色々と計算できる。

もし

$$E_r^{p,q} \Rightarrow h^{p+q} \quad (\text{C.67})$$

となるスペクトル系列 $\{E_r^{p,q}\}$ が存在したとする。この式のざっくりとした意味を説明すると、 r は近似の精度を表していて、 $r \rightarrow \infty$ で右辺に収束する ($\Rightarrow$) という意味である。

ここで、 $E_r^{p,q}$ と $E_{r+1}^{p,q}$ の関係を与えよう。これは例えば E_1 ページや E_2 ページならば、下図の矢印のように微分写像 $d_r : E_r \rightarrow E_r$ が定義される。



一般に, E_r ページでの微分写像 d_r は

$$d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q-r+1} \quad (\text{C.68})$$

のように伸びる. この微分は準同型写像でさらに冪零性をもつため, コホモロジーが定義できる. 実はこのコホモロジーを取る作業が, E_r ページと E_{r+1} ページを結びつけることに他ならない. つまり, 式 (C.9) と同様にコホモロジーをとれば

$$E_{r+1}^{p,q} := \frac{\ker(d_r^{p,q})}{\text{im}(d_r^{p-r, q+r-1})} \quad (\text{C.69})$$

となる. また, スペクトル系列の計算では, このコホモロジーをとる作業を指して, 「ページをめくる」とも表現する. 以上より計算手順としては

1. $E_1^{p,q}$ ページ (もしくは $E_2^{p,q}$ ページ) を与える.
2. ページをめくり, $E_\infty^{p,q}$ ページを与える.
3. $h^{p+q} = \bigoplus_{p+q=n} E_\infty^{p,q}$ である.

となる. 実用上は E_1 ページでなく E_2 ページが与えられていることが多い.

ここではコホモロジーに対するスペクトル系列を書いたが, ホモロジーに対するスペクトル系列も微分の方が逆であるくらいしか違いがないので省略する. 具体的な計算をする際には, E_1 ないし E_2 ページが求まっていれば, 後はひたすらページをめくるだけであらゆる一般コホモロジーの計算が完遂する. このようにスペクトル系列は非常に便利な数学的道具である.

C.1.11 Adams スペクトル系列の計算に必要な概念

Adams スペクトル系列

$$E_2^{s,t} = \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{s,t}(H^*(Y, \mathbb{Z}_2), \mathbb{Z}_2) \Rightarrow \Omega_{t-s}^H(pt), \quad (\text{C.70})$$

$$Y = MTH \quad (\text{C.71})$$

の計算に必要な概念をここにまとめる.

■ $\mathcal{A}$ について

$\mathcal{A}$ は Steenrod 代数といい, Eilenberg-MacLane 空間 $H\mathbb{Z}_2$ に対して

$$\mathcal{A} = [H\mathbb{Z}_2, H\mathbb{Z}_2] \quad (\text{C.72})$$

として定義される. Eilenberg-MacLane 空間 $H\mathbb{Z}_2$ とは

$$H^*(X, \mathbb{Z}_2) = [X, H\mathbb{Z}_2] \quad (\text{C.73})$$

を満たす空間であったので, コホモロジーの元 x は X から $H\mathbb{Z}_2$ への写像

$$H^*(X, \mathbb{Z}_2) \ni x : X \rightarrow H\mathbb{Z}_2 \quad (\text{C.74})$$

と捉えられる. ところで $\mathcal{A}$ の元 y は $H\mathbb{Z}_2$ から $H\mathbb{Z}_2$ への写像

$$\mathcal{A} \ni y : H\mathbb{Z}_2 \rightarrow H\mathbb{Z}_2 \quad (\text{C.75})$$

なので, 合成写像 $y \circ x$ は再び X から $H\mathbb{Z}_2$ への写像を定める. すなわち, $y \circ x$ は $H^*(X, \mathbb{Z}_2)$ の元である.

$$H^*(X, \mathbb{Z}_2) \ni y \circ x : X \rightarrow H\mathbb{Z}_2 \quad (\text{C.76})$$

以上により, Steenrod 代数 $\mathcal{A}$ はコホモロジー上の作用として理解できる.

$$H^*(X, \mathbb{Z}_2) \ni x \mapsto y \circ x \in H^*(X, \mathbb{Z}_2) \quad (\text{C.77})$$

■Steenrod 平方根 Sq^i について

Steenrod 代数 $\mathcal{A}$ は Steenrod 平方根 Sq^i で生成される.

$$\mathcal{A} = \langle \text{Sq}^0, \text{Sq}^1, \text{Sq}^2, \dots \rangle \quad (\text{C.78})$$

ただし, Sq^i は $H^n(*, \mathbb{Z}_2)$ から $H^{n+i}(*, \mathbb{Z}_2)$ への線形写像で, 次を満たす (公理).

$$\text{Sq}^0 = id, \quad (\text{C.79})$$

$$\text{Sq}^i x = 0, \quad (i > |x|), \quad (\text{C.80})$$

$$\text{Sq}^i x = x^2, \quad (i = |x|), \quad (\text{C.81})$$

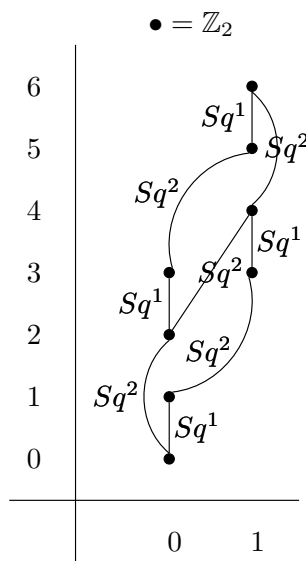
$$\text{Sq}^n(xy) = \sum_{i+j=n} \text{Sq}^i(x) \text{Sq}^j(y), \quad (\text{C.82})$$

$$\text{Sq}^a \text{Sq}^b = \sum_{c=0}^{[a/2]} \binom{b-c-1}{a-2c} \text{Sq}^{a+b-c} \text{Sq}^c, \quad (a < 2b) \quad (\text{C.83})$$

また, $\text{Sq}^0, \text{Sq}^1, \text{Sq}^2$ だけで生成される加群を $\mathcal{A}_1$ と定義する.

$$\mathcal{A}_1 = \langle \text{Sq}^0, \text{Sq}^1, \text{Sq}^2 \rangle \quad (\text{C.84})$$

この加群構造は下図のように表にするとわかりやすい. ただし, 縦軸は次数を表すが, 横軸に意味はない.



例えば $Sq^2 \cdot Sq^2 = Sq^1 \cdot Sq^2 \cdot Sq^1$ であることが、上より図的にわかる。

■ MG について

群 G に対して MG は、分類空間 BG に対する Thom 空間^{*6}として定義されている。Thom 空間は一見複雑に見えるが、兎も角として、次の Thom 同型^{*7}さえ知っていれば計算できる。

$$H^{*+n}(MG, \mathbb{Z}_2) = H^*(BG, \mathbb{Z}_2)U \quad (C.85)$$

ここで、 U は Thom 類で、その次数は G のランク n である。

■ MH について

また、構造 H^{*8} に対する MH は、分類空間のスペクトル $BH(n)$ に対する Thom 空間のスペクトルとして定義されるが、そのコホモロジーは良く知られていて $H = Spin$ のとき

$$H^*(MSpin, \mathbb{Z}_2) = \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}_1} \{\mathbb{Z}_2 \oplus M\} \quad (C.86)$$

である。ただし、 $i < 8$ で $M_i = 0$ なので、 M の寄与は今回無視する。

C.2 Spin 構造およびその類似物について

本論で使用した Spin 構造およびその類似物について解説する。主に [23][25][27][14][33] を参考にした。

C.2.1 Spin 構造

4次元向きつけ可能な多様体 M_4 を考える。 M_4 上でスピノル場が定義できるとき、 M_4 は Spin 構造をもつという。例えば開集合 U_i 上で局所的にスピノル場

$$\Psi_i \quad (C.87)$$

が定義したとしよう。(これは平坦な多様体と変わらないので容易に定義できる。)同様に開集合 U_j 上でもスピノル場

$$\Psi_j \quad (C.88)$$

が定義できる。ここで、スピノル場が大局的に定義されるには $U_i \cap U_j$ 上で

$$\Psi_j = \mathcal{G}_{ji} \Psi_i \quad (C.89)$$

^{*6} ランク n のベクトル束 $V \rightarrow X$ に対して、各点のファイバー $\mathbb{R}^n$ を 1 点コンパクト化して S^n にしたとき、束 $\text{Thom}(V) \rightarrow X$ が得られる。この $\text{Thom}(V)$ を Thom 空間という。ここでは、分類空間の束 $V \rightarrow BG$ に対する Thom 空間を考えている。

^{*7} ランクが n のベクトル束 $V \rightarrow X$ に対して $\tilde{H}^{*+n}(\text{Thom}(V)) = H^*(X)U$ が成立する。ここで $\tilde{H}$ は reduced コホモロジーである。

^{*8} 大雑把に言うと、 $O, SO, Pin^+, Pin^-, Spin$ のように空間の次元の依存した対称性のことである。

のように $Spin(4)$ 値遷移関数 $\mathcal{G}_{ij}$ があれば良い。ただし、 $U_i \cap U_j \cap U_k$ 上で次のコサイクル条件の成立が大局的にスピノル場を定義するための条件である。

$$\mathcal{G}_{ij}\mathcal{G}_{jk}\mathcal{G}_{ki} = 1 \quad (\text{C.90})$$

向きつけ可能であるということは $SO(4)$ bundle が定義されているので $SO(4)$ 値遷移関数 $\mathcal{H}_{ij}$ が定義されていることを意味する。スピノル場の変換はこの遷移関数の普遍被覆をとったものであるので

$$Ad : Spin(4) \ni \mathcal{G}_{ij} \mapsto \mathcal{H}_{ij} \in SO(4), \quad (\text{C.91})$$

$$\mathcal{H}_{ij}\mathcal{H}_{jk}\mathcal{H}_{ki} = 1 \quad (\text{C.92})$$

である。しかし $Ad : \pm \mathcal{G}_{ij} \mapsto \mathcal{H}_{ij}$ であるので

$$\mathcal{G}_{ij}\mathcal{G}_{jk}\mathcal{G}_{ki} = \pm 1 \quad (\text{C.93})$$

のように $Spin(4)$ の遷移関数には不定性がある。これは Z_2 値のコホモロジーが定義されていると言える。このコホモロジーの元を第 2 Stiefel-Whitney 類といい、大体次のように対応している。

$$w_2(TM) \leftrightarrow \mathcal{G}_{ij}\mathcal{G}_{jk}\mathcal{G}_{ki} \quad (\text{C.94})$$

ただし、 Z_2 コホモロジーの値は $\{0, 1\}$ にとりとしており

$$w_2(TM_4) = 0 \leftrightarrow \mathcal{G}_{ij}\mathcal{G}_{jk}\mathcal{G}_{ki} = 1 \quad (\text{C.95})$$

である。つまり

$$e^{i\pi w_2} = \mathcal{G}_{ij}\mathcal{G}_{jk}\mathcal{G}_{ki} \quad (\text{C.96})$$

と思えば良い。 $w_2(TM) = 0$ が多様体 M_4 にスピン構造が入ることの必要十分条件である。

C.2.2 Spin-SU(2) 構造

4 次元向きつけ可能な多様体 M_4 を考える。先の議論と同様に $w_2(TM)$ を定義したとして、ここでは $w_2 \neq 0$ であるケースを取り扱う。この場合ナイーブにはスピノル場が定義できないが、実はスピノルが h ゲージ場と相互作用している場合には $w_2 \neq 0$ でもスピノル場が定義できる場合がある。これを Spin- h 構造という。ここではスピノル場がアイソスピンを持つ場合、つまり $h = SU(2)$ のときを考えよう。今 $SO(3)$ bundle が M_4 上にあるとする。すると $SO(3)$ 値遷移関数 $\mathcal{H}'_{ij}$ があって、 $U_i \cap U_j \cap U_k$ 上で

$$\mathcal{H}'_{ij}\mathcal{H}'_{jk}\mathcal{H}'_{ki} = 1 \quad (\text{C.97})$$

である。ここで

$$Ad : \pm \mathcal{G}'_{ij} \mapsto \mathcal{H}'_{ij} \quad (\text{C.98})$$

を利用すれば $SU(2)$ 値遷移関数 $\mathcal{G}'_{ij}$ が定義できるが、コサイクル条件で

$$\mathcal{G}'_{ij}\mathcal{G}'_{jk}\mathcal{G}'_{ki} = \pm 1 \quad (\text{C.99})$$

のように符号の不定性が存在する。Spin-SU(2) 構造では

$$\mathcal{G}_{ij}\mathcal{G}_{jk}\mathcal{G}_{ki} = \mathcal{G}'_{ij}\mathcal{G}'_{jk}\mathcal{G}'_{ki} \quad (\text{C.100})$$

であるときを考える。これは

$$w_2(TM) = w_2(SO(3)\text{bundle}) \quad (\text{C.101})$$

であると言い換えられる。これが Spin-SU(2) 構造が入るために必要十分条件である。このときスピノル場の遷移関数を

$$\tilde{\mathcal{G}}_{ij} = \mathcal{G}_{ij}\mathcal{G}'_{ij} \quad (\text{C.102})$$

とすればコサイクル条件

$$\tilde{\mathcal{G}}_{ij}\tilde{\mathcal{G}}_{jk}\tilde{\mathcal{G}}_{ki} = 1 \quad (\text{C.103})$$

が成立する。実は、 Z_2 の不定性をこのように打ち消しあうことは各点に

$$\text{Spin}_{SU(2)}(4) = \frac{\text{Spin}(4) \times SU(2)}{Z_2} \quad (\text{C.104})$$

の bundle を生やしていることに相当する。

C.2.3 Spin-c 構造

Spin-h 構造で $h = U(1)$ のときを特別に Spin-c 構造という。考え方は Spin-SU(2) 構造の場合とほぼ同じである。ただし $SO(3)\text{bundle}$ でなく $U(1)\text{bundle}$ があるので

$$\text{Ad} : SU(2) \rightarrow SU(2)/Z_2 = SO(3) \quad (\text{C.105})$$

の代わりに、

$$f : U(1) \rightarrow U(1)/Z_2 = U(1) \quad (\text{C.106})$$

を用いることが大きな違いである。ここで

$$f(e^{i\theta}) = e^{2i\theta} \quad (\text{C.107})$$

である。元々の $U(1)$ 値遷移関数は

$$\exp(2in_{ij})\exp(2in_{jk})\exp(2in_{ki}) = \exp(2in_{ij} + 2in_{jk} + 2in_{ki}) = 1 \quad (\text{C.108})$$

であるが、 f^{-1} で戻した後の遷移関数は

$$\exp(in_{ij})\exp(in_{jk})\exp(in_{ki}) = \exp(in_{ij} + in_{jk} + in_{ki}) = \pm 1 \quad (\text{C.109})$$

のように ± 1 の不定性がある。Spin-c 構造では

$$\mathcal{G}_{ij}\mathcal{G}_{jk}\mathcal{G}_{ki} = \exp(in_{ij} + in_{jk} + in_{ki}) \quad (\text{C.110})$$

つまり言い換えると

$$w_2(TM) = w_2(U(1)\text{bundle}) \quad (\text{C.111})$$

のときを考える．これが Spin-c 構造が入るための必要十分条件である．スピノル場の遷移関数は

$$\mathcal{G}_{ij} \exp(in_{ij}) \quad (\text{C.112})$$

とするとこれはコサイクル条件を満たす．

$$\text{Spin}_c(4) = \frac{\text{Spin}(4) \times U(1)}{Z_2} \quad (\text{C.113})$$

の bundle を各点に生やすことに相当する．

※注意

スピノル場の遷移関数は $\mathcal{G}_{ij} \exp(in_{ij})$ である．しかし $U(1)\text{bundle}$ の遷移関数は $\exp(2in_{ij})$ のように 2 倍になっている．すなわちゲージ場 A は $\exp(i \int A)$ のように位相に来るので，元々の $U(1)\text{bundle}$ のゲージ場と場の強さを A, F とすると，写像 f で移した後は $2A, 2F$ のように 2 倍しておく必要がある．第 2Stiefel-Whitney 類は第 1Chern 類と $\text{mod } 2$ で一致することが知られているので C.111 式は

$$w_2(TM) = \frac{2F}{2\pi} \text{ mod } 2 \quad (\text{C.114})$$

であると言い換えられる．この式は物理で計算する際に Spin-c 構造をいれるための条件として実用上重要である．

参考文献

- [1] Edward Witten. Fermion Path Integrals And Topological Phases. *Rev. Mod. Phys.*, 88(3):035001, 2016.
- [2] Stephen L. Adler. Axial vector vertex in spinor electrodynamics. *Phys. Rev.*, 177:2426–2438, 1969.
- [3] J. S. Bell and R. Jackiw. A PCAC puzzle: $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ in the σ model. *Nuovo Cim. A*, 60:47–61, 1969.
- [4] Gerard 't Hooft. Naturalness, chiral symmetry, and spontaneous chiral symmetry breaking. *NATO Sci. Ser. B*, 59:135–157, 1980.
- [5] Edward Witten. Global Aspects of Current Algebra. *Nucl. Phys. B*, 223:422–432, 1983.
- [6] Juven Wang. Anomaly and Cobordism Constraints Beyond the Standard Model: Topological Force. 6 2020.
- [7] Zheyang Wan and Juven Wang. Beyond Standard Models and Grand Unifications: Anomalies, Topological Terms, and Dynamical Constraints via Cobordisms. *JHEP*, 07:062, 2020.
- [8] Edward Witten. An $SU(2)$ Anomaly. *Phys. Lett. B*, 117:324–328, 1982.
- [9] Edward Witten and Kazuya Yonekura. Anomaly Inflow and the η -Invariant. In *The Shoucheng Zhang Memorial Workshop*, 9 2019.
- [10] Daniel S. Freed and Michael J. Hopkins. Reflection positivity and invertible topological phases. *Geom. Topol.*, 25:1165–1330, 2021.
- [11] 藤川 和男. 経路積分と対称性の量子的破れ. 岩波書店, 2 2001.
- [12] Steven Weinberg. *The quantum theory of fields. Vol. 2: Modern applications*. Cambridge University Press, 8 2013.
- [13] V. P Nair. *Quantum Field Theory: A Modern Perspective*. Springer, 11 2010.
- [14] 本間 泰史. スピン幾何学:スピノール場の数学. 森北出版, 11 2016.
- [15] Raoul Bott and Loring W. Tu. *Differential Forms in Algebraic Topology*. Springer, 5 1982.
- [16] 九後 汰一郎. ゲージ場の量子論 1,2. 培風館, 7 1989.
- [17] 炭谷 俊樹. Chiral anomaly の幾何学的考察. *素粒子論研究*, 71:65, 1985.
- [18] Edward Witten. Anomalies Revisited (Lecture Slide At Strings 2015). 6 2015.
- [19] Joe Davighi and Nakarin Lohitsiri. Omega vs. pi, and 6d anomaly cancellation. *JHEP*, 05:267, 2021.
- [20] Iñaki García-Etxebarria and Miguel Montero. Dai-Freed anomalies in particle physics.

- JHEP*, 08:003, 2019.
- [21] Joe Davighi, Ben Gripaios, and Nakarin Lohitsiri. Global anomalies in the Standard Model(s) and Beyond. *JHEP*, 07:232, 2020.
 - [22] Joe Davighi and Nakarin Lohitsiri. Anomaly interplay in $U(2)$ gauge theories. *JHEP*, 05:098, 2020.
 - [23] Juven Wang, Xiao-Gang Wen, and Edward Witten. A New $SU(2)$ Anomaly. *J. Math. Phys.*, 60(5):052301, 2019.
 - [24] Zheyang Wan and Juven Wang. Higher anomalies, higher symmetries, and cobordisms I: classification of higher-symmetry-protected topological states and their boundary fermionic/bosonic anomalies via a generalized cobordism theory. *Ann. Math. Sci. Appl.*, 4(2):107–311, 2019.
 - [25] Mohamed M. Anber and Erich Poppitz. Generalized ’t Hooft anomalies on non-spin manifolds. *JHEP*, 04:097, 2020.
 - [26] 大山 修平. 物理で使う数学チャンネル : Adams スペクトル系列入門講座 (You Tube 動画)
<https://www.youtube.com/channel/UCi4ZotOnAla-loruLQkeyMw/videos>.
 - [27] Michael Albanese and Aleksandar Milivojevic. Spin^{*h*} and further generalisations of spin. *J. Geom. Phys.*, 164:104174, 2021.
 - [28] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder. *An Introduction to quantum field theory*. Addison-Wesley, Reading, USA, 1995.
 - [29] Daniel Quillen. The mod 2 cohomology rings of extra-special 2-groups and the spinor groups. *Mathematische Annalen volume*, 194:197–212, 1971.
 - [30] David Tong. David Tong: Lectures on Gauge Theory
<http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/teaching.html>.
 - [31] Steven Weinberg and Edward Witten. Limits on Massless Particles. *Phys. Lett. B*, 96:59–62, 1980.
 - [32] J. L. Manes. Differential Geometric Construction of the Gauged Wess-Zumino Action. *Nucl. Phys. B*, 250:369–384, 1985.
 - [33] 本間 泰史. スピン幾何入門
http://www.f.waseda.jp/homma_yasushi/homma-lecture.htm.