青木さんとの流れ

場の量子論における非摂動論的手法と素粒子物理学への応用

青木慎也教授 還暦記念研究会

2019年12月20日 @ 基礎物理学研究所

横山　修一

所属：基礎物理学研究所(基研)

YITP
YUKAWA INSTITUTE FOR THEORETICAL PHYSICS

Q: 最初の出会い？

➡ **2016年4月@基研 (横山着任)**

東大本郷素粒子論研究室の先輩 -> 江口研の第一期生!

Q: 初めての会話？

今日セミナーはあるんですか？

2016年4月@Y306前(セミナー室)

Q: 共同研究の始まり？

➡ ランチ後の雑談 (+ 2回のセミナー)

一般のCFT(共形場理論)で**方程式の方法を拡張できるんじゃないか？

2017年4月@研究棟ロビー

変わったことをやらないといけない!

共同研究

➡ **流れ(フロー)**方程式を用いたホログラフィーの研究

ゲージ/重力対応、量子重力、...

[1] Non-relativistic Hybrid Geometry with Gravitational Gauge-Fixing Term
Sinya Aoki, Janos Balog, Shuichi Yokoyama, Kentaroh Yoshida
arXiv:1910.11032

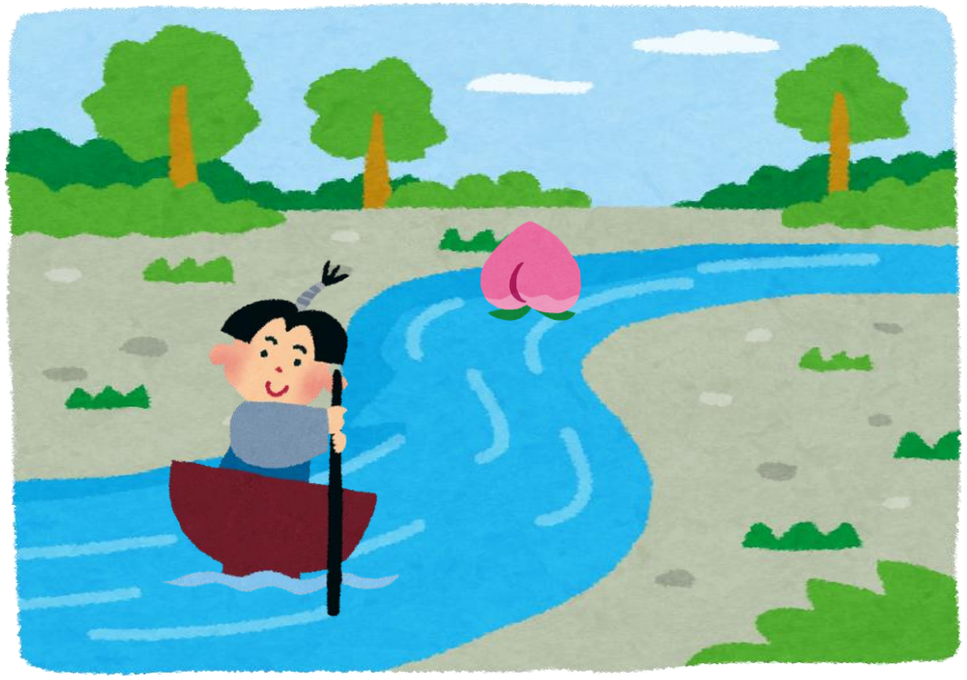
[2] Holographic geometry for non-relativistic systems emerging from generalized flow equations
Sinya Aoki, Shuichi Yokoyama, Kentaroh Yoshida
Phys.Rev. D99 (2019) no.12, 126002, arXiv:1902.02578

[3] Holographic computation of quantum corrections to the bulk cos
Sinya Aoki, Janos Balog, Shuichi Yokoyama
PTEP 2019 (2019) no.4, 043B06, arXiv:1804.04636

[4] AdS geometry from CFT on a general conformally flat manifold
Sinya Aoki, Shuichi Yokoyama
Nucl.Phys. B933 (2018) 262-274, arXiv:1709.07281

[5] Flow equation, conformal symmetry and AdS geometry
Sinya Aoki, Shuichi Yokoyama
PTEP 2018 (2018) no.3, 031B01, arXiv:1707.03982

フロー方程式とは何か？



フロー方程式とは何か？

筋はいいので勉強してください。

フロー方程式

[Albanese et al. (APE) '87] [Narayanan-Neuberger '06]

d次元CFTを考えプライマリースカラー場 ϕ を含むとする。

2点関数

$$\langle \phi(x_1)\phi(x_2)\rangle = \frac{1}{x_{12}^{2\Delta}} \qquad x_{12} := x_1 - x_2$$

フロー

自由フロー方程式

$$\frac{\partial \phi(x;\eta)}{\partial \eta} = \partial^2 \phi(x;\eta). \quad \phi(x;0) = \phi(x)$$

$$\rightarrow \quad \phi(x;\eta) = \int d^d y\, K(x-y;\eta)\phi(y). \qquad K(x-y;\eta) = \frac{e^{-(x-y)^2/4\eta}}{(4\pi\eta)^{d/2}}$$

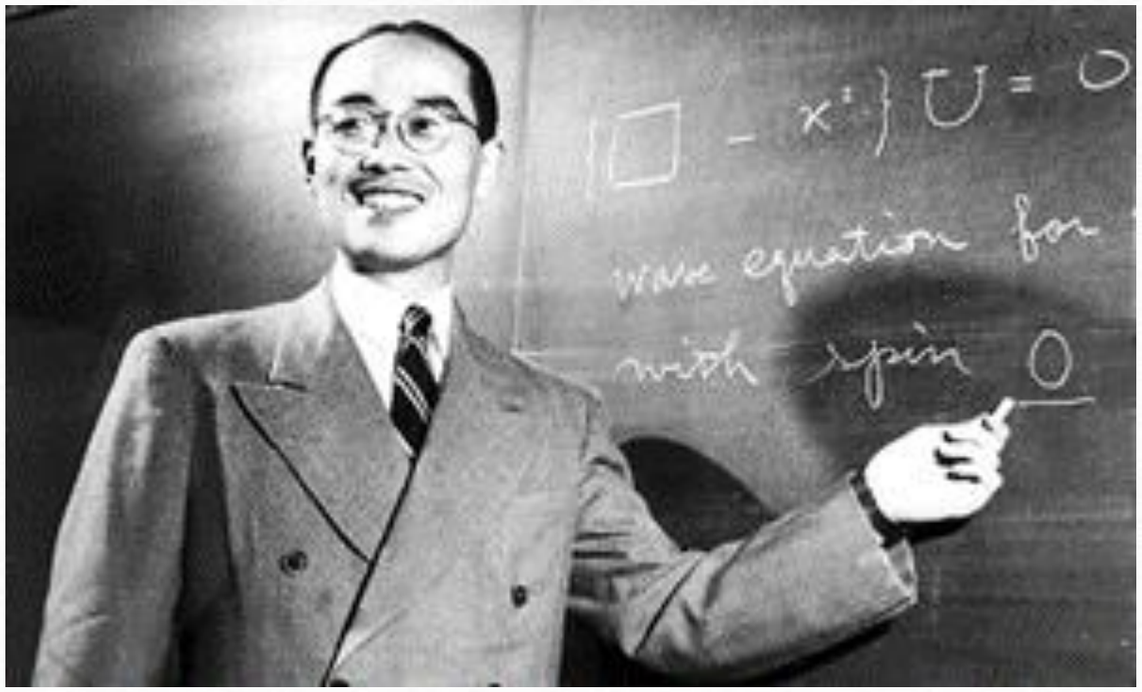
2点関数

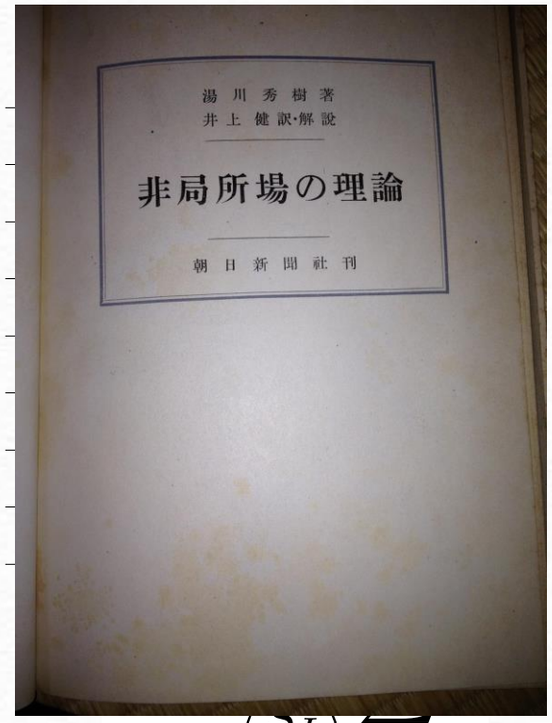
$$\langle \phi(x_1;\eta_1)\phi(x_2;\eta_2)\rangle = \frac{1}{\eta_+^{\Delta}} F(\frac{x_{12}^2}{\eta_+};1) \qquad \eta_+ := \eta_1 + \eta_2$$

$$F(v;1) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_0^1 du (1-u)^{d/2-\Delta-1} e^{-vu/4} u^{\Delta-1} \qquad \frac{d-2}{2} \le \Delta < \frac{d-1}{2}$$

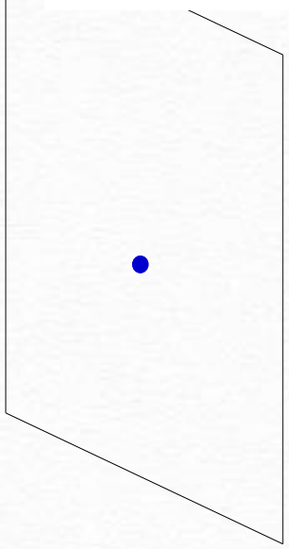
フローされた作用素はぶつかっても発散しない！

フロー変換



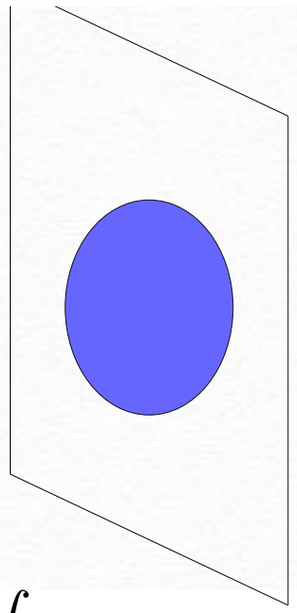


湯川秀樹(基研初代所長) -> 非局所場の理論の研究



フロー

(非局所変換)



$\phi(x)$

Cf. 素粒子

$$\phi(x;\eta) = \int d^d y\, K(x-y;\eta)\phi(y).$$

ガウス波束

ホログラフィーとは？

ホログラフィーとは

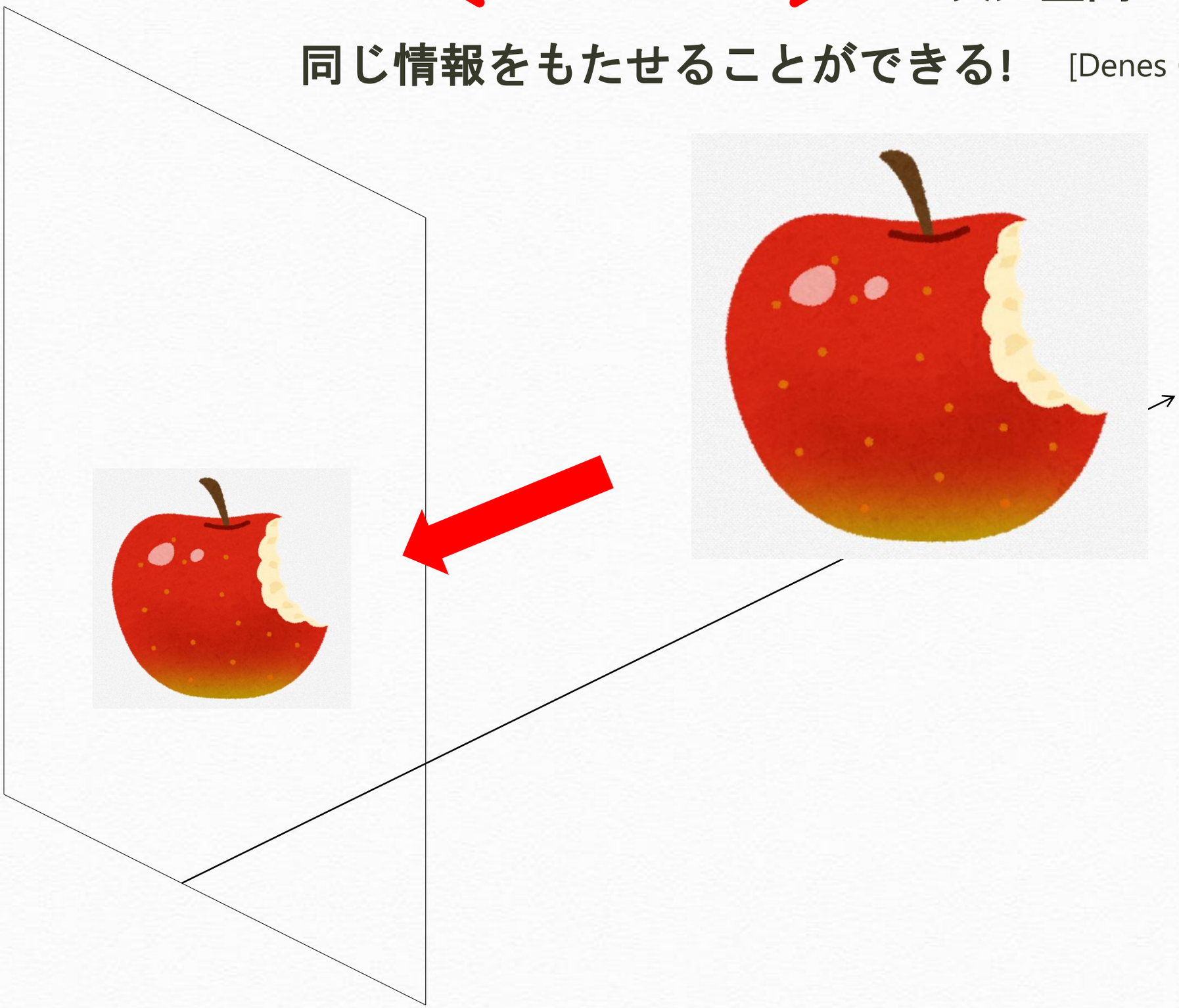
2次元平面 ⟷ 3次元空間

同じ情報をもたせることができる! [Denes Gabor '47]

ホログラフィーとは

2次元平面 ⟷ **3次元空間**

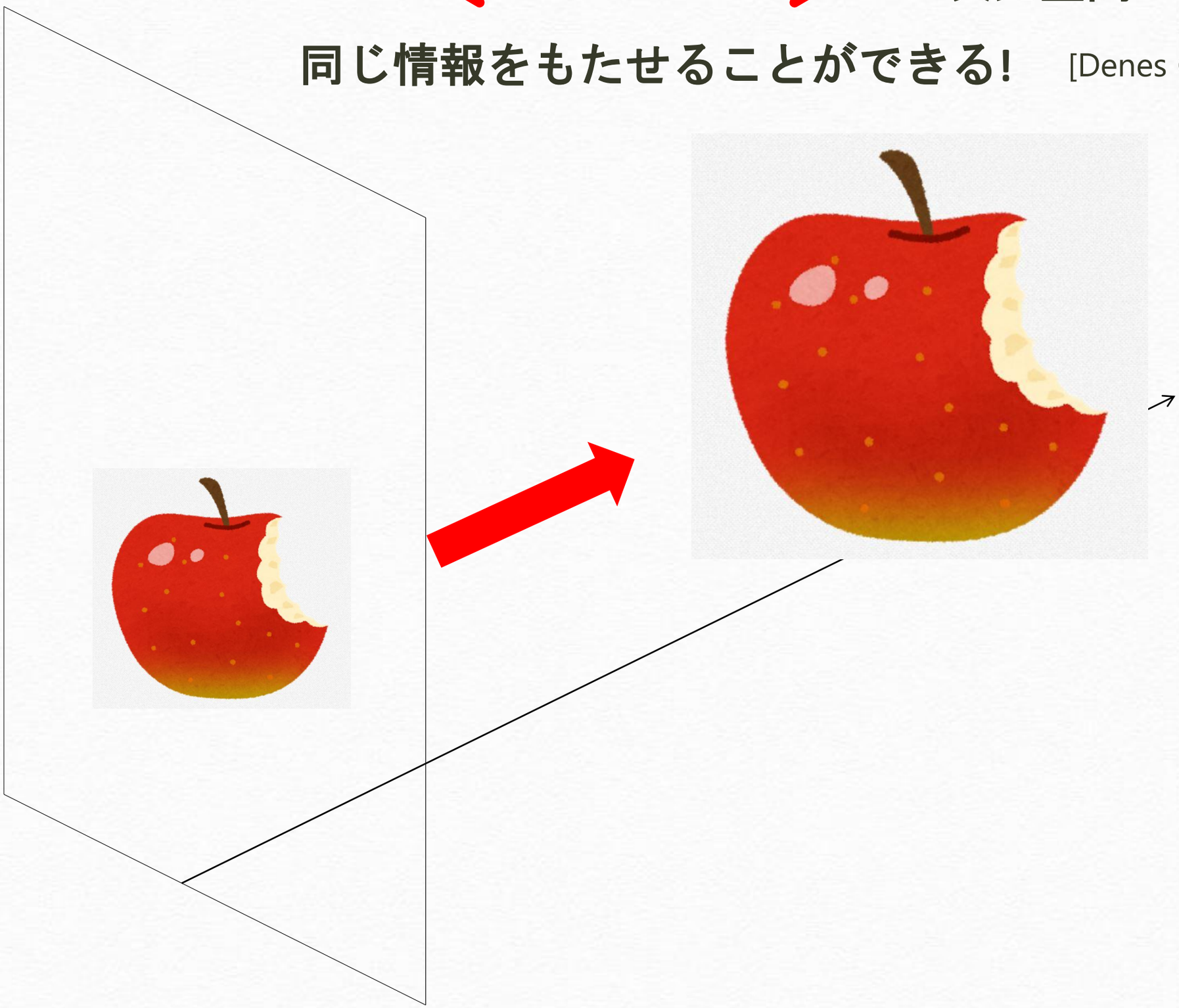
同じ情報をもたせることができる! [Denes Gabor '47]



ホログラフィーとは

2次元平面 ⟷ **3次元空間**

同じ情報をもたせることができる! [Denes Gabor '47]



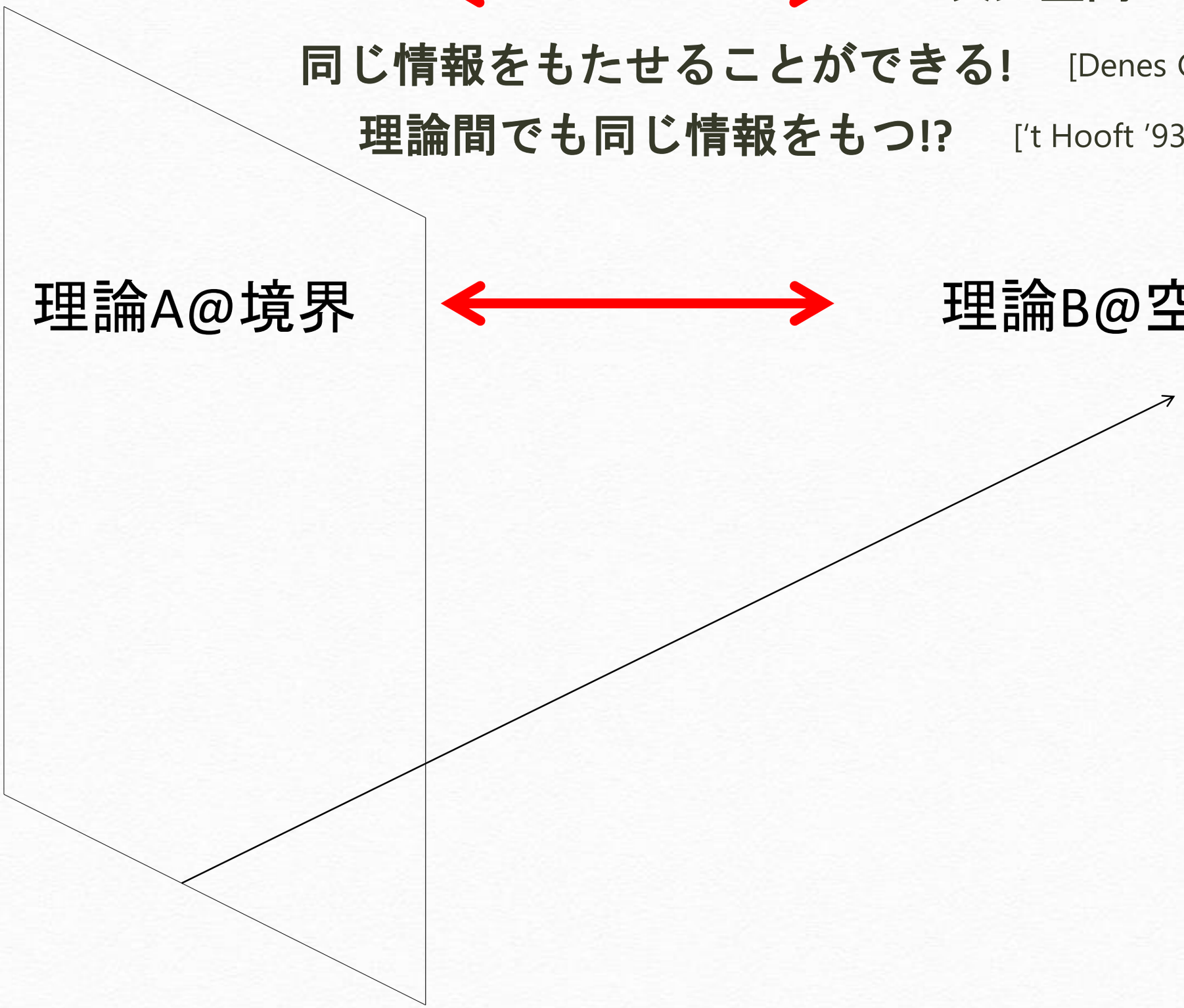
ホログラフィーとは

2次元平面 ⟷ 3次元空間

同じ情報をもたせることができる! [Denes Gabor '47]

理論間でも同じ情報をもつ!? ['t Hooft '93, Susskind '94]

理論A@境界 ⟷ 理論B@空間



ホログラフィーとは

4次元平面 ⟷ 5次元空間

同じ情報をもたせることができる! [Denes Gabor '47]

理論間でも同じ情報をもつ!? ['t Hooft '93, Susskind '94]

$R^{1,3}$上のN=4SYM理論 ⟷ “AdS/CFT対応” ⟷ AdS_5上のtypeIIB理論 [Maldacena '97]

R^d上のゲージ理論 ⟷ “ゲージ/重力対応” ⟷ AdS_{d+1}上の重力理論

ご利益

- ゲージ理論の強結合現象が重力理論の摂動論で解析できる!
- 量子重力理論をゲージ理論から構成できる!

フロー方程式を用いたホログラフィーの研究

フロー方程式を用いたホログラフィー

[Aoki-Kikuchi-Onogi ’15]

[Aoki-Balog-Onogi-Weisz ’16,'17]

[Aoki-SY ’17]

ホログラフィック空間の構成

[Aoki-Kikuchi-Onogi '15]

[Aoki-Balog-Onogi-Weisz '16,'17]

Def. (規格化された作用素)

$$\sigma(x;\eta) := \frac{\phi(x;\eta)}{\sqrt{\langle \phi(x;\eta)^2 \rangle}}$$

→ $\langle \sigma(x;\eta)\sigma(x;\eta) \rangle = 1$

Def. (計量作用素と誘導計量)

$$\hat{g}_{MN}(x;\eta) := \frac{\partial \sigma(x;\eta)}{\partial z^M}\frac{\partial \sigma(x;\eta)}{\partial z^N} \qquad g_{MN}(z) := \langle \hat{g}_{MN}(x;\eta) \rangle_{CFT}$$

$$z^M = (x^\mu, \tau) \text{ with } \tau \propto \sqrt{\eta}$$

→ 誘導計量は**情報計量**と解釈できる。 [Aoki-SY '17]

d次元CFTの場合

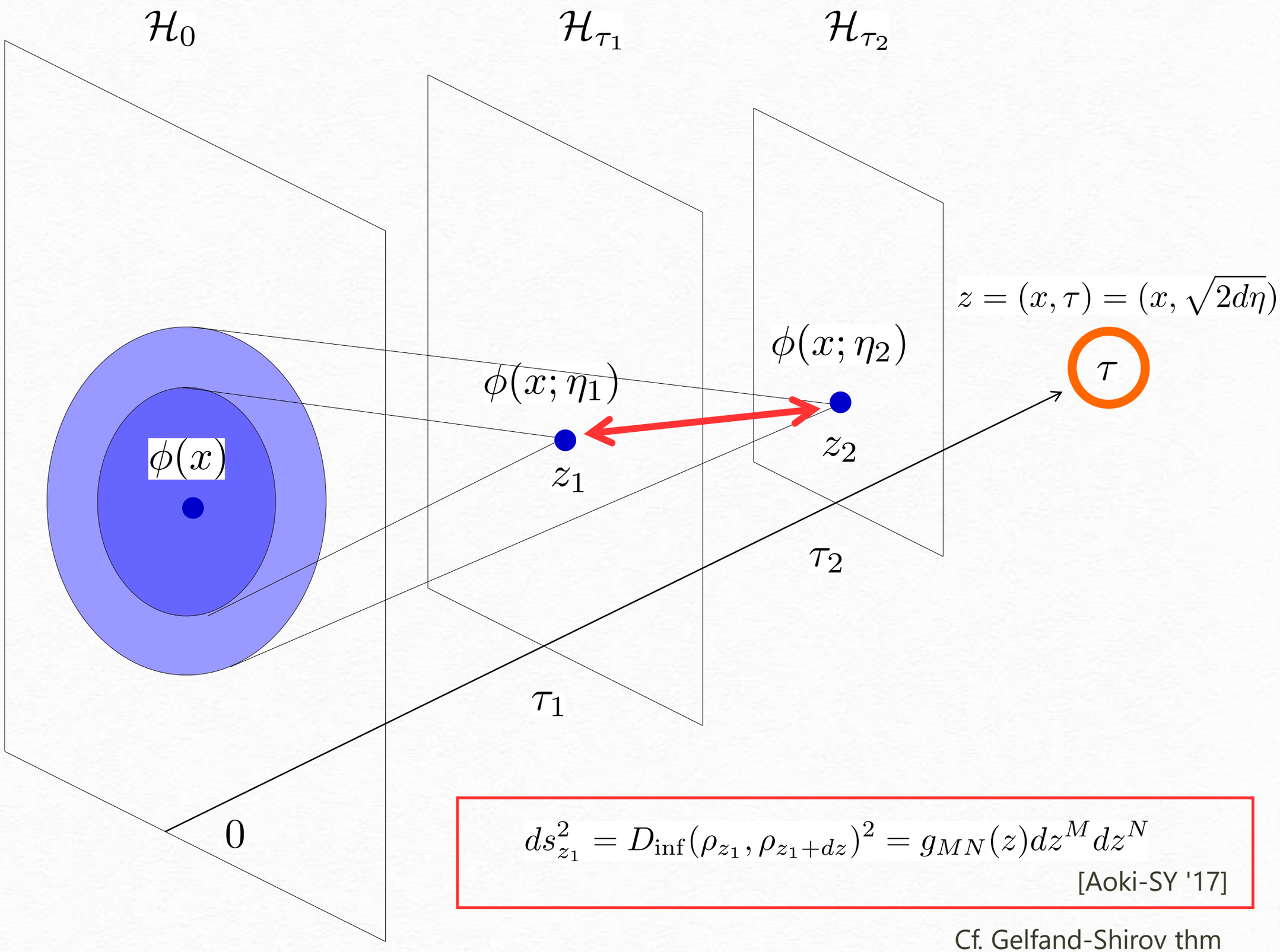
$$\langle \sigma(x_1;\eta_1)\sigma(x_2;\eta_2) \rangle = \left(\frac{2\sqrt{\eta_1\eta_2}}{\eta_+}\right)^\Delta G\left(\frac{x_{12}^2}{\eta_+}\right), \quad G(u) := F(u;1)/F(0;1)$$

$$\Rightarrow \quad g_{\mu\nu}(z) = \delta_{\mu\nu}\frac{\Delta}{\tau^2}, \quad g_{\tau\tau}(z) = \frac{\Delta}{\tau^2} \qquad \tau := \sqrt{-\Delta\eta/G'(0)}$$

$$\Rightarrow \quad ds^2 = \Delta\frac{dx^2 + d\tau^2}{\tau^2}.$$

AdS空間!!

粗視化 ⇒ 余剰次元



$$ds^2_{z_1} = D_{\inf}(\rho_{z_1}, \rho_{z_1+dz})^2 = g_{MN}(z) dz^M dz^N$$

[Aoki-SY '17]

Cf. Gelfand-Shirov thm

一般のCFT(共形場理論)でフロー方程式の方法を拡張できるんじゃないか？

2017年4月@研究棟ロビー

共形対称性があればバルクの計量はAdSに決まるんじゃないか？

共形対称性とAdS等長変換

[Aoki-SY '17]

共形変換:

$$\delta x^\mu = a^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu + \lambda x^\mu + b^\mu x^2 - 2x^\mu (b_\nu x^\nu),$$

$$\delta^{\rm conf} O(x) = -\delta x^\mu \partial_\mu O(x) - \frac{\Delta}{d}(\partial_\mu \delta x^\mu) O(x)$$

⬇

$$\delta^{\rm conf}\sigma(x;t) = -\{2\lambda - 4(b_\mu x^\mu)\} t\partial_t \sigma(x;t) - \{\delta x^\mu + 2t(d-2-\Delta)b^\mu\}\partial_\mu \sigma(x;t) + \boxed{4t^2 b^\mu \partial_\mu \partial_t \sigma(x;t)}$$

高階微分項はバルクの微分同相の無限小変換として解釈できない...

cf. [Das-Jevicki '13] or Das's talk in 'Strings and Fields 2017'

変換を1次微分と高階微分に分解する

$$\delta^{\rm conf}\sigma(x;t) = \delta^{\rm diff}\sigma(x;t) + \delta^{\rm extra}\sigma(x;t),$$

$$\delta^{\rm diff}\sigma(x;t) = -(\bar\delta t\partial_t + \bar\delta x^\mu \partial_\mu)\sigma(x;t), \quad \delta^{\rm extra}\sigma(x;t) = \boxed{4t^2 b^\nu \partial_\nu(\partial_t + \frac{\Delta+2}{2t})\sigma(x;t),}$$

where $\bar\delta x^\mu = \delta x^\mu + 2dtb^\mu, \bar\delta t = (2\lambda - 4(b_\mu x^\mu))t$

⬇

$$\delta^{\rm S}\hat g_{MN}(x;\eta) = \delta^{\rm diff}\hat g_{MN}(x;\eta) + \boxed{\lim_{(y;\eta')\to(x;\eta)} \frac{\partial}{\partial z^M}\frac{\partial}{\partial w^N}\left\{\delta^{\rm extra}\sigma(x;\eta)\sigma(y;\eta') + \sigma(x;\eta)\delta^{\rm extra}\sigma(y;\eta')\right\}.}$$

⬇

真空期待値をとると消える！

$$\boxed{\left\langle \delta^{\rm conf}\hat g_{MN}(x;t)\right\rangle = \left\langle \delta^{\rm diff}\hat g_{MN}(x;t)\right\rangle.}$$

共同研究

➡ **流れ(フロー)**方程式を用いたホログラフィーの研究

ゲージ/重力対応、量子重力、...

[1] Non-relativistic Hybrid Geometry with Gravitational Gauge-Fixing Term
Sinya Aoki, Janos Balog, Shuichi Yokoyama, Kentaroh Yoshida
arXiv:1910.11032

[2] Holographic geometry for non-relativistic systems emerging from generalized flow equations
Sinya Aoki, Shuichi Yokoyama, Kentaroh Yoshida
Phys.Rev. D99 (2019) no.12, 126002, arXiv:1902.02578

[3] Holographic computation of quantum corrections to the bulk cosmological constant
Sinya Aoki, Janos Balog, Shuichi Yokoyama
PTEP 2019 (2019) no.4, 043B06, arXiv:1804.04636

[4] AdS geometry from CFT on a general conformally flat manifold
Sinya Aoki, Shuichi Yokoyama
Nucl.Phys. B933 (2018) 262-274, arXiv:1709.07281

[5] Flow equation, conformal symmetry and AdS geometry
Sinya Aoki, Shuichi Yokoyama
PTEP 2018 (2018) no.3, 031B01, arXiv:1707.03982

境界が曲がった空間をもつ場合への一般化

[S.Aoki-SY '17]

NPB 933 (2018)

境界が曲がった空間をもつ場合への一般化

共形場理論が存在するような多様体を考える → 共形平坦な多様体(conformally flat manifold).

共形平坦な多様体M_d上でのフロー方程式は？

$$(ds^2)_{M_d} = g^{\frac{1}{d}}(x)\delta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

“適切な”自由フロー方程式 **(プライマリーフロー方程式)**

$$\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}O(\Omega_x;\tilde{t}) = g^{-\frac{1}{d}}(x)g^{-\frac{\Delta}{2d}}(x)\partial^2\cdot g^{\frac{\Delta}{2d}}(x)O(\Omega_x;\tilde{t}), \qquad O(\Omega_x;0)=O(\Omega_x) \qquad \tilde{t}=g^{\frac{1}{d}}(x)t$$

⬇

誘導計量

$$\tilde{g}_{\tilde{\tau}\tilde{\tau}}(z) = R^2\frac{\Delta}{\tilde{\tau}^2},$$

$$\tilde{g}_{\tilde{\tau}\mu}(z) = g_{\mu\tilde{\tau}}(z) = -R^2\frac{\Delta}{\tilde{\tau}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\log\{g^{\frac{1}{2d}}(x)\},$$

非対角項が存在！

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(z) = R^2\Delta\left[\frac{\partial}{\partial x^\mu}\log\{g^{\frac{1}{2d}}(x)\}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\log\{g^{\frac{1}{2d}}(x)\}+\frac{\delta_{\mu\nu}g^{\frac{1}{d}}(x)}{\tilde{\tau}^2}\right],$$

共形平坦な多様体M_dを境界に持つAdS空間になっている!

実は、この計量は通常のPoincareスライスをとったAdS空間と微分同相でつながる！

$$ds^2(\tilde{t},x) = ds^2_{\mathrm{PAdS}}(t,x)|_{t=g^{-1/d}(x)\tilde{t}}$$

cf. PBH変換 [Penrose ‘88] [Brown-Henneaux ‘86]

ホログラフィーを用いた量子補正の計算

[S.Aoki-J.Balog-SY '18]

PTEP 2019 (2019) no.4, 043B06

ホログラフィーを用いた量子補正の計算

① 前幾何作用素の定義: $\mathcal{O}[g] \to \mathcal{O}[\hat{g}] =: \hat{\mathcal{O}}$

② アインシュタインテンソルの期待値を1/n展開で計算

$$\langle G_{AB}[\hat{g}] \rangle = G_{AB}[\langle \hat{g} \rangle] + \langle G_{AB}[\hat{g}] \rangle_c$$

Leading Order ↕ Classical geometry

Next to Leading Order ↕ Quantum correction

③ 期待値をバルクのエネルギーテンソルと解釈 $\langle \hat{G}_{AB} \rangle_\psi = T^{\rm bulk}_{AB}|.$

<u>具体例</u> O(n) 自由ベクトル模型、真空期待値 ⊡ 宇宙項だけ $T^{\rm bulk}_{AB}| = -\Lambda g_{AB}$

<u>結果</u>

$$\Lambda = -\frac{d(d-1)}{2L^2\Delta}\left(1+\frac{d+4}{2n}\right)+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad L^2_{\rm AdS} = L^2\Delta\left(1-\frac{d+4}{2n}\right)+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

自由な場の理論でも量子補正あり(真空泡グラフ)!!

非相対論的共形場理論への拡張

[Aoki-SY-Yoshida '19]

PRD (2019) no.12, 126002

[Aoki-Balog-SY-Yoshida '19]

非相対論的共形場理論への拡張

d次元非相対論的CFTを考えプライマリースカラー場 O を含むとする。

2点関数

$$\left\langle O(\vec{x}_1, x_1^+, x_1^-) O^\dagger(\vec{x}_2, x_2^+, x_2^-) \right\rangle = \frac{1}{(x_{12}^+)^{\Delta_\mathcal{O}}} f\left(x_{12}^- + \frac{\vec{x}_{12}^2}{2x_{12}^+} \right). \qquad x^+ = t$$

非相対論的共形場理論への拡張

d次元非相対論的CFTを考えプライマリースカラー場 O を含むとする。

2点関数　$$\left\langle O(\vec{x}_1, x_1^+, x_1^-) O^\dagger(\vec{x}_2, x_2^+, x_2^-) \right\rangle = \frac{1}{(x_{12}^+)^{\Delta_\mathcal{O}}} f\left(x_{12}^- + \frac{\vec{x}_{12}^2}{2x_{12}^+} \right). \qquad x^+ = t$$

非相対論的自由フロー方程式

$$\frac{\partial \phi(x;\eta)}{\partial \eta} = (2i\bar{m}\partial_- + 2\partial_+\partial_- + \vec{\partial}^2)\phi(x;\eta), \quad \phi(x;0) = O(x)$$

$$\rightarrow \quad \phi(x;\eta) = \int d^d y \, K(x-y;\eta)\phi(y). \qquad K(x;\eta) = \exp\left[-i\bar{m}x^-\right] \frac{e^{\frac{-2x^+x^- - \vec{x}^2}{4\eta}}}{\sqrt{4\pi\eta}^D}$$

非相対論的共形場理論への拡張

d次元非相対論的CFTを考えプライマリースカラー場 O を含むとする。

2点関数

$$\left\langle O(\vec{x}_1, x_1^+, x_1^-) O^\dagger(\vec{x}_2, x_2^+, x_2^-) \right\rangle = \frac{1}{(x_{12}^+)^{\Delta_\mathcal{O}}} f\left(x_{12}^- + \frac{\vec{x}_{12}^2}{2x_{12}^+} \right). \qquad x^+ = t$$

フロー

非相対論的自由フロー方程式

$$\frac{\partial \phi(x;\eta)}{\partial \eta} = (2i\bar{m}\partial_- + 2\partial_+\partial_- + \vec{\partial}^2)\phi(x;\eta), \quad \phi(x;0) = O(x)$$

$$\rightarrow \quad \phi(x;\eta) = \int d^d y \, K(x-y;\eta)\phi(y). \qquad K(x;\eta) = \exp\left[-i\bar{m}x^-\right] \frac{e^{\frac{-2x^+x^- - \vec{x}^2}{4\eta}}}{\sqrt{4\pi\eta}^D}$$

2点関数

$$\left\langle \phi(x_1;\eta_1)\phi^\dagger(x_2;\eta_2) \right\rangle = \frac{1}{\eta_+^{\Delta_\mathcal{O}}} F\left(\frac{2(x_{12}^+ + 2i\bar{m}\eta_+)x_{12}^- + (\vec{x}_{12})^2}{\eta_+}, \frac{x_{12}^+}{\eta_+}; 1 \right)$$

新しく付け加えられた項のおかけでぶつかっても発散しない！

$$\rightarrow \quad \left\langle \sigma(x_1;\eta_1)\sigma^\dagger(x_2;\eta_2) \right\rangle = \left(\frac{4\eta_1\eta_2}{\eta_+^2} \right)^{\Delta_\mathcal{O}/2} G\left(\frac{2(x_{12}^+ + 2i\bar{m}\eta_+)x_{12}^- + (\vec{x}_{12})^2}{\eta_+}, \frac{x_{12}^+}{\eta_+} \right)$$

非相対論的共形場理論への拡張

Def.　　誘導計量　　$$ds^2 = \frac{1}{2}(\langle \partial_M \sigma^\dagger \partial_N \sigma \rangle + \langle \partial_M \sigma \partial_N \sigma^\dagger \rangle) dx^M dx^N$$

結果

$$ds^2 = \frac{-G^{(0,2)}(\vec{0})}{4\eta^2}(dx^+)^2 + 2\left(\frac{-G^{(1,0)}(\vec{0}) - 2i\bar{m}G^{(1,1)}(\vec{0})}{\eta}\right)dx^+dx^- + 4\bar{m}^2 G^{(2,0)}(\vec{0})(dx^-)^2$$
$$+ \frac{\Delta_{\mathcal{O}}}{4\eta^2}d\eta^2 + \frac{-\delta_{ij}G^{(1,0)}(\vec{0})}{\eta}dx^i dx^j$$

非相対論的共形場理論への拡張

Def.　　誘導計量　　$ds^2 = \frac{1}{2}(\langle \partial_M \sigma^\dagger \partial_N \sigma \rangle + \langle \partial_M \sigma \partial_N \sigma^\dagger \rangle) dx^M dx^N$

結果

$$ds^2 = \frac{-G^{(0,2)}(\vec{0})}{4\eta^2}(dx^+)^2 + 2\left(\frac{-G^{(1,0)}(\vec{0}) - 2i\bar{m}G^{(1,1)}(\vec{0})}{\eta}\right)dx^+dx^- + 4\bar{m}^2 G^{(2,0)}(\vec{0})(dx^-)^2$$
$$+ \frac{\Delta_{\mathcal{O}}}{4\eta^2}d\eta^2 + \frac{-\delta_{ij}G^{(1,0)}(\vec{0})}{\eta}dx^i dx^j$$

1)　G が一般の関数であれば → **Lifshitz**$_{d+1}$ x **R** with Z=2

2)　$G^{(2,0)}(\vec{0}) = G^{(1,1)}(\vec{0}) = 0$　　→ **Schrodinger**$_{d+2}$

→ 非相対論的混成幾何
（NR hybrid geometry）

非相対論的共形場理論への拡張

Def.　　誘導計量　　$$ds^2 = \frac{1}{2}(\langle \partial_M \sigma^\dagger \partial_N \sigma \rangle + \langle \partial_M \sigma \partial_N \sigma^\dagger \rangle) dx^M dx^N$$

結果

$$ds^2 = \frac{-G^{(0,2)}(\vec{0})}{4\eta^2}(dx^+)^2 + 2\left(\frac{-G^{(1,0)}(\vec{0}) - 2i\bar{m}G^{(1,1)}(\vec{0})}{\eta}\right)dx^+dx^- + 4\bar{m}^2 G^{(2,0)}(\vec{0})(dx^-)^2$$
$$+ \frac{\Delta_{\mathcal{O}}}{4\eta^2}d\eta^2 + \frac{-\delta_{ij}G^{(1,0)}(\vec{0})}{\eta}dx^i dx^j$$

1)　G が一般の関数であれば → Lifshitz$_{d+1}$ x **R** with Z=2

2)　$G^{(2,0)}(\vec{0}) = G^{(1,1)}(\vec{0}) = 0$　　→ Schrodinger$_{d+2}$

→ 非相対論的混成幾何
（NR hybrid geometry）

⬆

Einstein-Maxwell-Higgs系に重力ゲージ固定項を加えたものが再現

$$S = \int d^{D+1}x\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2\kappa^2}(R - 2\Lambda) - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}F_{\mu\rho}F_{\nu\sigma} - g^{\mu\nu}D_\mu\Phi^\dagger D_\nu\Phi - V(|\Phi|) + \frac{-1}{2\xi}(\mathbf{g}^{--})^2\right)$$

非相対論的共形場理論への拡張

Def.　　誘導計量　　$ds^2 = \frac{1}{2}(\langle \partial_M \sigma^\dagger \partial_N \sigma \rangle + \langle \partial_M \sigma \partial_N \sigma^\dagger \rangle) dx^M dx^N$

結果

$$ds^2 = \frac{-G^{(0,2)}(\vec{0})}{4\eta^2}(dx^+)^2 + 2\left(\frac{-G^{(1,0)}(\vec{0}) - 2i\bar{m}G^{(1,1)}(\vec{0})}{\eta}\right)dx^+dx^- + 4\bar{m}^2 G^{(2,0)}(\vec{0})(dx^-)^2 + \frac{\Delta_{\mathcal{O}}}{4\eta^2}d\eta^2 + \frac{-\delta_{ij}G^{(1,0)}(\vec{0})}{\eta}dx^i dx^j$$

1)　G が一般の関数であれば → Lifshitz$_{d+1}$ x **R** with Z=2

2)　$G^{(2,0)}(\vec{0}) = G^{(1,1)}(\vec{0}) = 0$　　→ Schrodinger$_{d+2}$

→ 非相対論的混成幾何
（NR hybrid geometry）

⬆

Einstein-Maxwell-Higgs系に重力ゲージ固定項を加えたものが再現

$$S = \int d^{D+1}x\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2\kappa^2}(R - 2\Lambda) - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}F_{\mu\rho}F_{\nu\sigma} - g^{\mu\nu}D_\mu\Phi^\dagger D_\nu\Phi - V(|\Phi|) + \frac{-1}{2\xi}(\mathbf{g}^{--})^2\right)$$

バウンダリー
粗視化の方法 ($\bar{m}$)

!?

バルク
微分同相のゲージ (ξ)

有限温度、
ブラックホール

超対称フロー幾何
N=4SYM ↔ AdS5

因果律、局所性

励起状態の幾何
ドジッター空間

やれることはまだまだ…

2019年11月@大森

ご還暦おめでとうございます!
益々のご活躍を楽しみにしています!!