

場の理論の実時間経路積分を テンソルネットワーク法で計算できるのか？

武田 真滋
(金沢大学)



青木慎也教授還暦記念研究会
「場の理論における非摂動的手法と素粒子物理学への応用」
@京都大学基礎物理学研究所 2019.12.20

青木さんとの繋がり

- 2003年 修論の指導教員が青木さん
非摂動的くりこみ、 $\alpha_s(m_Z)$ など
- 2005年 博士論文も青木さんの指導
有限格子効果入りのカイラル摂動論



2004年11月 @ベルリン



2010年5月 @能登 地引網をする青木さん

青木さんとの繋がり

- 2003年 修論の指導教員が青木さん
非摂動的くりこみ、 $\alpha_s(m_Z)$ など
- 2005年 博士論文も青木さんの指導
有限格子効果入りのカイラル摂動論



2004年11月 @ベルリン



2010年5月 @能登 地引網をする青木さん



内容

■ テンソルネットワーク(TN)入門

- なぜTN? そもそもTNとは?
- TN法(Lagrangian形式)の使い方
- TNの粗視化(くりこみ群)＝情報圧縮
- 粗視化アルゴリズムの発展と最近の動向

■ 実時間経路積分への応用

- 例: 1+1次元実スカラー ϕ^4 理論
- コーシーの積分定理
- 数値的検証
- まとめと展望

なぜテンソルネットワーク(TN)？

■ 利点

- 作用が複素数であっても基本的に適応可能

≈ 符号問題がない？

- MC法では到底不可能な巨大体積の計算が可能
- 低次元(2次元)で、且つ、シンプルな内部自由度を持つ系であれば高精度の結果を出せる

■ 欠点

- 高次元系ではコストが高い i.e. $\text{コスト} \propto \chi^{4d-1}$ for HOTRG

系の次元

テンソル添字の走る範囲

なぜテンソルネットワーク(TN)？

■ 利点

- 作用が複素数であっても基本的に適応可能

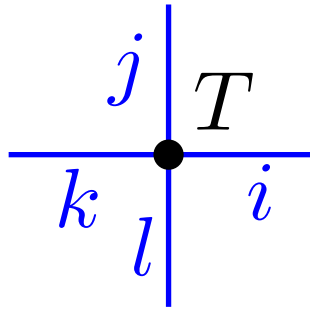
≈ 符号問題がない？

- 有限密度QCD
- θ 項
- 格子超対称性
- 実時間経路積分
- カイラルゲージ理論

に対する挑戦

TNとは？

4階のテンソルを図で表すと



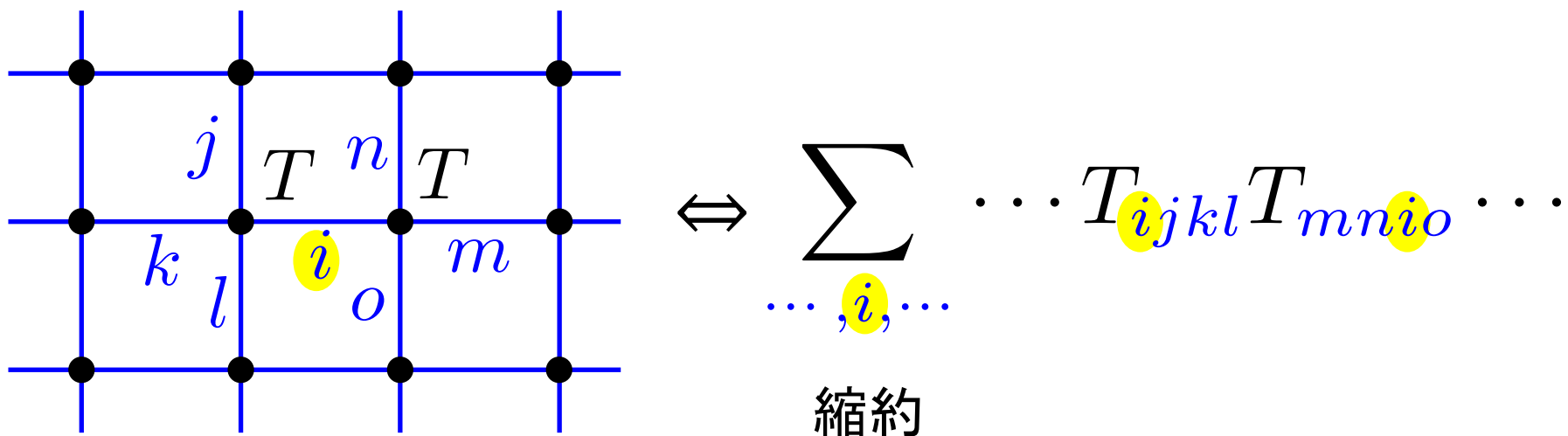
$\Leftrightarrow$

$$T_{ijkl}$$

テンソルは格子点上
添字はリンク上

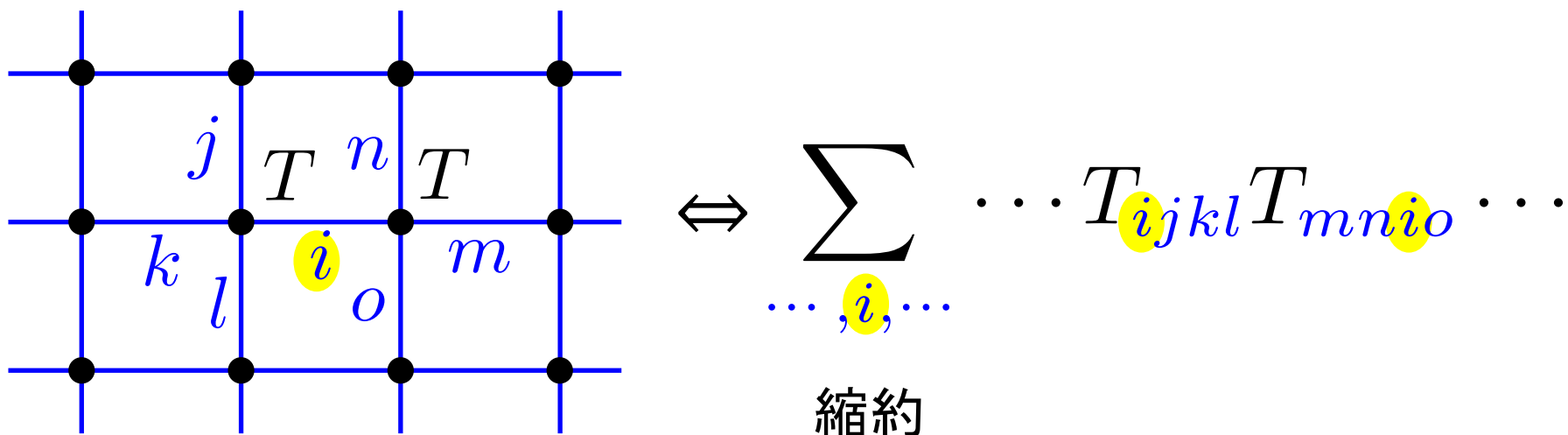
TNとは？

例：2次元正方格子のネットワーク



TNとは？

例：2次元正方格子のネットワーク



ターゲット（波動関数、分配関数など）
がテンソルネットワークで表現される

TN法の分類

Hamiltonian/ヒルベルト空間
量子多体系
波動関数(基底状態等)、期待値
変分法
DMRG, MPS, PEPS, MERA, ...
実時間発展, 非平衡系, 量子計算, etc.

Lagrangian/多重積分
古典統計系、経路積分表示の量子系
分配関数、相関関数、経路積分
粗視化(実空間くりこみ群)
TRG, SRG, HOTRG, CTM, TNR, Loop-TNR, ...
平衡系(Ising, lattice QCD, etc.)、実時間



以後はこちらの話

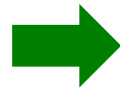
TN法(Lagrangian形式)の流れ

ターゲットモデル(連続時空)



離散化(格子正則化)

ターゲット格子モデル



MC if no sign problem



分配関数のTN表示

各モデル毎に行う。テンソルの成分を決める



$$Z \equiv \int [d\phi] e^{-S[\phi]} \stackrel{?}{=} \sum_{\dots, i, j, k, l, \dots} \cdots T_{ijkl} T_{mnio} \cdots$$

TN表示

場の種類や相互作用の仕方によって個別に対応

基本方針

局所ボルツマン因子を展開し、もとの場の積分を実行してしまう

TN表示

場の種類や相互作用の仕方によって個別に対応

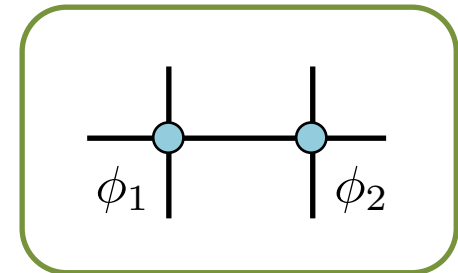
基本方針

局所ボルツマン因子を展開し、もとの場の積分を実行してしまう

イメージ

$$e^{\phi_1 \phi_2} = \sum_n \Psi_n(\phi_1) \Phi_n(\phi_2)$$

異なるサイトの間



TN表示

場の種類や相互作用の仕方によって個別に対応

基本方針

局所ボルツマン因子を展開し、もとの場の積分を実行してしまう

イメージ

$$e^{\phi_1 \phi_2} = \sum_n \Psi_n(\phi_1) \Phi_n(\phi_2)$$

異なるサイトの間

テンソルの添字になる！

具体的な展開の形は場の種類に依存する

スカラー場(非コンパクト): 直交基底展開 Shimizu '12, Lay&Rundnick'02、ガウス求積法 Sakai et al., '18

ゲージ場(コンパクトな内部空間: SU(N)群など): 指標展開 Meurice et al., '13

フェルミオン場: グラスマン性 $\theta^2=0$ より展開次数は有限 Shimizu & kuramashi '14, ST & Yoshimura '15

TN表示

場の種類や相互作用の仕方によって個別に対応

基本方針

局所ボルツマン因子を展開し、もとの場の積分を実行してしまう

イメージ

異なるサイトの間

$$e^{\phi_1 \phi_2} = \sum_n \Psi_n(\phi_1) \Phi_n(\phi_2)$$

n → テンソルの添字になる！

展開によって多重積分が
1重積分の積に帰着できる
ので複素作用問題がない！

TN表示

場の種類や相互作用の仕方によって個別に対応

基本方針

局所ボルツマン因子を展開し、もとの場の積分を実行してしまう

イメージ

異なるサイトの間

$$e^{\phi_1 \phi_2} = \sum_n \Psi_n(\phi_1) \Phi_n(\phi_2)$$

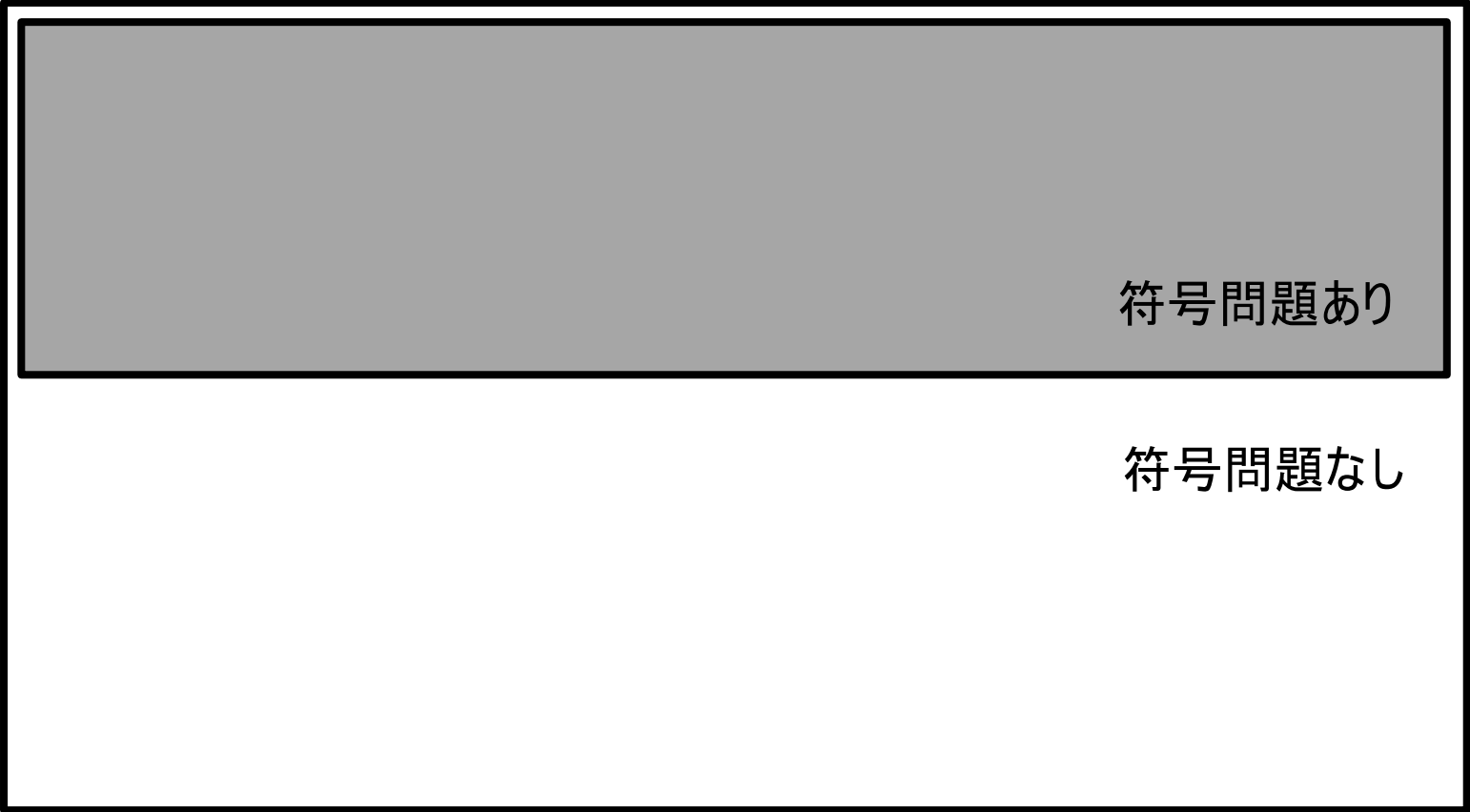
局所相関

展開によって多重積分が
1重積分の積に帰着できる
ので複素作用問題がない！

複素作用問題はないが局所相関の問題は残る

MC法的な観点でみると

理論空間

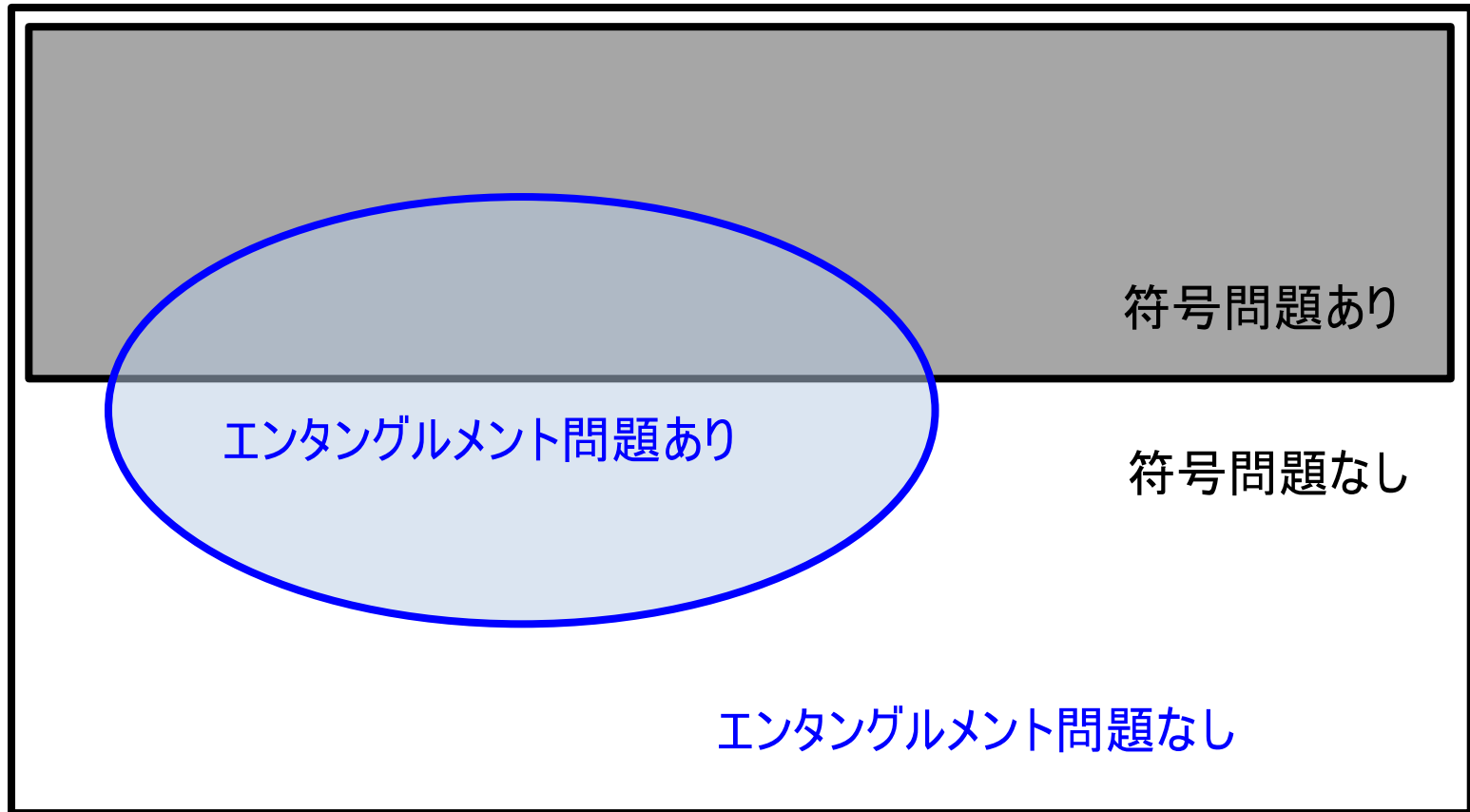


符号問題あり

符号問題なし

MC法的な観点でみると
TN法的な観点でみると

理論空間



任意の方法でもアクセスできない問題(領域)は存在するのか？

エンタングルメントの問題 $\equiv$ 臨界減速の問題(MC法)？

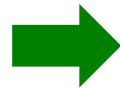
TN法(Lagrangian形式)の流れ

ターゲットモデル(連続時空)



離散化(格子正則化)

ターゲット格子モデル



MC if no sign problem



分配関数のTN表示

各モデル毎に行う。テンソルの成分を決める



$$Z \equiv \int [d\phi] e^{-S[\phi]} = \sum_{\dots, i, j, k, l, \dots} \cdots T_{ijkl} T_{mnio} \cdots$$

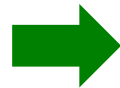
TN法(Lagrangian形式)の流れ

ターゲットモデル(連続時空)



離散化(格子正則化)

ターゲット格子モデル



MC if no sign problem



分配関数のTN表示

各モデル毎に行う。テンソルの成分を決める



膨大なコスト $\propto \chi^{V_d}$

$$Z \equiv \int [d\phi] e^{-S[\phi]} = \sum_{\dots, i, j, k, l, \dots} \cdots T_{ijkl} T_{mnio} \cdots$$

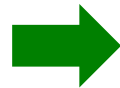
TN法(Lagrangian形式)の流れ

ターゲットモデル(連続時空)



離散化(格子正則化)

ターゲット格子モデル



MC if no sign problem



分配関数のTN表示

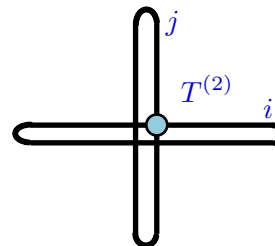
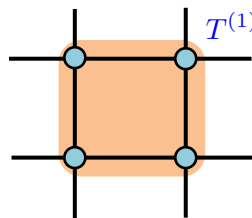
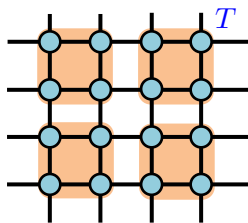
各モデル毎に行う。テンソルの成分を決める



TNの粗視化

実空間繰り込み群 + 打ち切り特異値分解による情報圧縮
モデルに依らず、時空の次元には依存。大規模数値計算

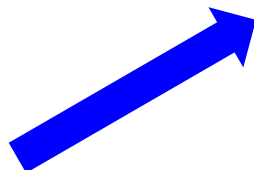
TRG,
HOTRG,
TNR,
Loop-TNR



$$Z \approx \sum_{i,j} T_{ijij}^{(n)}$$

粗視化アルゴリズムの発展

局所相関の除去
による精密化



Tensor Renormalization Group (TRG)

Levin and Nave, PRL99,120601(2007)

Tensor Network Renormalization (TNR)

Evenbly & Vidal, PRL115,180405(2015)

Loop-TNR Yang et al., PRL118,110504(2017)

Graph Independent Local Truncations (GILT)

Hauru et al., PRB97,045111(2018)

高次元化



Higher Order Tensor Renormalization Group (HOTRG) $O(\chi^{4d-1})$

Xie et al., PRB86,045139(2012)

Anisotropic TRG (ATRG) $O(\chi^{2d+1})$

Adachi et al., arXiv:1906:02007

Improvement of ATRG Oba, to appear in PTEP(2019)

Triad TRG $O(\chi^{d+3})$

Kadoh & Nakayama, arXiv:1912:02414

TN法(L形式)の適用例

■ 2D system

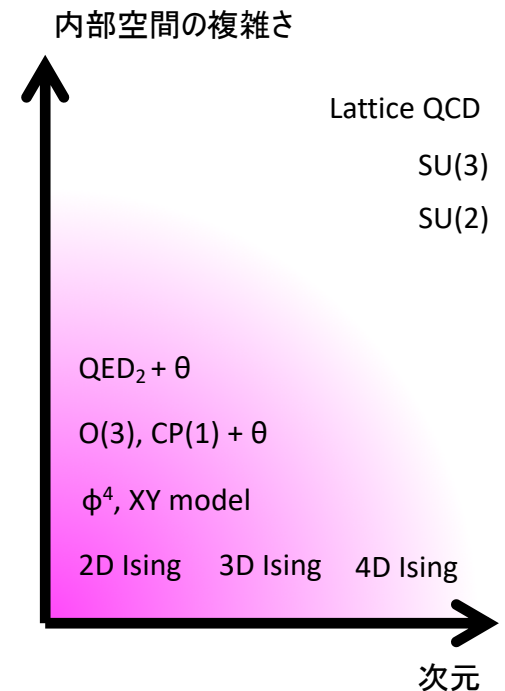
- Spin model : Ising model [Levin & Nave PRL99,120601\(2007\)](#), [Aoki et al. Int. Jour. Mod. Phys. B23,18\(2009\)](#), X-Y model [Meurice et al. PRE89,013308\(2014\)](#), X-Y model with Fisher zero [Meurice et al. PRD89,016008\(2014\)](#), O(3) model [Unmuth-Yockey et al. LATTICE2014](#), X-Y model + μ [Meurice et al. PRE93,012138\(2016\)](#)
- Abelian-Higgs [Bazavov et al. LATTICE2015](#)
- ϕ^4 theory [Shimizu Mod.Phys.Lett.A27,1250035\(2012\)](#), [Sakai et al., JHEP??? \(2019\)](#)
- QED₂ [Shimizu & Kuramashi PRD90,014508\(2014\)](#) & [PRD90,034502\(2018\)](#)
- QED₂ + θ [Shimizu & Kuramashi PRD90,074503\(2014\)](#)
- Gross-Neveu model + μ [ST & Yoshimura PTEP043B01\(2015\)](#)
- CP(N-1) + θ [Kawauchi & ST PRD93,114503\(2016\)](#)
- Towards Quantum simulation of O(2) model [Zou et al, PRA90,063603](#)
- N=1 Wess-Zumino model (SUSY model) [Sakai et al., JHEP03\(2018\)141](#)

■ 3D system Higher order TRG(HOTRG) : [Xie et al. PRB86,045139\(2012\)](#)

- 3D Ising, Potts model [Wan et al. CPL31,070503\(2014\)](#)
- 3D Fermion system [Sakai et al., PTEP063B07\(2017\)](#)
- 2+1D Gauge Ising [Yoshimura et al., JHEP08\(2019\)023](#)

■ 4D system

- Ising model by HOTRG [Akiyama et al., PRD100,054510\(2019\)](#)



1+1次元実スカラー ϕ^4 理論の 実時間経路積分への応用

この系のTN表示をどのように導くのか？

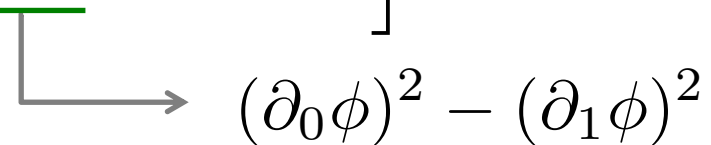
実時間系の研究

- 複素Langevin法
 - 3+1次元 ϕ^4 理論 [PRL95,202003\(2005\)](#) Berges et al.
 - 3+1次元 SU(2)ゲージ理論、Schwinger-Keldysh (SK) 形式 [PRD75,045007\(2007\)](#) Berges et al.
 - 収束性の問題がある (特に $t \gg \beta$ では難しい)
- 一般化 Lefschetz thimble [PRD95,114501\(2017\)](#) Alexandru et al.
 - 1+1次元 ϕ^4 理論、SK形式
 - 小体積 $(2 \times 8 + 2) \times 8$ (時間方向が長くなると難しい)
- テンソルネットワーク法
 - Hamiltonian 形式 [arXiv:1908.04536](#) Lin et al., 1+1d Thirring model
 - Lagrangian 形式 [arXiv:1908.00126](#) ST (ファインマン処方)

⇒ 今日は少し違う方法を紹介

モデル

1+1次元 Minkowski 時空上の実スカラー理論

$$S = \int d^2x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi) \right] \quad V(\phi) = \frac{m_0^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4$$

$$(\partial_0 \phi)^2 - (\partial_1 \phi)^2$$

$$x = (x_0, x_1)$$

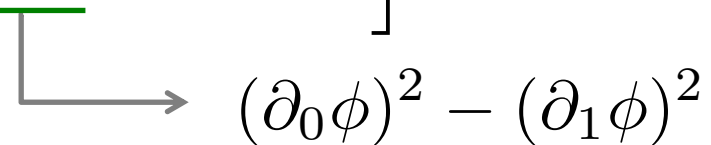
$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

“purely” Minkowskian but not SK

$$\phi \in \mathbb{R}$$

モデル

1+1次元 Minkowski 時空上の実スカラー理論

$$S = \int d^2x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi) \right] \quad V(\phi) = \frac{m_0^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4$$

$$(\partial_0 \phi)^2 - (\partial_1 \phi)^2$$

格子化

$a = 1$ lattice units

$$\partial_\mu \phi(x) \longrightarrow \phi_{x+\hat{\mu}} - \phi_x$$

$$\int d^2x \longrightarrow \sum_{x \in \mathbb{Z}^2}$$

経路積分

$$Z = \int [d\phi] \exp[iS]$$

被積分関数が位相因子なので積分が収束するのも怪しそうに見えるが。。。

経路積分

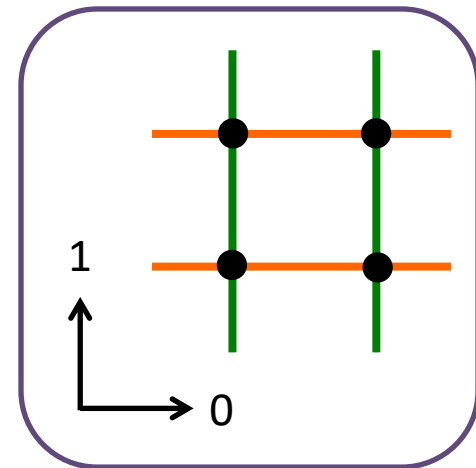
$$Z = \int [d\phi] \exp[iS]$$

被積分関数が位相因子なので積分が収束するのも怪しそうに見えるが。。。

$$= \int [d\phi] \prod_x \underline{H_0(\phi_x, \phi_{x+\hat{0}})} \underline{H_1(\phi_x, \phi_{x+\hat{1}})}$$

$$\underline{H_0(\phi, \phi')} = \exp \left[+\frac{i}{2}(\phi - \phi')^2 - \frac{i}{4}V(\phi) - \frac{i}{4}V(\phi') \right]$$

$$\underline{H_1(\phi, \phi')} = \exp \left[-\frac{i}{2}(\phi - \phi')^2 - \frac{i}{4}V(\phi) - \frac{i}{4}V(\phi') \right]$$



経路積分

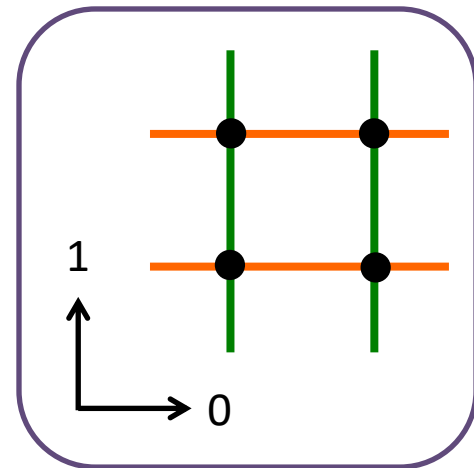
$$Z = \int [d\phi] \exp[iS]$$

被積分関数が位相因子なので積分が収束するのも怪しそうに見えるが。。。

$$= \int [d\phi] \prod_x \underline{H_0(\phi_x, \phi_{x+\hat{0}})} \underline{H_1(\phi_x, \phi_{x+\hat{1}})}$$

$$\underline{H_0(\phi, \phi')} = \exp \left[\begin{array}{cc} -i\phi\phi' & -\frac{i}{4}V(\phi) - \frac{i}{4}V(\phi') \end{array} \right]$$

$$\underline{H_1(\phi, \phi')} = \exp \left[\begin{array}{cc} +i\phi\phi' & -\frac{i}{4}V(\phi) - \frac{i}{4}V(\phi') \end{array} \right]$$



収束積分へ

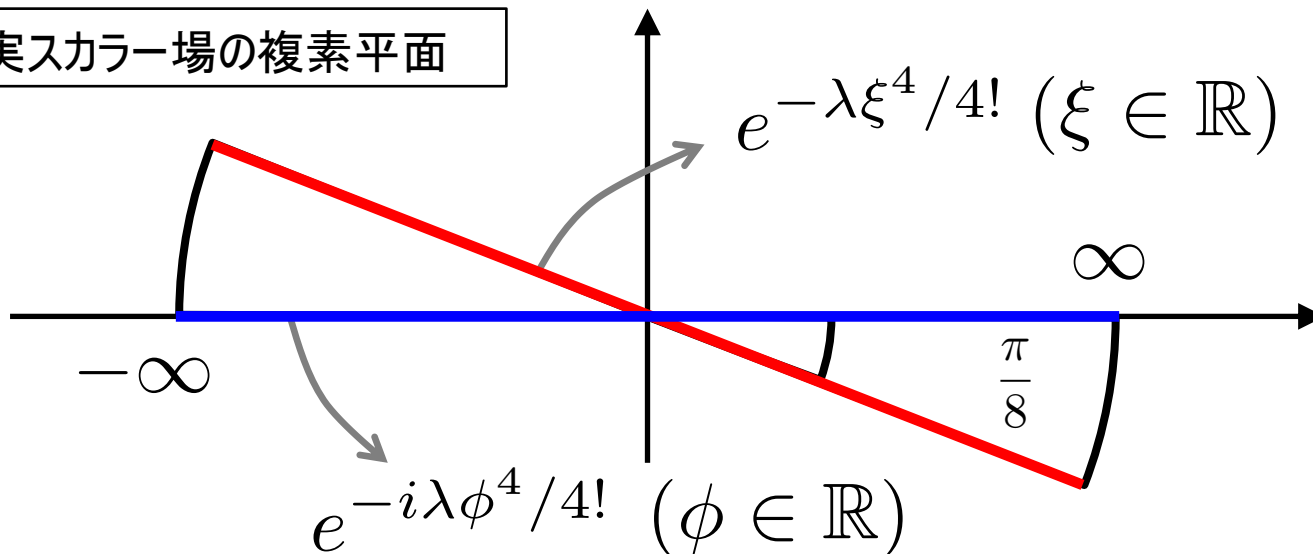
$$Z = \int [d\phi] \exp[iS]$$

$$= \int [d\phi] \exp \left[\sum_x \cdots - i \frac{\lambda}{4!} \phi_x^4 \right]$$

コーシーの積分定理を利用して
収束積分へと書き直す

$$(e^{-i\pi/8})^4 = -i$$

実スカラー場の複素平面



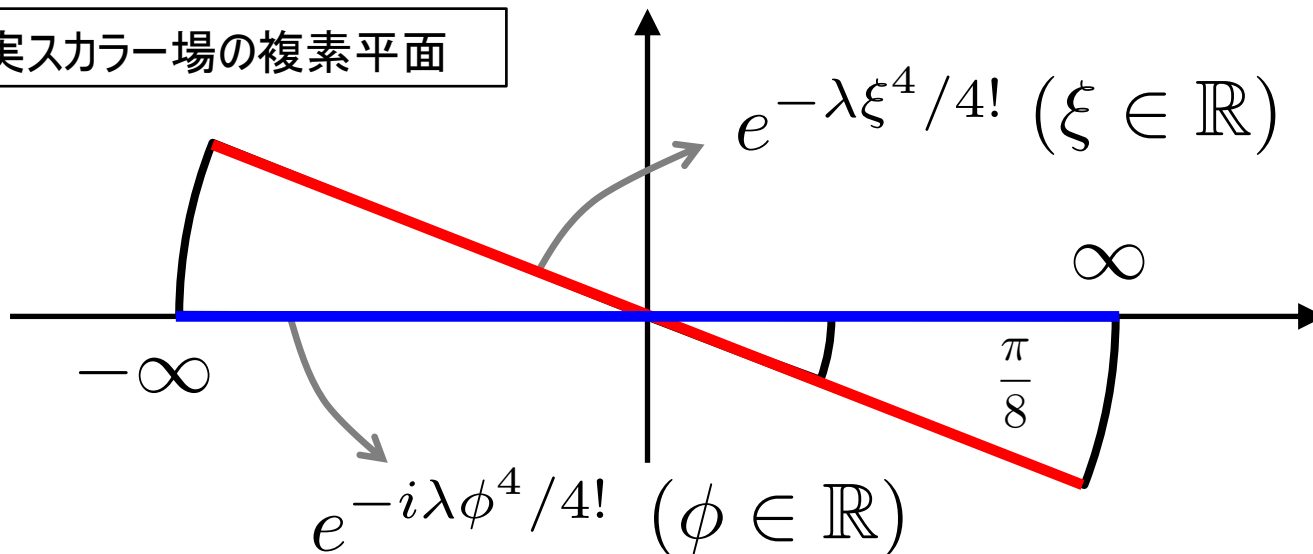
収束積分へ

$$\phi \longrightarrow e^{-i\pi/8}\xi$$

異なる格子点上の場は混ぜない

$$\begin{aligned} H_0(\phi, \phi') &\longrightarrow H_0^C(\xi, \xi') \quad (\xi, \xi' \in \mathbb{R}) \\ &= \exp \left[-\sqrt{i}\xi\xi' - \sqrt{i}\frac{m_0^2}{8}(\xi^2 + \xi'^2) - \frac{\lambda}{4 \cdot 4!}(\xi^4 + \xi'^4) \right] \end{aligned}$$

実スカラー場の複素平面



作用素の特異値分解

$$\phi \longrightarrow e^{-i\pi/8}\xi$$

$$\begin{aligned} H_0(\phi, \phi') &\longrightarrow H_0^C(\xi, \xi') \quad (\xi, \xi' \in \mathbb{R}) \\ &= \exp \left[-\sqrt{i}\xi\xi' - \sqrt{i}\frac{m_0^2}{8}(\xi^2 + \xi'^2) - \frac{\lambda}{4 \cdot 4!}(\xi^4 + \xi'^4) \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow H_0^C \text{ はコンパクト作用素} \quad \because \int_{-\infty}^{\infty} |H_0^C(x, y)|^2 dx dy < \infty$$

作用素の特異値分解

$$\phi \longrightarrow e^{-i\pi/8}\xi$$

$$H_0(\phi, \phi') \longrightarrow H_0^C(\xi, \xi') \quad (\xi, \xi' \in \mathbb{R})$$

$$= \exp \left[-\sqrt{i}\xi\xi' - \sqrt{i}\frac{m_0^2}{8}(\xi^2 + \xi'^2) - \frac{\lambda}{4 \cdot 4!}(\xi^4 + \xi'^4) \right]$$

$$\Rightarrow H_0^C \text{ はコンパクト作用素} \quad \because \int_{-\infty}^{\infty} |H_0^C(x, y)|^2 dx dy < \infty$$

$\Rightarrow H_0^C$ を特異値分解できる

Lay 2002,
Shimizu 2012

$$H_0^C(\xi, \xi') = \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_k(\xi) \sigma_k \Phi_k^*(\xi')$$

正規直交基底関数
特異値
 $\sigma_0 > \sigma_1 > \sigma_2 > \dots \geq 0$

行列の特異値分解

$$M_{ab} = \sum_k u_{ak} \sigma_k (v^\dagger)_{kb}$$

u, v : ユニタリー行列

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq 0$$

: 特異値(実非負)

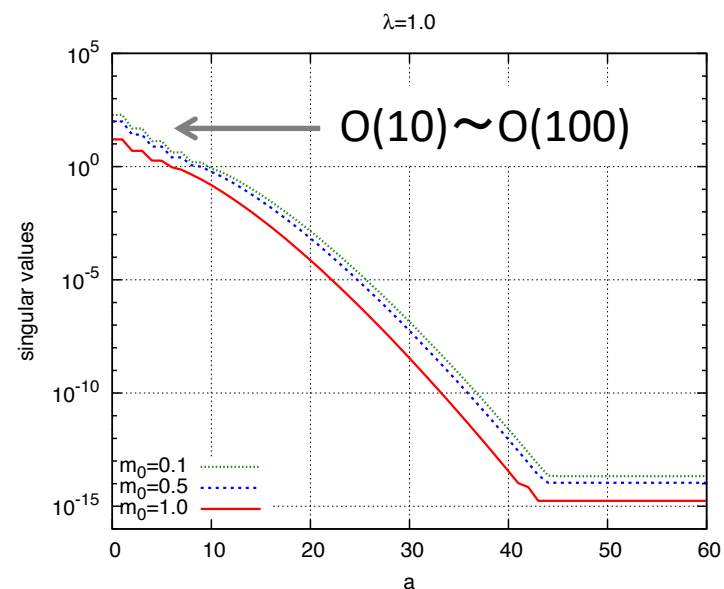
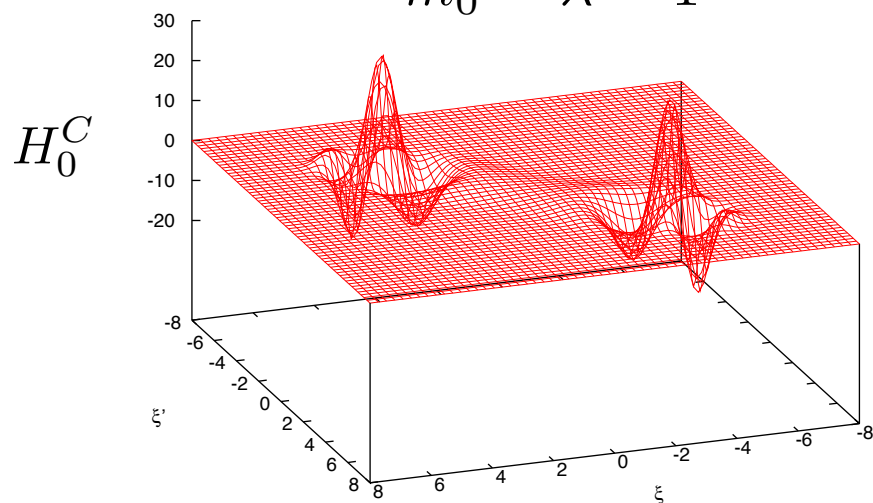
作用素の特異値分解

$$\phi \longrightarrow e^{-i\pi/8}\xi$$

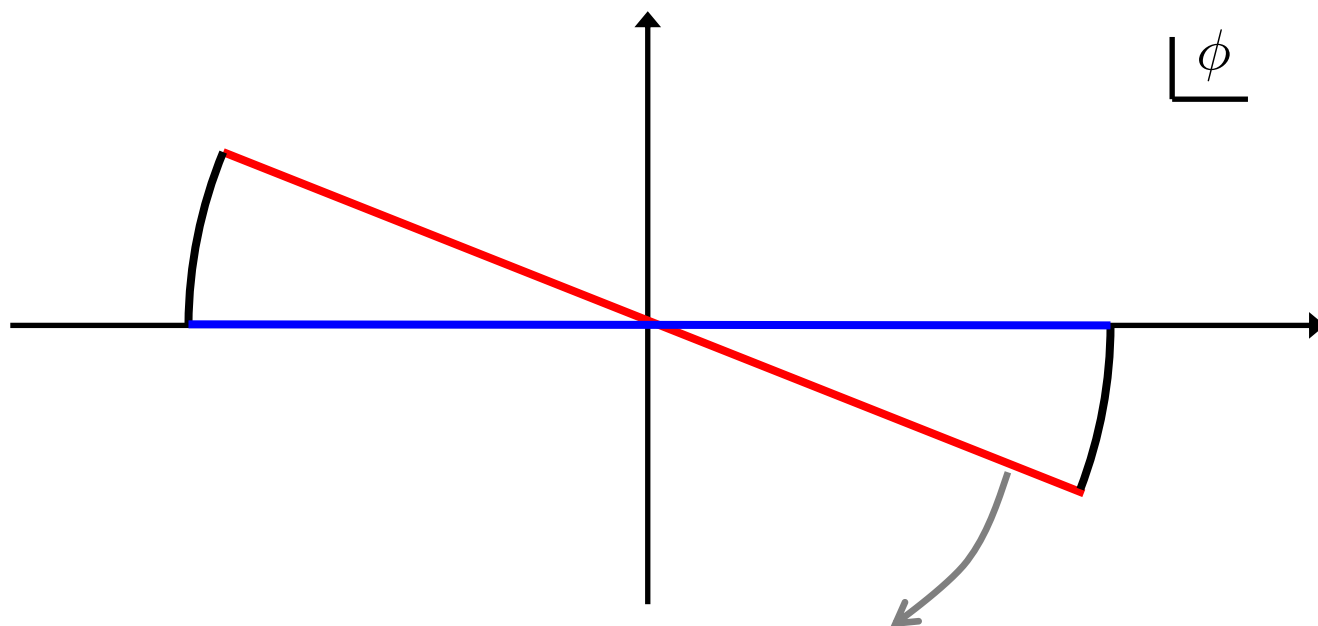
$$H_0(\phi, \phi') \longrightarrow H_0^C(\xi, \xi') \quad (\xi, \xi' \in \mathbb{R})$$

$$= \exp \left[\underline{-\sqrt{i}\xi\xi'} - \sqrt{i}\frac{m_0^2}{8}(\xi^2 + \xi'^2) - \frac{\lambda}{4 \cdot 4!}(\xi^4 + \xi'^4) \right]$$

$$m_0 = \lambda = 1$$



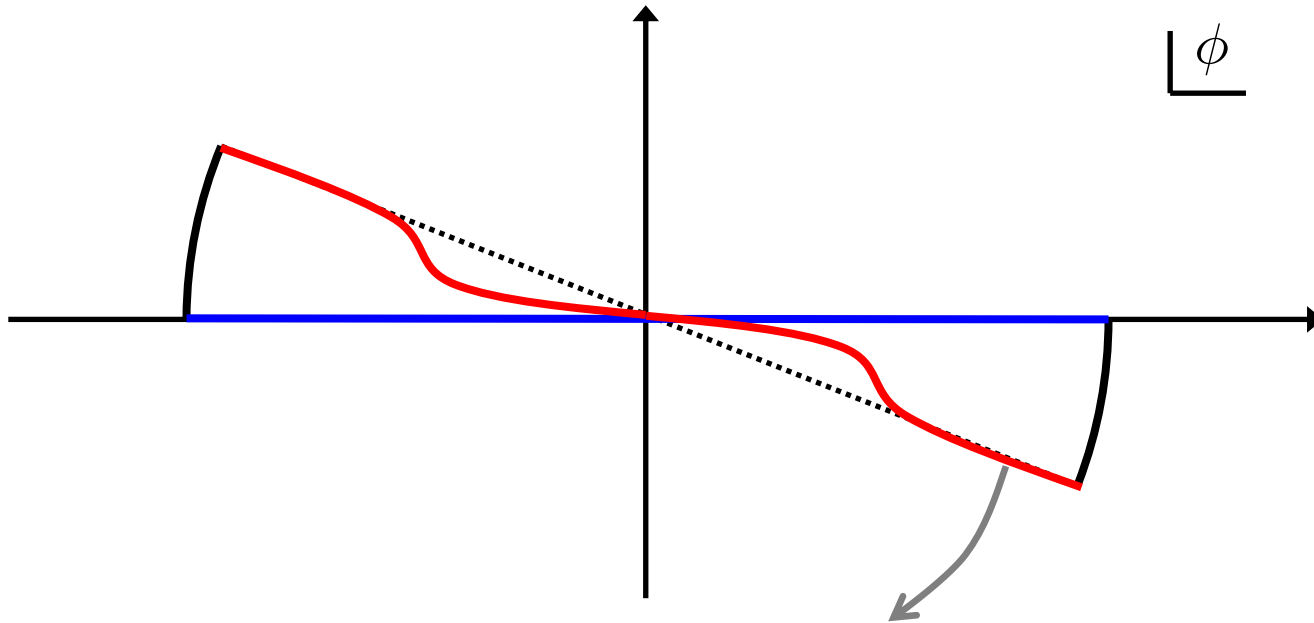
積分経路の変形



$$\phi(\xi) = \xi \cos(\pi/8) - i\xi \sin(\pi/8)$$

$$\xi \in \mathbb{R}$$

積分経路の変形



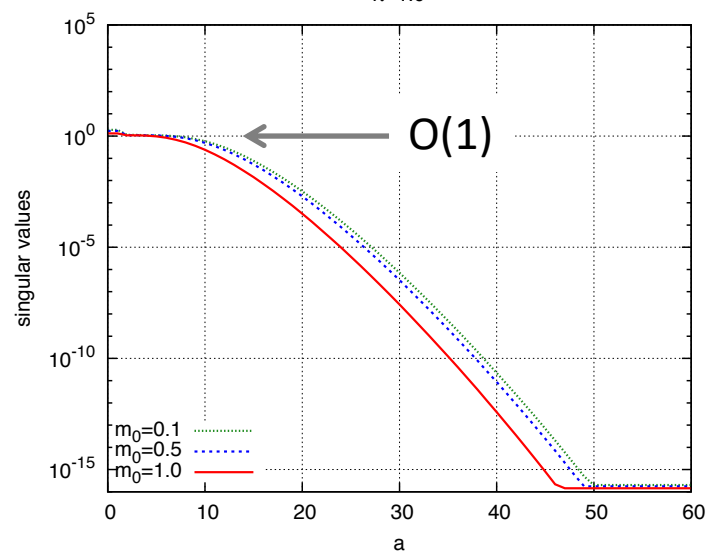
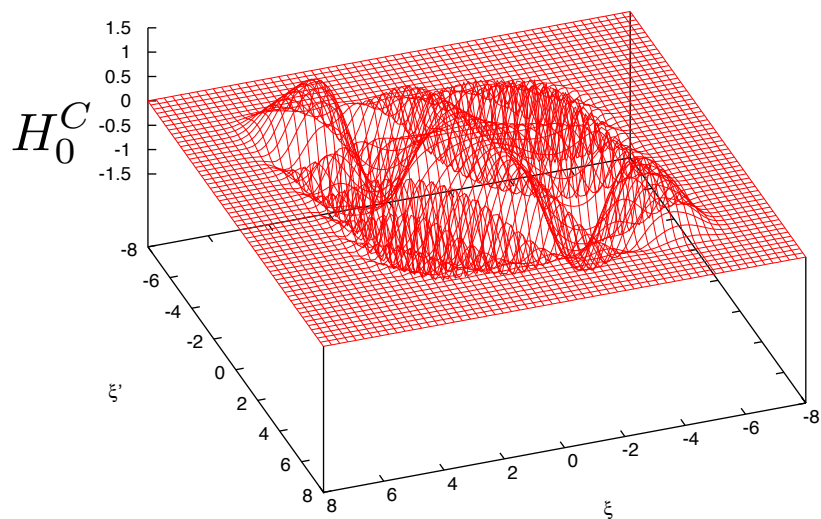
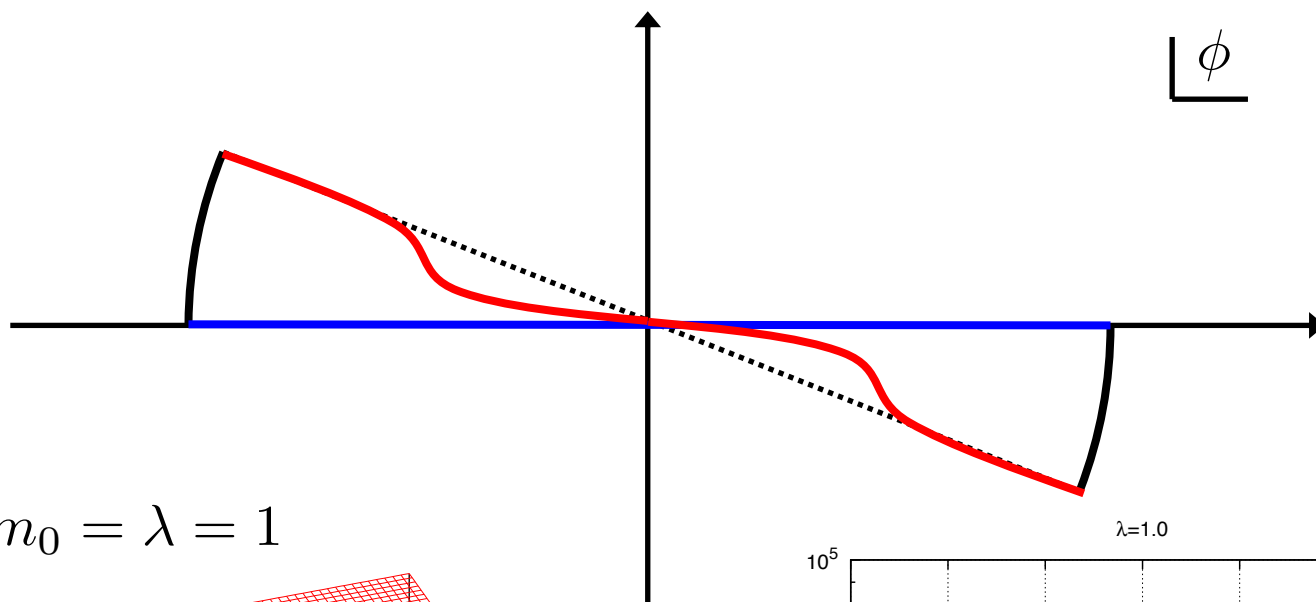
$$\phi(\xi) = \xi \cos(\pi/8) - i\xi \sin(\pi/8) \tanh^2(A\xi^2) \quad \xi \in \mathbb{R}$$

A は調整パラメータ

$$H_0(\phi(\xi), \phi(\xi')) = \exp \left[-i\phi(\xi)\phi(\xi') - i\frac{m_0^2}{8}(\phi^2(\xi) + \phi^2(\xi')) - i\frac{\lambda}{4 \cdot 4!}(\phi^4(\xi) + \phi^4(\xi')) \right]$$

$$\equiv H_0^C(\xi, \xi')$$

積分経路の変形

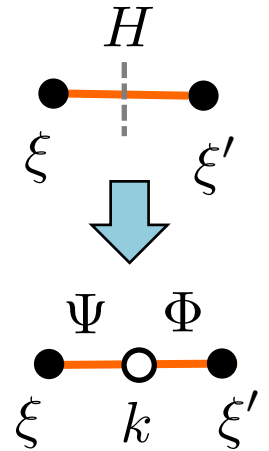


テンソルの作り方

$$H_0^C(\xi, \xi') = \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_k^{(0)}(\xi) \sigma_k^{(0)} \Phi_k^{(0)*}(\xi')$$

正規直交基底関数

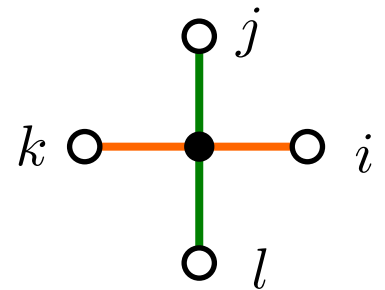
特異値



正規直交基底と特異値があれば次のようにテンソルを構成できる

$$T_{ijkl} \equiv \sqrt{\sigma_i^{(0)} \sigma_j^{(1)} \sigma_k^{(0)} \sigma_l^{(1)}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{d\phi}{d\xi} \Psi_i^{(0)}(\xi) \Psi_j^{(1)}(\xi) \Phi_k^{(0)*}(\xi) \Phi_l^{(1)*}(\xi)$$

振動型の積分であるが、1変数積分なので強引に
数値計算可能 ⇒ 複素作用問題はない

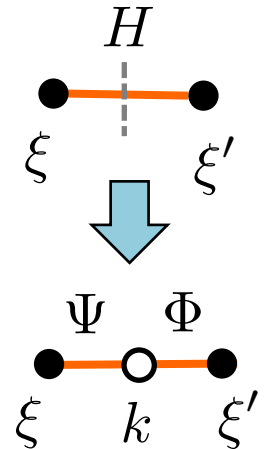


テンソルの作り方

$$H_0^C(\xi, \xi') = \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_k^{(0)}(\xi) \sigma_k^{(0)} \Phi_k^{(0)*}(\xi')$$

正規直交基底関数

特異値



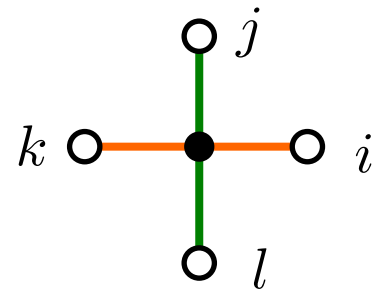
正規直交基底と特異値があれば次のようにテンソルを構成できる

$$T_{ijkl} \equiv \sqrt{\sigma_i^{(0)} \sigma_j^{(1)} \sigma_k^{(0)} \sigma_l^{(1)}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{d\phi}{d\xi} \Psi_i^{(0)}(\xi) \Psi_j^{(1)}(\xi) \Phi_k^{(0)*}(\xi) \Phi_l^{(1)*}(\xi)$$

テンソル添字の走る範囲を打ち切る

$$0 \leq i, j, k, l \leq N$$

打ち切り次数



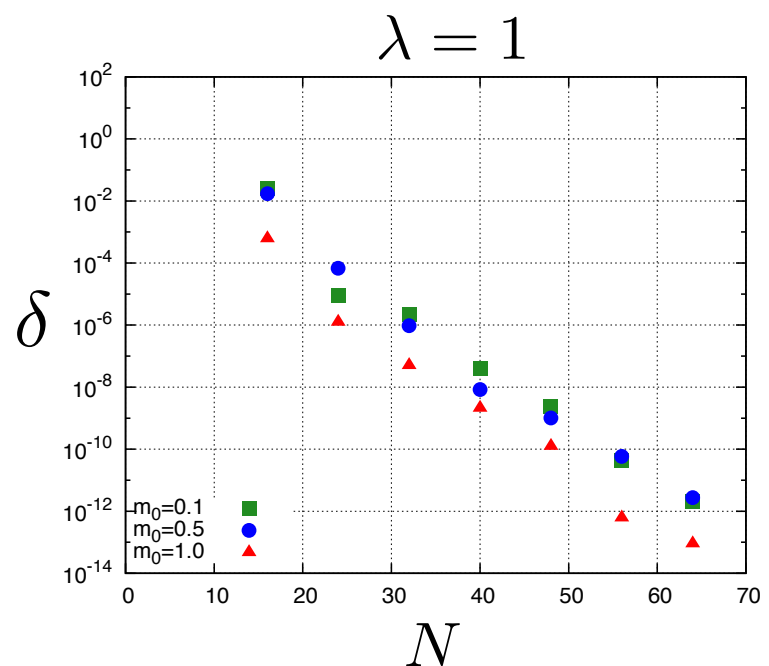
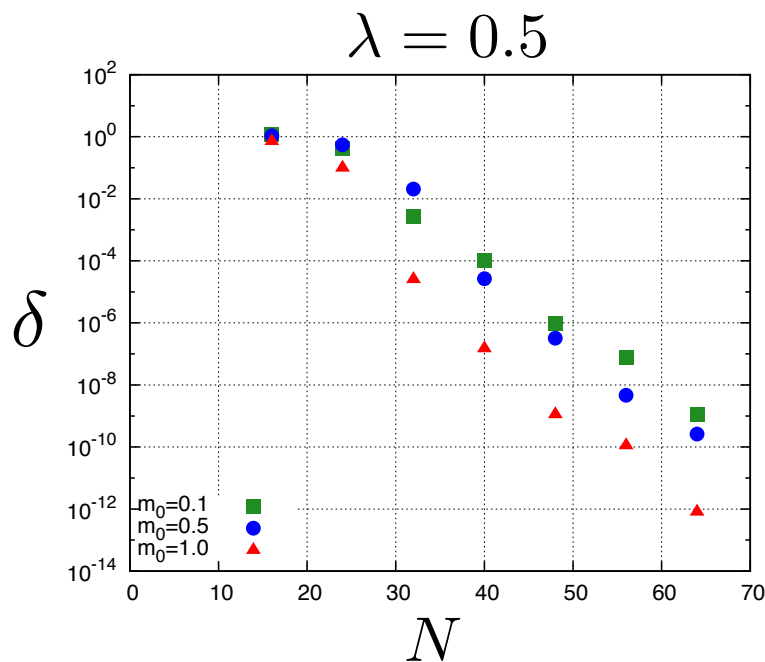
2x2格子

$$Z = \text{Tr} \left[\begin{array}{cc} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{array} \right]$$

- 周期的境界条件(物理的ではないが、、、)
- 2x2 テンソルネットワークの縮約が厳密に実行可能
- 粗視化はしていない → 初期テンソルの確認

相対誤差

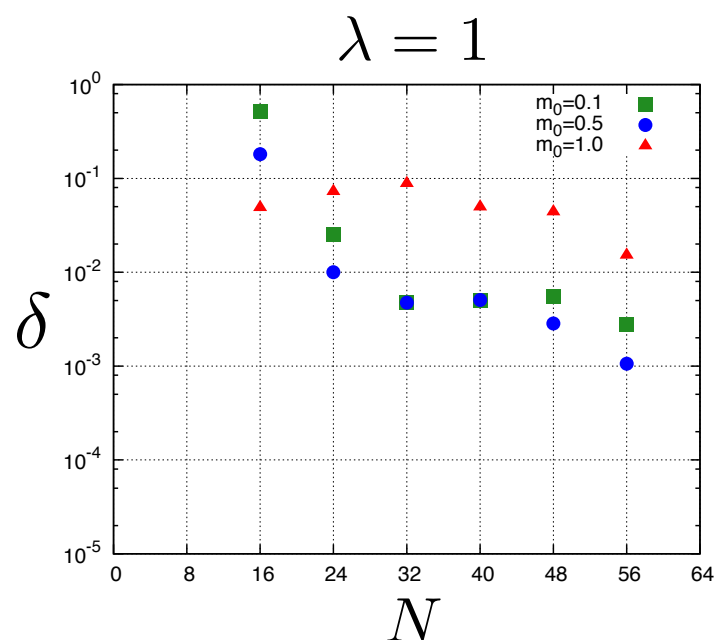
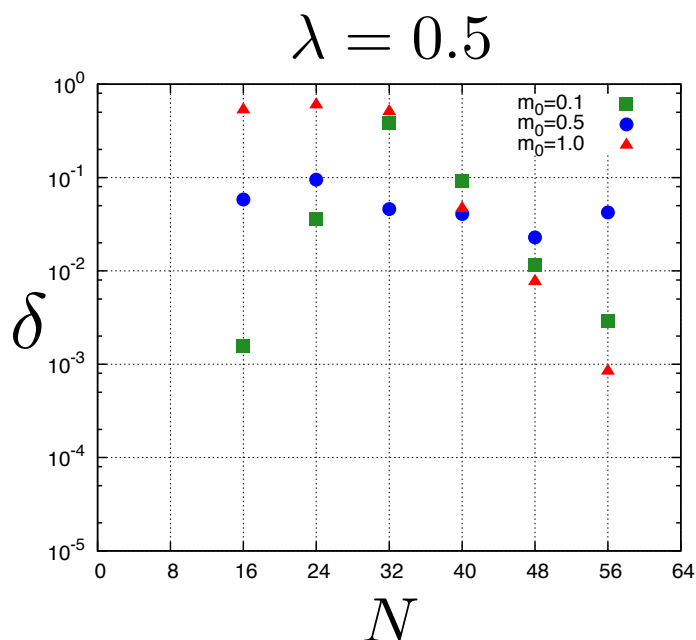
$$\delta = \left| \frac{\ln Z - \ln Z_{\text{exact}}}{\ln Z_{\text{exact}}} \right|$$



$(1024)^2$ 格子 Preliminary

粗視化にはテンソルくりこみ群(TRG)を使用

$$\delta = \left| \frac{\ln Z - \ln Z_{N=64}}{\ln Z_{N=64}} \right|$$



改良型アルゴリズムが必要？
TNR, Loop-TNR, GILT etc

まとめ

- **Minkowski時空上**のスカラー理論のテンソルネットワーク表示を導出
- **コーシーの積分定理**を使い積分路を変形することにより、作用素をコンパクトにできる
- コンパクト作用素を「**特異値分解**」することにより離散構造（整数=テンソル添字）が現れ、テンソルを構成できる
- 複素作用問題はないが、**局所エンタングルメントの問題**がある。

展望

■ 実時間系

- Schwinger-Keldysh形式、非平衡系
- 実時間相関関数、スペクトル関数、輸送係数
- フェルミオン場、ゲージ場がある場合は？

■ L形式のTN法について

- 効率的な高次元系用アルゴリズムの開発と改良(3+1次元QCDに向けて)
- 格子カイラルゲージ理論のTN表示は？