

修士論文

弦理論における ブラックホールの微視的状态とその粗視化

小川 軌明

京都大学大学院理学研究科 物理学・宇宙物理学専攻 物理学第2分野 素粒子論分科
京都大学基礎物理学研究所 素粒子論グループ

2008年1月31日^{*1*2*3}

^{*1} 2008.03.01 ver 1.01 誤記訂正 (p73, p86, 文献 [38])

^{*2} 2008.04.12 ver 1.02 誤記訂正 (p93)

^{*3} 2008.05.14 ver 1.03 誤記訂正 (p44)

概要

本修士論文では、弦理論を用いたブラックホールの微視的状态とその粗視化過程に関する近年の研究の一部を紹介する。情報損失のパラドックスを解決する枠組みとして Mathur らにより提唱された fuzzball 予想は、量子論的に見たブラックホールに対して、古典的なものとは大きく異なる新しい描像を提供する。この予想に基づいて微視的状态の準古典近似として構成された fuzzball 解を用い、巨視的状态としてのブラックホールのホライズンが、粗視化の結果として現れることを見る。また AdS/CFT 対応と、その具体化である LLM bubbling 幾何を用いると、AdS 背景上のブラックホールの微視的状态を顕わな形で見ることができる。これら微視的状态の粗視化について、ゲージ側と重力側の両面から議論し、fuzzball 予想との関係についても考える。これらは古典重力と量子重力の関係に関して、多くの有益な示唆を与える。

目次

概要		i
第 1 章	はじめに	1
1.1	量子重力と超弦理論	1
1.2	量子論とブラックホール	2
1.2.1	エントロピーと微視的状态	2
1.2.2	情報損失のパラドックス	3
1.3	弦理論における微視的状态とその粗視化	4
1.4	本修士論文の内容と構成	4
第 2 章	弦理論におけるブラックホールのエントロピー	7
2.1	弦理論におけるブラックホールと微視的状态	7
2.2	弱結合極限と BPS 状態	8
2.3	考察する系 : D1-D5-P 系	9
2.3.1	古典解と Bekenstein エントロピー	9
2.3.2	弦理論でみた D1-D5-P 系	12
2.3.3	U 双対変換と系の対称性	13
2.4	微視的状态の構成とエントロピー計算	15
2.4.1	D5 ブレーンを背景とする描像	16
2.4.2	D1-D5 を背景とする描像	18
	2a. 巻き付き数 1 のブレーン配位	20
	2b. 大きな巻き付き数を持ったブレーン配位	23
2.4.3	各結果相互の関係について	26
2.5	$S_{micro} \neq S_{Bek}$ を与える系	27
2.6	まとめと課題	30

第 3 章	ブラックホールの fuzzball 描像	32
3.1	量子重力におけるブラックホール内部の様相	32
3.1.1	量子効果の到達範囲と情報損失のパラドックス	32
3.1.2	fuzzball 予想	33
3.1.3	微視的状態の準古典的表現	34
3.2	Fuzzball 解	35
3.2.1	2-charge 系ブラックホールの統計的性質	35
3.2.2	弦の振動と重力場の関係	36
3.2.3	基本弦のコヒーレント状態	37
	調和振動子のコヒーレント状態とその性質	37
	弦のコヒーレント状態	38
3.2.4	Fuzzball 解の構成	40
	D1-D5 系の fuzzball 解	43
3.2.5	fuzzball 解の非特異性の証明	44
3.3	Fuzzball 描像におけるホライズン	46
3.3.1	束縛系の大きさとはホライズン	46
3.3.2	fuzzball 解の Bekenstein エントロピー	47
3.3.3	naive 解のホライズンについて	48
3.4	Fuzzball 解に関する疑問点及び問題点	49
3.4.1	超重力近似の妥当性	50
3.4.2	弦のコヒーレント状態を用いた解の構成について	50
3.4.3	平均化操作について	51
3.4.4	低周波成分の寄与	51
3.4.5	量子重力との関係	51
3.5	まとめ	52
第 4 章	AdS/CFT 対応と LLM bubbling 幾何	53
4.1	AdS 空間とその境界構造	53
4.1.1	Anti-de-Sitter 空間	54
4.1.2	AdS 空間の構造と座標系	54
	グローバル座標系と時間の非コンパクト化	54
	AdS 空間の境界構造	55
	ポアンカレ座標系	56

4.1.3	AdS 空間の境界とミンコフスキー空間の共形対応	57
	グローバル座標系を用いた対応	57
	ポアンカレ座標系を用いた対応	57
	グローバル座標系と Wick 回転を用いた対応	58
4.2	AdS/CFT 対応	58
4.2.1	D3 プレーン系における AdS ₅ /CFT ₄ 対応	59
	重力系として見た描像	59
	プレーン系として見た描像	61
	両描像の比較と AdS/CFT 対応	61
4.2.2	古典重力近似とラージ N	63
4.2.3	諸量の対応関係	64
	相関関数の対応 - GKP-Witten の関係式	64
	時空の対応	65
	場と演算子の対応	66
	状態の間の対応	67
4.3	Bubbling 幾何と LLM 対応	67
4.3.1	CFT 側での 1/2 BPS 状態	68
	演算子/状態対応と 1/2 BPS 状態	68
	1/2 BPS 状態の持つ対称性	69
	フェルミオン表示	69
	相平面上のフェルミオン分布	70
	フェルミオン系の保存荷電	71
4.3.2	AdS 側での 1/2 BPS 古典超重力解	72
	対称性の対応による重力解の決定	72
	解のパラメータ付けについて	74
	滑らかな解を与える条件	74
	簡単な例	75
	荷電分布の量子化	78
	エネルギーと角運動量	79
	時空の位相について	81
4.3.3	LLM 予想	81
4.4	まとめ	82

第 5 章	LLM bubbling 幾何におけるブラックホールの微視的状态と粗視化	83
5.1	$z_0 \in \mathbb{R}$ の LLM bubbling 幾何	83
5.1.1	$z_0 < 0$ または $z_0 > 1$ 領域がある場合	84
5.1.2	$0 < z_0 < 1$ 領域がある場合	84
	グレー円板と superstar 解	84
5.2	$0 \leq z_0 \leq 1$ の状態における LLM 対応	87
5.2.1	LLM 公式の有効範囲	87
5.2.2	相平面上での粗視化と系のエントロピー	87
	相平面上の微視的状态とその粗視化	87
	巨視的状态のエントロピー	88
5.2.3	分配関数の計算	89
	古典統計力学に基づく計算	89
	量子統計力学に基づく計算	90
5.3	分布関数と計量演算子	91
5.3.1	第 1 量子化形式と 1 粒子分布関数	92
	N 粒子波動関数と 1 粒子密度行列	92
	Wigner 分布関数	93
	伏見分布関数	94
5.3.2	第 2 量子化形式と計量演算子	95
	フェルミオン系の第 2 量子化	95
	計量演算子	96
	伏見分布関数との関係	97
	粗視化計量演算子	97
	「計量固有状態」の条件	98
5.4	LLM bubbling 幾何における fuzzball 予想	99
5.4.1	superstar の fuzzball 解	99
5.4.2	fuzzball 解と量子効果	99
5.5	まとめ	100
第 6 章	まとめと展望	102
	謝辞	104
	参考文献	105

第 1 章

はじめに

1.1 量子重力と超弦理論

現在の素粒子物理学における最大の課題のひとつに、量子論的な重力理論の構築がある。

古典的な場の作用を経路積分し、この過程で必然的に現れる紫外発散を繰り込みの方法で処理することによって場の量子論を構築する手法が、4次元のゲージ相互作用などに対しては成功を収めた。これに基づいて構成された素粒子物理学の標準模型は、現在に至っても実験事実との矛盾が殆ど確認されていない。

一方で重力は、結合定数が負の質量次元を持つという特徴のために繰り込みが不可能で、同様の方法は用いることができない。このために、古典一般相対性理論のストレートな量子化という形でのアプローチは困難をきわめる。それらの中では正準量子化形式（ループ量子重力理論）[1, 2] が最もよく研究されているが、理論の物理的な状態空間がまだ決定されていないなど、物理理論として意味を持つようになるまでに抱えている問題は数多い。

これに対して現在、量子重力の理論として最有力と目され、最もよく研究されているのが超弦理論 [3–6] である。超弦理論は理論の中に必然的に重力とその他多くの場を含み、低エネルギーでは 10 次元の超重重力理論として振る舞う。また弦（低エネルギーで場として振る舞う）の散乱では、弦の張力に相当する高エネルギー領域（ストリング・スケール）に自動的に紫外カットオフが現れ、発散を回避している。理論自体としては、自由に調整できるパラメータなどを持たず、非常に任意性の小さい理論であるという特徴を持つ。これらのことから超弦理論は、量子重力のみならず全ての場と相互作用を統一的に記述する理論の有力な候補とも考えられている。

超弦理論の定式はまだ摂動的なものしか確立されてはいないが、近年では超弦理論が

様々な双対性を持つことが見出され、その非摂動的な挙動も部分的にはあるが理解されるようになってきた。もちろんこれらは弦理論の量子重力理論としての性質を調べる上でも非常に重要であり、本稿の次章以降でも各所でその成果を利用する。

1.2 量子論とブラックホール

重力の量子論を具体的に構成しようとする試みがある一方で、より一般的な視点で量子重力の性質を論ずる研究もなされてきた。中でも特に明解かつ重要なのが、ブラックホールにまつわる種々の困難に関するものである。

1.2.1 エントロピーと微視的状态

ブラックホールに対する熱力学的な議論 [7–9] から、一般にブラックホールはそのホライズン面積 A_H に対して

$$S_{Bek} = \frac{A_H}{4G_N} \quad (1.1)$$

で表されるエントロピー S_{Bek} (Bekenstein-Hawking エントロピーと呼ばれる) を持つことが示されている。ここで G_N は重力定数である。

その一方で、古典一般相対論におけるブラックホールに対しては一意性定理と呼ばれる定理があり、例えば4次元のブラックホール解は質量・荷電・角運動量を定めれば一意的に決定される。つまり状態は巨視的な量のみで完全に決定され、微視的な自由度は持っていない。

これらを考え合わせると、一見して奇妙なことがわかる。通常、我々の知っているあらゆる系では、巨視的な系のエントロピーに対してボルツマンの関係式

$$S = \log W \quad (1.2)$$

が成立している。ここで W は与えられた巨視的状态に対応する微視的状态の数であり、有限のエントロピーを持つ系は必ず多くの微視的な自由度を持つことを表す。これは熱力学と統計力学の関係(熱力学第3法則)を表す基本的な関係式である。しかし古典ブラックホールの一意性定理は $W = 1$ を主張しており、有限面積のホライズンを持つ系ではボルツマンの関係式が成り立っていない。

この困難は、単に古典重力理論が微視的な自由度を無視してしまっていることに原因が

あり、量子重力理論においては

$$W_{BH} = \exp S_{Bek} \quad (1.3)$$

で表される個数の微視的な状態が存在すると考えれば回避される。逆にこれを信じるならば、正しい量子重力理論はブラックホールに対して、関係式 (1.3) を再現する統計力学を与えるものでなければならないことがわかる。

1.2.2 情報損失のパラドックス

より深刻なものとして、ブラックホールには情報損失のパラドックス [10] と呼ばれる問題がある。ブラックホールを通常の熱力学系として見れば、その温度 T_H (Hawking 温度) は

$$T_H = \left(\frac{\partial S_{Bek}}{\partial M} \right)^{-1} \quad (1.4)$$

によって定められる。有限の温度を持つ物体は一般にその温度から定まるプランク分布に従う黒体放射を行うが、ブラックホールもまた、あたかも温度 T_H の物体であるかのように放射 (Hawking 放射) [11] を行うことが知られている。

前述の通り、古典重力理論で考えたブラックホールは微視的な自由度を持たないので、Hawking 放射は一切の微視的な情報を持たず、完全に熱的である。しかしこれは、量子論の要請する時間発展のユニタリー性と矛盾するであろうことが以下のようにして示される。

いま、質量 M のブラックホールがあったとしよう。そこに質量 m の物体が落下してホライズン内部に吸い込まれると、ブラックホールの質量は $M + m$ となる。その後ブラックホールに落下するものがなければ、ブラックホールは Hawking 放射によってエネルギーを放出し、質量を減らしてゆく。それによって、ブラックホールの質量が再びちょうど M になった時点を考えよう。すると、もともとブラックホールに落ちていったのは一般に何らかの構造・情報を持った物体 (例えば辞書) であったものが、同じエネルギー m を持った完全に熱的な放射に変換されてしまったように見える。落ちていった辞書に何が書いてあるかが、ブラックホールから出てきた放射の状態には影響しない。これは量子論の状態として見れば、系全体の時間発展においてユニタリー性が破れていることを意味する。

いまは古典重力の場合を考えだが、では前項と同じように、量子的な微視的な状態の存在を考えればこの問題は解決されるだろうか。実はこちらの問題は前項よりももう少し複雑

である。ブラックホールの内部にいくら微視的な自由度があっても、Hawking 輻射が起こるのはホライズン表面である。するとやはり Hawking 輻射は微視的状態の情報を受け取ることができず、熱的輻射となる。先ほどと違い、辞書の情報はずっとブラックホールの微視的状態が保持しているからユニタリー性は壊れていないという可能性も考えられるが、これは不合理であることがすぐにわかる。この場合ブラックホールは、過去に落ち込んだ物体に関する情報を全て保持していなければならない。物体の投入と輻射を繰り返せばブラックホールは無限に多くの情報を保持しなければならないことになるが、ブラックホールのエントロピーは有限なのでこれは明らかに不可能である。

このように情報損失のパラドックスは、ブラックホールの量子論における微視的状態の存在だけでなく、その性質にまで踏み込まなければ解決することができない難問である。

1.3 弦理論における微視的状態とその粗視化

前節で述べたことから示唆される通り、重力の量子論を考えると、その効果はブラックホールを含む系で最も顕著に現れると考えられる。従って、弦理論によって量子重力を構成・理解しようとする立場からは、弦理論においてブラックホールがどのように記述され、どう振る舞うかを理解することが非常に重要になる。特に、微視的状態の構成とその基本的な性質を調べることは、最も基礎的かつ重要な事柄である。

しかし、その物理的な意味をより良く理解するためには、逆の問題も同時に考えなければならない。通常の統計力学系と同様に考えるなら、ブラックホールの微視的状態はそのアンサンブルの粗視化によって、巨視的状態としての古典的ブラックホールを再現するはずである。この粗視化はどのような形で行われ、どのような意味・解釈を持つであろうか。これはある意味で、上の問題と表裏の関係にある事柄とも言える。この問題について考えることは、より一般的に古典重力と量子重力の関係を考える際にも、有益な知見を提供することが期待される。

1.4 本修士論文の内容と構成

本修士論文では以上のような動機付けのもと、弦理論におけるブラックホールの微視的状態の構成とその性質、及びそれらの粗視化過程に関連する近年の研究の一部を紹介する。

まず第2章では、弦理論におけるブラックホールの微視的状態の構成と、それによる統計力学的エントロピーの計算について述べる [12, 13]。弦理論を用いたブラックホール

の理解は、特にこの 10 年あまり、弦理論の持つ種々の双対性の発見とその応用によって大きく進歩した。これはその中でも最初の大きな成果と呼べるものである。ここでは、D1-D5-P 系と呼ばれる最も単純なブラックホール（5 次元の Reissner-Nordström 型ブラックホールに相当する）を題材に、その超対称（BPS）な場合を取り扱う。これは (1.3) の関係を完全に再現し、弦理論が量子重力を正しく記述することの大きな示唆を与える。

第 3 章では、量子論的なブラックホールに対する新しい描像である fuzzball 予想を取り扱う。第 2 章の成果によって微視的状态とエントロピーの問題はひとまず解決されたと言えるが、前述の通り、これだけでは情報損失のパラドックスは解決されない。fuzzball 予想は、これを明快な形で解決する枠組みとして Mathur らによって提示されたものである。この予想によれば、微視的状态間の差異はホライズン半径程度の領域にまで大きく広がっており、それにより微視的状态の個々はホライズンを持たない。従って、弦理論に厳密な意味でのブラックホールは存在しない。これならば情報損失のパラドックスが回避されることも明らかである。このとき、準古典的に扱えるコヒーレント状態は、ホライズンも特異点も持たない滑らかな古典解で表現されるであろう。Mathur らは、それらにあたる一群の超重力解（fuzzball 解）を、5 次元 D1-D5 系ブラックホールに対して実際に構成した。これら微視的状态を表す解はいずれも遠方では D1-D5 ブラックホール解と一致しており、微視的状态間の差異が大きくなる領域の境界面がホライズンにあたると考えられる。実際、これに基づいて求めた Bekenstein エントロピーは、統計力学的エントロピーと少なくともオーダー上は等しい。この結果は、ホライズンは微視的状态を粗視化した結果として見掛け上生ずるという予想を強く支持する。

第 4 章では、第 5 章への準備として、AdS/CFT 対応 [14–17] と、AdS/CFT 対応における状態間の具体的な対応を表す LLM bubbling 幾何について説明する。AdS/CFT 対応は、AdS 時空を背景とする超弦理論/M 理論と、その共形境界上で定義される共形ゲージ理論（CFT）との等価性を主張する予想である。ここでは特に、 $AdS_5 \times S^5$ 上の IIB 型超弦理論と 4 次元 $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論との対応に絞り、その概要を述べる。この対応においては、CFT 側の状態と、AdS 側で準古典近似が良い場合の古典解との対応関係が、最も超対称性の高い 1/2 BPS のセクターに限ってはあなが、Lin-Lunin-Maldacena [18] によって具体的に予想されている。ここではその概要と、古典解が特異点を持たないための条件などについて述べる。

第 5 章では、第 4 章で説明した LLM 対応を用い、準古典的な状態とその粗視化について議論する。LLM 対応において superstar 解など特異点を持つ幾何を考えると、そのような状態は多くの微視的状态の粗視化として表現され、エントロピーを持っている。逆に、微細な構造を持たない純粋状態は滑らかな解にほぼ対応する [19, 20]。このことは、

fuzzball 描像の少なくとも一部と非常によく合致している。さらに、この対応において状態を特徴づける分布関数や計量演算子を導入し、その性質を述べる。章の最後では、この系のブラックホールにおける fuzzball 描像や fuzzball 解について議論し、その意義や可能性を検討する。

最後に第 6 章で、これまでの議論を総括するとともに、今後の発展の展望について述べる。

第2章

弦理論におけるブラックホールのエントロピー

弦理論では、ブラックホールは基本弦や D ブレーンなどの束縛状態として表現される。特殊な場合には、そのような束縛状態にあるブレーンの微視的状态を弦の振動や D ブレーン上の開弦励起として同定し、それらを数え上げることによってブラックホールの統計力学的エントロピー S_{micro} を計算することができる [12, 13]。これが実際に成功しているのは BPS 状態およびその近傍に限られるが、その結果は熱力学的な Bekenstein-Hawking エントロピー S_{Bek} を係数まで完全に再現するなどめざましいものである。本章では、この方法および結果の概要について述べる。

2.1 弦理論におけるブラックホールと微視的状态

エントロピー問題や情報損失のパラドックスなど、ブラックホールに関わる問題は、古典ブラックホールが非自明な微視的状态を持たないことが原因のひとつである。これは古典重力理論を考えるから微視的状态の自由度が失われているのであり、量子論つまり弦理論で考えれば微視的状态が存在するのではないかと期待される。

弦理論、特にここでは II 型超弦理論で、ブラックホールはどのように表現されるか考えよう。II 型超弦理論には、基本弦 (NS1-brane) のほか種々のソリトンのブレーン (NS5-brane、Dp-brane) が存在する。II 型超弦理論は低エネルギーでは 10 次元 II 型超

重力理論で近似され、これらの各種ブレーンはそれぞれに対応するブラックブレーン解として表現される。ここで 10 次元のうち空間方向の $10 - d$ 次元 ($4 \leq d \leq 9$) を適当な多様体 \mathcal{M}^{10-d} でコンパクト化し、 \mathcal{M}^{10-d} に p -brane ($p \leq 10 - d$) を巻き付ける。すると広がった d 次元側からはこれは点状に見え、従ってブラックホールとなることがわかる。

\mathcal{M}^{10-d} コンパクト化された 10 次元超重力理論は低エネルギーで d 次元の超重力理論になるから、 d 次元超重力理論におけるブラックホールが II 型超弦理論のブレーン配位によって構成されたことになる。このとき、 d 次元側で見えるブラックホールの荷電の種類は、 \mathcal{M}^{10-d} に巻き付いているブレーンの種類や巻き付きの向き、または \mathcal{M}^{10-d} 内の Kaluza-Klein 運動量に対応している。 d 次元で複数の荷電を持つブラックホールならば、弦理論では複数のブレーンや Kaluza-Klein 運動量からなる束縛状態である。

よって、このようなブラックホールを表す巨視的な量は、弦理論で見れば各種ブレーンの枚数（巻き付き数）や総運動量、エネルギーなどである。これらの量の固有状態が一般には高度に縮退しているのは明らかであるから、一つの巨視的な状態に対応する多数の微視的状态が、弦理論で考えたブラックホールには確かに存在していることがわかる。

このような微視的状态が確かにブラックホールの熱力学的エントロピー S_{Bek} を説明づけるものかどうか見るために、以下では巨視的状态に対応する微視的状态群を同定して数え上げ、統計力学的エントロピー S_{micro} を実際に計算することを考えよう。

2.2 弱結合極限と BPS 状態

S_{micro} の計算は、上述のように微視的状态、つまり巨視的観測量の固有空間の基底を同定して数え上げる操作である。しかし一般に、相互作用のある系でこのような状態の完全系を構成するのは非常に難しい。またそもそも、ソリトンなども含めたブラックホールの系を完全に記述する理論（例えば閉弦の場の理論のようなもの）を現時点で我々は持っていない。

ここで仮に相互作用がなければ問題は非常に簡単になるので、弱結合極限（結合定数 $g_s \rightarrow 0$ ）の理論であれば実際に扱えそうである。しかし本来の理論（真空）では g_s は有限なので、 $g_s \rightarrow 0$ で状態を構成したとしても、今度はそれと g_s 有限の理論における状態との対応関係を考えなければならない。 g_s の値を 0 から増加させていったとき、各状態、例えば直交基底は、それぞれ互いに直交関係を保ったまま連続的に遷移することが通常期待される。しかし各状態のエネルギーは g_s の値に依存して変化し、その依存性は状態ごとに異なっている。従って、 $g_s \rightarrow 0$ では同じエネルギー固有値に対応する微視的状态でも、 g_s を本来の値まで動かすとそれらはそれぞれ異なるエネルギー期待値を持つものに

なってしまう、同じ巨視状態に対応するものではなくなってしまう。

ただ BPS 状態ならば、エネルギーは超対称性代数から荷電のみで決定されていて、結合定数の値によらない。また g_s の値によらず、BPS 状態は必ず最低エネルギー状態となっているので、巨視的にも BPS 状態と非 BPS 状態は区別できる。従って、 $g_s \rightarrow 0$ の BPS 状態の完全系は g_s を有限にしてもやはり BPS 状態の完全系に対応しており、巨視的な BPS 系の微視的状态数は $g_s \rightarrow 0$ として数えても正しい数を与えることがわかる。

以上から BPS 状態に限れば、 $g_s \rightarrow 0$ 極限を考えることで微視的状态の構成と S_{micro} の計算を実際に行えることが期待できる。そこで以下では単純な BPS ブラックホールを例にとり、その具体的な方法について見ていく。

2.3 考察する系：D1-D5-P 系

2.3.1 古典解と Bekenstein エントロピー

ここでは最も単純な系として、5次元 $\mathcal{N} = 4$ 超重力理論での Reissner-Nordström 型ブラックホールに相当する系を考察の対象とする。5次元 $\mathcal{N} = 4$ 超重力理論は 10次元 II 型超重力理論（ここでは IIB 型とする）の T^5 コンパクト化で得られ、ブラックホールはその T^5 に巻き付いたブレーンまたは Kaluza-Klein 運動量の束縛状態である。

その中でも、ここでは D1-D5-P 系と呼ばれる次の解（ここでは特に BPS 状態の解）を考えよう。

$$ds_{string}^2 = H_1^{-\frac{1}{2}} H_5^{-\frac{1}{2}} (-dt^2 + dx_9^2 + K(dt - dx_9)^2) + H_1^{\frac{1}{2}} H_5^{\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^4 dx_i^2 + H_1^{\frac{1}{2}} H_5^{-\frac{1}{2}} \sum_{a=5}^8 dx_a^2 \quad (2.1a)$$

$$e^{-2\phi} = H_1^{-1} H_5 \quad (2.1b)$$

$$C_{09} = \frac{1}{2}(H_1^{-1} - 1) \quad (2.1c)$$

$$G_{ijk} = (dC)_{ijk} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijkl} \partial_l H_5 \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3, 4) \quad (2.1d)$$

$$H_1 = 1 + \frac{Q_1}{r^2} \quad (2.1e)$$

$$H_5 = 1 + \frac{Q_5}{r^2} \quad (2.1f)$$

$$K = \frac{Q_p}{r^2} \quad (2.1g)$$

ここで $(x_5, x_6, x_7, x_8, x_9)$ がコンパクト化された内部空間 T^5 の座標で、これらの境界条

件を $x_a \simeq x_a + 2\pi R_a$ ($a = 5, \dots, 9$) とする。後の便宜のため $R \equiv R_9$, $V \equiv R_5 R_6 R_7 R_8$ とし、また x_9 を y , (x_5, x_6, x_7, x_8) を (z_1, z_2, z_3, z_4) と呼ぶことにしよう。 r はコンパクト化されていない空間方向 $\vec{x} \equiv (x_1, x_2, x_3, x_4)$ の動径 ($r^2 \equiv \sum_{i=1}^4 x_i^2$) である。

この系は $\vec{x} = 0$ で T^5 に巻き付いた D5 プレーンと x_9 方向に巻き付いた D1 プレーン、及び x_9 方向の Kaluza-Klein 運動量による束縛状態である。このうち D1 プレーン及び運動量は、それらに垂直なコンパクト空間 T^4 内で一様に分布している。前述のように、これらは低エネルギーで 5 次元の理論として見たときにはそれぞれが別種の U(1) 荷電として振る舞い、例えばこの D1 プレーンに対しては C_{9i} が 5 次元で見た U(1) ゲージ場となる。この系ではそれが 3 種類あり、そのような系は総称して 3 荷電系と呼ばれる。また、この系は $r \rightarrow 0$ にホライズンを持つ。ホライズン内部が潰れて見えるのは単に座標系の問題で、後述のようにホライズン面積は有限である。

系の構成を図式的に表すと表 2.1 のようになる。各段の左端はそれぞれのチャージ (プレーンまたは運動量) の種類であり、各プレーンに平行な方向を \circ 、垂直な方向を $-$ で表す (0 は時間方向である)。運動量については、10 次元運動量ベクトルが成分を持つ方向を \circ 、その他を $-$ とした。

IIB	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D1	\circ	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	\circ
D5	\circ	$-$	$-$	$-$	$-$	\circ	\circ	\circ	\circ	\circ
P	\circ	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	\circ

表 2.1 D1-D5-P 系の構成

3 荷電系を考えるのは、これが BPS で有限面積のホライズンを持つ最も単純な系だからである。 $S_{Bek} = 0$ となるような系では、 S_{micro} が計算できたとしても S_{Bek} との非自明な比較をすることができない。一般にプレーンが存在すると、時空はプレーンに平行な方向には張力によって縮み、垂直な方向にはプレーンが持つ荷電からのフラックスにより引き伸ばされる。また、Kaluza-Klein 運動量がある場合にもその方向は引き伸ばされる。D1-D5-P 系ではそれらの作用がコンパクト化空間 T^5 内ですべてちょうどつり合っ、 $r \rightarrow 0$ における T^5 の大きさが有限に保たれている。これよりも荷電の種類が少ない場合を考えると、例えば 2 荷電の D1-D5 系では x_5, \dots, x_8 方向は D5 プレーンが縮む効果と D1 プレーンにより引き伸ばされる効果が相殺して安定しているが、 x_9 方向は D1 プレーンと D5 プレーン双方の張力が作用するのみなので、この方向が潰れてしまうことになる。なお 5 次元系を考えているのも同じ理由によるもので、例えば 4 次元のブラック

ホールを 10 次元の T^6 コンパクト化で構成すると、BPS で有限面積のホライズンを持つためには 4 荷電が必要なことが確かめられる [21]。

この系のエネルギーおよびホライズン面積を求めよう。(2.1a)(2.1b) から、ディラトンの寄与を吸収させた Einstein 計量 $ds_E^2 \equiv e^{-\frac{\phi}{2}} ds_{string}^2$ は

$$ds_E^2 = H_1^{-\frac{3}{4}} H_5^{-\frac{1}{4}} (-dt^2 + dx_9^2 + K(dt - dx_9)^2) + H_1^{\frac{1}{4}} H_5^{\frac{3}{4}} \sum_{i=1}^4 dx_i^2 + H_1^{\frac{1}{4}} H_5^{-\frac{1}{4}} \sum_{a=5}^8 dx_a^2 \quad (2.2)$$

である。この解は漸近平坦な定常解だから ADM エネルギー E は容易に計算できて

$$E = \frac{4\pi^5 RV}{G_N^{(10)}} (Q_1 + Q_5 + Q_p) \quad (2.3)$$

となる。また、(2.2) で時間一定面 ($dt = 0$) をとれば

$$ds_E^2 = H_1^{-\frac{3}{4}} H_5^{-\frac{1}{4}} (K + 1) dx_9^2 + H_1^{\frac{1}{4}} H_5^{\frac{3}{4}} \sum_{i=1}^4 dx_i^2 + H_1^{\frac{1}{4}} H_5^{-\frac{1}{4}} \sum_{a=5}^8 dx_a^2 \quad (2.4)$$

となり、ホライズンはこの 9 次元空間 ($\mathbb{R}^4 \times S^1 \times T^4$) 内の 8 次元面 ($S^3 \times S^1 \times T^4$) で $r \rightarrow 0$ 極限をとったものである。従ってその面積 $A_H^{(10)}$ は

$$A_H^{(10)} = \lim_{r \rightarrow 0} \{A_{S^3} \times L_{S^1} \times V_{T^4}\} \quad (2.5)$$

で表される。ここで A_{S^3} , L_{S^1} , V_{T^4} はそれぞれ、 \mathbb{R}^4 ($= x_i$ 方向) 内の球面の面積、 S^1 ($= y$ 方向) の長さ、 T^4 ($= z_a$ 方向) の体積を表す。これらは (2.4) からただちに

$$A_{S^3} = 2\pi^2 r^3 \cdot H_1^{\frac{3}{8}} H_5^{\frac{9}{8}} \quad (2.6a)$$

$$L_{S^1} = 2\pi R \cdot H_1^{-\frac{3}{8}} H_5^{-\frac{1}{8}} \sqrt{K+1} \quad (2.6b)$$

$$V_{T^4} = (2\pi)^4 V \cdot H_1^{\frac{1}{2}} H_5^{-\frac{1}{2}} \quad (2.6c)$$

と求められるので、

$$\begin{aligned} A_H^{(10)} &= \lim_{r \rightarrow 0} 2^6 \pi^7 RV r^3 \cdot \sqrt{H_1 H_5 (K+1)} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} 2^6 \pi^7 RV r^3 \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{Q_1}{r^2}\right) \left(1 + \frac{Q_5}{r^2}\right) \left(1 + \frac{Q_p}{r^2}\right)} \\ &= 2^6 \pi^7 RV \sqrt{Q_1 Q_5 Q_p} \end{aligned} \quad (2.7)$$

または 5 次元の系として見れば

$$\begin{aligned} A_H^{(5)} &= \frac{A_H^{(10)}}{2\pi R(2\pi)^4 V} \\ &= 2\pi^2 \sqrt{Q_1 Q_5 Q_p} \end{aligned} \quad (2.8)$$

となり、いずれも確かに有限の面積を持つ。

最後に Bekenstein-Hawking の公式から、この系の熱力学的エントロピーは

$$\begin{aligned} S_{Bek} &= \frac{A_H^{(10)}}{4G_N^{(10)}} \\ &= \frac{2^4 \pi^7 R V \sqrt{Q_1 Q_5 Q_p}}{G_N^{(10)}} \end{aligned} \quad (2.9a)$$

$$= \frac{\pi^2 \sqrt{Q_1 Q_5 Q_p}}{2G_N^{(5)}} \quad (2.9b)$$

(ここで重力定数の間には $G_N^{(5)} = \frac{G_N^{(10)}}{2\pi R(2\pi)^4 V}$ の関係がある) と求められる。

2.3.2 弦理論でみた D1-D5-P 系

$g_s \rightarrow 0$ の IIB 型超弦理論で、古典解 (2.1) に対応する状態を考えよう。まず、弦理論の低エネルギー有効理論として現れる超重力理論の重力定数は弦理論側のパラメータを用いて

$$G_N^{(10)} = 8\pi^6 g_s^2 \alpha'^4 \quad (2.10)$$

と表される。弦理論ではブレーン 1 枚あたりの張力はブレーンの種類ごとに決定されているので、 Q_1, Q_5 はそれによって量子化される。また、Kaluza-Klein 運動量は境界条件から $P_9 = \frac{1}{2\pi R} \times n$ ($n \in \mathbb{Z}$) でなければならない。これらにより、(2.1) 中の荷電 Q_1, Q_5, Q_p は、それぞれ整数 n_1, n_5, n_p を用いて

$$Q_1 = q_1 n_1, \quad q_1 = \frac{g_s \alpha'^3}{V} \quad (2.11a)$$

$$Q_5 = q_5 n_5, \quad q_5 = g_s \alpha' \quad (2.11b)$$

$$Q_p = q_p n_p, \quad q_p = \frac{g_s^2 \alpha'^4}{V R^2} \quad (2.11c)$$

のように表される。いま、コンパクト化半径 R_a はいずれも巨視的に見れば小さいが、 l_s よりは十分大きい ($R_a \gg l_s = \sqrt{\alpha'}$) ものとしよう。すると量子化単位 q_1, q_5, q_p はいず

れも $\lesssim \alpha'$ なので、 Q_1, Q_5, Q_p がマクロな大きさを持つならば

$$n_1, n_5, n_p \gg 1 \tag{2.12}$$

である。また、(2.10)(2.11) を用いると (2.3)(2.9) はそれぞれ

$$E = \frac{R}{2\pi g_s \alpha'} n_1 + \frac{RV}{2\pi g_s \alpha'^3} n_5 + \frac{1}{2\pi R} n_p \tag{2.13}$$

$$S_{Bek} = 2\pi \sqrt{n_1 n_5 n_p} \tag{2.14}$$

となり、特にエントロピーは連続パラメータによらない形で離散化されていることがわかる。

系の描像としては、内部空間 T^5 の全体に D5 プレーンが n_5 回、 T^5 のうち x_9 方向に D1-brane が n_1 回巻きつき、 x_9 方向に運動量 $\frac{1}{2\pi R} \times n_p$ を持つような配位ととらえられる (図 2.1)。BPS 状態ではエネルギーが (n_1, n_5, n_p) で決められる最小値でなければならないことから、逆向きに巻き付いたプレーン (反プレーン) などは存在できない。

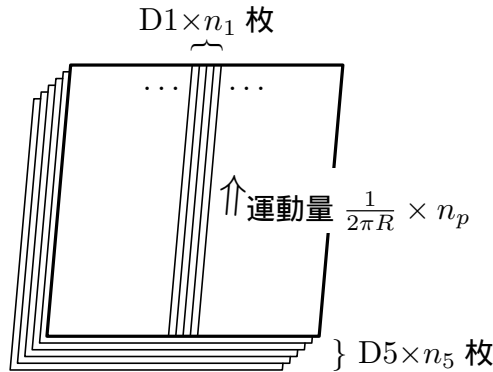


図 2.1 弦理論での D1-D5-P 系

2.3.3 U 双対変換と系の対称性

D1-D5-P 系の熱力学的エントロピー S_{Bek} の表式 (2.14) は n_1, n_5, n_p について対称な形をしているが、これは弦理論および、その低エネルギー極限である超重力理論が持つ双対性 (U 双対性) から要請される条件でもある。U 双対性は S 双対性と T 双対性を合わせた概念で、S 変換及び T 変換によって結ばれる弦理論及びその状態が互いに等価であることを主張する。本項では、D1-D5-P 系がそれら双対変換によってどのように変換されるかをみよう。

まず D1-D5-P 系に対して S 変換を作用させると、理論は IIB 型理論のまま (パラメータは変更される) NS-NS 場と R-R 場が入れ換えられて、系は NS1-NS5-P 系となる。従ってこれら 2 つの系は等価であり、エントロピーも等しいことがわかる。

IIB	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D1	○	-	-	-	-	-	-	-	-	○
D5	○	-	-	-	-	○	○	○	○	○
P	○	-	-	-	-	-	-	-	-	○

 \xrightarrow{S}

IIB	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
NS1	○	-	-	-	-	-	-	-	-	○
NS5	○	-	-	-	-	○	○	○	○	○
P	○	-	-	-	-	-	-	-	-	○

さらにこの IIB 型理論の NS1-NS5-P 系は、 x_9 以外のコンパクト方向 (ここでは x_6 としよう) に対する T 変換で、荷電は NS1-NS5-P で不変のまま理論は IIA 型理論となる。これにさらに x_9 方向の T 変換を施すと再び IIB 理論に戻り、状態は NS1 荷電と P 荷電が入れ換えられて P-NS5-NS1 系となる。これにさらに S 変換を施すと IIB 型理論の P-D5-D1 系となり、最初の系に対して P 荷電と D1 荷電の数が交換された形になる。

IIB	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
NS1	○	-	-	-	-	-	-	-	-	○
NS5	○	-	-	-	-	○	○	○	○	○
P	○	-	-	-	-	-	-	-	-	○

 $\xrightarrow{T_6}$

IIA	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
NS1	○	-	-	-	-	-	-	-	-	○
NS5	○	-	-	-	-	○	○	○	○	○
P	○	-	-	-	-	-	-	-	-	○

IIB	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P	○	-	-	-	-	-	-	-	-	○
NS5	○	-	-	-	-	○	○	○	○	○
NS1	○	-	-	-	-	-	-	-	-	○

 $\xrightarrow{T_9}$

IIB	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P	○	-	-	-	-	-	-	-	-	○
D5	○	-	-	-	-	○	○	○	○	○
D1	○	-	-	-	-	-	-	-	-	○

 \xrightarrow{S}

このとき、結合定数 g_s やコンパクト化半径は最初の理論から変化しているが、それらは BPS 状態の弦理論における縮退度、すなわちエントロピー S_{micro} には影響しないはずである。従って、 S_{micro} の表式は n_1 と n_p の入れ換えに対して不変でなければならない。

また、最初の D1-D5-P 系から x_5, x_6, x_7, x_8 方向に順に T 変換を計 4 回施すと、D1 は $D1 \rightarrow D2 \rightarrow D3 \rightarrow D4 \rightarrow D5$ に、D5 は $D5 \rightarrow D4 \rightarrow D3 \rightarrow D2 \rightarrow D1$ となり、P は変わらないので結局 IIB 型理論の D5-D1-P 系となって、今度は D1 荷電と D5 荷電が交換された形になる。

IIB	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D1	○	-	-	-	-	-	-	-	-	○
D5	○	-	-	-	-	○	○	○	○	○
P	○	-	-	-	-	-	-	-	-	○

$$\xrightarrow{T_8 T_7 T_6 T_5}$$

IIB	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D5	○	-	-	-	-	○	○	○	○	○
D1	○	-	-	-	-	-	-	-	-	○
P	○	-	-	-	-	-	-	-	-	○

よって、同様の議論から S_{micro} は n_5 と n_1 の入れ換えに対しても対称でなければならない。以上により、弦理論における D1-D5-P 系ブラックホールの統計力学的エントロピー S_{micro} の表式には、 n_1, n_5, n_p の任意の入れ換えに対する対称性が確かに要請される。上述の通り S_{Bek} はこれを満たしているから、もしも $S_{micro} = S_{Bek}$ となれば双対性の観点からも矛盾がない。また逆に、この双対関係は弦理論で S_{micro} を計算・評価し、またはその正誤をチェックする際などにも様々に利用することができる。

2.4 微視的状態の構成とエントロピー計算

2.3 項で見た D1-D5-P 系の統計力学的エントロピー S_{micro} を、D プレーンの微視的な自由度を考えることによって計算しよう。そのためには、2.2 項で述べた手法によってこの状態空間の適当な基底を構成し、その数を数え上げればよい。

それを実行する主な方法または描像には、次のように複数のものがある。

1. D5 プレーン上の場の理論による計算。D5 プレーンのみを背景として設置すると、D1 プレーンは D5 プレーン上の 4 次元ユークリッド部分空間 (x_5, x_6, x_7, x_8) におけるインスタントンとみることができる。従って、場の (x_5, x_6, x_7, x_8) 方向依存性でインスタントン数 n_1 、 (t, x_9) 方向依存性により運動量 $\frac{n_p}{2\pi R}$ を持つような状態数を数え上げる。
2. D1 プレーン上の場の理論による計算。D1 及び D5 プレーンの両方を背景として設置すると、系の状態はそれらの上の開弦励起を表す 2 次元の場の理論によって、1. の場合とは異なり摂動的に記述できる。その際、運動量 $\frac{n_p}{2\pi R}$ を持つ状態数を数え上げるための近似計算の方法として、主なものが 2 つ挙げられる。
 - (a) D1 及び D5 プレーンが全て巻き付き数 1 つずつで分かれている配位の状態数を評価する。
 - (b) D1 及び D5 プレーンがそれぞれ大きな巻き付き数を持って 1 枚につながっている配位の状態数を評価する。

歴史的には、 S_{micro} の計算に最初に成功した Strominger-Vafa 論文 [12] では若干異なる系で 1. に相当する方法が用いられ、直後に Callan-Maldacena [13] が、より簡便で応用

の容易な 2a. を提案した。2b. はその改良である [22]。以下ではこれらの方法について、それぞれ順に説明する。

2.4.1 D5 プレーンを背景とする描像

まずここでは、1. の描像に基づいた方法を述べる。 n_5 枚重なった D5 プレーンが背景として存在していると考えよう。この系の状態は D5 プレーン上に励起される開弦の自由度によって記述され、その低エネルギー有効作用は 6 次元 $\mathcal{N} = 2$ の超対称性（超対称電荷は 16 個）を持つ $SU(n_5)$ Yang-Mills 理論となる。ただし、これは通常の超対称 Yang-Mills 作用項に加えて、Ramond-Ramond 背景場と結合する Chern-Simons 項を含んでいる [23, 24]。特に、R-R 2-form $C_{\mu\nu}^{(2)}$ との結合項（ボソン部分） $S_{CS}^{(RR2)}$ は

$$S_{CS}^{(RR2)} \propto \int_{(t,y,z^4)} C^{(2)} \wedge \text{Tr}(F \wedge F) \quad (2.15)$$

の形をしている。ここで $\int_{z^4} \text{Tr}(F \wedge F)$ は T^4 上のインスタントン数を表す位相項なので、 T^4 上のインスタントンは R-R 場 $C_{09}^{(2)}$ と結合することがわかる。これはつまり、それが実は y (S^1) 方向の D1 プレーンであるということに他ならない。ここでは割愛するが、この荷電の量子化単位も確かに両者で一致していることが確かめられる。

従って、まずは T^4 上の 4 次元ユークリッド $\mathcal{N} = 4$ 超対称 $SU(n_5)$ Yang-Mills 理論において、そのインスタントン数が n_1 であるようなセクターを考える必要がある。このような配位のモジュライ空間 \mathcal{M} の構造は非自明であるが、次元だけであれば \mathbb{R}^4 上の場合と同じと考えられる。よってインスタントンの ADHM 構成法 [25] を用いて、対応する ADHM データの自由度を数えることで

$$\dim \mathcal{M} = 4n_1 n_5 \quad (2.16)$$

と求められる [26]。

T^4 方向の自由度は \mathcal{M} によって尽くされるから、残る自由度は (t, y) 方向の 2 次元の場の理論として考えることができる。すると 2 次元側の有効作用は \mathcal{M} に値をとる場の理論（ σ 模型）となり、 $\dim \mathcal{M}$ が無質量ボソン場の数を表す。超対称性から、無質量フェルミオン場も同数が存在することがわかる。特に $g_s \rightarrow 0$ を考えると、全ての場が無質量自由場となるから、この理論は 2 次元の CFT になる。良く知られているように、そのセントラルチャージ c はボソンとフェルミオンの自由度 f_B, f_F を用いて

$$c = f_B + \frac{1}{2} f_F \quad (2.17)$$

と表され、これを上の結果と合わせると

$$\begin{aligned} c &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) \dim \mathcal{M} \\ &= 6n_1 n_5 \end{aligned} \quad (2.18)$$

となることがわかる。

数え上げるべきは、この 2 次元 CFT で y 方向の運動量 $\frac{n_p}{2\pi R}$ を持ち、かつ BPS であるような状態の数である。BPS の要請から、励起される場は運動量を持つために必要な最小限でなければならない。 y 方向の境界条件により場の励起は運動量 $\frac{1}{2\pi R}$ を単位に量子化されているので、この系が持っている量子数は n_p である。よって、運動量の方向を左向きとして左向き場がレベル n_p 、右向き場がレベル 0 にあるような状態を数えればよいことになる。

このような状態数を $d(n_p)$ とすると、 $n_p \gg c$ の場合にはこれに対して Cardy の漸近公式 [27]

$$d(n_p) \sim \exp\left(2\pi\sqrt{\frac{n_p c}{6}}\right) \quad (2.19)$$

がそのまま適用できる。これと (2.18) から、エントロピー S_{micro} は

$$\begin{aligned} S_{micro} &= \log d(n_p) \\ &\approx 2\pi\sqrt{n_1 n_5 n_p} \end{aligned} \quad (2.20)$$

と求められる。

以上の計算について、その近似が適用できる条件を整理しよう。用いた条件のうちで重要なものは 2 つある。まず 1 つ目に、微視的状态の構成は D5 ブレーン上で、その低エネルギー有効作用を用いて行った。それが有効なのは、D5 ブレーン上の場が持つエネルギー、つまり D1 ブレーン及び Kaluza-Klein 運動量の寄与によるエネルギーが、D5 ブレーン自身のエネルギーに対して十分小さい場合に限られる。(2.13) の各項が順に D1、D5、P の寄与によるエネルギーをそれぞれ表しているから、この条件は

$$\frac{RV}{2\pi g_s \alpha'^3} n_5 \gg \frac{R}{2\pi g_s \alpha'} n_1 + \frac{1}{2\pi R} n_p \quad (2.21)$$

と表される。 $g_s \rightarrow 0$ で右辺第 2 項 (運動量) の寄与は無視できるので、

$$\frac{V}{\alpha'^2} \gg \frac{n_1}{n_5} \quad (2.22)$$

であればよい。ここで V は連続パラメータであり、これを動かしても直交する状態は直交関係を保ったまま遷移するはずである。従って、状態数の数え上げに限れば、実際よりも大きな V を持つ系で計算を行ってもその結果は正しい。よって、この条件は (n_1, n_5, n_p) の値によらず満たすことができ、この方法の適用範囲を制限しない。

2 つ目の条件は、Cardy の公式を適用する際に用いた $n_p \gg c$ である。これは (2.18) と合わせると

$$n_p \gg n_1 n_5 \quad (2.23)$$

となり、この方法が直接適用できる (n_1, n_5, n_p) の範囲を実際に制限することがわかる。ただし 2.3.3 項で述べた通り、U 双対性を用いると各荷電を任意に入れ換えることができるので、3 つの荷電数のうち 1 つが他の 2 つの積よりも十分に大きい、ということまで条件は緩和できる。しかし何れにせよこの条件は、荷電数相互の比を保ったまま全体を大きくするだけで成り立たなくなってしまうという特殊なものである。従って、大きなブラックホールを考える際にはあまり現実的な条件とは言えない。この点については次の 2. であらためて考察する。

2.4.2 D1-D5 を背景とする描像

次に 2. について考える。今度は、 n_5 枚の D5 ブレーンと n_1 枚の D1 ブレーンの両方が、背景として存在していると考えよう。1. の場合と同じく、このような背景上の低エネルギー有効理論は、これらブレーン上の開弦励起を表す場の理論によって記述される。この場合には開弦は

- (1,1) 弦 - D1 ブレーン同士を結ぶ弦
- (5,5) 弦 - D5 ブレーン同士を結ぶ弦
- (1,5) 弦および (5,1) 弦 - D1 ブレーンから D5 ブレーンにのびる弦、およびその逆

の 3 種類があり、それを反映して有効作用の形は

$$S^{D1D5} = \int dt dy \mathcal{L}_{YM}^{(1,1)} + \int dt dy dz^4 \mathcal{L}_{YM}^{(5,5)} + \int dt dy \mathcal{L}^{(1,5)} \quad (2.24)$$

のように書くことができる。

ここで (1,1) 弦はゲージ群 $SU(n_1)$ の随伴表現に属する D1 ブレーン上の 2 次元 $\mathcal{N} = (8, 8)$ ベクトル超場、同様に (5,5) 弦はゲージ群 $SU(n_5)$ の随伴表現に属する D5 ブレーン上の 6 次元 $\mathcal{N} = 2$ ベクトル超場に対応しており、 $\mathcal{L}_{YM}^{(1,1)}$ 及び $\mathcal{L}_{YM}^{(5,5)}$ がそれぞれの

超対称 Yang-Mills ラグランジアンである。一方、(1,5) 弦を表す場は $SU(n_1)$ について基本表現、 $SU(n_5)$ について反基本表現に属する D1 プレーン上の 2 次元 $\mathcal{N} = (4, 4)$ ハイパー超場で、 $\mathcal{L}_{YM}^{(1,5)}$ はその運動項からなるラグランジアンである。ただしこれはゲージ共変微分 $D_\mu = \partial_\mu + ig_1 A_\mu^{(1)} + ig_5 A_\mu^{(5)}$ を通じて、(1,1) 弦及び (5,5) 弦との相互作用を含んでいる。なお、(5,1) 弦は (1,5) 弦の場の共役によって表されるため、独立の自由度として考える必要はない。以後 (1,5) 弦と言う時は、特に断らない限り (5,1) 弦も含めて指すものとする。

いま考えたいのは y 方向に運動量を持つ BPS 状態だから、これらの場のうち少なくとももいづれかが、その運動量を担うために励起され、そのうちのスカラー場が期待値を持っていなければならない。そこで、同時に期待値を持てる場の組み合わせとしてはどのようなものが許されるかを考えよう。

まず、(1,5) 弦のスカラーが期待値を持つ場合を考える。するとこれは $SU(n_1), SU(n_5)$ の両方に対して Higgs 場として働くから、ゲージ対称性は全て破れる (Higgs 相)。このとき、ゲージ場である (1,1) 弦及び (5,5) 弦は全ての成分が質量を持つことになり、BPS セクターではそれらの励起は許されない。逆に (1,1) 弦または (5,5) 弦のスカラーが期待値を持てば、ゲージ対称性は $SU(n_1) \rightarrow U(1)^{n_1-1}$ 、または $SU(n_5) \rightarrow U(1)^{n_5-1}$ のように壊れる (Coulomb 相)。するとこのとき (1,1) 弦または (5,5) 弦は対角成分、つまり両端点を同じプレーン上に持つものだけが無質量で残り、他は質量を持つ。また (1,5) 弦は全成分が質量を持つ。まとめると、BPS 状態で同時に励起され期待値を持つことのできる開弦の組み合わせは以下の 2 通りである。

Higgs 相 (1,5) 弦すべて (両基本表現場の全成分)

Coulomb 相 両端を同じプレーン上に持つ (1,1) 弦及び (5,5) 弦 (随伴表現場の対角成分)

このうち Coulomb 相は、プレーンの配位として見れば各プレーンがそれぞれ背景位置から移動している状態を表すが、このような状態には問題がある。ここまでの議論はプレーンが広がった平坦な空間 ($\mathbb{R}^{9,1}$) に存在している場合の結果で、 T^5 コンパクト化の影響は考慮していなかった。実は、プレーンの空間方向が全てコンパクト化されている場合に限っては、平行に置かれた同種の D プレーンからなる系のエネルギーはその距離に依存する。従ってこの場合の (1,1) 弦や (5,5) 弦は実は無質量場ではなく、Coulomb 相に

相当する状態は BPS にならない [28]。よって、考えるべき状態は Higgs 相に限られる。^{*1} Higgs 相は、D1 プレーンと D5 プレーンが (1,5) 弦によって互いに結合している状態である。1. で構成した状態もこちらに相当し、Coulomb 相は最初から考慮されていない。よって以下では、この Higgs 相の状態数を数えてエントロピー S_{micro} を計算する。

2a. 巻き付き数 1 のプレーン配位

(1,5) 弦を表す場は前述の通り $SU(n_1) \times SU(n_5)$ の基本 \times 反基本表現に属するから、カラー成分数は $n_1 \times n_5$ である。さらに 2 次元 $\mathcal{N} = (4_L, 4_R)$ の超対称性があるので、左向き及び右向き場それぞれについて、ボソン場とフェルミオン場がともに $4n_1n_5$ 種類、つまり

$$f_B = f_F = 4n_1n_5 \quad (2.25)$$

となる。また運動量は $\frac{1}{2\pi R}$ を単位に量子化されるので、その量子数は n_p である。

すると以下は 1. の場合と全く同様に考えることができ、Cardy の公式を用いてエントロピー (2.20) が求められる。しかしここでは後の議論のために、今の系に沿った熱力学的な導出を若干詳しく見ておこう。

いま、この系で左向き (1,5) 弦を表す場の励起の一つ一つは、励起の種類 (場の成分) μ 及び振動数 (運動量が量子化単位 $\frac{1}{2\pi R w}$ の何倍かを表す整数値) k の組 (μ, k) によって表される。従って、それれによって構成される系の状態は、各モードの (1,5) 弦励起 (μ, k) の数 m_k^μ の組み合わせ $m = \{m_k^\mu\}$ でラベルされる。このとき m は条件

$$\sum_{\mu} \sum_{k=1}^{\infty} k m_k^\mu = n_p \quad (2.26)$$

を満たし、 μ がボソンのモードなら $m_k^\mu \geq 0$ 、フェルミオンのモードなら $m_k^\mu = 0$ or 1 であるような整数の組である。

(2.26) はエネルギー準位 $\{k\epsilon\}$ ($k \in \mathbb{N}$, $\epsilon = \frac{1}{2\pi R}$) を持ち、化学ポテンシャルが 0 であるような混合理想気体のミクロカノニカル分布 (エネルギー $E = n_p \epsilon$) と解釈できる。このとき μ は気体分子の種類に相当する。従って、1 つの自由度つまり気体分子 1 種類あたりに十分多数のエネルギー量子が配分される場合、すなわち

$$n_p \gg n_1 n_5 \quad (2.27)$$

^{*1} 逆に Coulomb 相が BPS になるような系、例えばいま考えている系から x_4 方向に T 双対変換を施した D2-D6-P ブラックストリング系などでは、Coulomb 相は束縛状態になっていないと言えるのでやはり考慮しなくても良い。なお、Coulomb 相で励起される場の数は $n_1 + n_5$ のオーダーなので、何も考えずに状態数だけを数えても Higgs 相の方が圧倒的に多い。

の場合には、これは

$$\langle E \rangle = n_p \epsilon \quad (2.28)$$

であるようなカノニカル分布と一致するとみなしてよい。カノニカル分布とみれば各開弦モード (μ, k) はすべて独立であり、系全体の分配関数 Z は各開弦モードの分配関数 Z_k^μ の積で与えられる。このとき Z_k^μ は容易に計算できて

$$Z_k^\mu = \begin{cases} \sum_{m_k^\mu=0}^{\infty} e^{-\beta\epsilon(m_k^\mu k)} = \frac{1}{1 - e^{-\beta\epsilon k}} & (\mu: \text{bosonic}) \\ \sum_{m_k^\mu=0}^1 e^{-\beta\epsilon(m_k^\mu k)} = 1 + e^{-\beta\epsilon k} & (\mu: \text{fermionic}) \end{cases} \quad (2.29)$$

となるので、

$$\begin{aligned} \log Z &= \sum_{\mu} \sum_{k=1}^{\infty} \log Z_k^\mu \\ &= -4n_1 n_5 \sum_{k=1}^{\infty} \log(1 - e^{-\beta\epsilon k}) + 4n_1 n_5 \sum_{k=1}^{\infty} \log(1 + e^{-\beta\epsilon k}) \\ &\approx -4n_1 n_5 \int_0^{\infty} dk \log(1 - e^{-\beta\epsilon k}) + 4n_1 n_5 \int_0^{\infty} dk \log(1 + e^{-\beta\epsilon k}) \\ &= 4n_1 n_5 \cdot \frac{1}{\beta\epsilon} \cdot \frac{\pi^2}{6} + 4n_1 n_5 \cdot \frac{1}{\beta\epsilon} \cdot \frac{\pi^2}{12} \\ &= \frac{\pi^2 n_1 n_5}{\beta\epsilon} \end{aligned} \quad (2.30)$$

と計算される。^{*2} これによりエネルギー期待値は

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z \approx \frac{\pi^2 n_1 n_5}{\beta^2 \epsilon} \quad (2.31)$$

^{*2} ここで3行目の近似が良いためには、積分のうち区間 $(0, 1]$ の寄与

$$I_{(0,1]}^{\pm} \equiv \int_0^1 dk \log(1 \pm e^{-\beta\epsilon k}) = \frac{1}{\beta\epsilon} \int_0^{\beta\epsilon} dk' \log(1 \pm e^{-k'})$$

が、全区間の積分値 $I_{(0,\infty)}^{\pm} \sim \frac{1}{\beta\epsilon}$ に比べて十分に小さければよい。従ってこの条件は $\beta\epsilon \ll 1$ と与えられる。(2.32) により $\beta\epsilon \approx \pi \sqrt{\frac{n_1 n_5}{n_p}}$ なので、(2.27) からこれは確かに成立していることがわかる。

であり、これを (2.28) と比較するとこの系の温度は

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2 n_1 n_5}{\beta^2 \epsilon} &\approx n_p \epsilon \\ \Leftrightarrow T = \frac{1}{\beta} &\approx \frac{\epsilon}{\pi} \sqrt{\frac{n_p}{n_1 n_5}} = \frac{1}{2\pi^2 R} \sqrt{\frac{n_p}{n_1 n_5}} \end{aligned} \quad (2.32)$$

となる。以上により結局、エントロピーは

$$\begin{aligned} S_{micro} &= \log Z + \beta \langle E \rangle \\ &\approx 2\pi \sqrt{n_1 n_5 n_p} \end{aligned} \quad (2.33)$$

と求められる。この結果を導くために課される条件 (2.27) も 2a. の場合と全く同じである。

ではここで (2.27) ではなく、より現実的な場合について考えてみよう。いま、 n_1, n_5, n_p が自然数 m_1, m_5, m_p, M を用いて

$$n_1 = m_1 M, \quad n_5 = m_5 M, \quad n_p = m_p M \quad (2.34)$$

と表され、かつ

$$M \gg m_1, m_5, m_p \quad (2.35)$$

であるとする。この場合、カノニカル分布を用いた上の近似は適用できないかわりに、別の近似を用いることができる。(2.26) において1つの自由度あたりに配分される平均エネルギー量子数を γ とすると、

$$\begin{aligned} \gamma &\sim \frac{n_p}{n_1 n_5} \\ &= \frac{m_p}{m_1 m_5} \cdot \frac{1}{M} \ll 1 \end{aligned} \quad (2.36)$$

である。すると各自由度に配分される量子数は高々1と考えて良く、ボソンとフェルミオンの差異は無視できて

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{n_p}{4n_1 n_5 \cdot 2} \\ &= \frac{m_p}{8m_1 m_5} \cdot \frac{1}{M} \end{aligned} \quad (2.37)$$

となる。このときこの系の状態空間は、 $N = 8n_1 n_5$ 個の自由度のうち任意の $n_p = \gamma N$ 個をレベル1ずつだけ励起させたものによって状態数の殆どが占められている。従って状態数 d は

$$d \approx_N C_{\gamma N} \quad (2.38)$$

とみなしてよく、対応するエントロピーは

$$\begin{aligned}
 S_{micro} &\approx \log(N C_{\gamma N}) \\
 &\approx N\{-\gamma \log \gamma - (1 - \gamma) \log(1 - \gamma)\} \\
 &\approx N\{-\gamma \log \gamma + (1 - \gamma)\gamma\} \\
 &\approx m_p M \log M
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

と求められる。これは (2.33) において $S_{micro} \sim M^{\frac{3}{2}}$ であるのに比べて小さい。しかしより重要なことに、この表式は n_1, n_5, n_p に関する対称性を破っている。このようなことは 2.3.3 項の議論から許されないはずで、ここに至るまでのどこかに間違いがあったことをこの結果は意味している。

2b. 大きな巻き付き数を持ったブレーン配位

上で (2.39) のような明らかに間違った結果が得られた理由を考えよう。1. 及び 2a. では、実は全ての自由度を数えているわけではない。これらの方法では、場の励起が持つ y 方向の運動量の量子化単位が境界条件から $\frac{1}{2\pi R}$ となることを自明のものとしていた。しかし、実はこれを満たさないような状態も存在することが以下のようにしてわかる。

2a. では、量子化条件の他はこの 2 次元理論が $\mathbb{R}^{1,1}$ 上のものであるのと全く同様に考えたため、今の $\mathbb{R} \times S^1$ に特徴的な事情が考慮されていない。一般に今のようにコンパクトな方向を持つゲージ場の理論では、ゲージ接続が非自明な位相を持つセクターが存在し、そのようなセクターにあっては実効的な境界条件の周期が、コンパクト化長さの 2 倍、3 倍... となる。

これは、コンパクト化方向に対する D ブレーンの巻き付き方と考えると直観的に容易に理解できる。一般にコンパクト化方向に D ブレーンを巻き付けるとき、1 枚のブレーンが複数回巻き付くことも可能である。このようなブレーン上の開弦励起を考えると、その境界周期がその巻き付き数の分だけ長くなっていることは明らかであろう。今考えている Higgs 相では励起される開弦は (1,5) 弦である。巻き付き数 w_1 の D1 ブレーンと巻き付き数 w_5 の D5 ブレーンとに端点を持つ (1,5) 弦は、片方の端点を実効的に $2\pi R w_1$ 、他方が $2\pi R w_5$ の境界周期を持つので、全体としては w を w_1, w_5 の最小公倍数として $2\pi R \times w$ を周期とした境界条件を持ち、従って運動量の量子化単位は $\frac{1}{2\pi R w}$ となる。

このように考えると、方法 2a. は、ゲージ接続が自明な位相を持つような配位、すなわち、D1 ブレーン及び D5 ブレーンがすべて巻き付き数 1 づつに分割されているような配位のみを考察の対象にしていたことがわかる。

以上を踏まえた上で、エントロピーの計算についてあらためて考えよう。まず、2a. で

考えていたのとは全く逆の状況、すなわち実効的な境界条件の周期が最長になるようなプレーンの配位を考えてみる。これは、巻き付き数 w_1^i と w_5^j の最小公倍数 w^{ij} の最大値 $\max_{(i,j)} w^{ij}$ が最大になる場合である。このためには、 $w_1 \leq n_1$ かつ $w_5 \leq n_5$ なる互いに素な (w_1, w_5) で、 $w = w_1 w_5$ が最大になるようなものを取り、巻き付き数 w_1 の D1 プレーン i_L と巻き付き数 w_5 の D5 プレーン j_L があるような配位をとればよい。すると $n_1, n_5 \gg 1$ から明らかに

$$w_1 \approx n_1, \quad w_5 \approx n_5, \quad w \approx n_1 n_5 \quad (2.40)$$

である。この上に励起される (1,5) 弦 ($[i_L, j_L]$ 弦) の持つ運動量の量子化単位は $\frac{1}{2\pi R w}$ であり、これは他の (1,5) 弦の持つ運動量の量子化単位よりも圧倒的に小さい。従って、全運動量 $\frac{n_p}{2\pi R}$ を $[i_L, j_L]$ 弦が担っている状態が数の上では圧倒的に多くなるので、エントロピーを議論する上ではそのような状態のみを考えれば十分である。つまり実質的に、大きな巻き付き数を持った D1 プレーン i_L と D5 プレーン j_L の各 1 枚のみが存在している状態とみなしてよい。このとき、運動量量子の総数 N は

$$\begin{aligned} N &= w n_p \\ &\approx n_1 n_5 n_p \end{aligned} \quad (2.41)$$

となる。2a. で考えたのと同様に、 $[i_L, j_L]$ 弦励起は励起の種類 (場の成分) μ 及び振動数 (運動量が量子化単位 $\frac{1}{2\pi R w}$ の何倍かを表す整数値) k の組 (μ, k) によって表される。このとき $\mathcal{N} = (4_L, 4_R)$ の超対称性から、左向き弦に対応する μ はボソンとフェルミオンが各 4 種、すなわち

$$f_B = f_F = 4 \quad (2.42)$$

となる。前述の通り、 $SU(n_1) \times SU(n_5)$ によるカラー自由度はここでは消滅していることに注意しよう。

すると、このセクターを記述する有効理論である 2 次元 CFT はセントラルチャージ

$$c = \frac{1}{2}(f_B + f_F) = 6 \quad (2.43)$$

を持つので、レベル N に対応するエントロピー $S^{(1,1)}$ は

$$\begin{aligned} S^{(1,1)} &\approx 2\pi \sqrt{\frac{Nc}{6}} \\ &\approx 2\pi \sqrt{n_1 n_5 n_p} \end{aligned} \quad (2.44)$$

と求められる。この場合は n_1, n_5, n_p 間の関係によらず $N \gg c$ なので、この近似は常に正しい。

また中間的なブレーンの分割配位、すなわち D1 ブレーンが巻き付き数 w_1 程度のブレーン s_1 枚 ($w_1 s_1 \approx n_1$)、D5 ブレーンが巻き付き数 w_5 程度のブレーン s_5 枚 ($w_5 s_5 \approx n_5$) に分割されているような配位も考えられる。これらをそれぞれ i ($= 1, \dots, s_1$), j ($= 1, \dots, s_5$) でラベルすると、 (i, j) の組が (1,5) 弦の実効的なカラー成分を表すことになり成分数は $s_1 s_5$ となるので、上と同様に

$$f_B = f_F = 4s_1 s_5 \quad (2.45)$$

である。また、それぞれの境界条件の実効的な周期 L_{ij} は $L_{ij} \approx 2\pi R w_1 w_5$ となり、従って運動量はおよそ $\frac{1}{2\pi R w_1 w_5}$ を単位に量子化されるから、量子数 N は $N \approx w_1 w_5 n_p$ となる。よってこのとき

$$w_1 w_5 n_p \gg s_1 s_5 \quad (2.46)$$

の成り立つ範囲であれば、再び Cardy の公式に $c \approx 6s_1 s_5$, $N \approx w_1 w_5 n_p$ を代入して、エントロピー $S^{(s_1, s_5)}$ は

$$\begin{aligned} S^{(s_1, s_5)} &\approx 2\pi \sqrt{w_1 s_1 w_5 s_5 n_p} \\ &\approx 2\pi \sqrt{n_1 n_5 n_p} \end{aligned} \quad (2.47)$$

となり、(2.44) と同じ値が得られる。なおここでの計算は最大の見積もりであって、ブレーンの分割の詳細によって一般にはエントロピーはこれよりも小さくなると考えられる。また (2.46) が成り立っていない場合であれば状況は (2.39) のときに近くなるので、この場合 $S^{(s_1, s_5)}$ はこれよりも小さい。

以上から、全てのブレーン配位 w を考慮したこの系の状態数 d^{total} は

$$\begin{aligned} d^{total} &\sim \sum_w \exp S^w \\ &\lesssim \sum_w \exp(2\pi \sqrt{n_1 n_5 n_p}) \end{aligned} \quad (2.48)$$

となるので、エントロピー S_{micro} は

$$S_{micro} \lesssim 2\pi \sqrt{n_1 n_5 n_p} + \log(\#\{w\}) \quad (2.49)$$

となる。ここで w の正しい数え方は自明ではないが、最大に見積もっても後述する D1-D5 系の状態数 (2.56) の程度である。よって

$$\log(\#\{w\}) \lesssim S_{micro}^{D1D5} \approx 2\sqrt{2}\pi \sqrt{n_1 n_5} \quad (2.50)$$

で、いま $n_p \gg 1$ なのでこれは $2\pi\sqrt{n_1 n_5 n_p}$ に比べて無視してよい。以上から結局、

$$S_{micro} \approx 2\pi\sqrt{n_1 n_5 n_p} \quad (2.51)$$

が再び得られる。これは (2.20)(2.33) と同じ形をしているが、それらと違い (2.12) の場合であれば常に正しい。またこれは熱力学的エントロピー (2.14) を係数まで含めて完全に再現しており、弦理論が無矛盾な量子重力を記述することに自信を与える著しい結果である。

2.4.3 各結果相互の関係について

以上の結果を整理しよう。まず、(2.20)(2.33) と (2.44) は同じ形を与えているが、両者で数えている状態群は互いに異なる D ブレーン配位に対応している。エントロピーを正しく計算するためには本来これら両者を含めた全ての状態群を (2.48) のように数え上げる必要があるが、それによって状態数に掛かる係数は (2.50) のように大して大きくない。従ってエントロピーの主要項を求める目的であれば、状態数が最大のオーダーであるような 1 つの D ブレーン配位だけに着目して計算すれば十分である。このとき、D ブレーンが大きな巻き付き数を持っているような配位であれば常に (2.44) を与えるのでその資格を満たしているが、D ブレーンが細かく分割されているような配位が資格を満たすのは (2.27) の場合に限られる。(2.39) が必要な対称性を満たさず、エントロピー表式として誤ったものを与えているのはこの理由によるものである。

最後に、このような 2b. の計算は、実は 1. の描像を用いた方がより精密な議論ができる。上ではインスタントン配位のモジュライ空間 \mathcal{M} の位相構造について、その次元 (2.16) 以上のことは考えなかったが、 n_1 と n_5 が互いに素な場合には

$$\mathcal{M} = \frac{(T^4)^{n_1 n_5}}{S_{n_1 n_5}} \quad (2.52)$$

(S_n は置換群) であると信じられている [29]。すると $\Phi(t, y) \in \mathcal{M}$ の y に関する境界条件は、 T^4 を単位とした $n_1 n_5$ 個の成分同士を任意に入れ換えた、捻れたものであってもよい。このとき、この境界における捻り方のそれぞれが、2b. の描像における D ブレーン配位に対応していることは明らかであろう。D1 ブレーン (インスタントン) 同士及び D5 ブレーン (カラー) 同士が区別できないことから $\mathcal{M} = (T^4)^{n_1 n_5} / S_{n_1} S_{n_5}$ のようになるであろうことまでは直観的に理解できるが、(2.52) はさらに D1 ブレーンと D5 ブレーンも実効的に区別できないかのように振る舞うと解釈できる点で非自明である。描像 2. の有効作用 (2.24) からこのことを理解するのは容易ではない。

2.5 $S_{micro} \neq S_{Bek}$ を与える系

2.4.2 項で、D1-D5-P 系など 3 荷電系では弦理論から導かれる S_{micro} が S_{Bek} を確かに再現していることをみた。ではここであらためて、D1-D5 などの 2 荷電系ではどうなっているかを考えてみよう。前述のようにそもそも 2 荷電系は古典解のホライズンが潰れており、熱力学的にエントロピーを持っていないということで余り興味のある対象ではなかった。しかし 3 荷電系で S_{micro} の計算が成功して S_{Bek} と一致することがわかってみると、今度は同様の計算を 2 荷電でも行い、それが確かにマクロな量と比較して十分小さいかを確かめるのも意味のあることである。

D1-D5 系の S_{Bek} は単に D1-D5-P 系の表式 (2.14) で $n_p = 0$ とすれば良いが、 S_{micro} については (2.51) は $n_p \gg 1$ を前提に導いた結果なので、 $n_p = 0$ の場合には適用できない。そこで、D1-D5-P 系と同様の手法によって D1-D5 系の S_{micro} を導こう。

前節で述べたことから、 $g_s \rightarrow 0$ で D1-D5 系を記述する有効理論は、(2.52) をターゲット空間とし、 $\mathcal{N} = (1, 1)$ の超対称性を課してフェルミオンを導入した 2 次元 CFT である。境界条件を考慮しなければ、このような理論は各自由度につき 1 つのフェルミオンの 0-mode を持っており、基底状態はこれによって縮退している。今の場合、 $S^1 \rightarrow \mathcal{M}$ の境界条件は総巻き付き数 $n_1 n_5$ を持つ有効ブレーンの分割に対応しており、1 つにつながったブレーンそれぞれについて、このような 0-mode が 4 つ存在していることになる。従って、ある巻き付き数を持つ有効ブレーンは $2^4 = 16$ 通りの状態をとり、そのうち 8 つがボソンの状態、8 つがフェルミオンの状態である。すると、この系全体の基底状態は、巻き付き数 w を持ち状態 μ にあるような有効ブレーンの数 $\{m_w^\mu\}$ の組み合わせ m によってラベルされ、これは

$$\sum_{\mu} \sum_{w=1}^{\infty} w m_w^\mu = n_1 n_5 \quad (2.53)$$

をみtas。前と同様、 μ がボソンの状態のとき $m_w^\mu \geq 0$ 、フェルミオンの状態のとき $m_w^\mu = 0$ or 1 である。このような m でラベルされる状態群のエントロピー S_{micro}^{D1D5} は

$$c = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot 8 = 12 \quad (2.54)$$

$$N = n_1 n_5 \quad (2.55)$$

として Cardy 公式に代入すればただちに求めることができ ($N \gg c$ は今の場合自明で

また、対応する古典解（NS1-P 解）は次のようなものである。

$$ds_{string}^2 = H^{-1}[-dt^2 + dx_9^2 + K(dt - dx_9)^2] + \sum_{i=1}^8 dx_i dx_i \quad (2.57a)$$

$$B_{09} = \frac{1}{2}[H^{-1} - 1] \quad (2.57b)$$

$$e^{-2\phi} = H \quad (2.57c)$$

$$H = 1 + \frac{Q'_1}{r^2} \quad (2.57d)$$

$$K = \frac{Q'_p}{r^2} \quad (2.57e)$$

$$Q'_1 = q'_1 n'_1, \quad q'_1 = \frac{g_s'^2 \alpha'^3}{V'} \quad (2.57f)$$

$$Q'_p = q'_p n'_p, \quad q'_p = \frac{g_s'^2 \alpha'^4}{V' R'^2} \quad (2.57g)$$

こうして得られた NS1-P 系は、 x_9 方向に n'_1 回巻き付いて運動量 $\frac{1}{2\pi R'} \times n'_p$ を持つ基本弦で、弦の振動がこの運動量を担っている。従ってこの系の微視的状态は、弦の分割パターン及び各振動モードへの運動量の分配パターンによって表される。するとこの系のエントロピー計算は D1-D5-P 系するとき 2b. で考えたのと同様に考えられ、基本弦が全て 1 本につながって巻き付き数 n'_1 を持っているような配位のみ考えればエントロピーの主要項を求めるのには十分である。このとき運動量の量子化単位は $\frac{1}{2\pi R n'_1}$ なので量子数は $N = n'_1 n'_p$ で、また弦の振動は弦に垂直な 8 方向があるので $f_B = f_F = 8$ である。

よってこの系の微視的状态は

$$\sum_{\mu} \sum_{k=1}^{\infty} k m_k^{\mu} = n'_1 n'_p \quad (2.58)$$

をみたく $m = \{m_k^{\mu}\}$ でラベルされる。以下は上と全く同じであるが、対応するカノニカル分布の性質を結果だけ記しておく

$$\epsilon = \frac{1}{2\pi R' n'_1}, \quad \langle E \rangle = n'_1 n'_p \epsilon \quad (2.59a)$$

$$Z_k^{\mu} = \begin{cases} \frac{1}{1 - e^{-\beta \epsilon k}} & (\mu: \text{bosonic}) \\ 1 + e^{-\beta \epsilon k} & (\mu: \text{fermionic}) \end{cases} \quad (2.59b)$$

$$\log Z = \frac{2\pi^2}{\beta \epsilon} \quad (2.59c)$$

$$T = \frac{1}{\beta} \approx \frac{\epsilon}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{n'_1 n'_p} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi^2 R'}} \sqrt{\frac{n'_p}{n'_1}} \quad (2.59d)$$

となつて、エントロピーはやはり

$$S_{micro}^{NS1P} \approx 2\sqrt{2\pi} \sqrt{n'_1 n'_p} \quad (= 2\sqrt{2\pi} \sqrt{n_1 n_5}) \quad (2.60)$$

と求められる。

以上のようにして 2 荷電系ブラックホールのエントロピーが求められたが、当初の期待に反して、この S_{micro}^{D1D5} は明らかにマクロな大きさをもった量で、マクロな系 ($n'_1, n'_p \gg 1$) において $S_{micro}^{D1D5} \approx 0$ とはみなすことができない。従つて D1-D5 系、NS1-P 系などの 2 荷電系は、3 荷電系とは異なつて $S_{micro} = S_{Bek}$ の関係を満たしていないことがわかつた。

2.6 まとめと課題

超重力理論におけるブラックホールは、弦理論の基本弦や D ブレーンなどの配位と同一視することによつて、古典論には存在しない量子的な微視的状态を考えることができる。しかし、与えられた巨視的状态に対応する微視的状态の完全系を構成することは一般の場合には困難である。ただ BPS 状態に限れば、 $g_s \rightarrow 0$ 極限を考えることでそのような完全系を構成でき、単純な系であればそれにより統計力学的エントロピー S_{micro} を実際に計算することができる。そうして求められた S_{micro} は、D1-D5-P 系などの 5 次元 3 荷電系においては熱力学的エントロピー S_{Bek} と係数まで含めて完全に一致している。これは現在のところループ量子重力理論など他のアプローチでは成功しておらず、弦理論を用いてのみ得られている非自明な結果である。このことは、量子重力を記述する理論としての弦理論の信憑性をより大きなものにしていく。

一方、D1-D5 系など 5 次元 2 荷電系では、古典解はホライズンが潰れていて $S_{Bek} = 0$ であるにも関わらず、3 荷電系と同じ方法で計算した S_{micro} はマクロな大きさを持っている。3 荷電系では両者は一致していることと考えあわせると、この結果はきわめて興味深い。

しかし、このように大きな成果を挙げている一方で、ここで用いた手法は「BPS 状態を $g_s \rightarrow 0$ で」解析することが核であるため、それがこの方法で調べられる事象の制限にもなっている。問題は雑把に言つて 2 つある。第一に、BPS から遠く離れた状態については何も言うことができない。熱力学的エントロピーの Bekenstein-Hawking 公式は例えば大質量の Schwarzschild ブラックホールにも通用するはずだが、このような系では g_s を変化させるとエネルギーも大きく変化してしまうので、 $g_s \rightarrow 0$ での微視的状态を構成

しても意味がない。しかし有限の g_s における微視的状態の完全系を直接的に構成するのはきわめて困難であり、これに対しては双対性をさらに異なる形で利用する [30] などの試みがある。第二に、たとえ BPS 状態に限定しても、微視的状態はただ数が数えられるだけで、それらが有限の g_s で実際にどのようなものであるかは全くわからない。BPS またはその付近であれば $g_s \rightarrow 0$ との対応によって微視的状態の同定まではほぼ可能だが、 g_s を有限にすれば対応する状態の様相は $g_s \rightarrow 0$ のときから当然大きく変化する。それについての情報が得られなければ、ブラックホールの量子論的な振る舞い、特に情報損失のパラドックスの解決などについて具体的に論ずることは難しい。

次章以降では、特にこの後者の問題に関連して、有限の g_s におけるブラックホールの微視的状態に対して量子重力的な描像を得る試みを取り扱う。

第3章

ブラックホールの fuzzball 描像

前章で挙げたいいくつかの課題のうちで、 g_s が有限の場合のブラックホールの微視的状态に対する描像を与える試みのひとつに、Mathur らを中心とした一連の研究 [28] がある。この研究は、D1-D5 系などで古典解のホライズンが潰れて $S_{Bek} \neq S_{micro}$ となる問題に対しても一定の回答を与えている。本章では、fuzzball *¹描像・fuzzball 予想・Mathur 予想などと呼ばれるこの研究の概要について説明する。

3.1 量子重力におけるブラックホール内部の様相

3.1.1 量子効果の到達範囲と情報損失のパラドックス

情報損失のパラドックスの解決が困難な理由の一つは、これがブラックホールや量子重力の性質について、暗黙のものも含めて非常にわずかな仮定で成立していることである。このことは逆に、それらのうちのいずれかを破らなければならないという点で、量子重力の理論及びそこでのブラックホール時空の性質に対して制限を与える。

前章では、弦理論で考えるとブラックホールには確かに $e^{S_{micro}}$ 個の量子論的な微視的状态が存在していることを見た。これをふまえたブラックホールの量子論的な描像および量子重力の性質として、素朴には次のようなことが考えられる。これを naive 描像と呼ぼう。

*¹ 「毛玉」の意味。no hair theorem にも掛けた言葉と思われる。

重力の結合定数は負の質量次元を持つために、 $E \ll M_p$ の低エネルギー領域では、無次元化した有効結合定数が非常に小さくなる。従ってループを含む摂動項の寄与は無視してよい。このことから、重力の量子的効果は l_p 程度の短距離でのみ現れ、大質量ブラックホールのホライズン半径のようなマクロな距離では無視できると考えられる。

従ってブラックホールで量子的な効果が顕著になる領域は、特異点の l_p 程度の近傍に限られる。 $e^{S_{micro}}$ 個の微視的状態はこの領域において互いに異なっている。逆に、特異点との距離 r が $r \gg l_p$ の領域では時空は古典解によって記述されているものとみなして良い。

しかし第1章で述べたように、この描像は情報損失のパラドックスとの関係で困難を生じる。従って量子論との整合性を保つためには、これとは少なくとも何らかの点で異なった描像が必要になると考えられる。

3.1.2 fuzzball 予想

naive 描像に付随する上のような困難は、重力の量子効果の及ぶ領域が多少大きくなってもホライズン内部に閉じ込められている限りは同じことである。これが回避されるためには、量子効果がホライズンの位置にまで及んでおり、ホライズン表面で微視的状態間の区別が可能でなければならない。

ここでホライズンについて考えよう。naive 描像では微視的状態もそれぞれにホライズンを持つが、これは様々な意味で奇妙である。例えば Bekenstein による熱力学的な議論 [7, 8] は微視的状態に対しても同様に適用できるはずである。そうだとするとホライズンを持つような微視的状態はそれ自身がエントロピーを持たなければならないことになるが、微視的状態の定義からしてもこの最後の結論は明らかにおかしい。^{*2} 従って、各々の微視的状態にホライズンは実は存在しないと考えるのが自然である。

では、古典論におけるホライズンとは何だろうか。微視的状態同士は古典的には区別がつかないのだから、ホライズン外部では殆ど同一のはずである。従って古典的なホライズン内部とは重力の量子効果の及ぶ領域、言い替えれば微視的状態同士が互いに異なっている領域であり、ホライズンはその境界面と考えられる。エントロピー S を持つ古典ブラッ

^{*2} 有限のエントロピー S' を持つ状態があったなら、それ自身がさらに $e^{S'}$ 次元の部分ヒルベルト空間 \mathcal{H}' に対応しているので、その基底を考えなければならない。もともと \mathcal{H}_{BH} の次元は有限 ($e^{S_{micro}}$) なので、この操作は有限回で終了させることができる。

クホールを通常の統計力学系と同様に考えると、 e^S 通りある量子的な微視的状態の集合を粗視化して見たものととらえられる。粗視化するということは微視的状態同士の違いを見ないということなので、違いの見える領域がホライズンで覆われるということは解釈としてもきわめて自然である。

以上のように考えたときのブラックホールのホライズン内部の様相は、naive 描像とは大きく異なるものである。これは次のような一連の予想としてまとめることができる。

予想 (fuzzball 予想) 古典的ブラックホールに対応する $e^{S_{micro}}$ 個の量子論的な微視的状態 (純粋状態) は、一般にホライズン内部の全域において互いに異なっている。逆に、古典論におけるホライズンは微視的状態同士が相異なる領域の境界面として現れる。個々の微視的状態自身はホライズンを持たない。

予想の呼称は、特異点とホライズンの他に特徴的な構造を持たない naive 描像と比べて、ブラックホールの様子が「毛玉」(fuzzball) のようにもイメージできることに由来する。この予想に基づく描像を同様に fuzzball 描像と呼ぶ。

この予想に至る以上のような考察は必ずしも論理的な必然性を持つものではない。しかし以下で述べるように、fuzzball 解によって適切な大きさのホライズンが再現されることは、この予想が何らかの意味で真実を含んだものであることを示唆している。

3.1.3 微視的状態の準古典的表現

fuzzball 予想をより具体化するために、量子論におけるブラックホールの微視的状態を古典論の言葉で可視化することを考えよう。ブラックホールに $e^{S_{micro}}$ 個の微視的状態があるということは、古典論のブラックホール解には量子論で $e^{S_{micro}}$ 次元の部分ヒルベルト空間 \mathcal{H}_{BH} が対応しているということである。この空間の元は一般には高度に量子的であるが、ほぼ古典的とみなせるようなコヒーレント状態ないしはそれに類する波束状態も存在しているであろう。それらは通常の量子力学におけるコヒーレント状態と同様に、各物理量の期待値を古典量とみなして構成した古典解によって近似的に表すことができると考えられる。もしもそのような状態によって \mathcal{H}_{BH} の基底を (近似的にでも) 張ることができたならば、ブラックホールの量子論的な状態は種々の古典解の重ね合わせまたはアンサンブルとして近似的に表現できることになる。

そのようにしてブラックホールの状態基底 (= 微視的状態) に対応する古典解の集合が仮に構成されたならば、それらは次のような性質を満たしているはずである。第 1 に、各微視的状態はエントロピーを持っていてはならない。第 2 に、これらは古典的な観測者に

とっては区別できないものでなければならないので、各微視的状态に対応する古典解はホライズンの十分外側においてプランク長程度の精度で相互に（及び、古典ブラックホールと）一致している必要がある。第 3 に、もちろんそれら古典解の総数は $e^{S_{micro}}$ でなければならない。

fuzzball 描像における微視的状态の性質は、これら古典解の性質に矛盾しない。従って、fuzzball 描像の各微視的状态はこのような古典解として近似的に表現できる可能性がある。その場合に、その古典解族の満たすべき性質（必要条件）は次のようなものである。

1. それぞれの解は特異点やホライズンを持たない滑らかな解であること。
2. 典型的な解同士が l_p 以上のスケールで相異なっている領域は、対応する古典ブラックホールのホライズン内部と一致すること。
3. 総数は $e^{S_{micro}}$ であること。

3.2 Fuzzball 解

3.1.3 項で述べたような条件をほぼ満たす古典解族が、前章でも取り上げた $\mathbb{R}^{4,1} \times T^5$ 背景上の BPS な 2-charge 系ブラックホールについては実際に見つかっている [31]。本節では主に IIB 型理論の NS1-P 系を用いて、fuzzball 解と呼ばれるこの古典解族の構成及び性質について説明する [28]。

3.2.1 2-charge 系ブラックホールの統計的性質

fuzzball 解の構成に入る前に、弦理論側から見た 2-charge 系、ここでは特に NS1-P 系 BPS ブラックホールの統計的な性質について前章に引き続きもう少し調べよう。ここで特に興味があるのは、典型的な微視的状态（エントロピーに主要な寄与をなす状態群）において支配的な振動モードの分布である。これは後に fuzzball 解の性質を考える際にも重要な意味を持つ。

この系の微視的状态のうち、基本弦が 1 本につながって長さ $L_T = 2\pi R n_1$ を持っているようなものは (2.58) によるミクロカノニカル分布で与えられ、それがカノニカル分布としては (2.59) のような性質を持つことをすでにみた。この中でさらに典型的な状態はどのようなものか考えよう。分布の温度が (2.59d) で与えられるのだから、この系の支配的な振動数 \bar{k} は

$$\bar{k} \sim \frac{T}{\epsilon} \sim \sqrt{n_1 n_p} \quad (3.1)$$

である (2.5 節での n'_1, n'_p を本章では単に n_1, n_p と記す) 。つまり典型的な状態すなわち圧倒的に多数の状態においては、系の持つエネルギーの大半が \bar{k} 付近の振動数領域に分配される。これは角振動数または波長で表せば、それぞれ

$$\bar{\omega} \equiv \frac{2\pi\bar{k}}{L_T} \sim \frac{1}{R} \sqrt{\frac{n_p}{n_1}} \quad (3.2)$$

$$\bar{\lambda} \equiv \frac{L_T}{\bar{k}} \sim R \sqrt{\frac{n_1}{n_p}} \quad (3.3)$$

となる。

また (2.59b) から m_k^μ の期待値 $\langle m_k^\mu \rangle$ は

$$\langle m_k^\mu \rangle = \begin{cases} \frac{1}{e^{\beta\epsilon k} - 1} = \frac{1}{e^{\frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{n_1 n_p}} k} - 1} & (\mu: \text{bosonic}) \\ \frac{1}{e^{\beta\epsilon k} + 1} = \frac{1}{e^{\frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{n_1 n_p}} k} + 1} & (\mu: \text{fermionic}) \end{cases} \quad (3.4)$$

となるので、振動がボソンのかフェルミオンのかによらず

$$\langle m_k^\mu \rangle \sim 1 \quad (k \sim \bar{k}) \quad (3.5)$$

である。従って、支配的な振動数の典型的な状態における分布幅 $\Delta\bar{k}$ は

$$\Delta\bar{k} \sim \frac{\langle E \rangle}{\epsilon\bar{k}\langle m_{\bar{k}}^\mu \rangle} \sim \sqrt{n_1 n_p} \quad (3.6)$$

であることがわかる。

3.2.2 弦の振動と重力場の関係

弦の微視的状态と重力場の関係を見るために、古典的 NS1-P 解 (2.57)

$$ds_{string}^2 = H^{-1}[-dudv + Kdv^2] + \sum_{i=1}^4 dx_i dx_i + \sum_{a=1}^4 dz_a dz_a \quad (3.7a)$$

$$B_{uv} = -\frac{1}{2}[H^{-1} - 1] \quad (3.7b)$$

$$e^{-2\phi} = H \quad (3.7c)$$

$$H(\vec{x}) = 1 + \frac{Q_1}{|\vec{x}|^2} \quad (3.7d)$$

$$K(\vec{x}) = \frac{Q_p}{|\vec{x}|^2} \quad (3.7e)$$

$$Q_1 = q_1 n_1, \quad q_1 = \frac{g_s^2 \alpha'^3}{V} \quad (3.7f)$$

$$Q_p = q_p n_p, \quad q_p = \frac{g_s^2 \alpha'^4}{VR^2} \quad (3.7g)$$

についてあらためて考えよう。ここで $u \equiv t + y$, $v \equiv t - y$ なる光円錐座標をとった。後に説明する fuzzball 解などと対比する意味で、この解を naive 解または naive 計量と呼ぶ。さきに述べた naive 描像は、この naive 解と直観的にもよく対応するものである。

前述の通り、この解の弦理論における対応物は、空間のコンパクト化方向に巻き付いてその方向に運動量を持つ基本弦である。弦理論側の描像では、基本弦は弦方向に運動量を持つために振動していなければならない。これに対して naive 解では、重力場のソースとなっている基本弦は原点に静止した形をしている。これは、naive 解が弦理論における様々な微視的状态を平均した形を表現しているからだと考えられる。

逆に、平均する前の各微視的状态を 3.1.3 項のように準古典的に表せば、naive 解とは違って基本弦の振動の効果が現れているはずである。そのような解を具体的に構成するため、ここでさらに次の命題を仮定として要請しよう。

仮定 弦の配位がコヒーレント状態にあるとき、それをソースとして生成される時空の状態は、弦配位の期待値をソースとして生成される古典重力場の配位を期待値に持つようなコヒーレント状態となっている。

この仮定に基づけば、NS1-P 系の微視的状态に対応する古典解族を具体的に構成することができる。

3.2.3 基本弦のコヒーレント状態

基本弦のコヒーレント状態について具体的に考えよう。基本弦の振動状態は各振動モードの振動状態の直積として表される。また各振動モードはすべて調和振動なので、各々についてのコヒーレント状態を構成することができる。ただし簡単のため、ここではボソンの振動のみを扱う。

調和振動子のコヒーレント状態とその性質

振動数 ω の調和振動子

$$\hat{H} = \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad \left(\hat{a} \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{q} + i \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \hat{p} \right) \quad (3.8)$$

において、コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ ($\alpha \in \mathbb{C}$) とは、 $\{|n\rangle\}_{n \in \{0\} \cup \mathbb{N}}$ をエネルギー固有状態として

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &\equiv e^{\alpha \hat{a}^\dagger} |0\rangle \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \end{aligned} \quad (3.9)$$

のように表される状態をいう。これに対する波動関数は

$$\langle x|\alpha\rangle = \left(\frac{\pi\hbar}{m\omega}\right)^{-\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x-q)^2 - \frac{i}{\hbar}\left(\frac{q}{2} - x\right)p\right] \quad (3.10)$$

である。この状態は次のような性質を持つ。

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad \langle H\rangle_\alpha \equiv \langle \alpha|\hat{H}|\alpha\rangle = \hbar\omega|\alpha|^2 \quad (3.11a)$$

$$\langle \hat{q}\rangle_\alpha = q_\alpha, \quad \langle \hat{p}\rangle_\alpha = p_\alpha \quad \left(\alpha = \sqrt{\frac{\omega m}{2\hbar}} q_\alpha + i \frac{1}{\sqrt{2\omega m \hbar}} p_\alpha\right) \quad (3.11b)$$

$$\langle \Delta \hat{q}\rangle_\alpha = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}, \quad \langle \Delta \hat{p}\rangle_\alpha = \sqrt{\frac{\hbar m \omega}{2}}, \quad \langle \Delta \hat{q}\rangle_\alpha \cdot \langle \Delta \hat{p}\rangle_\alpha = \frac{\hbar}{2} \quad (3.11c)$$

$$\langle \beta|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2\beta^* \alpha}{2}\right) \quad (3.11d)$$

これらの性質により、 $|\alpha\rangle$ は相空間上の点 (q_α, p_α) の近傍に局在した準古典的な状態ととらえられる。

また、 \mathbb{C} 上で1辺 $\sqrt{\pi}$ の格子点上に配置されたコヒーレント状態系

$$\{|\alpha_{m,n}\rangle \mid \alpha_{m,n} = \sqrt{\pi}(m + in) \quad (m, n \in \mathbb{Z})\} \quad (3.12)$$

は、調和振動子の状態空間の基底を張ることが知られている [32, 33]。

弦のコヒーレント状態

弦のコヒーレント状態とは、各振動モード (μ, k) におけるこのようなコヒーレント状態 $|\alpha_k^\mu\rangle$ の直積として

$$|\{\alpha_k^\mu\}\rangle \equiv \bigotimes_{(\mu, k)} |\alpha_k^\mu\rangle \quad (3.13)$$

のように表される状態をいう。

いま、この $|\{\alpha_k^\mu\}\rangle$ に対して、ハミルトニアン \hat{H} の分散を考える。まず各振動モード (μ, k) の持つエネルギーの分散は

$$\begin{aligned} V_{H_k^\mu} &= \langle H_k^\mu{}^2 \rangle - \langle H_k^\mu \rangle^2 \\ &= \langle \alpha_k^\mu | \hat{H}_k^\mu{}^2 | \alpha_k^\mu \rangle - \langle \alpha_k^\mu | \hat{H}_k^\mu | \alpha_k^\mu \rangle^2 \\ &= (\hbar\omega_k)^2 |\alpha_k^\mu|^2 \end{aligned} \quad (3.14)$$

となるので、全体では

$$\begin{aligned} V_{H_{total}} &= \sum_{(\mu,k)} V_{H_k^\mu} = \sum_{(\mu,k)} \hbar\omega_k \langle H_k^\mu \rangle \\ &\sim \hbar\bar{\omega} \sum_{(\mu,k)} \langle H_k^\mu \rangle = \hbar\bar{\omega} \langle H_{total} \rangle \end{aligned} \quad (3.15)$$

となる。従って標準偏差 $\sigma_{H_{total}}$ は

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{H_{total}}}{\langle H_{total} \rangle} &\sim \sqrt{\frac{\hbar\bar{\omega}}{\langle H_{total} \rangle}} \\ &\sim \sqrt{\frac{1}{n_1 n_p}} \cdot \sqrt{\frac{n_p}{n_1}} \\ &= n_1^{-\frac{3}{4}} n_p^{-\frac{1}{4}} \ll 1 \quad (n_1, n_p \gg 1) \end{aligned} \quad (3.16)$$

と評価される（ここで (3.2) を用いた）。従って、 $|\{\alpha_k^\mu\}\rangle$ は近似的にエネルギー固有状態とみなしてよい。以上のことからコヒーレント状態 $|\{\alpha_k^\mu\}\rangle$ は、あるエネルギーで定常振動している基本弦の状態空間に対し、近似的な基底を張ると考えられる。

状態 $|\{\alpha_k^\mu\}\rangle$ は、その期待値としての弦の古典配位によって近似的に表現することができる。 $|\{\alpha_k^\mu\}\rangle$ に対応する古典配位 $F_\mu(v)$ ($v \equiv t - w$, w は基本弦に沿った座標で $w \simeq w + L_T$) は、 S^1 コンパクト化された基本弦の振動モード展開式に代入することにより、ただちに

$$F_\mu(v) = -\sqrt{2\alpha'} \sum_{k=1}^{\infty} \text{Im} \left[\frac{\alpha_k^\mu}{\sqrt{k}} \exp \left\{ i \frac{2\pi k}{L_T} v \right\} \right] \quad (3.17)$$

と求められる。これを上の仮定と合わせれば、この状態に対応する準古典的な重力場を表す古典解を構成することができる。

3.2.4 Fuzzball 解の構成

では、NS1-P 系の微視的状态に対応する解を実際に構成しよう。フェルミオンの振動を考えるのは難しいので、ここでもボソンの振動のみを考える。このように制限した状態空間を \mathcal{H}'_{BH} とする。

まず基本弦の振動状態は、(2.58) をボソンの振動に制限した

$$n_1 n_p = \sum_{\mu=1}^8 \sum_{k=1}^{\infty} k m_k^{\mu} \quad (3.18)$$

の関係をみたす各振動モードの励起数の組 $\{m_k^{\mu}\}$ で表される状態族 $\{|\{m_k^{\mu}\}\rangle\}$ によって基底を張ることができる。

各振動モードについて、エネルギーの期待値が $|\{m_k^{\mu}\}\rangle$ と等しくなるようなコヒーレント状態を考えよう。振動モード (μ, k) のそのような状態を $|\alpha_k^{\mu}\rangle$ とすると、エネルギー期待値は

$$\langle H_k^{\mu} \rangle_{\alpha_k^{\mu}} = \hbar \omega_k |\alpha_k^{\mu}|^2 \quad \left(\omega_k = \frac{2\pi k}{L_T} \right) \quad (3.19)$$

であるから、 $|m_k^{\mu}\rangle$ のエネルギー固有値と比較して

$$\langle H_k^{\mu} \rangle_{\alpha_k^{\mu}} = m_k^{\mu} \hbar \omega_k \quad \Leftrightarrow \quad |\alpha_k^{\mu}|^2 = m_k^{\mu} \quad (3.20)$$

とわかる。従って α_k^{μ} は偏角 $\theta_k^{\mu} \in [0, 2\pi)$ を用いて

$$\alpha_k^{\mu} = \sqrt{m_k^{\mu}} \exp(i\theta_k^{\mu}) \quad (3.21)$$

と書けることになる。このとき、 $\{|\alpha_k^{\mu}\rangle\}$ は $\{|\{m_k^{\mu}\}\rangle\}$ に比べて余分な自由度 $\{\theta_k^{\mu}\}$ を持っているので、その分だけ \mathcal{H}'_{BH} の基底としては過剰になっていることに注意しよう。さらにこれを (3.17) に代入することで、各振動モードの励起数の期待値 $\{m_k^{\mu}\}$ を持つコヒーレント状態の弦配位

$$F_{\mu}(v) = -\sqrt{2\alpha'} \sum_{k \geq 1} \sqrt{\frac{m_k^{\mu}}{k}} \sin\left(\frac{2\pi k}{L_T} v + \theta_k^{\mu}\right) \quad (3.22)$$

が得られる。

次に、この弦配位をソースとする調和関数および古典解を構成する。ただし、特にここでは x^i 方向の振動のみで、 z^a 方向は考えない。これによってさらに制限された状態空間

を \mathcal{H}''_{BH} と呼んでおく。各調和関数について順に考えよう。NS1-charge については、同じ y でも複数のストランド ($w = y + 2\pi sR, s = 0, \dots, (n_1 - 1)$) を考える必要があることを除けば naive 解の場合と同様で、

$$H(\vec{x}, y, t) = 1 + q_1 \int_0^{T_L} dw \delta((w - y) \bmod 2\pi R) \frac{1}{|\vec{x} - \vec{F}(t - w)|^2} \quad (3.23)$$

となる。P-charge については分布密度が一様ではないので若干変更を加える必要があり、naive metric での $\frac{n_p}{n_1}$ (1 ストランドあたり) にかえて

$$\begin{aligned} \frac{L_T |\vec{F}(v)|^2}{\int_0^{L_T} dv |\vec{F}(v)|^2} \cdot \frac{n_p}{n_1} &= \frac{L_T^2 |\vec{F}(v)|^2}{4\pi^2 \alpha' n_1^2} \\ &= \frac{R^2}{\alpha'} |\vec{F}(v)|^2 \end{aligned} \quad (3.24)$$

を用いる。ここで、(3.18)(3.22) から

$$\int_0^{L_T} dv |\vec{F}(v)|^2 = \frac{4\pi^2 \alpha'}{L_T} n_1 n_p \quad (3.25)$$

と計算されることを用いた。従って $\frac{Q_p}{n_1}$ に相当する部分は

$$\begin{aligned} q_p \frac{R^2}{\alpha'} |\vec{F}(t - w)|^2 &= \frac{g_s^2 \alpha'^4 R^2}{V R^2} \frac{R^2}{\alpha'} |\vec{F}(t - w)|^2 \\ &= q_1 |\vec{F}(t - w)|^2 \end{aligned} \quad (3.26)$$

となるので、対応する調和関数としては

$$K(\vec{x}, y, t) = q_1 \int_0^{L_T} dw \delta((w - y) \bmod 2\pi R) \frac{|\vec{F}(t - w)|^2}{|\vec{x} - \vec{F}(t - w)|^2} \quad (3.27)$$

をとればよい。解全体としては、

$$ds_{string}^2 = H^{-1}[-dudv + K dv^2 + 2A_i dx_i dv] + \sum_{i=1}^4 dx_i dx_i + \sum_{a=1}^4 dz_a dz_a \quad (3.28a)$$

$$B_{uv} = -\frac{1}{2}[H^{-1} - 1], \quad B_{vi} = H^{-1} A_i \quad (3.28b)$$

$$e^{-2\phi} = H \quad (3.28c)$$

$$H(\vec{x}, y, t) = 1 + q_1 \int_0^{L_T} dw \delta((w - y) \bmod 2\pi R) \frac{1}{|\vec{x} - \vec{F}(t - w)|^2} \quad (3.28d)$$

$$K(\vec{x}, y, t) = q_1 \int_0^{L_T} dw \delta((w - y) \bmod 2\pi R) \frac{|\vec{F}(t - w)|^2}{|\vec{x} - \vec{F}(t - w)|^2} \quad (3.28e)$$

$$A_i(\vec{x}, y, t) = -q_1 \int_0^{L_T} dw \delta((w - y) \bmod 2\pi R) \frac{\dot{F}_i(t - w)}{|\vec{x} - \vec{F}(t - w)|^2} \quad (3.28f)$$

と表される (ここで $u \equiv t + y$, $v \equiv t - y$)

このようにして、我々は重力場のコヒーレント状態の期待値を表すと思われる古典解族を得ることができた。しかし、この解を見ると微視的状态としては問題があることがわかる。この解は依然として、ソースである基本弦の位置が特異点になっており、ホライズンを持ってしまう。ただ、これは単に物理量の期待値で作られる古典解が持っている性質であって、対応する量子的な微視的状态がホライズンを持つことを意味するものではない。実際、弦の位置で発散が起こるのは期待値をとることで弦の配位を固定したからであって、本来は弦の配位は確率的な広がりを持つものだから特異点などは生じないはずである。とはいえ、ホライズンが存在しないという微視的状态の重要な性質が壊れてしまうような表現は古典近似として不適切であり、それ自身ホライズンを持たない滑らかな解を用いることが望ましい。

幸いにして、そのような解は (3.28) から比較的容易に構成することができる。解 (3.28) の各調和関数を、弦配位の y 方向回転に関して平均しよう。すると例えば H については

$$\begin{aligned} H(\vec{x}, t) &= 1 + \frac{q_1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} dy \int_0^{L_T} dw \delta((w - y) \bmod 2\pi R) \frac{1}{|\vec{x} - \vec{F}(t - w)|^2} \\ &= 1 - \frac{q_1}{2\pi R} \int_0^{L_T} dw \frac{1}{|\vec{x} - \vec{F}(t - w)|^2} \\ &= 1 + \frac{Q_1}{L_T} \int_0^{L_T} dw \frac{1}{|\vec{x} - \vec{F}(w)|^2} \end{aligned} \quad (3.29)$$

となる。 K, A_i についても同様にすると、結局解全体として

$$ds_{string}^2 = H^{-1}[-dudv + Kdv^2 + 2A_i dx_i dv] + \sum_{i=1}^4 dx_i dx_i + \sum_{a=1}^4 dz_a dz_a \quad (3.30a)$$

$$B_{uv} = -\frac{1}{2}[H^{-1} - 1], \quad B_{vi} = H^{-1} A_i \quad (3.30b)$$

$$e^{-2\phi} = H \quad (3.30c)$$

$$H(\vec{x}) = 1 + \frac{Q_1}{L_T} \int_0^{L_T} dw \frac{1}{|\vec{x} - \vec{F}(w)|^2} \quad (3.30d)$$

$$K(\vec{x}) = \frac{Q_1}{L_T} \int_0^{L_T} dw \frac{|\vec{F}(w)|^2}{|\vec{x} - \vec{F}(w)|^2} \quad (3.30e)$$

$$A_i(\vec{x}) = -\frac{Q_1}{L_T} \int_0^{L_T} dw \frac{\dot{F}_i(w)}{|\vec{x} - \vec{F}(w)|^2} \quad (3.30f)$$

$$Q_1 = q_1 n_1, \quad q_1 = \frac{g_s^2 \alpha'^3}{V} \quad (3.30g)$$

が得られる。後に説明するように、平均化の効果でこの解は特異点を持たず、従ってホライズンも持たない。これは fuzzball 描像に対してある種の準古典的な表現を与えるもので、前述の通り fuzzball 解と呼ばれている。

この平均操作によって弦振動の位相情報の少なくとも一部は失われるが、もともとそれは \mathcal{H}_{BH}'' の基底を張るには冗長な自由度であったから問題ない。 $\{m_k^i\}$ の組み合わせそれぞれに対して任意に通りの $\{\theta_k^i\}$ を対応させて $\vec{F}(w)$ を構成し、それぞれを上式に代入すれば \mathcal{H}_{BH}'' の基底を張る状態に対応する古典解群が得られると考えられる。ただしこれらは単一の古典弦配位から得られたものではないので、対応する量子状態が解の通りの古典的な時空として扱えるとは限らないことには留意しておこう。

D1-D5 系の fuzzball 解

NS1-P 系に対応する fuzzball 解が得られたので、これに対して前述したような U 双対変換を順に適用してゆくことで、D1-D5 系の fuzzball 解も得ることができる。結果は次のような解となる [31]。

$$ds_{string}^2 = \sqrt{\frac{1}{H(1+K)}} [-(dt - A_i dx^i)^2 + (dy + B_i dx^i)^2] + \sqrt{H(1+K)} \sum_{i=1}^4 dx_i dx_i + \sqrt{\frac{1+K}{H}} \sum_{a=1}^4 dz_a dz_a \quad (3.31a)$$

$$e^{-2\phi} = \frac{H}{1+K} \quad (3.31b)$$

$$C_{ti}^{(2)} = \frac{B_i}{1+K}, \quad C_{ty}^{(2)} = -\frac{K}{1+K}, \quad C_{iy}^{(2)} = -\frac{A_i}{1+K},$$

$$C_{ij}^{(2)} = C_{ij}, \quad dC = - * dH^{-1} \quad (3.31c)$$

$$dB = - *_4 dA \quad (3.31d)$$

$$H(\vec{x}) = 1 + \frac{\mu Q_1}{L_T} \int_0^{\mu L_T} dw \frac{1}{|\vec{x} - \mu \vec{F}(w)|^2} \quad (3.31e)$$

$$K(\vec{x}) = \frac{\mu Q_1}{L_T} \int_0^{\mu L_T} dw \frac{|\mu^2 \vec{F}(w)|^2}{|\vec{x} - \mu \vec{F}(w)|^2} \quad (3.31f)$$

$$A_i(\vec{x}) = -\frac{\mu Q_1}{L_T} \int_0^{\mu L_T} dw \frac{\mu \dot{F}_i(w)}{|\vec{x} - \mu \vec{F}(w)|^2} \quad (3.31g)$$

$$Q_1 = q_1 n_1, \quad q_1 = \frac{g_s^2 \alpha'^3}{V} \quad (3.31h)$$

$$\mu^2 = \frac{VR}{g_s^2 \alpha'^2 R_6} \quad (3.31i)$$

3.2.5 fuzzball 解の非特異性の証明

すでに述べたように、このようにして構成された fuzzball 解はいずれも特異点を持たず、従ってホライズンも持たないことが特徴である。NS1-P 系 (3.30) についてそれを証明しよう。(3.30) を見ると、特異点となる可能性があるのは $\exists w$ で $\vec{x} = \vec{F}(w)$ となる点 \vec{x} に限られることは明らかである。従って、このような点のまわりで計量が滑らかであることを示せばよい。

いま任意の $w_0 \in [0, L_T]$ をとり、 $\vec{x}_0 = \vec{F}(w_0)$ として $\vec{F}(w)$ を $w = w_0$ のまわりで展開すると $\vec{F}(w) \approx \vec{x}_0 + \dot{\vec{F}}(w_0) \cdot (w - w_0)$ となる。よって $|\vec{x} - \vec{F}(w)|^2 = |(\vec{x} - \vec{x}_0) - \dot{\vec{F}}(w_0) \cdot (w - w_0)|^2$ となるので、

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{L_T}{2}}^{\frac{L_T}{2}} dw \frac{1}{|\vec{x} - \vec{F}(w)|^2} &\approx \int_{-\frac{L_T}{2}}^{\frac{L_T}{2}} dw \frac{1}{|(\vec{x} - \vec{x}_0) - \dot{\vec{F}}(w_0) \cdot (w - w_0)|^2} \\ &\approx \int_{-\infty}^{\infty} dw \frac{1}{|(\vec{x} - \vec{x}_0) - \dot{\vec{F}}(w_0) \cdot (w - w_0)|^2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dw' \frac{1}{w'^2 + h^2} \\ &= \frac{\pi}{h} \end{aligned} \quad (3.32)$$

となる。ただしここで h はベクトル $\vec{x} - \vec{x}_0$ から $\dot{\vec{F}}(w_0)$ に降ろした垂線の長さで、あらわに書くと

$$h(w_0; \vec{x})^2 \equiv \frac{|\vec{x} - \vec{x}_0|^2 |\dot{\vec{F}}(w_0)|^2 - \{(\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \dot{\vec{F}}(w_0)\}^2}{|\dot{\vec{F}}(w_0)|^2} \quad (3.33)$$

である (特に $\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0$ で $h \rightarrow 0$)。いま調べたいのは解が $\vec{x} = \vec{x}_0$ のまわりで滑らかであるかどうかであり、(3.32) の 1 行目及び 2 行目の近似はそれには影響しない。これにより

(3.30) の各関数は \vec{x}_0 付近で

$$H(\vec{x}) \approx 1 + \frac{\pi Q_1}{L_T} \cdot \frac{1}{h} \quad (3.34a)$$

$$K(\vec{x}) \approx \frac{\pi Q_1 |\vec{\dot{F}}(w_0)|^2}{L_T} \cdot \frac{1}{h} \quad (3.34b)$$

$$A_i(\vec{x}) \approx -\frac{\pi Q_1 \dot{F}_i(w_0)}{L_T} \cdot \frac{1}{h} \quad (3.34c)$$

と近似される。

さらに x^i ($i = 1 \dots 4$) 空間で $dl \parallel \dot{\vec{F}}$ とする l をとり、これに垂直な 3 次元面で h を動径とした球面座標角を ϕ, ψ とする。すると $\sum_i dx^i dx^i = dl^2 + dh^2 + h^2(d\phi^2 + \sin^2 \phi d\psi^2)$ であり、また l の定め方から $\dot{F}_l = |\dot{\vec{F}}|$, $\dot{F}_i = 0$ ($i = h, \phi, \psi$) であることがわかる。これらを (3.34) とともに (3.30a) に代入すると

$$\begin{aligned} ds_{string}^2 &\approx \left\{ \frac{|\dot{F}|^2 - Mh}{1 + Mh} dt^2 + \frac{|\dot{F}|^2 + Mh}{1 + Mh} dy^2 + \frac{2|\dot{F}|^2}{1 + Mh} (dt dl - dt dy - dy dl) \right\} \\ &\quad + \{ dl^2 + dh^2 + h^2(d\phi^2 + \sin^2 \phi d\psi^2) \} + \sum_{a=1}^4 dz_a dz_a \\ &= \left\{ \frac{|\dot{F}|^2 - Mh}{1 + Mh} dt^2 + \frac{|\dot{F}|^2 + Mh}{1 + Mh} dy^2 + \frac{2|\dot{F}|^2}{1 + Mh} (dt dl - dt dy - dy dl) + dl^2 \right\} \\ &\quad + \{ dh^2 + h^2(d\phi^2 + \sin^2 \phi d\psi^2) \} + \sum_{a=1}^4 dz_a dz_a \quad (3.35) \end{aligned}$$

(ここで $M \equiv \frac{L_T}{\pi Q_1}$ 、また $|\dot{\vec{F}}(w_0)|$ を単に $|\dot{F}|$ と書いた) となり、計量は (t, y, l) 、 (h, ϕ, ψ) 、 (z_1, z_2, z_3, z_4) からなる 3 つの部分に分離される。このうち後の 2 つ ((3.35) 最終式の 2 行目) は順に $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4$ の計量となるから明らかに滑らかである。 (t, y, l) 部分については、問題となる領域は \vec{x}_0 近傍なので $h \rightarrow 0$ を考えればよく

$$\begin{aligned} ds_{(t,y,l)}^2 &\rightarrow |\dot{F}|^2 dt^2 + |\dot{F}|^2 dy^2 + 2|\dot{F}|^2 (dt dl - dt dy - dy dl) + dl^2 \\ &= -|\dot{F}|^2 (dt + dl)^2 + (|\dot{F}|^2 dt + dl)^2 + |\dot{F}|^2 (dy - dt - dl)^2 \\ &= -|\dot{F}|^2 dt'^2 + dl'^2 + |\dot{F}|^2 (dy - dt')^2 \\ &\quad (\text{ただし } t' = t + l, \quad l' = l + |\dot{F}|^2 t) \quad (3.36) \end{aligned}$$

となり、確かに滑らかになっている。

以上により、3.2.4 節で構成した NS1-P 系の fuzzball 解は、いずれも確かに特異点を持たない滑らかな解であることがわかった。

3.3 Fuzzball 描像におけるホライズン

3.3.1 束縛系の大きさ と ホライズン

NS1-P 系の fuzzball 解 (3.30) の表すブラックホールで、fuzzball 予想に従ってホライズンの大きさを考えよう。 $\mathcal{R}_F \equiv \max_{w \in [0, L_T)} |\vec{F}(w)|$ とするとき、解の形より明らかに、 $r \equiv |\vec{x}| < \mathcal{R}_F$ 領域での解の形は F ごとに異なる。しかし逆に $r > \mathcal{R}_F$ の領域では、fuzzball 解は r が大きくなるに従い naive 解 (3.7) に急速に近づく。従って、ホライズンの大きさは NS1-P 束縛系の大きさにほぼ一致することがわかる。すなわち \mathcal{R}_F の典型的な値を \mathcal{R}_{fuzz} 、ホライズン位置を $r = \mathcal{R}_H$ とすれば、これらの間には

$$\mathcal{R}_H \approx \mathcal{R}_{fuzz} \quad (3.37)$$

の関係がある。

束縛系の大きさを求めよう。 F の表式は (3.22) で与えられるから、その平均的な大きさ \bar{F} は

$$\begin{aligned} \bar{F}^2 &\sim \frac{1}{L_T} \int_0^{L_T} dv \sum_{i=1}^4 F_i(v)^2 \\ &= \sum_{i=1}^4 \sum_{k \geq 1} \alpha' \frac{m_k^i}{k} \\ &\sim \Delta k \cdot \alpha' \frac{\langle m_k^i \rangle}{k} \\ &\sim \alpha' \end{aligned} \quad (3.38)$$

となる。ここで (3.1)(3.5)(3.6) を用いた。これにより束縛系の大きさは

$$\mathcal{R}_{fuzz} \sim \bar{F} \sim \sqrt{\alpha'} \quad (3.39)$$

と求められる。

これと (3.37) から、fuzzball 解におけるホライズン位置は

$$\mathcal{R}_H \sim \sqrt{\alpha'} (= l_s) \quad (3.40)$$

であることがわかる。

この結果は一見、束縛系の大きさが n_1, n_p によらず常に l_s 程度であって naive 描像と大差がないようにも見えるが、それは正しくない。 $\mathcal{R}_{fuzz}, \mathcal{R}_H$ は単に座標の上での長さ、あるいは naive 解の 10 次元 string 計量 (3.30a) で計った長さであり、5 次元ブラックホールの物理的な大きさを考えるためにはディラトン ϕ の効果及びコンパクト化方向の大きさを考慮に入れた 5 次元 Einstein 計量を用いなければならないからである。実際、次項で見るように束縛系の物理的な大きさは n_1, n_p とともに大きくなり、fuzzball 描像とよく一致していることがわかる。

3.3.2 fuzzball 解の Bekenstein エントロピー

ここで、naive 解でのホライズン位置は $r \rightarrow 0$ であったことを思い出そう。これに対して fuzzball 解は、naive 解とは異なる非自明なホライズン位置 (3.40) を持つことがわかった。このことは、naive 解が $S_{Bek} \neq S_{micro}$ となる困難を抱えていたことと考え合わせると非常に興味深い。そこで、(3.40) に対応する S_{Bek} を求めてみよう [34]。

前述のように fuzzball 解は $r = \mathcal{R}_H$ において naive 解とほぼ一致するから、ホライズン面積の計算は naive 計量におけるこの位置での球面の面積を求めればよい。まず、(3.7) における Einstein 計量は

$$ds_E^2 = H^{-\frac{3}{4}}[-dudv + Kdv^2] + H^{\frac{1}{4}} \sum_{i=1}^4 dx_i dx_i + H^{\frac{1}{4}} \sum_{a=1}^4 dz_a dz_a \quad (3.41)$$

であり、特にここで時間一定面 ($dt = 0$) をとれば

$$ds_E^2 = H^{-\frac{3}{4}}(K+1)dy^2 + H^{\frac{1}{4}} \sum_{i=1}^4 dx_i dx_i + H^{\frac{1}{4}} \sum_{a=1}^4 dz_a dz_a \quad (3.42)$$

となる。ホライズン $r = \mathcal{R}_H$ はこの 9 次元空間 ($\mathbb{R}^4 \times S^1 \times T^4$) 内の 8 次元面 ($S^3 \times S^1 \times T^4$) であり、その面積 $A_H^{(10)}$ は

$$A_H^{(10)} = A_{S^3} \times L_{S^1} \times V_{T^4} \quad (3.43)$$

で表される。ここで $A_{S^3}, L_{S^1}, V_{T^4}$ はそれぞれ、 $r = \mathcal{R}_H$ における \mathbb{R}^4 ($= x_i$ 方向) 内の球面の面積、 S^1 ($= y$ 方向) の長さ、 T^4 ($= z_a$ 方向) の体積を表す。これらは (3.42) からただちに

$$A_{S^3} = 2\pi^2 \mathcal{R}_H^3 \cdot H^{\frac{3}{8}} \quad (3.44a)$$

$$L_{S^1} = 2\pi R \cdot H^{-\frac{3}{8}} \sqrt{K+1} \quad (3.44b)$$

$$V_{T^4} = (2\pi)^4 V \cdot H^{\frac{1}{2}} \quad (3.44c)$$

(ただし K, H はいずれも $r = \mathcal{R}_H$ における値) と求められる。(3.7) から、 $n_1, n_p \gg 1$ のときは $r = \mathcal{R}_H$ における H, K の値は

$$H \approx \frac{Q_1}{\mathcal{R}_H^2} \quad (3.45a)$$

$$K + 1 \approx \frac{Q_p}{\mathcal{R}_H^2} \quad (3.45b)$$

となるから、

$$\begin{aligned} A_H^{(10)} &= 2^6 \pi^7 R V \mathcal{R}_H^3 \cdot \sqrt{H(K+1)} \\ &\approx 2^6 \pi^7 R V \mathcal{R}_H \sqrt{Q_1 Q_p} \\ &= 2^6 \pi^7 \mathcal{R}_H g_s^2 \alpha'^{\frac{7}{2}} \sqrt{n_1 n_p} \end{aligned} \quad (3.46)$$

となる。重力定数は (2.10) の通り $G_N^{(10)} = 8\pi^6 g_s^2 \alpha'^4$ なので、結局 Bekenstein エントロピーは

$$\begin{aligned} S_{Bek} &= \frac{A_H^{(10)}}{4G_N^{(10)}} \\ &\approx 2\pi \alpha'^{-\frac{1}{2}} \mathcal{R}_H \sqrt{n_1 n_p} \\ &\sim 2\sqrt{2}\pi \sqrt{n_1 n_p} = S_{micro} \end{aligned} \quad (3.47)$$

となることがわかる。

これにより、NS1-P 系 fuzzball 解の fuzzball 描像に基づくホライズンから求められる Bekenstein エントロピーは、少なくともオーダー評価の範囲では Bekenstein-Hawking の法則 $S_{Bek} = S_{micro}$ を満たしていることがわかった。これは naive 描像及び naive 解からは得られなかった非自明な結果であり、fuzzball 予想及び fuzzball 解が、少なくとも NS1-P 系のブラックホールに関して、ある程度までは正しい描像を与えていることを示唆している。

3.3.3 naive 解のホライズンについて

前章でも説明したように、naive 解で $S_{Bek} \neq S_{micro}$ となる困難は 2-charge 系の特殊事情であり、3-charge 系など多くの系では通常のブラックホール解 (naive 解) で $S_{Bek} = S_{micro}$ が成り立っている。再びこの理由について考えてみよう。

ここで、超重力理論は弦理論に対して、2つの近似を行っていたことを思い出そう。

1. 古典近似 (ループ項の無視、 $g_s \rightarrow 0$ 極限)

2. 高次微分項 (α' 補正項) の無視 ($\alpha' \rightarrow 0$ 極限)

このうち前者は、これまでも述べてきたように微視的状态の粗視化に対応すると解釈するのが妥当そうである。それならば、これにより生ずるホライズンが $S_{Bek} = S_{micro}$ を満たすことは、熱力学と統計力学の対応という観点から見てきわめて自然である。対して、後者についてはこれを行うべき明確な理由や意味付けは特に見当たらず、単に計算上の近似にすぎない。実際、正しい S_{Bek} を与える fuzzball 解のホライズン位置 (3.40) などを見れば、2-charge 系ブラックホールのホライズンを考える際に α' の寄与を無視することが危険なのは明らかで、この近似が破綻しているために naive 解で $S_{Bek} \neq S_{micro}$ となっていると考えれば辻褃が合う。

これらにより、次のような予想が自然に考えられる。

予想 弦理論から導かれる高次微分項を含めた超重力理論は、任意のブラックホール解に対して $S_{Bek} = S_{micro}$ を満足するホライズンを与える。^{*3}

この予想と fuzzball 予想がともに正しければ、古典解のホライズンは常に量子論的な微視的状态の粗視化によって得られることになる。

ただし、高次微分項の具体形は知られていない。また曲率半径が $\sim \sqrt{\alpha'}$ となるような領域では任意に高次の項が素朴にはそれぞれ同じオーダーの大きさを持つことになり、 α' に対する摂動展開すら信用できなくなる。このようなことから、高次微分項の寄与を直接計算により評価することは一般にはきわめて困難である。

なお、NS1-P 系については naive 解の $r \rightarrow 0$ で曲率 R が発散していて、 $r \sim R_H^{NS1P}$ でちょうど $R \sim l_s^{-1}$ となる。これにより、この付近で超重力近似が破綻してホライズンが生じていると推論することもできる [35]。しかしこの性質は双対変換に対して不変でなく、D1-D5 系の naive 解では $r \rightarrow 0$ で曲率は有限値に収束している。従って、ホライズン位置をこのような議論から直接的に見出すことは一般にはできない。

3.4 Fuzzball 解に関する疑問点及び問題点

前節で、fuzzball 解の構成とその性質について一通り見てきた。これらの性質は fuzzball 予想の予言する微視的状态の性質とよく合致しているように見え、少なくとも何らかの意味を持っていると考えることは不自然ではない。しかしその一方で fuzzball 解は、

^{*3} ここで S_{Bek} は Bekenstein-Hawking 流の熱力学的議論から導出されるエントロピーという意味で、高次微分項を含めた場合は S_{Bek} とホライズン面積の比例則にも修正が必要になる可能性はある。

fuzzball 予想の上にさらにいくつかの仮定や近似、及び恣意的とも言える平均化操作を行って構成したもので、その正当性や解釈は必ずしも明らかではない。本節では、それらについていくつかコメントする。

3.4.1 超重力近似の妥当性

fuzzball 解は弦配位 (3.22) をもとにして超重力理論により構成されたが、ここで通常の超重力理論を用いてよいことは自明ではない。

そもそも fuzzball 解のもとになる弦配位は、 α' に依存して構成されている。しかし一方で、そのソースから fuzzball 解を構成する際に用いている超重力理論は $\alpha' \rightarrow 0$ の近似理論である。このように首尾一貫しない近似のもとで構成された解に意味はあるのか、という疑問が生ずる。前述の通り超重力理論で α' を無視しているのは単に技術的な問題であり、本来は高次微分項を含めた理論を用いるべきである。

この近似が適用できるための最も素朴な条件としては、ソースがどれくらい微細な構造を持つかで考えて、(3.3) から

$$\bar{\lambda} \gg l_s \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{R}{l_s}\right)^2 \gg \frac{n_p}{n_1} \quad (3.48)$$

が少なくとも必要と考えられる。従って、 n_1 と n_p が同じオーダーの数で、 R が l_s よりも十分に長いという通常の条件下ではこれは成立している。この問題については他に [36] などの研究があり、少なくとも定性的な性質には何ら変更のないことが主張されている。

3.4.2 弦のコヒーレント状態を用いた解の構成について

fuzzball 解は弦のコヒーレント状態をソースとして構成されているが、このようにして作られた重力解が本当に準古典的な意味を持つものであるのかは議論の余地のある問題である。

まず、コヒーレントな弦配位からコヒーレントな重力場が生成されるということは fuzzball 予想自体とは独立な仮定で、その正当性は必ずしも自明ではない。

弦のコヒーレント状態自体についても問題がある。これまで「コヒーレント状態は準古典的である」ということを前提に述べてきたが、(3.11b)(3.11c) を比べると、 $|a| \sim 1$ ($m \sim 1$) の場合には、位置の期待値と揺らぎは同程度の大きさとなる。いま (3.5) であることを考えると、実は F 全体がその大きさと同程度の揺らぎを持っていて、全く古典的ではない。ただ、これはホライズンの大きさのオーダーを変えるほどではないとは言える。

3.4.3 平均化操作について

ソースとなる F から fuzzball 解を構成する最終段階で、解を滑らかにするため平均化操作を行った。しかし、この操作の意味、および必然性はきわめて不明確である。コンパクト化半径以下の小さな構造を見ることができない観測者から見れば平均化されていると思ってよい、という主張も可能ではあるが、それだと純粋状態を表す解は滑らかでなければならないということと無関係であり、矛盾する可能性すらある。何れにせよ、指導原理に欠ける ad-hoc な操作とは言わざるを得ないであろう。

3.4.4 低周波成分の寄与

粗視化によるホライズンの面積を計算するもととなった (3.38) の評価は、実は通常の意味では間違っている。単純に $F(w)$ だけを考えれば、各振動モードのエネルギーへの寄与と振幅への寄与とは無関係で、 \bar{k} 付近の寄与を主要とみる近似には理由がない。実際、(3.4)(3.22) を見ると、振幅への寄与は m_k の大きい低周波成分ほど大きいことが明らかである。関数としての $F(w)$ の値の評価を通常通りに行えば

$$\overline{F^2} \sim \alpha' \sqrt{n_1 n_p} \quad (3.49)$$

となることが確かめられる。従って (3.40) が成立するためには、エネルギー的には非常に小さい低周波成分の、束縛系の大きさに対する寄与が抑制される必要がある。fuzzball 解自体としては、ひとまずは (3.22) のうち低周波成分を除いたものを用るべきということになるが、その原因となる機構は必ずしも明らかでない。

3.4.5 量子重力との関係

動機と矛盾するようであるが、fuzzball 解が量子重力に対して持つ意味は実はあまり明らかでない。この解の導出過程を見ると、そこで直接的に役割を果たしているのは量子論と言うよりも、古典論的な弦理論の効果である。これは重要な役割を果たす長さが l_p ではなく l_s であったということにも表れている。

そもそも我々は、量子重力へのアプローチの一環として情報損失のパラドックスを考えてきた。しかし NS1-P (D1-D5) 系における fuzzball 解は逆に、ある程度までは古典重力理論の範囲内で、この問題が解決できてしまうことを示唆していると見ることもできる。

この問題に関してより深い理解を得るには、超重力に対する弦理論効果と量子効果の関

係や役割をさらに詳細に検討し、またここで考えてきた系よりも量子効果がより重要になりそうな系を調べるなど、より幅広いアプローチも重要になると考えられる。

3.5 まとめ

量子重力の効果は、素朴な見積もりではプランク長程度の短距離でのみ現れるように見える。しかしブラックホールにおいて、その効果が特異点のプランク長近傍にしか及ばないとすれば、情報損失のパラドックスを回避するのは非常に難しい。

この困難を解決する枠組みとして提案された fuzzball 予想は、ブラックホールの微視的状态に対して新しい描像を提供する。量子重力の効果はホライズン半径にまで大きく広がり、微視的状态はホライズンを持たない。巨視的なホライズンは、これら微視的状态が互いに異なっている領域の境界面として、粗視化によって初めて現れる。これはブラックホールについて考える上で非常に興味深い提案と言える。

この予想は、準古典的な微視的状态を古典解で表現することによってより具体化される。NS1-P 系ブラックホールにおいては、弦のコヒーレント状態から生成される重力場として、そのような fuzzball 解を具体的に構成できる。これは特異点を持たない滑らかな解であり、かつ遠方ではブラックホール解と一致する。前章で述べたように、NS1-P 系ではホライズン面積と統計力学的なエントロピーが一致していない。しかし、これら fuzzball 解の粗視化を考えると、上記のようにして定義されたホライズンは、確かに統計力学的なエントロピーと比較して望ましいオーダーの大きさを持つことが確かめられる。

この過程では α' が重要な役割を果たすことから、 α' を含む高次微分項を無視して構成されているブラックホール解が、これと矛盾するホライズン面積を与えることも不自然ではない。逆に、古典ブラックホール解においても高次微分項を含めて考えれば、熱力学的エントロピーと統計力学的エントロピーは一致するのではないかと予想される。その場合、fuzzball 予想によれば、量子論的な状態の粗視化と古典解のホライズンが直接的に結びつけられることになる。

その一方で、この fuzzball 解自体の意味付けには微妙な問題もいくつかある。NS1-P (D1-D5) 系以外の系の研究や、fuzzball 解を用いない解析手法などとも組み合わせ、fuzzball 予想及び fuzzball 解のより正しい意味を理解することは、今後の重要な課題であろう。

第 4 章

AdS/CFT 対応と LLM bubbling 幾何

超弦理論/M 理論とゲージ理論の間には、AdS/CFT 対応または AdS/CFT 双対性 [14–17] と呼ばれる等価関係のあることが予想されている。AdS/CFT 対応には次元、超対称性及びゲージ群の異なる様々な場合が知られているが、その中でも最もよく研究されているのが、 $\text{AdS}_5 \times S^5$ 背景時空上の IIB 型超弦理論と、4 次元の $\mathcal{N} = 4$ 超対称 $\text{SU}(N)$ Yang-Mills 理論との対応である。この場合には、弦理論側で古典近似が良い場合の超重力解と、Yang-Mills 理論側での状態との対応関係も、1/2 BPS の特定のセクターに関しては具体的に予想されている [18]。この対応を与える公式は LLM 公式、それによる一連の超重力解は LLM bubbling 幾何と呼ばれる。本章では、これらの事項について説明する。

4.1 AdS 空間とその境界構造

AdS/CFT 対応の説明に入る前に、まず本節で AdS 空間の定義およびその性質について簡単に述べる。AdS/CFT 対応を考える際には特に、AdS 空間の境界がどのような構造を持つかが重要になる。

4.1.1 Anti-de-Sitter 空間

$d+1$ 次元 Anti-de-Sitter(AdS) 空間 AdS_{d+1} ($d = 1, 2, 3, \dots$) とは、符号 $(2, d)$ の平坦な計量

$$ds^2 = -dX_0^2 - dX_{d+1}^2 + \sum_{i=1}^d dX_i^2 \quad (4.1)$$

を持つミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^{2,d}$ に埋め込まれた $d+1$ 次元双曲面

$$X_0^2 + X_{d+1}^2 - \sum_{i=1}^d X_i^2 = R^2 \quad (4.2)$$

として定義される空間のことをいう。ただし、物理の文脈で普通 AdS 空間と言うときは、この空間をさらに時間方向が非コンパクトになるように切り開いたもののことを指す。この点については後述する。

明らかに、(4.1) 及び (4.2) はともに Lorentz 変換 $\text{SO}(2, d)$ によって不変である。従って、 AdS_{d+1} は $\text{SO}(2, d)$ の対称性を持っている。

4.1.2 AdS 空間の構造と座標系

グローバル座標系と時間の非コンパクト化

以下では $d \geq 2$ の場合を考える。このとき (4.2) をみたく (X_0, \dots, X_{d+1}) は、明らかに

$$X_0 = R \cosh \rho \cos \tau \quad (4.3a)$$

$$X_{d+1} = R \cosh \rho \sin \tau \quad (4.3b)$$

$$X_i = R \sinh \rho \Omega_i \quad (i = 1, \dots, d, \sum_i \Omega_i^2 = 1) \quad (4.3c)$$

のようにパラメータ付けすることができる。ここで (τ, ρ, Ω_i) の変域をそれぞれ

$$0 \leq \tau \leq 2\pi \quad (\tau \simeq \tau + 2\pi) \quad (4.4a)$$

$$0 \leq \rho \quad (4.4b)$$

$$(\Omega_1, \dots, \Omega_d) \in S^{d-1} \quad (4.4c)$$

とすると、座標系 $(\tau, \rho, \Omega_i) \in S^1 \times [0, \infty) \times S^{d-1}$ はこのただ 1 つの座標近傍によって (4.2) 全体を覆っている ($\rho = 0$ で S^{d-1} が潰れるので同相関係はない)。この性質のため、この座標系をグローバル座標系と呼ぶ。

(4.3) を (4.1) に代入すると、計量のグローバル座標系による表示

$$ds^2 = R^2 (-\cosh^2 \rho d\tau^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\Omega_{(d-1)}) \quad (4.5)$$

が得られる ($d\Omega_{(d-1)}$ は単位球面 S^{d-1} の計量である)。これは $\rho = 0$ の近傍では

$$ds^2 \approx R^2 (-d\tau^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_{(d-1)}) \quad (4.6)$$

となり、時間方向 τ がコンパクト化されたミンコフスキー空間 $S^1 \times \mathbb{R}^d$ と等しい。大きな ρ でも位相的に非自明なことは何もないので、結局 AdS_{d+1} は全体として $S^1 \times \mathbb{R}^d$ と同相であることがわかる。

(4.2) によって構成された AdS 空間は、このように時間方向が S^1 コンパクト化されている。よってこの時空は因果的ではなく、物理を考える対象としては適切でない。これは、コンパクト化されている τ 方向の S^1 を \mathbb{R} に切り開く (被覆空間をとる) 操作によって新たな空間を構成することで解決される。形式的には、単に計量の表式 (4.5) を保ったままで τ の変域を

$$(4.4a) \quad \Rightarrow \quad -\infty < \tau < \infty \quad (4.7)$$

のように変更すればよい。以下では AdS 空間と言えば専ら、このようにして時間方向を非コンパクト化した空間のことを指すものとする。なお、この非コンパクト化操作は空間の局所的な構造には影響を与えないため、空間の持つ対称性の代数は $\text{so}(2, d)$ のままで不変である。

AdS 空間の境界構造

グローバル座標系に対して、さらに

$$\tan \theta = \sinh \rho \quad (4.8)$$

なる座標変換を行う。ここで (4.4b) から

$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \quad (4.9)$$

である。すると計量 (4.5) は

$$ds^2 = \frac{R^2}{\cos^2 \theta} \left(-d\tau^2 + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Omega_{(d-1)}^2 \right) \quad (4.10)$$

となり、これは共形変換によって

$$ds^2 \stackrel{C.T.}{\cong} ds'^2 = -d\tau^2 + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Omega_{(d-1)}^2 \quad (4.11)$$

と変形される。一般に共形変換によって時空の因果構造など是不変である。 ds'^2 は明らかに $\mathbb{R} \times S^d$ の計量を表すが、 S^d の全域を覆う座標の範囲は $0 \leq \theta \leq \pi$ なので、(4.9) が覆う空間方向は S^d の半分 (以下 S^d_+ という) となる。よって、共形変換を施した AdS_{d+1} (4.11) は $\theta = \frac{\pi}{2}$ 、つまりもとのグローバル座標で言えば無限遠 ($\rho = \infty$) に境界 $\mathbb{R} \times S^{d-1}$ を持つ。これは AdS_{d+1} の共形境界と呼ばれるが、以下では簡単のため、単に AdS_{d+1} の境界、もしくは境界に共形同値な空間などとも呼ぶことにしよう。

ポアンカレ座標系

AdS 空間にはグローバル座標系の他に、ポアンカレ座標系と呼ばれる次のような座標系 $(U, x_0, x_1, \dots, x_{d-1})$ または $(u, x_0, x_1, \dots, x_{d-1})$ もよく用いられる。

まず座標系 $(U, V, x_0, x_1, \dots, x_{d-1})$ を、 $(X_0, X_1, \dots, X_{d+1})$ から

$$U = X_{d+1} + X_d \quad (4.12a)$$

$$V = X_{d+1} - X_d \quad (4.12b)$$

$$x_i = R \frac{X_i}{U} \quad (i = 0, 1, \dots, d-1) \quad (4.12c)$$

のような座標変換によって定める。すると、(4.2) を用いることで V は

$$V = \frac{U}{R^2} \eta_{\mu\nu}^{(d)} x^\mu x^\nu + \frac{R^2}{U} \quad (4.13)$$

($\eta_{\mu\nu}^{(d)}$ は通常の d 次元ミンコフスキー計量) と表され、独立な自由度でないことがわかる。これによって V を消去し、残りの $(U, x_0, x_1, \dots, x_{d-1})$ で計量 (4.1) を表すと

$$ds^2 = \frac{U^2}{R^2} \eta_{\mu\nu}^{(d)} dx^\mu dx^\nu + \frac{R^2}{U^2} dU^2 \quad (4.14)$$

となる。あるいは、ここでさらに

$$u = \frac{U}{R^2} \quad (4.15)$$

と変換して座標系 $(u, x_0, x_1, \dots, x_{d-1})$ を用いると、

$$ds^2 = R^2 \left(u^2 \eta_{\mu\nu}^{(d)} dx^\mu dx^\nu + \frac{du^2}{u^2} \right) \quad (4.16)$$

のように表すこともできる。ポアンカレ座標系による表示は特に、プレーン配位を表す超重重力解と AdS 空間の対応を見るのに便利である。

なお、ポアンカレ座標系が覆う範囲は $\text{AdS}_{d+1} \stackrel{\text{C.T.}}{\cong} \mathbb{R} \times S^d_+$ の有界な領域 (非コンパクト化する前の全空間の半分) で、 $u = \infty$ の全体と $u = 0$ の一部が S^d_+ の境界 (= AdS_{d+1} の境界) の一部に対応している。

4.1.3 AdS 空間の境界とミンコフスキー空間の共形対応

AdS/CFT 対応を考える準備として、ここでは AdS_{d+1} の境界とミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^{1,d-1}$ との間の共形対応を考えよう。 AdS_{d+1} の境界は、上で述べた通り $\mathbb{R}^{1,0} \times S^{d-1}$ と共形同値である。この空間の一部または全部は、以下のように複数の方法によって $\mathbb{R}^{1,d-1}$ と共形対応をつけることができる。

グローバル座標系を用いた対応

d 次元ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^{1,d-1}$ の計量は

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega_{d-2}^2 \\ &= -dudv + \frac{1}{4}(u-v)^2 d\Omega_{d-2}^2 \quad (u = t+r, v = t-r) \\ &= \frac{1}{\cos^2 \tilde{u} \cos^2 \tilde{v}} \left(-dudv + \frac{1}{4} \sin^2(\tilde{u} - \tilde{v}) d\Omega_{d-2}^2 \right) \quad (u = \tan \tilde{u}, v = \tan \tilde{v}) \\ &= \frac{1}{4 \cos^2 \tilde{u} \cos^2 \tilde{v}} (-d\tau^2 + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Omega_{d-2}^2) \quad (\tau = \tilde{u} + \tilde{v}, \theta = \tilde{u} - \tilde{v}) \quad (4.17) \end{aligned}$$

のような表示が可能である。これは共形変換によって

$$ds^2 \stackrel{C.T.}{\cong} ds'^2 = -d\tau^2 + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Omega_{d-2}^2 \quad (4.18)$$

となり、 $\mathbb{R} \times S^{d-1}$ の計量が得られる。よって、 AdS_{d+1} の境界（無限遠）は、ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^{1,d-1}$ と局所的に共形同値であることがわかる。

対応する範囲について考えると、(4.18) によって $\mathbb{R} \times S^d$ の全体を覆うには $-\infty < \tau < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$ が必要である。座標変換 (4.17) で変換前の座標 (t, r) ($-\infty < t < \infty$, $0 \leq r$) に対応する変換後の座標 (τ, θ) の範囲は、 $(-\pi, 0)$, $(\pi, 0)$, $(0, \pi)$ を頂点とする三角形の内部（境界は τ 軸上の区間 $(-\pi, \pi)$ のみ含む）となるから、これは $\mathbb{R} \times S^d$ のごく一部分、有界な領域に過ぎない。

ただし、このような領域の上で定義された CFT を考えると、その分配関数は $\mathbb{R} \times S^d$ 全体に解析接続可能であることも知られている。

ポアンカレ座標系を用いた対応

ポアンカレ座標系による AdS_{d+1} の計量 (4.16) は共形変換によって

$$ds^2 \stackrel{C.T.}{\cong} ds'^2 = \eta_{\mu\nu}^{(d)} dx^\mu dx^\nu + \frac{du^2}{u^4}$$

$$\xrightarrow{u \rightarrow \infty} \eta_{\mu\nu}^{(d)} dx^\mu dx^\nu \quad (4.19)$$

となるから、 AdS_{d+1} の境界の一部 (有界領域) である $u \rightarrow \infty$ は $\mathbb{R}^{1,d-1}$ と共形同値である。これは (4.11)(4.18) によるものとはまた異なる形での共形対応であり、 AdS_{d+1} 側と $\mathbb{R}^{1,d-1}$ 側で同じ方向の時間座標を用いた対応づけを与えていることが特徴である。

グローバル座標系と Wick 回転を用いた対応

上の 2 つの方法では $\mathbb{R}^{1,d-1}$ を AdS_{d+1} 境界の有界領域に対応させたが、Wick 回転まで許せば、 AdS_{d+1} 境界の全体を $\mathbb{R}^{1,d-1}$ と 1 対 1 に共形対応させることも可能である。

まず、 $\mathbb{R}^{1,d-1}$ を Wick 回転により \mathbb{R}^d に変換する。するとこの計量は

$$\begin{aligned} ds^2 &= dr^2 + r^2 d\Omega_{d-1}^2 \\ &= e^{2\tau} (d\tau^2 + d\Omega_{d-1}^2) \quad (r = e^\tau) \\ &\stackrel{C.T.}{\cong} d\tau^2 + d\Omega_{d-1}^2 \end{aligned} \quad (4.20)$$

となって、ユークリッド $\mathbb{R} \times S^{d-1}$ に共形同値となる。よって再びこの \mathbb{R} 方向を Wick 回転すれば、ローレンツ $\mathbb{R} \times S^{d-1}$ が得られる。これは勿論、(4.11) によって AdS_{d+1} の境界と共形同値である。

この対応においてはその過程で 2 度の Wick 回転を行っているために、 AdS_{d+1} 側と $\mathbb{R}^{1,d-1}$ 側での時間方向は全く異なっている。(4.20) の最終式を Wick 回転した $\mathbb{R} \times S^3$ の時間 τ は AdS_{d+1} のグローバル座標系における時間と等しいが、この方向の並進変換 $\tau \rightarrow \tau + \delta$ は、 $\mathbb{R}^{1,d-1}$ においてはスケール変換 $x^\mu \rightarrow e^\delta x^\mu$ に対応している。

4.2 AdS/CFT 対応

AdS/CFT 対応とは、 AdS_{d+1} を背景とする超弦理論または M 理論と、 d 次元の共形対称なゲージ理論 (CFT) とが双対関係にあり等価であるという予想である。より詳しく言えば、ある種のコンパクトな n 次元リーマン多様体 \mathcal{M}^n (佐々木 - アインシュタイン多様体と呼ばれる) に対して、 $\text{AdS}_{d+1} \times \mathcal{M}^{9-d}$ 背景時空中の (つまり、無限遠で漸近的に $\text{AdS}_{d+1} \times \mathcal{M}^{9-d}$ となるような時空を記述する) 超弦理論、もしくは $\text{AdS}_{d+1} \times \mathcal{M}^{10-d}$ 背景時空中の M 理論に対して、これらの AdS 境界上で定義された何らかの d 次元 CFT が存在し、それら 2 つの理論の相関関数が後述する GKP-Witten の関係式で結ばれると予想されている。

その中でも最もよく研究され、多くのことが知られているのが、 $\text{AdS}_5 \times S^5$ 背景上の IIB 型超弦理論と 4 次元 $\mathcal{N} = 4$ $\text{SU}(N)$ Yang-Mills 理論 (よく知られているように、こ

れは確かに CFT である)との対応である。本節では専らこの場合に即して、AdS/CFT 対応の概要を説明する [17]。

4.2.1 D3 ブレーン系における AdS₅/CFT₄ 対応

IIB 型超弦理論で、D3 ブレーンが N 枚重なっている系を考えよう。この系に対しては、互いに等価と考えられる 2 通りの見方が可能である。以下ではそれらについて順に説明した後、両者の等価性を用いて、この系における AdS/CFT 対応を予想として導く。

重力系として見た描像

まずはこの系を、ブレーンも含めて全てが重力理論で記述された系として調べよう。この配位に対応する IIB 型超重力解は

$$ds^2 = H^{-\frac{1}{2}} \eta_{\mu\nu}^{(4)} dx^\mu dx^\nu + H^{\frac{1}{2}} (dr^2 + r^2 d\Omega_{(5)}^2) \quad (4.21a)$$

$$F^{(5)} = (1 + *) dt \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge d(H^{-1}) \quad (4.21b)$$

$$H = 1 + \frac{q_5 N}{r^4}, \quad q_5 = 4\pi g_s \alpha'^2 \quad (4.21c)$$

と表される。 μ, ν は D3 ブレーンに平行な方向 ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$) で、 $\eta_{\mu\nu}^{(4)}$ はそのミンコフスキー計量を表す。 r はブレーンに垂直な方向の動径 ($r^2 = x_4^2 + \dots + x_9^2$)、 $\Omega_{(5)}$ はその角度座標である。

ここで L を

$$L^4 = q_5 N \quad \Leftrightarrow \quad L = (4\pi N g_s \alpha'^2)^{\frac{1}{4}} \quad (4.22)$$

と定め、解 (4.21) で $r \ll L$ の領域を考えよう。するとここでは $H \approx \frac{q_5 N}{r^4} = \left(\frac{L}{r}\right)^4$ なので

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(\frac{r}{L}\right)^2 \eta_{\mu\nu}^{(4)} dx^\mu dx^\nu + \left(\frac{L}{r}\right)^2 (dr^2 + r^2 d\Omega_{(5)}^2) \\ &= \left[\left(\frac{r}{L}\right)^2 \eta_{\mu\nu}^{(4)} dx^\mu dx^\nu + \left(\frac{L}{r}\right)^2 dr^2 \right] + L^2 d\Omega_{(5)}^2 \end{aligned} \quad (4.23)$$

となる。するとこれは丁度 AdS₅ × S⁵ (AdS₅ はポアンカレ座標系) の計量となっており、それらの半径はいずれも L 、すなわち

$$R_{\text{AdS}_5} = R_{S^5} = (4\pi N g_s \alpha'^2)^{\frac{1}{4}} \quad (4.24)$$

である。また $F^{(5)}$ について考えると、任意の (r, x^μ) において

$$\int_{S^5} F^{(5)} = N \quad (4.25)$$

の関係がある。

逆に $L \ll r$ の領域では、 $H \approx 1$ なので明らかに計量は 10 次元のミンコフスキー計量となる。

以上から、このような D3 ブレーンを背景とする有効理論の作用は

$$S_{total} = S_{\text{AdS}_5 \times S^5} + S_{flat} + S_{int} \quad (4.26)$$

のように表すことができる。ここで $S_{\text{AdS}_5 \times S^5}$ と S_{flat} はそれぞれ $r \ll L$ および $L \ll r$ 領域の寄与、 S_{int} はこれら 2 つの領域の場の相互作用 ($r \sim L$ における場の積分で現れる項) である。

一般に AdS 空間において、ポアンカレ座標系でみたときの場のエネルギーは計量の時間方向成分 $g_{tt} = -\frac{r^2}{L^2}$ の r 依存性により観測者の位置に依存し、 $r = r_0$ における場を $r = r_{obs}$ の遠方から見ればエネルギー E は赤方偏移して $\frac{r_0}{r_{obs}} E$ に見える。あるいはこれは重力ポテンシャルを登る結果とも解釈でき、定性的にはブラックホール/ブラックブレーン時空で一般に見られる現象である。従って $r \ll L$ 領域の励起は $L \ll r$ の平坦領域から見ると非常に大きく赤方偏移していて、この領域に対して影響を与えない。

一方、 $L \ll r$ 領域の場の励起が $r \ll L$ 領域に対して与える影響を考えよう。直観的には、平坦領域から見た $r < L$ 領域の体積は高々一定だから、長波長になるほどそれは小さく見え、吸収されなくなるであろう。実際、吸収断面積 σ は場のエネルギーを ω として

$$\sigma \propto (L\omega)^n \quad (n \geq 3) \quad (4.27)$$

であることが知られている [37]。従って $L \ll r$ 領域での低エネルギー励起に限定すれば、 $r \ll L$ の AdS 領域には影響を与えない。この条件は

$$\omega L \ll 1 \quad \Leftrightarrow \quad \omega \ll \frac{M_p}{N^{\frac{1}{4}}} \quad (4.28)$$

と表され、特に N が大きくない場合は $\omega \ll M_p$ となる。

以上により、D3 ブレーンから十分遠方で見た場合に系が十分低エネルギーであれば、この系は $\text{AdS}_5 \times S^5$ 背景上の理論として記述される $r \ll L$ 部分と、 $\mathbb{R}^{1,9}$ 背景上の理論として記述される $L \ll r$ 部分の、互いに相互作用しない 2 つの系に分かれることがわかる。これを式で表せば

$$S_{total}^{eff} = S_{\text{AdS}_5 \times S^5} + S_{flat} \quad (4.29)$$

となる。

ブレーン系として見た描像

この系のもう 1 つの描像を考えよう。D3 ブレーンの存在を顕わな形で書くと、系のすべての自由度は D3 ブレーン上の開弦と、ブレーンから離れて存在する閉弦によって表される。開弦と閉弦の間にも相互作用がある（摂動論的には、閉弦がブレーンに衝突して開弦になる過程に対応する）ので、系全体の作用は

$$S_{total} = S_{open} + S_{closed} + S_{int'} \quad (4.30)$$

と表される。特に低エネルギー有効理論を考えると、 S_{open} では有質量モードや高次相互作用を含む項が α' の正冪に比例するので、これらの項を落とせば 4 次元 $\mathcal{N} = 4$ の純粋な $SU(N)$ Yang-Mills 理論となる。またこのとき、その結合定数 g_{YM} は弦理論の結合定数 g_s を用いて

$$g_{YM} = \sqrt{2\pi g_s} \quad (4.31)$$

で与えられる。同様に S_{closed} は $\mathbb{R}^{1,9}$ 上の超重力理論となる。 $S_{int'}$ については全ての項が α' の正冪に比例しており、これは低エネルギーで開弦と閉弦の相互作用が無視できることを意味している。以上から、この系を記述する低エネルギー有効理論は

$$S_{total}^{eff} = S_{YangMills} + S_{gravity} \quad (4.32)$$

のように表されることがわかる。

両描像の比較と AdS/CFT 対応

以上 2 つの描像から得られた結果 (4.29) と (4.32) を比較しよう。これらのうちで、(4.29) の S_{flat} と (4.32) の $S_{gravity}$ は同じものと考えられる。すると、残りの部分同士もまた等しいはずで

$$S_{AdS_5 \times S^5} = S_{YangMills} \quad (4.33)$$

となるであろう。すなわち、半径が (4.24) で与えられる $AdS_5 \times S^5$ の背景上で AdS_5 のホライズン近傍を記述する IIB 型超弦理論と、4 次元 $\mathcal{N} = 4$ の $SU(N)$ Yang-Mills 理論とが等価である。

これは D3 ブレーンの近傍を遠くから見たときに、そこに閉弦が集まってソリトンを形作っていると見ても良いし、ブレーンと開弦がいると見ても良い、という一種の開弦/閉

Type IIB Superstring on $\text{AdS}_5 \times S^5$			$\mathcal{N} = 4$ $\text{SU}(N)$ Super Yang-Mills CFT	
(1)	Isometry $\text{SO}(2, 4)$ of AdS_5	\Leftrightarrow	4-dimensional conformal group $\text{SO}(2, 4)$	
(2)	32 local SUSY's of $\text{AdS}_5 \times S^5$	\Leftrightarrow	16 + 16 SUSY's in $\mathcal{N} = 4$ superconformal group	
(3)	Self S-duality $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$	\Leftrightarrow	Self S-duality $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$	
(4)	Isometry $\text{SO}(6)$ of S^5	\Leftrightarrow	R-Symmetry $\text{SU}(4)$ of $\mathcal{N} = 4$ SUSY	

表 4.1 $\text{AdS}_5/\text{CFT}_4$ 対応 ($\mathcal{N} = 4$) における対称性の対応関係

弦双対性を表していると考えられ、直観的にも自然である。しかし一方で、重力理論（閉弦の理論）とゲージ理論の対応として見ると、後者の理論が定義されている時空は前者の理論の時空の境界であって、次元の異なる理論同士の対応となっている。一般に、このような関係にある理論の間の等価関係のことをホログラフィック対応 [38, 39] と呼ぶ。

この議論に用いた条件はいずれの描像においても、無限遠から見て系が十分に低エネルギーにあるとみなせることである。これは (4.33) において、右辺は低エネルギー有効理論で記述されていることを意味するが、それは左辺においては $r \ll L$ 領域という形で現れ、局所的には低エネルギーという形での制限はつかない。従って左辺の理論は、一般には量子効果及び有質量モードの効果までも含んだ超弦理論と考えなければならない。

(4.33) の両辺でそれぞれの理論が持つ対称性の比較をすると、左辺がどのような理論であるべきかがさらに詳細にわかる。2つの理論が本当に等価であるならば、両者の持つ対称性もまた等しく、それらの間には 1 対 1 の対応関係がなければならない。このことから、双方の理論の持つ対称性の間に成立すると考えられる対応関係を表 4.1 に示した。

まず対応 (1) について考えよう。ポアンカレ座標系における共形対応 (4.19) を考えると、共形変換群の中でも最も重要なスケール変換 D_{CFT} は、左辺の AdS_5 に対する変換としては

$$D_{\text{AdS}} : (x^\mu, r) \rightarrow (cx^\mu, \frac{r}{c}) \quad (c > 0) \quad (4.34)$$

に対応している。いま左辺の理論には $r \ll L$ 領域という制限があるため、この変換に対する対称性は厳密には成り立っていない。これに対応して右辺の Yang-Mills 理論側でも同じことが言え、非常に高エネルギーにスケール変換を行えば、有質量モードの効果が無視できなくなるために共形不変性は破れる。しかし低エネルギー側にスケール変換した極限を考えると、右辺の理論は有質量モードを全く含まない純粋な $\mathcal{N} = 4$ Yang-Mills 理論、つまり厳密な CFT となる。このようなスケール変換は、(4.34) においては $c \rightarrow 0$ の極限に対応する。すると変換後の理論が記述する領域は $r \ll \frac{L}{c} \rightarrow \infty$ となり、 AdS_5 の無限遠までを含む理論となる。このとき左辺も厳密な $\text{SO}(2, 4)$ 対称性を回復するので、(1)

の対応も確かに成り立っている。以後は専らこの場合を考える。

次に (3) を見ると、 $\mathcal{N} = 4$ Yang-Mills 理論の持っている $SL(2, \mathbb{Z})$ 自己双対性は、IIB 型超弦理論の摂動形式では持ち得ない。よって左辺は非摂動効果をも含んだ理論、つまり現在我々が単純に想定する範囲での「完全な」IIB 型超弦理論であると考えられる。逆にそのような場合、両理論の対称性の間には、表 4.1 で与えられる完全な対応関係が確かに成立していることがわかる。

AdS/CFT 対応は現時点であくまで予想であり、ここまでの導出は勿論厳密なものではない。通常の意味での弦理論の摂動論、すなわち g_s に関する摂動論の結果を用いているほか、低エネルギーで α' の冪を含む項を落としていることは α' も摂動的に扱っていることを意味している。完全な弦理論では g_s, α' とともに非摂動的な扱いがなされなければならない、そのような理論の定式を我々は知らない。にもかかわらず、そのような理論が $\mathcal{N} = 4$ Yang-Mills 理論と等価であるということを AdS₅/CFT₄ 対応 (4.33) は主張する。この予想が正しいとすれば、そのような未知の理論の予言を Yang-Mills 理論を用いて調べることが可能になる。

4.2.2 古典重力近似とラージ N

述べてきたように、AdS₅/CFT₄ 対応 (4.33) において、左辺が記述する理論は AdS₅ × S⁵ 背景時空上の完全な IIB 型超弦理論と考えられる。では、これによる物理量の計算が古典超重力理論で近似できる場合とはどのようなときか考えよう。

まず、背景上で励起される場が十分に低エネルギーあること ($\omega \ll M_p$) のほか、弦の非摂動効果が無視できるために弱結合 ($g_s \ll 1$) であることが必要である。強結合の場合はブレーンが軽くなって基本的な自由度として現れ、超重力近似は破綻する。

しかし、今の場合にはこれだけでは十分ではない。この背景時空 AdS₅ × S⁵ はそれ自体が曲率つまりエネルギーを持っているので、それが十分に小さいという条件も必要である。AdS₅ と S⁵ の半径はともに (4.24) で与えられるのでこれが十分に大きければ良いことになるが、ここでも「十分に大きい」ということには 2 通りの意味がある。すなわち、高次微分項を含まない古典超重力理論による記述が有効であるためには

1. $L \gg l_p$: 量子重力の効果 (ループの寄与) が無視できるための条件。
2. $L \gg l_s$: 有質量励起モード (高次微分項) が無視できるための条件。

の両方が必要である。ただし、いま上の弱結合条件から $l_p (= g^{\frac{1}{4}} l_s) < l_s$ なので、2. のみ

考えれば十分であり、

$$4\pi N g_s \alpha'^2 \gg \alpha'^2 \Leftrightarrow N g_s \gg 1 \quad (4.35a)$$

または、これを Yang-Mills 理論側の結合定数 (4.31) を用いて表せば

$$N g_{YM}^2 \gg 1 \quad (4.35b)$$

と書ける。なお 1. から導かれる条件は $N \gg 1$ となる。

ちなみに、Yang-Mills 理論側で摂動展開の近似が良い条件は、少なくとも素朴には

$$N g_{YM}^2 \ll 1 \quad (4.36)$$

と表されることが容易にわかる。従って対応 (4.33) において、左辺が古典超重力理論で近似される条件と、右辺が Yang-Mills 理論の摂動論で近似される条件は全く異なる領域に対応している。このことから AdS/CFT 対応は、ラージ N 領域 (4.35) における Yang-Mills 理論の非摂動的な挙動を、古典超重力理論の計算で調べるといった形でも利用される。ただし、これは本稿で用いたい AdS/CFT 対応の利用法とはいわば逆方向の話となるので、これについてはこれ以上述べない。

4.2.3 諸量の対応関係

ここでは対応 (4.33) についてさらに詳細に見ていく。

相関関数の対応 - GKP-Witten の関係式

対応 (4.33) の具体形について考えよう。ブレーンを遠方から見ると、右辺の描像にはブレーンの面が見え、左辺の描像には $\text{AdS}_5 \times S^5$ 領域の境界面が見えるであろう。これらの間に確かに共形対応がつけられることは既に 4.1 項で見た。

右辺の Yang-Mills 理論において、ある点に演算子を挿入することは、ブレーン外からその点に粒子（閉弦）を入射することと解釈できる。これは AdS 側の描像で見れば、遠方からの粒子の入射、つまり境界条件（漸近領域における $\text{AdS}_5 \times S^5$ 背景からの摂動）が与えられることに等しい。

遠方からブレーン近傍に入射した閉弦の間の相関関数は物理量であり、これは重力/ブレーンいずれの描像によって計算しても一致しなければならない。相関関数はその生成汎関数つまり分配関数によってその全てが与えられるから、最終的に AdS/CFT 対応は双方で計算した分配関数が等しい（規格化因子は除く。以下も特に断らない限り同様）という形で定式化される。

AdS 側の分配関数 Z_{AdS} は、AdS の境界における場 $\{\Phi_i\}$ の背景からの摂動 $\Phi^0 = \{\Phi_i^0\}$ の関数として与えられる。ただし AdS の境界における摂動とは、十分遠方にとった境界面 $r = r_0$ 上で摂動 $f \cdot \Phi^0$ ($\lim_{r_0 \rightarrow \infty} f = 0$) を与える操作の $r_0 \rightarrow \infty$ 極限である。ここで各 Φ_i^0 は一見 $\partial(\text{AdS}_5) \times S^5$ (9 次元) 上の場のように見えるが、 S^5 上の依存性については調和関数展開を行って各係数を独立の Φ_i^0 とみなすことができ、このとき Φ^0 は AdS_5 の境界 (4 次元) 上で定義された可算個の場の集合となる。特に、古典超重力近似の良い場合には経路積分は古典解部分が主要な寄与を与えるので、 Z_{AdS} は

$$Z_{\text{AdS}}[\Phi^0] \approx \exp(-S_{\text{sugra}}[\Phi^{cl}]) \quad (4.37)$$

によって計算できる。ここで $\Phi^{cl} = \{\Phi_i^{cl}\}$ は境界条件 Φ^0 を満たす古典運動方程式の解であり、 Φ^0 が十分小さい場合には一意に決まることが知られている。古典近似が良くない場合でも、我々はその具体的な方法を知らないが、 $Z_{\text{AdS}}[\Phi^0]$ は完全な弦理論によって計算されると考えられる。

一方 Yang-Mills 理論 (CFT) 側で見れば、 Φ_i^0 は何らかの局所演算子 \mathcal{O}^i に対応する外場であり、分配関数 Z_{CFT} は

$$Z_{\text{CFT}}[\Phi^0] = \left\langle \exp \left(\int d^4x \Phi_i^0(x) \mathcal{O}^i(x) \right) \right\rangle_{\text{CFT}} \quad (4.38)$$

と定められる。

上で述べた条件は、これら 2 つの分配関数に対して

$$Z_{\text{AdS}}[\Phi^0] = Z_{\text{CFT}}[\Phi^0] \quad (4.39)$$

の関係が成立することを主張する。これは GKP-Witten の関係式 [15, 16] と呼ばれている。

時空の対応

弦理論と Yang-Mills 理論、それぞれの定義される時空及びそれらの対応関係について、あらためて考えよう。

弦理論の定義されている背景時空をこれまで $\text{AdS}_5 \times S^5$ と呼んできたが、変換 (4.34) によって r 方向の無限遠方までを含めた後であっても、正確に言えば $\text{AdS}_5 \times S^5$ の一部分である。D3 プレーン系では、重力解 (4.21) はこの座標系だけで全時空を覆う大域的な表示であり、従ってその $r \approx 0$ 近傍 (4.23) も、この座標系で記述される領域が全てである。従って、弦理論の記述する範囲を AdS 空間として見ると、この 1 つのポアンカレ座標近傍として与えられる領域に限られる。このとき、その境界 $r \rightarrow \infty$ は、Yang-Mills 理

論の定義されている $\mathbb{R}^{1,3}$ と、共形変換 (4.19) によって 1 対 1 に対応する。GKP-Witten の関係式 (4.39) における Φ^0 も、この領域で定義された場ということになる。

このとき Yang-Mills 理論側は、 AdS_5 の境界 $\mathbb{R} \times S^3$ 上の有界・単連結な領域で定義された CFT となる。このような CFT の分配関数、つまり今の場合 $Z_{\text{CFT}}[\Phi^0]$ は、4.1.3 項でも述べたように $\mathbb{R} \times S^3$ 全体に解析接続可能であることが知られている。すると (4.39) により、 $Z_{\text{AdS}}[\Phi^0]$ もやはり $\mathbb{R} \times S^3$ 上に解析接続される。すると、この解析接続された $Z_{\text{AdS}}[\Phi^0]$ は、 $\text{AdS}_5 \times S^5$ 全体で定義された IIB 型超弦理論に対して、その境界条件に関する分配関数を与えると予想するのが自然であろう。ポアンカレ座標近傍に限られていたときには背景時空にホライズン ($r \rightarrow 0$) が存在し、これは困難をもたらす場合も予想されるが、AdS 全体の理論になればそれもなくする利点がある。

ところでこれも 4.1.3 項で述べたように、Wick 回転を許せば $\mathbb{R} \times S^3$ の全体が $\mathbb{R}^{1,3}$ と再び共形同値となる。従って、この $\mathbb{R}^{1,3}$ (以下 $\mathbb{R}_B^{1,3}$) の一部領域は、もともと Yang-Mills 理論 (CFT_A) が定義されていた $\mathbb{R}^{1,3}$ ($\mathbb{R}_A^{1,3}$) 全体からの共形変換及び Wick 回転で得られる。通常、Yang-Mills 理論に対して Wick 回転が問題を引き起こすことはなく、 $\mathcal{N} = 4$ $\text{SU}(N)$ Yang-Mills 理論は CFT だから、 $\mathbb{R}_B^{1,3}$ のこの領域では、変換後の理論もまた変換前の $\mathbb{R}_A^{1,3}$ 上の理論と同じ結合定数 g_{YM} 及び N を持つ $\mathcal{N} = 4$ $\text{SU}(N)$ Yang-Mills 理論 (CFT_B) となっている。すると、 $\mathbb{R}_B^{1,3}$ のある領域で Yang-Mills 理論であるものが、解析接続によって $\mathbb{R}_B^{1,3}$ 全体で定義された通常の Yang-Mills 理論となることは自明である。

以上のことから $\text{AdS}_5/\text{CFT}_4$ 対応は、 $\text{AdS}_5 \times S^5$ の全体を背景とする IIB 型超弦理論と、 AdS_5 の境界 $\mathbb{R} \times S^3$ 上の $\mathcal{N} = 4$ Yang-Mills 理論 (CFT_C)、または Wick 回転を通じてそれと共形同値な $\mathbb{R}_B^{1,3}$ 上の Yang-Mills 理論 (CFT_B) の間の双対関係と捕え直すこともできる。ただし、同じ Φ^0 に対応する演算子 \mathcal{O} は、 AdS_5 のポアンカレ座標域と双対な $\mathbb{R}_A^{1,3}$ 上の CFT_A の場合からは変更されている。また、 CFT_B は AdS 論側及び CFT_A と時間方向が全く異なっているため、エネルギーや状態の概念も双方で全く異なることに留意する必要がある。これに対して CFT_C の時間方向は AdS_5 のグローバル座標系と一致しているので、これらの対応は比較的考えやすい。

場と演算子の対応

GKP-Witten の関係式 (4.39) においては、同じ Φ_i^0 が AdS 側では Φ_i の境界値であると同時に、CFT 側では \mathcal{O}^i を励起する外場であるという、AdS 側の場と CFT 側の演算子との 1 対 1 の対応関係がある。例えば比較的わかりやすいものとしては、CFT 側のエネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ に対して、AdS 側では S^5 の Kaluza-Klein 運動量を持たないグラビトン場 $h_{\mu\nu}$ が対応している。しかし、CFT 側である任意の演算子 \mathcal{O}^i の外場と

なる Φ_i^0 が、AdS 側で具体的にどのような場 Φ の境界条件を与えているかは一般には高度に非自明で、個別に考えなければならない。

状態の間の対応

CFT_B における任意の局所演算子 $\mathcal{O}(x)$ を考えよう。この演算子に対しては、CFT における通常の状態/演算子対応により、CFT_C におけるある状態 $|\mathcal{O}\rangle$ が対応する。すなわち、CFT_B において \mathcal{O} を $\mathbb{R}_B^{1,3}$ の原点に配置すると、これは共形対応 (4.20) によって CFT_C の無限過去の状態を指定し、またそれにより有限の τ における状態も定まる。具体的には、CFT_B 側の \mathbb{R}_B^4 上で原点 (\mathcal{O}) 中心・半径 e^{τ_0} の球体に対して、その境界面 (S^3) 上での場の配位の相関関数を計算すれば、それが CFT_C 側では $\tau = \tau_0$ における状態 $|\mathcal{O}; \tau_0\rangle$ の波動関数を表すという簡単な関係がある。また、この対応は 1 対 1 である。

また CFT_C は AdS と時間を共有するから、双方の状態間にも 1 対 1 の対応関係がある。特に AdS 側で古典重力近似が良い場合には、その状態は漸近的に $\text{AdS}_5 \times S^5$ であるような古典超重力解（正確には、超重力解のグローバル時間による断面。その時間発展が超重力解）で表される。

まとめると、

- CFT_B における局所演算子
- CFT_C における状態
- $\text{AdS}_5 \times S^5$ 上の弦理論における状態、または超重力解

の 3 つがそれぞれ 1 対 1 に対応している。次節で扱う LLM 対応は、この対応の具体形である。

4.3 Bubbling 幾何と LLM 対応

上で述べたように、AdS/CFT 対応において CFT_C の状態と AdS 側の状態もしくは古典解の間には対応関係がある。しかし、その具体的な対応は高度に非自明である。

ここでは超対称性の半分 (16 個) を保つセクター (1/2 BPS セクター) に限定して、その具体形を与える予想 [18] について説明する。

4.3.1 CFT 側での 1/2 BPS 状態

まず AdS/CFT 対応の CFT 側、4次元 $\mathcal{N} = 4$ 超対称 $SU(N)$ Yang-Mills 理論で、1/2 BPS 状態がどのような状態であるかを考えよう [40]。

演算子/状態対応と 1/2 BPS 状態

CFT_B と CFT_C の間の演算子/状態対応について、前節に引き続いてさらにもう少し調べよう。4.1.3 項ですでに述べた通り、これら 2 つの理論は共形変換 (4.20) で結ばれ、CFT_C における時間並進変換は CFT_B のスケール変換に相当する。従って CFT_C のハミルトニアンは CFT_B における演算子の共形次元 Δ に対応し、

$$\Delta^{(B)} = H^{(C)} \quad (4.40)$$

となっている。これは特に、CFT_C のエネルギー固有状態に対しては CFT_B のプライマリー演算子に対応することを意味する。

一方、R 対称群 $SU(4)$ に対して、その部分群 $U(1)_J$ を考えよう。すると CFT_B の任意のプライマリー演算子 \mathcal{O} に対して、その共形次元を Δ 、 $U(1)_J$ 荷電を J として

$$\Delta - J \geq 0 \quad (4.41)$$

の関係があることがただちにわかる。CFT_C 側ではこれは状態に関するエネルギーと荷電の関係

$$H - J \geq 0 \quad (4.42)$$

となっており、特にここで等号を満たす状態が 1/2 BPS 状態である。

4次元の $\mathcal{N} = 4$ ベクトル超組はベクトル場 A_μ 、ワイルスピノル場 $\lambda_\alpha^{(1)}, \dots, \lambda_\alpha^{(4)}$ 、実スカラー場 $\phi^{(1)}, \dots, \phi^{(6)}$ から成り、今の場合にはゲージ群 $SU(N)$ の随伴表現に属するもの 1 組のみで理論が構成されている。R 対称群 $SU(4)_R$ は、これらのうちスピノル同士、スカラー同士を大域的に回転して組み換える変換である。いま

$$Z = \phi^{(1)} + i\phi^{(2)} \quad (4.43)$$

としよう。すると $U(1)_J$ は Z の位相回転を表すとして一般性を失わない。これは CFT_B、CFT_C 双方に共通である。

このとき CFT_C の 1/2 BPS 状態に CFT_C 側で対応する演算子、つまり

$$\Delta - J = 0 \quad (4.44)$$

を満たすゲージ不変な局所プライマリー演算子 \mathcal{O} を考えよう。するとこれは明らかに、 Z のみから構成されるカイラル・プライマリー演算子、すなわち

$$\mathcal{O} = \prod_i \text{Tr}(Z^{m_i}) \quad \left(\sum_i m_i = \Delta \right) \quad (4.45)$$

の形に表されるもの（またはその線型結合）に限られる。

これに対応する CFT_C 側の状態は Z の励起による荷電 J から許される範囲の最低エネルギー状態であるから、 Z が S^3 の最低 Kaluza-Klein モードに限って励起され、他の場の励起は一切許されない。また $\mathcal{N} = 4$ Yang-Mills 理論の作用は $[\phi^{(i)}, \phi^{(j)}]$ に比例するポテンシャル項を含むので、BPS 状態では

$$[\phi^{(i)}, \phi^{(j)}] = 0 \quad (i, j = 1, \dots, 6) \quad (4.46)$$

でなければならない。つまり任意の 2 つのスカラーは同時対角化可能である。すると特に、 Z は $N \times N$ のエルミート行列として表されることがわかる。以上により、 CFT_C の 1/2 BPS セクターは、 Z の時間依存性のみで記述される理論、つまりエルミート行列 $Z(t)$ の量子力学となる [41]。

1/2 BPS 状態の持つ対称性

以上から、 CFT_C の 1/2 BPS 状態が持つ対称性をまとめよう。上記のようにこのセクターに属する状態は場の配位が S^3 上で空間依存性を持たないので、 S^3 を回転する $\text{SO}(4)$ 対称性を持っている。また、 Z のみが励起されていることから、 R 対称群 $\text{SU}(4) \cong \text{SO}(6)$ のうちで $\text{U}(1)_J \cong \text{SO}(2)$ のみが破れているので、残りの $\text{SO}(4)$ 対称性が保たれている。最後に $H - J = 0$ から、これに由来する $\text{U}(1)$ 対称性を保つ。

従って、このセクターで保たれているボソンの対称性は

$$G_{\frac{1}{2}\text{BPS}}^B \cong \text{SO}(4) \times \text{SO}(4) \times \text{U}(1) \quad (4.47)$$

となる。ただしこれらはもちろん、16 個の超対称性と独立なわけではない。

フェルミオン表示

Z は CFT_B では無質量場である。しかし CFT_C の時空 $\mathbb{R} \times S^3$ は $\mathbb{R}^{1,3}$ とは異なり曲率を持つため、共形不変性を保つために質量項が現れる。これにより、作用の中で Z のみに関する項は

$$S = \frac{1}{2g_{YM}^2} \int_{\mathbb{R} \times S^3} d^4x \text{Tr} \left(\partial_\mu Z \partial^\mu Z^\dagger - \frac{1}{R_{S^3}^2} Z Z^\dagger \right) \quad (4.48)$$

と表される [42]。いま 1/2 BPS セクターでは Z のみが励起され、かつ t にしか依存しない。従って上の作用で適当にスケール変換と規格化による場の再定義を行えば、このセクターの有効作用は

$$S = \int dt \operatorname{Tr} \left(\frac{1}{2} \dot{Z}'(t) \dot{Z}'^\dagger(t) - \frac{1}{2} Z'(t) Z'^\dagger(t) \right) \quad (4.49)$$

と記述されることがわかる。この系はさらに、 $SU(N)$ ゲージ自由度を用いて $Z'(t)$ を

$$Z'(t) = U(t) \begin{pmatrix} \psi_1(t) & & \\ & \ddots & \\ & & \psi_N(t) \end{pmatrix} U(t)^{-1} \quad (\exists U : \mathbb{R} \rightarrow SU(N)) \quad (4.50)$$

と対角化することにより、 N 個の自由フェルミオン $\{\psi_i(t)\}$ からなる系

$$S = \int dt \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} \dot{\psi}_i(t)^2 - \frac{1}{2} \psi_i(t)^2 \right) \quad (4.51)$$

と等価である。

相平面上のフェルミオン分布

この系の状態がどのように表されるか考えよう。3.2.3 項で述べたように、このような自由粒子の 1 粒子状態は、その相空間上で $\sqrt{2\pi\hbar}$ を単位とする格子点上に配置したコヒーレント状態によって、その基底を張ることができる。いま考えているのは空間方向 1 次元のフェルミオンの系なので、 N 個の粒子はそれぞれ、1 粒子相平面 (p, q) 上で 1 粒子につき $2\pi\hbar$ の面積を排他的に占有するという前期量子論的な描像を考えてよい。するとこの系の状態は近似的には、1 粒子相平面上に描かれた、総面積 $2\pi\hbar N$ の領域によって表現される。この領域を \mathcal{D}^F としよう。

\mathcal{D}^F は各々が連結かつ互いに交わらない液滴 \mathcal{D}_i の集合で、各 \mathcal{D}_i の面積は $2\pi\hbar$ の倍数と考えられる。特に、 N が非常に大きい極限を考えれば、この面積の量子化単位は総面積に対して非常に小さくなるので、 \mathcal{D} は総面積を保つ範囲で自由な位相・形状をとることができる。

もう少し具体的な場合で、状態と相平面分布の対応を考えてみよう。 N フェルミオン系の状態は明らかに、各粒子のエネルギー準位 $E_i = \hbar(\frac{1}{2} + f_i)$ の組み合わせ

$$\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \dots, f_N\} \quad (f_i < f_{i+1}) \quad (4.52)$$

でラベルされる $\{|\mathcal{F}\rangle\}$ によって状態空間の基底を張ることができる。これはさらに

$$\mathcal{R} = \{r_1, r_2, \dots, r_N\}, \quad r_i = f_i - i + 1 \quad (4.53)$$

により、非負整数の非減少列 \mathcal{R} による表示に書き換えられる。この \mathcal{R} は第 i 行の長さが r_i である N 行の Young 図として表すことができ、各列の長さ r_i がその粒子の基底状態からの励起数、カラムの総数が系全体のエネルギー（零点エネルギーを除く）となる。 $N = 4$ の場合の例をいくつか挙げておこう。

$$\mathcal{F} = \{0, 1, 2, 3\} \Leftrightarrow \mathcal{R} = \{0, 0, 0, 0\} \Leftrightarrow \begin{array}{|c|} \hline | \\ \hline \end{array} \quad (4.54a)$$

$$\mathcal{F} = \{0, 2, 4, 6\} \Leftrightarrow \mathcal{R} = \{0, 1, 2, 3\} \Leftrightarrow \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \hline \end{array} \quad (4.54b)$$

$$\mathcal{F} = \{1, 2, 4, 7\} \Leftrightarrow \mathcal{R} = \{1, 1, 2, 4\} \Leftrightarrow \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \hline \end{array} \quad (4.54c)$$

$$\mathcal{F} = \{4, 5, 6, 7\} \Leftrightarrow \mathcal{R} = \{4, 4, 4, 4\} \Leftrightarrow \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \hline \end{array} \quad (4.54d)$$

このようにエネルギー準位でラベルされた状態に対しては、相空間の分布としては回転対称なものが対応する。1 粒子エネルギー準位 f_i に対応する相平面上の領域 \mathcal{D}_i^F は、近似的には

$$\mathcal{D}_i^F : \sqrt{2\hbar f_i} \leq r < \sqrt{2\hbar(f_i + 1)} \quad (4.55)$$

で定められる円環であり、 $|\mathcal{F}\rangle$ に対応する $\mathcal{D}^F(\mathcal{F})$ は各粒子に対応する \mathcal{D}_i^F の和として定められる。

フェルミオン系の保存荷電

上記のようなスペクトル固有状態は、以下のように別の量で特徴づけることも可能である [43]。いま、状態 $|\mathcal{F}\rangle$ に対して

$$M_k = \sum_{i=1}^N f_i^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.56)$$

と定める。すると任意の $|\mathcal{F}\rangle$ に対してこれらは明らかに保存するから、 M_k はこの系の保存荷電であることがわかる。特に、 $M_0 = N$, $M_1 \hbar = H$ (零点振動の寄与を除く総エネルギー) である。

このとき $|\mathcal{F}\rangle$ は、 \mathcal{F} に対応する $\mathcal{M} = \{M_0, M_1, \dots, M_N\}$ によって $|\mathcal{M}\rangle$ と表されることを以下に示そう。いま \mathcal{F} に対して、特性多項式 $P^{\mathcal{F}}(x)$ を

$$P^{\mathcal{F}}(x) \equiv \prod_{i=1}^N (x - f_i) \quad (4.57)$$

で定めると、これを展開することにより

$$P^{\mathcal{F}}(x) = \sum_{k=0}^N (-1)^k \pi_k x^{N-k} \quad (4.58a)$$

$$\pi_k = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} f_{i_1} f_{i_2} \dots f_{i_k} \quad (4.58b)$$

と表される。このとき M_k, π_k の間には、Newton-Girard の公式

$$m\pi_m + \sum_{k=1}^m (-1)^k M_k \pi_{m-k} = 0 \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (4.59)$$

で表される関係がある ($\pi_0 = 1$ である)。従って \mathcal{M} が与えられれば、これに $m = 1$ から順に代入していくことで $\{\pi_k\}$ が求められるので、 \mathcal{F} は方程式 $P^{\mathcal{F}}(x) = 0$ の解として一意に定まる。ただし勿論 \mathcal{M} は、 \mathcal{F} が相異なる整数の集合となるようなものに制限される。また (4.56) を (4.55) と比較すると、 $N \gg 1$ の場合に N の主要項で

$$M_k \approx \int_{\mathcal{D}^{\mathcal{F}}} \frac{dq dp}{2\pi\hbar} \left(\frac{q^2 + p^2}{2\hbar} \right)^k \quad (4.60)$$

となることがわかる。

4.3.2 AdS 側での 1/2 BPS 古典超重力解

対称性の対応による重力解の決定

前項で見た状態群に AdS 側で対応する状態を考えよう。古典重力近似が良いラージ N の場合、AdS 側の状態は漸近的に AdS であるような古典重力解によって近似される。このときこの解は、CFT 側で見た状態が持つ対称性と同じ対称性を持っているはずである。

まず (4.47) から、この解は少なくとも $SO(4) \times SO(4)$ の対称性を持つ。また、次のことを予想として要請しよう。

- 励起されるゲージ場は R-R 4 脚場 $C^{(4)}$ のみである。
- ディラトン場及びアクシオン場は定数である。

するとこのとき、解の形は

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + e^{H+G} d\Omega_{(3)}^2 + e^{H-G} d\tilde{\Omega}_{(3)}^2 \quad (4.61a)$$

$$F^{(5)} = F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge d\Omega_{(3)} + \tilde{F}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge d\tilde{\Omega}_{(3)} \quad (4.61b)$$

$$F = dB, \quad \tilde{F} = d\tilde{B} \quad (4.61c)$$

$$F = e^{3G} *_4 \tilde{F} \quad (4.61d)$$

のように表すことができる。最後の条件は $F^{(5)}$ の自己双対性からくる要請である。

この解は漸近的には $\text{AdS}_5 \times S^5$ とならなければならないので、2つの $\text{SO}(4)$ はそれぞれ、 AdS_5 と S^5 に1つずつ含まれている S^3 の対称性に対応する。このうち前者を S^3 、後者を \tilde{S}^3 と呼ぼう。上式の $d\Omega_{(3)}$ 及び $d\tilde{\Omega}_{(3)}$ は、順にこれらの体積要素を表す。

いまこの解は 1/2 BPS であり、16 個の超対称性を保っている。従って、キリングスピノル方程式

$$\nabla_M \eta + \frac{i}{480} \Gamma^{M_1 M_2 M_3 M_4 M_5} F_{M_1 M_2 M_3 M_4 M_5}^{(5)} \Gamma_M \eta = 0 \quad (4.62)$$

が 16 個の独立な解を持つ。これを解くには、まず 10 次元スピノル η を $\mathbb{R}^{1,3} \times S^3 \times \tilde{S}^3$ の 3 つの部分に分解して

$$\eta = \xi_{ab} \otimes \chi_a \otimes \tilde{\chi}_b \quad (a, b = \pm 1) \quad (4.63)$$

と書く。すると $S^3 \times \tilde{S}^3$ については $\text{SO}(4) \times \tilde{\text{SO}}(4)$ の対称性があるので、 $\chi_a \otimes \tilde{\chi}_b$ の部分については自明である。よって問題は 4 次元キリングスピノル ξ に関するものに帰着する。これを解くことにより、条件を満たす解は

$$ds^2 = -h^{-2}(dt + V_i dx^i)^2 + h^2(dy^2 + dx^i dx^i) + ye^G d\Omega_{(3)}^2 + ye^{-G} d\tilde{\Omega}_{(3)}^2 \quad (4.64a)$$

$$h^{-2} = 2y \cosh G \quad (4.64b)$$

$$y \partial_y V_i = -\epsilon_{ij} \partial_j z, \quad y(\partial_i V_j - \partial_j V_i) = -\epsilon_{ij} \partial_y z \quad (4.64c)$$

$$z = \frac{1}{2}(1 - \tanh G) \quad (4.64d)$$

$$F = dB_t \wedge (dt + V) + B_t dV + d\hat{B},$$

$$\tilde{F} = d\tilde{B}_t \wedge (dt + V) + \tilde{B}_t dV + d\hat{\tilde{B}} \quad (4.64e)$$

$$B_t = -\frac{1}{4}y^2 e^{2G}, \quad \tilde{B}_t = -\frac{1}{4}y^2 e^{-2G} \quad (4.64f)$$

$$d\hat{B} = \frac{1}{4}y^3 *_3 d\left(\frac{z-1}{y^2}\right), \quad d\hat{\tilde{B}} = \frac{1}{4}y^3 *_3 d\left(\frac{z}{y^2}\right) \quad (4.64g)$$

($i = 1, 2, y \geq 0$) のように書くことができる。ただしここで $z = z(x_1, x_2, y)$ は

$$\partial_i \partial_i z + y \partial_y \left(\frac{\partial_y z}{y} \right) = 0 \quad (4.65)$$

をみたす関数である。^{*1} この関数 z により、解全体が決定される。なお、この座標系で x_i は長さの 2 乗の次元を持っていることに注意しよう。

^{*1} この z は、[18] の記法では $-\tilde{z}$ に相当する。

また (4.64) は、次の入れ換え変換

$$(z, G, d\Omega_{(3)}^2) \leftrightarrow (1-z, -G, d\tilde{\Omega}_{(3)}^2) \quad (4.66)$$

に関する対称性を持っていることも重要である。これは 4.3.3 項で述べる LLM 対応によって、フェルミオン側では粒子とホールを入れ換える対称性に対応している。

解のパラメータ付けについて

解 (4.64) は、条件 (4.65) を満たす関数 $z(x_1, x_2, y)$ によってパラメータ付けされる。これをさらにわかりやすい形にするため、 $\Phi = z/y^2$ とおこう。すると (4.65) は

$$(\partial_i \partial_i + \partial_y^2) \Phi + \frac{3}{y} \partial_y \Phi = 0 \quad (4.67)$$

となる。この式はちょうど次のように解釈できる。 Φ は $\mathbb{R}^6 = \{(x_1, \dots, x_6)\}$ 上の調和関数で、そのうち $\mathbb{R}^4 = \{(x_3, x_4, x_5, x_6)\}$ に関しては球対称である。このとき $y = \sqrt{x_3^2 + \dots + x_6^2}$ とすれば $\Phi = \Phi(x_1, x_2, y)$ と表され、そのときのラプラス方程式はちょうど (4.67) となるのが容易に確かめられる。

よって $\Phi(x_1, x_2, y)$ は、平面 $y = 0$ 上の電荷分布である $z_0(x_1, x_2) = z(x_1, x_2, 0)$ を与えることにより、それが与える静電ポテンシャルとして一意に決定される。これにより明らかに

$$z(x_1, x_2, y) = \frac{y^2}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} dx'_1 dx'_2 \frac{z_0(x'_1, x'_2)}{(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2 + y^2)^2} \quad (4.68)$$

であり、またこれと (4.64c) から V_i は

$$V_i(x_1, x_2, y) = -\frac{\epsilon_{ij}}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} dx'_1 dx'_2 \frac{z_0(x'_1, x'_2)(x_j - x'_j)}{(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2 + y^2)^2} \quad (4.69)$$

と表される。以上から解 (4.64) は、2次元面上の実数値関数 $z_0(x_1, x_2)$ によって全てがパラメータ付けされる。

ただしここまでの議論では、漸近領域の $\text{AdS}_5 \times S^5$ の半径については何ら制限を設けていない。ある大きな N を決めたとときに半径が (4.24) で与えられるためには、さらに z_0 に対して N に依存した条件が必要である。これについては後述する。

滑らかな解を与える条件

ここでは、滑らかな解を与える $z_0(x_1, x_2)$ の条件を考えよう。(4.64a)(4.64b) を見ると、 $y = 0$ では $\cosh G$ が発散していない限り計量は滑らかにならないことがわかる。従っ

て (4.64d) から、計量が滑らかになるためには $y = 0$ で $z = 0, 1$ であることが必要である。逆にこのとき、例えば $z(\mathbf{x}, 0) = 0$ ならば $y \approx 0$ において

$$z(\mathbf{x}, y) = \frac{1}{2} (1 - \tanh G) \approx e^{-2G} \quad (4.70)$$

であり、また同時に (4.65) から

$$z(\mathbf{x}, y) \approx y^2 f(\mathbf{x}) \quad (4.71)$$

と表されるので、両者を比較して

$$e^{-G} \approx y c(\mathbf{x}) \quad (4.72)$$

と書けることがわかる。よってこのとき計量は

$$\begin{aligned} h^2 dy^2 + ye^{-G} d\tilde{\Omega}_{(3)}^2 &= \frac{1}{2y \cosh G} dy^2 + ye^{-G} d\tilde{\Omega}_{(3)}^2 \\ &\approx c(\mathbf{x}) dy^2 + y^2 c(\mathbf{x}) d\tilde{\Omega}_{(3)}^2 \\ &= c(\mathbf{x}) (dy^2 + y^2 d\tilde{\Omega}_{(3)}^2) \end{aligned} \quad (4.73)$$

となつてこれは \mathbb{R}^4 の形になり、また

$$ye^G d\Omega_{(3)}^2 \approx \frac{1}{c(\mathbf{x})} d\Omega_{(3)}^2 \quad (4.74)$$

となるから、計量はこの近傍で $\mathbb{R}^{1,2} \times \mathbb{R}^4 \times S^3$ となつて、滑らかである。 $S^3 \times \tilde{S}^3$ に注目してこの意味を考えてみると、通常、 $y = 0$ では 2 つの S^3 はともに潰れる。しかし $z_0(\mathbf{x}) = 0$ の点では \tilde{S}^3 のみが潰れ、 S^3 は半径が有限のままで潰れない。また (4.66) の対称性から、上の結果については $z_0(\mathbf{x}) = 1$ の場合にも同じことが言える。この場合は $y = 0$ で S^3 が潰れ、 \tilde{S}^3 が残ることになる。

従つて解 (4.64) は $y = 0$ において、 $z_0(\mathbf{x})$ が 0, 1 いずれかの値をとっていればその点では滑らかである。 $z_0 = 0$ の領域と $z_0 = 1$ の領域の境界に特異点が出ないかが問題だが、実は境界も滑らかになる。これについては後述する。

以上から、AdS 側の 1/2 BPS セクターを表す超重力解 (4.64) の中でも滑らかなものは、 \mathbb{R}^2 上で $\{0, 1\}$ に値をとる関数 $z_0(x_1, x_2)$ によつて表される。あるいはこれは、 $z_0(x_1, x_2) = 1$ となるような \mathbb{R}^2 上の領域 D^z で指定される、と言い替えることもできる。

簡単な例

z_0 とそれに対応する解について、簡単かつ重要な例を 2 つ挙げる。

AdS 解 z_0 として

$$z_0 = \begin{cases} 1 & (r < r_0) \\ 0 & (r > r_0) \end{cases} \quad (4.75)$$

(ここで (r, ϕ) は $x_1 x_2$ 平面の極座標) を考える。すると (4.68)(4.69) から z 及び V_i は

$$\begin{aligned} z &= \frac{y^2}{\pi} \int_{r < r_0} \frac{r' dr' d\phi}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \phi + y^2)^2} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r^2 - r_0^2 + y^2}{\sqrt{(r^2 + r_0^2 + y^2)^2 - 4r^2 r_0^2}} \right) \end{aligned} \quad (4.76a)$$

$$\begin{aligned} V_\phi &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r r_0 \cos \phi d\phi}{r^2 + r_0^2 - 2r r_0 \cos \phi + y^2} \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{r^2 + y^2 + r_0^2}{\sqrt{(r^2 + r_0^2 + y^2)^2 - 4r^2 r_0^2}} - 1 \right) \end{aligned} \quad (4.76b)$$

$$V_r = 0 \quad (4.76c)$$

と求められる。これに対して座標変換

$$y = r_0 \sinh \rho \sin \theta \quad (4.77a)$$

$$r = r_0 \cosh \rho \cos \theta \quad (4.77b)$$

$$\tilde{\phi} = \phi + t \quad (4.77c)$$

を施すと、計量はちょうど

$$ds^2 = r_0 \left(-\cosh^2 \rho dt^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\Omega_{(3)}^2 + d\theta^2 + \cos^2 \theta d\tilde{\phi}^2 + \sin^2 \theta d\tilde{\Omega}_{(3)}^2 \right) \quad (4.78)$$

となって、

$$R_{\text{AdS}_5}^2 = R_{S^5}^2 = r_0 \quad (4.79)$$

の $\text{AdS}_5 \times S^5$ (グローバル座標表示) となる。

この過程を見ると、 $r \rightarrow \infty$ で $z_0 \equiv 0$ となることが、解が漸近的に $\text{AdS}_5 \times S^5$ になることと対応していることがわかる。これは解が滑らかな場合に限らない。また、(4.79) を (4.24) と比較すると

$$r_0 = \sqrt{4\pi N g_s \alpha'^2} \quad (4.80)$$

となる。(4.64)において z は解を局所的に決定するので、漸近領域における解は z の漸近形によって決定される。 z は $y=0$ に分布する荷電 z_0 がつくるポテンシャルとして与えられるから、遠方で $z_0 \equiv 0$ であるような z_0 の生成する z の漸近形(主要項)は原点付近での z_0 の形状には依存せず、電荷の総量つまり $\int dx^2 z_0$ によって決まることは明らかである。従って、上のAdSの場合の結果(πr_0^2)と比較すると

$$\int d^2x z_0(x_1, x_2) = 4\pi^2 g_s \alpha'^2 N \quad (4.81)$$

であることがわかる。これは特に滑らかな解に関して言えば、

$$\text{Area}(\mathcal{D}^z) = 4\pi^2 g_s \alpha'^2 N \quad (4.82)$$

であることと同値である。

平面波解 z_0 として

$$z_0 = \begin{cases} 0 & (x_2 > 0) \\ 1 & (x_2 < 0) \end{cases} \quad (4.83)$$

を考える。すると(4.68)(4.69)から z 及び V_i は

$$z = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + y^2}} \right) \quad (4.84a)$$

$$V_1 = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x_2^2 + y^2}} \quad (4.84b)$$

$$V_2 = 0 \quad (4.84c)$$

と求められる。これに対してさらに座標変換

$$y = r_1 r_2 \quad (4.85a)$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(r_1^2 - r_2^2) \quad (4.85b)$$

を施すと、計量は

$$\begin{aligned} ds^2 &= -2dt dx_1 - (r_1^2 + r_2^2) dt^2 + dr_1^2 + r_1^2 d\Omega_{(3)}^2 + dr_2^2 + r_2^2 d\tilde{\Omega}_{(3)}^2 \\ &= -2dt dx_1 - |\mathbf{w}|^2 dt^2 + dw_1^2 + \cdots + dw_8^2 \end{aligned} \quad (4.86)$$

となり、滑らかな平面波解を表す。

この解が滑らかになることは重要である。平面上で z_0 が $\{0, 1\}$ いずれかの値をとるとき、その分布がどのような形をしていても、境界が滑らかであれば、境界の各点の近傍は

拡大すれば今考えた分布に見える。従ってこの結果は、 $z_0 = 0, 1$ の境界においても重力解は滑らかであり、従って $z_0 = 0, 1$ であれば対応する解の計量に特異点は存在しないことを意味している。

また (4.85) から、 $y = 0$ 上での $z = 0, 1$ の境界線 $x_2 = 0$ は $r_1 = r_2 = 0$ に対応している。従って一般に、滑らかな場合の解 (4.64) において、 D^z の境界線上では S^3 と \tilde{S}^3 の両方 (を含む S^7) が潰れていることもわかる。

荷電分布の量子化

$z_0 \in \{0, 1\}$ の配位において、平面 $y = 0$ 上で $z_0 = 1$ の領域内のみを通過する閉曲線 γ を考え、3次元半空間 (y, x_1, x_2) 上で γ を境界とする2次元曲面を σ とする。ここでさらに、 σ 上に \tilde{S}^3 をファイバーさせた5次元面を Σ としよう。いま \tilde{S}^3 は σ の境界 γ 上ではいずれも1点に潰れるので、 Σ はトポロジー的には S^5 となる。この平曲面 Σ 上で $F^{(5)}$ を積分すると、寄与するのは (4.61b) のうち第2項の空間成分のみとなるから

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} F^{(5)} &= \int_{\Sigma} \left(d\tilde{B}_t \wedge V + \tilde{B}_t dV + d\hat{B} \right) \\ &= \int_{\sigma} \left\{ d(\tilde{B}_t V) + d\hat{B} \right\} \cdot 2\pi^2 \\ &= 2\pi^2 \int_{\sigma} d\hat{B} \\ &= 4\pi^2 A_1^\gamma \end{aligned} \quad (4.87)$$

となる。ここで A_1^γ は、閉曲線 γ の内部で $z_0 = 1$ であるような領域の面積である。

いま AdS 解を表す配位において γ を半径 $R_\gamma > r_0$ の円周にとれば

$$A_1^\gamma = \pi r_0^2 \quad (4.88)$$

となるから、(4.80)(4.87) とあわせると

$$\int_{\sigma} F^{(5)} = 16\pi^4 g_s \alpha'^2 N \quad (4.89)$$

となって、今の規格化では R-R フラックスは $16\pi^4 g_s \alpha'^2$ を単位に量子化されていることがわかる ((4.21b)(4.25) とは規格化が異なることに注意)。これは AdS の総フラックスに限らないので、(4.87) と比較すると A_1^γ は

$$A_1^\gamma = 4\pi^2 g_s \alpha'^2 n \quad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \quad (4.90)$$

のように量子化される。対称性 (4.66) から、この面積の量子化条件は、 $z_0 = 1$ に囲まれた $z_0 = 0$ 領域の面積に対しても同様である。

エネルギーと角運動量

解 (4.64) に対するエネルギー及び角運動量を求めよう。いま、与えられた任意の $z_0(x_1, x_2)$ に対して、並進変換によって座標系を

$$\int d^2x z_0(x_1, x_2) x_i = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (4.91)$$

となるように定める。またここで z_0 の台を D としよう。前述のように、漸近的に AdS となるとき D は有界である。 D に属する点の原点からの最大値を $|D|$ とする。

$R^2 \equiv r^2 + y^2 \gg |D|$ のとき、(4.68)(4.69) を $1/R$ で展開すると

$$z(x_1, x_2, y) \approx \frac{y^2}{\pi} \int d^2x' z_0(x'_1, x'_2) \left[\frac{1}{R^4} - \frac{2}{R^6} \left\{ |\mathbf{x}'|^2 - \frac{6r^2(\mathbf{x}'\mathbf{n})^2}{R^2} \right\} \right] \quad (4.92a)$$

$$V_i(x_1, x_2, y) \approx -\frac{\epsilon_{ij}}{\pi} \int d^2x' z_0(x'_1, x'_2) (x_j - x'_j) \left[\frac{1}{R^4} - \frac{2}{R^6} \left\{ |\mathbf{x}'|^2 - \frac{6r^2(\mathbf{x}'\mathbf{n})^2}{R^2} \right\} \right] \quad (4.92b)$$

となる。ここで $\mathbf{n} \equiv \mathbf{x}/r$ とした。このとき

$$Q^2 \equiv \frac{1}{\pi} \int d^2x' z_0(x'_1, x'_2) \quad (4.93a)$$

$$W \equiv Q^{-2} \frac{1}{\pi} \int d^2x' z_0(x'_1, x'_2) (x_1'^2 + x_2'^2) \quad (4.93b)$$

$$\tilde{W} \equiv Q^{-2} \frac{1}{\pi} \int d^2x' z_0(x'_1, x'_2) (x_1'^2 - x_2'^2) \quad (4.93c)$$

$$W_{ij} \equiv Q^{-2} \frac{1}{\pi} \int d^2x' z_0(x'_1, x'_2) x'_i x'_j \quad (4.93d)$$

と定める。すると W_{ij} は対称行列なので、座標系 (x_1, x_2) に原点中心の回轉變換を施すことで対角化できる。このときの角度座標を ϕ とすると

$$\begin{aligned} W_{\mathbf{n}} \equiv W_{\mathbf{nn}} &= Q^{-2} \frac{1}{\pi} \int d^2x' z_0(x'_1, x'_2) (\mathbf{n}\mathbf{x}')^2 \\ &= \frac{1}{2}W + \frac{1}{2}\tilde{W} \cos 2\phi \end{aligned} \quad (4.94)$$

となる。すると上式は、極座標 (r, ϕ) を用いて

$$z(r, \phi, y) = Q^2 \frac{y^2}{R^4} \left[1 - \frac{2}{R^2} \left\{ W - \frac{6r^2 W_{\mathbf{n}}}{R^2} \right\} \right] \quad (4.95a)$$

$$V_\phi(r, \phi, y) = -Q^2 \frac{r^2}{2R^4} \left[1 + 24 \frac{r^2}{R^4} W_{\mathbf{n}} - \frac{4W}{R^2} - \frac{8W_{\mathbf{n}}}{R^2} \right] \quad (4.95b)$$

$$V_r(r, \phi, y) = -Q^2 \frac{2\tilde{W}r \sin 2\phi}{R^6} \quad (4.95c)$$

のように表される。

ここで S^3, \tilde{S}^3 の半径をそれぞれ u, v 、すなわち

$$u^2 = ye^G, \quad v^2 = ye^{-G} \quad (4.96)$$

とすれば

$$y = uv \quad (4.97a)$$

$$z(x_1, x_2, y) = \frac{v^2}{v^2 + u^2} \quad (4.97b)$$

となる。これらを用い、 (x_1, x_2, y) 空間に対して (u, v, ϕ) を座標系として採用しよう。(4.97) によって (4.64a) を部分的に書き直せば

$$ds^2 = -(u^2 + v^2)(dt + V_i dx^i)^2 + \frac{1}{u^2 + v^2}(dy^2 + dx^i dx^i) + u^2 d\Omega_{(3)}^2 + v^2 d\tilde{\Omega}_{(3)}^2 \quad (4.98)$$

となる。AdS のグローバル座標表示と比較すれば漸近領域では $u \sim \sinh \rho$ なので、今の座標系では $u \rightarrow \infty$ が漸近領域を表す。よって $1/u^2$ で展開することにより、(4.98) の漸近形は

$$\begin{aligned} ds^2 \approx & \left[1 + \frac{(3v^2 - 2Q)(Q^2 - 2W) + 6(Q - v^2)\tilde{W} \cos 2\phi}{6Q^2 u^2} \right. \\ & \left. + \frac{((3v^2 - 2Q)(Q^2 - 2W) + 6(Q - v^2)\tilde{W} \cos 2\phi)^2}{48Q^4 u^4} - \frac{2g_2}{u^4} \right] \\ & \times \left\{ - \left(u^2 + Q + \frac{Q^2 - 2W}{3u^2} \right) dt^2 + \frac{Q}{u^2} \left(1 - \frac{Q}{u^2} \right) du^2 + u^2 d\Omega_{(3)}^2 \right\} \\ & + g_{vv} dv^2 + g_{v\phi} du D\phi + g_{\phi\phi} D\phi^2 + g_{\Omega\Omega} d\tilde{\Omega}_{(3)}^2 \end{aligned} \quad (4.99a)$$

$$D\phi \equiv d\phi + dt - \frac{2W - Q^2}{Qu^2} dt \quad (4.99b)$$

のように書ける。これにより、この解のエネルギー M 及び角運動量 J は最終的に

$$M = J = \frac{1}{16\pi^2 l_p^8} \left(WQ^2 - \frac{1}{2}Q^4 \right) \quad (4.100)$$

と求められる。ただし、ここでエネルギー M は $\text{AdS}_5 \times S^5$ 背景からの差分で、かつ M_p を単位に無次元化した数である。

時空の位相について

前述のように、滑らかな解の $y = 0$ 平面上では $z_0 = 0$ 領域内部で \tilde{S}^3 、 $z_0 = 1$ 領域内部で S^3 が潰れ、それらの境界線上では S^3 , \tilde{S}^3 の両方が潰れている。このことは、 D^z の位相と時空の位相が対応しており、1/2 BPS セクターが様々な位相の異なる時空を含むことを意味している。

4.3.3 LLM 予想

以上、4.3.1 項及び 4.3.2 で、AdS/CFT 対応により互いに対応するはずのセクターを、ゲージ側と重力側でそれぞれ見てきた。これらの間には対応がつけられるはずである。

すでに述べたように、CFT 側の状態は 1 粒子相平面上の領域 D^F によって、また AdS 側の滑らかな解は $x_1 x_2$ 平面上の領域 D^z によってそれぞれ指定される。また、これらの面積はいずれも N に比例する。このようなことから、次のように予想することができる。

予想 (Lin-Lunin-Maldacena) AdS 側と CFT 側で、 D^z と D^F が同形の状態同士が対応する。

いま D^z と D^F の面積はそれぞれ $2\pi\hbar$, $4\pi^2 g_s \alpha'^2$ を単位に量子化されているから、両側の理論のパラメータの間で

$$2\pi\hbar \leftrightarrow 4\pi^2 g_s \alpha'^2 \quad \Leftrightarrow \quad \hbar \leftrightarrow 2\pi g_s \alpha'^2 = 2\pi l_p^4 \quad (4.101)$$

の対応をさせれば良いことになる。

実際、(4.101) によって同一視される D^z , D^F で指定されるそれぞれの状態に対して、保存電荷の値は一致する。例えばフェルミオン側の保存電荷 (4.60) のうち、ハミルトニアン M_1 は AdS 側のエネルギー (4.100) と等しい値を与える。ただしここで AdS 側の M は基底状態である AdS 解からの差なので、フェルミオン側でも基底状態のエネルギー $M_1^0 = \frac{1}{2}N^2$ からの差分を考える必要があることに注意しよう。より高次の M_k も、やはり重力側でも保存荷電となる [43]。

従って、 N を大きくすれば任意に多数の独立な保存荷電の間に対応をつけることができるので、状態同士の対応の任意性はそもそも非常に小さい。 $N \rightarrow \infty$ 極限を考えれば、 θ に関して積分した r 方向の分布に関しては、双方で同じもの同士が対応しなければならないことが M_k の形からほぼ明らかである。また重力側・フェルミオン側双方で、時間発展とは単にこの面上の回転であり、分布の形状は保存される。このようなことから、

LLM 予想はきわめて自然な予想として支持される。

また対応 (4.101) は、重力側とフェルミオン側での量子効果及び古典近似の間にも、ちょうど対応関係があることを示唆している。

4.4 まとめ

$d + 1$ 次元 Anti-de-Sitter 空間 AdS_{d+1} は、 $\mathbb{R}^{2,d}$ 上の双曲面として定義され、境界の一部または全体が、 $\mathbb{R}^{1,d-1}$ または $\mathbb{R} \times S^{d-1}$ に共形同値であるという性質を持つ。また AdS 空間には、グローバル座標系及びポアンカレ座標系という、代表的で有用な 2 つの座標系がある。

IIB 型超弦理論で D3 プレーン系のホライズン近傍極限を考えると、それを 2 通りの描像で記述してそれらと比較することで、 $\text{AdS}_5 \times S^5$ 背景時空上の IIB 型超弦理論と、その時空の共形境界上で定義された $\mathcal{N} = 4$ Yang-Mills 理論 (CFT) との間に等価関係のあることが予想される。このような、AdS 背景時空上の超弦理論/M 理論と、その共形境界上の CFT との等価関係のことを、一般に AdS/CFT 対応と呼ぶ。

この対応では確かに、双方の理論の対称性の間に 1 対 1 の完全な対応関係がある。また、両理論の分配関数は等しくあるべきであるという要請は、GKP-Witten の関係式として AdS/CFT 対応の正確な定式化を与える。これに付随して、AdS 側の場と、CFT 側の演算子との間にも対応関係があることがわかる。

AdS 側と CFT 側で同じ時間座標 (グローバル時間) を共有している場合の対応を考えると、双方の理論の状態の間にも対応関係がなければならない。この対応の具体形は非自明である。しかし、最も超対称性の高い 1/2 BPS セクターに限れば、対称性の一致などを考えることで、その対応関係が具体的に予想できる。AdS 側の LLM bubbling 幾何と CFT 側のフェルミオン表示は、ともに 2 次元面上の量子化された液滴の分布によって、その状態が指定される。LLM 予想は、これら 2 つの分布を単に同一視することによって対応が成り立つとする予想である。実際、ハミルトニアンのほか多数の保存荷電が、これによって正確に対応する。また AdS 側のプランク長 l_p と CFT (フェルミオン) 側のプランク定数 \hbar が対応しており、双方での量子効果・古典近似の間にも対応関係があることを示唆する。

第5章

LLM bubbling 幾何におけるブラックホールの微視的状态と粗視化

LLM bubbling 幾何において、 z_0 が $0 \leq z_0 \leq 1$ の実数値をとる場合を考える。このような z_0 は、本来は $\{0, 1\}$ 値であるものを粗視化した結果と考えられる。 $z_0 \in \{0, 1\}$ では滑らかな bubbling 解がこのときに初めて特異点を持つことは、滑らかな微視的状态の粗視化によってブラックホールが生ずるという予想を再び支持する。さらに、古典論と量子論の関係を論じ、古典重力の熱的性質の起源を考える。またフェルミオン側で z_0 を与えるものとして、分布関数や計量演算子を導入し、その性質を述べる。最後に、この系における fuzzball 描像や fuzzball 解についても考える。

5.1 $z_0 \in \mathbb{R}$ の LLM bubbling 幾何

前章で、LMM bubbling 幾何において滑らかな古典解が得られるのは $z_0 \in \{0, 1\}$ の場合に限られることを見た。ここでは z_0 がより一般の値をとる場合に対応する古典解と、それが持つ意味について考える [44]。

特に、以下で見るように z_0 が $0 \leq z_0 \leq 1$ の値をとる場合には、やや特殊ではあるがブラックホール系と解釈できる解が現れる。LLM 対応を拡張して AdS 側のこのような状態を CFT (フェルミオン) 側で調べることができれば、このようなブラックホールの量子的な微視的状态の構造について多くの知見を得られることが期待できる。

そのために、まず重力側でこのような bubbling 解がどのようなものであるかを簡単に見よう。

5.1.1 $z_0 < 0$ または $z_0 > 1$ 領域がある場合

このような領域が存在する場合、明らかなように、解 (4.64) の表式中には虚数が現れ、これによって計量の符号が変わる領域が現れる。このときこの解には、時空の任意の点についてその点を通る時間的な閉曲線が存在することが知られている [44]。従って、この古典解を文字通りにとらえると、物理的に有効な解釈は困難である。

ただしフェルミオン側との対応を考えると、少なくともプランク長以上の長さのスケールでは、このような領域が現れることはないことが容易にわかる。従って少なくとも、AdS 側での古典解が意味を持つ場合に限れば、このような配位は考慮しなくても良い。

5.1.2 $0 < z_0 < 1$ 領域がある場合

このとき、 $0 < z_0(x_1, x_2, y) < 1$ なる $y = 0$ 面上の点 (x_1, x_2) (ここでは S^3 及び \tilde{S}^3 がともに潰れているので、空間方向には 1 点になっている) はヌル特異点となってホライズンを持たない、すなわち裸の特異点となることが知られている。

グレー円板と superstar 解

$0 < z_0 < 1$ の最も簡単な場合として、 z_0 の「グレー円板」配位と、それに対応する superstar 解について説明しよう。

グレー円板 z_0 が「グレー円板」つまり $0 < \beta < 1$ なる定数 β を用いて

$$z_0 = \begin{cases} \beta & (r < r_0) \\ 0 & (r > r_0) \end{cases} \quad (5.1)$$

で与えられる場合を考える。このとき

$$\pi r_0^2 \beta = 2\pi \hbar N \quad (5.2)$$

であり、 z 及び V_i は (4.76) と同様に

$$z = \frac{\beta}{2} \left(1 - \frac{r^2 - r_0^2 + y^2}{\sqrt{(r^2 + r_0^2 + y^2)^2 - 4r^2 r_0^2}} \right) \quad (5.3a)$$

$$V_\phi = -\frac{\beta}{2} \left(\frac{r^2 + y^2 + r_0^2}{\sqrt{(r^2 + r_0^2 + y^2)^2 - 4r^2 r_0^2}} - 1 \right) \quad (5.3b)$$

$$V_r = 0 \quad (5.3c)$$

となる。これに座標変換 $(t, y, r) \rightarrow (\tilde{t}, \rho, \theta)$

$$y = L\rho \cos \theta \quad (5.4a)$$

$$r = L^2 \sqrt{f(\rho)} \sin \theta, \quad f(\rho) = \frac{1}{\beta} + \frac{\rho^2}{L^2} \quad (5.4b)$$

$$\tilde{t} = Lt \quad (5.4c)$$

($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $\rho \geq 0$) を施せば、計量は

$$\begin{aligned} ds^2 = & -\frac{1}{\sqrt{D}} \left(\cos^2 \theta + D \frac{\rho^2}{L^2} \right) d\tilde{t}^2 + \frac{2L}{\sqrt{D}} \sin^2 \theta dt d\phi + \frac{L^2 H}{\sqrt{D}} \sin^2 \theta d\phi^2 \\ & + \sqrt{D} \left(f^{-1} d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_{(3)}^2 \right) + L^2 \sqrt{D} d\theta^2 + \frac{L^2}{\sqrt{D}} \cos^2 \theta d\tilde{\Omega}_{(3)}^2 \end{aligned} \quad (5.5a)$$

$$D = \sin^2 \theta + H \cos^2 \theta, \quad H = 1 + \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right) \frac{L^2}{\rho^2} \quad (5.5b)$$

のように表される [45]。ただしここで L は (4.22) 及び (4.81) によって与えられる AdS_5 及び S^5 の半径で、

$$L = (\beta r_0^2)^{\frac{1}{4}} = (2\pi N)^{\frac{1}{4}} \quad (5.6)$$

である。この解は L よりも長いスケールでは、10 次元 IIB 型超重力理論を S^5 コンパクト化して得られる 5 次元 $\mathcal{N} = 2$ ゲージ化超重力理論の解とみなすことができる。このとき、その 5 次元計量は

$$ds_{(5)}^2 = -H^{-\frac{2}{3}} f d\tilde{t}^2 + H^{\frac{1}{3}} \left(f^{-1} d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_{(3)}^2 \right) \quad (5.7)$$

となる [46]。

superstar 解 (5.7) は 5 次元 $\mathcal{N} = 2$ ゲージ化超重力理論の漸近 AdS な球対称解である。このような解については良く調べられており、より一般には

$$ds_{(5)}^2 = -(H_1 H_2 H_3)^{-\frac{2}{3}} f dt^2 + (H_1 H_2 H_3)^{\frac{1}{3}} \left(f^{-1} d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_{(3)}^2 \right) \quad (5.8a)$$

$$X^{(i)} = H_i^{-1} (H_1 H_2 H_3)^{\frac{1}{3}}, \quad A^{(i)} = (H_i^{-1} - 1) dt \quad (5.8b)$$

$$f(r) = 1 - \frac{\mu}{\rho^2} + \frac{\rho^2}{L^2} H_1 H_2 H_3, \quad H_i(r) = 1 + \frac{q_i}{\rho^2} \quad (5.8c)$$

のように、 $U(1)$ 荷電 q_i ($i = 1, 2, 3$) と質量パラメータ $\mu \geq 0$ ($\mu = 0$ のとき BPS) で定められる 3 荷電ブラックホールである [47–49]。

ただしこの解は、 μ が荷電 q_i およびゲージ結合定数 g で与えられるある閾値 $\mu_c > 0$ に等しいときに初めて extremal なブラックホールとなる。 $\mu < \mu_c$ の場合は $\rho = 0$ が裸の特異点となり、通常の意味でのブラックホールにはならない [48]。このような解は *superstar* 解と呼ばれている。(5.7) を (5.8) と比較すると、これは

$$q_1 = \left(\frac{1}{\beta} - 1\right) L^2, \quad q_2 = q_3 = 0 \quad (5.9a)$$

$$\mu = 0 \quad (5.9b)$$

で与えられる BPS な 1 荷電 *superstar* 解であることがわかる。

superstar のホライズン 素朴に考えれば、宇宙検閲仮説により、このような状態はそもそも許容されないようにも見える。しかし、第 2 章及び第 3 章で扱った D1-D5 系の潰れたホライズンの場合と同様、高次微分項 (α' 補正) を無視した超重力理論の近似が裸の特異点の近傍でも信用できると信じる理由はない。実際、*superstar* の特異点は裸の特異点の中でも比較的良い性質を持っており、高次微分項の寄与を考えることによって有限の大きさの拡大ホライズンを持つと予想されている [50]。

この拡大ホライズンが球面 $\rho = \rho_H$ で与えられるとすると、この拡大ホライズン面積 $A_H^{(5)}$ は

$$A_H^{(5)} = 2\pi^2 \rho_H^3 \sqrt{H(\rho_H)} \quad (5.10)$$

となる。いま 5 次元重力定数 $G_N^{(5)}$ は

$$G_N^{(5)} = \frac{G_N^{(10)}}{V_{S^5}} = \frac{\pi}{2N^2} L^3 \quad (5.11)$$

であるから、熱力学的エントロピー S_{Bek} は

$$S_{Bek} = \frac{A_H^{(5)}}{4G_N^{(5)}} = \pi N^2 \frac{\rho_H^2}{L^2} \sqrt{\left(\frac{1}{\beta} - 1\right) + \frac{\rho_H^2}{L^2}} \quad (5.12)$$

と求められる [45]。しかし、これは非常に素朴な見積もりである。ここではホライズン付近で高次微分項の寄与を無視しているが、 ρ_0 自身も l_p に比例する量と考えられるので、このような近似も通常は正当化せず、全く無意味な値である可能性もあることに注意しよう。

5.2 $0 \leq z_0 \leq 1$ の状態における LLM 対応

5.2.1 LLM 公式の有効範囲

前節で見たグレー円板 (superstar 解) のようなものに対して、LLM 公式はどのように適用できるかを考えよう。そのためにはまず、LLM 対応がそもそもどのような状態に対して成り立つのかを考える必要がある。実際、これは任意の状態に対して成立するわけではない。

LLM 公式で得られる重力側の状態はあくまで古典解である。従って、弦理論としては古典解による近似が良い場合、つまりコヒーレント状態のように準古典的とみなせる状態に関してでなければ意味を持たない。フェルミオン側においても、状態を 1 粒子相平面上の分布で表す描像が有効なのは、何らかの意味で準古典的に扱える状態に限られる。逆にこのような条件を満たさない状態に対して、LLM 公式を直接適用しても無意味であろう。

例えば、フェルミオン側で白黒の液滴で記述される状態同士のもの重ね合わせを考え、それらの分布の平均で作られる灰色液滴を LLM 公式に代入しても、ここで得られる古典解には意味がない。大きく異なる幾何の重ね合わせ状態が良い古典近似を持つはずはないからである。

このようなことから、LLM 公式が純粋状態に対して成立するのは、フェルミオン系の状態が準古典的な白黒の分布で表されるとき、すなわち $z_0 \in \{0, 1\}$ の場合に限られると考えるのが自然である。するとこのとき、灰色の状態は純粋状態ではなく、白黒で記述された状態の粗視化で得られる混合状態と考えられる。このような状態は微視的な観点でエントロピーを持つことになるので、LLM 公式によって重力側で対応する解が特異点を持つことと良い一致を示す。前述のように、この解自体は特異点の周囲にホライズンを持つわけではないが、高次微分項の寄与によってホライズンを持ち、熱力学的にもエントロピーを持つことが十分に考えられるからである。このあたりの事情は第 3 章で論じたことともほぼ同じであり、相互によく一致していることがわかる。

5.2.2 相平面上での粗視化と系のエントロピー

ここでは素朴な考察によって、灰色の液滴で記述されるフェルミオン系の混合状態が持つエントロピーを計算する。

相平面上の微視的状态とその粗視化

3.2.3 項で述べたように、1 粒子の系は相平面上で 1 辺 $\sqrt{2\pi\hbar}$ の格子点上に配置したコヒーレント状態によって状態基底を構成することができる。コヒーレント状態同士は直交しないが、異なる状態同士の交わりは非常に小さく、また互いに離れるに従って急速に減衰する。従って N 粒子系に関しては、全部で N 個の粒子をこの格子点に配置することによって近似的には状態基底を構成できると考えてよい。これは、相平面を 1 辺 $\sqrt{2\pi\hbar}$ の正方形に区切り、そのうちの N 個の内部で $z_0 = 1$ (黒)、他は $z_0 = 0$ (白) とすることに相当する。これが相平面上の微視的状態を表す液滴の配置になる。

では、これらの粗視化を考えよう。古典的な観測者は \hbar 程度の大きさを識別できず、面積 $A = 2\pi M\hbar$ ($M \gg 1$) 程度の単位でしか粒子の分布を見ることができないと考えられる。その M 個の格子の中には一般に $z_0 = 0$ のものと $z_0 = 1$ のものが入り交じっているから、巨視的な量として観測されるのはその平均値である。例えば M 個のうち βM ($0 \leq \beta \leq 1$) 個の格子が $z_0 = 1$ であるとき、この領域は巨視的には $z_0 = \beta$ ということになる。 $\beta = 1$ または $\beta = 0$ の場合に限りその領域は純粋状態にあり、 $0 < \beta < 1$ の場合には混合状態である。 $\beta < 0$ または $\beta > 1$ となることはない。

巨視的状態のエントロピー

このようにして与えられた相平面上の粗視化分布関数 \bar{z}_0 があるとき、その状態の持つエントロピーを考えよう。

相平面を面積 $2\pi M\hbar$ の領域に区切り、それぞれの領域の持つエントロピーを考える。 $\bar{z}_0(q_i, p_i) = \beta_i$ であるような点 (q_i, p_i) の周囲の領域について考えると、 M 個の格子のうちで $z_0 = 1$ のものが $M\beta_i$ 個、 $z_0 = 0$ のものが $M(1 - \beta_i)$ 個ある。従ってこの領域には、微視的な配位の組み合わせとして

$$W_i = {}_M C_{M\beta_i} \quad (5.13)$$

通りが可能である。従ってこの領域に付随するエントロピー S_i は

$$\begin{aligned} S_i &= \log W_i \\ &\approx -M \{ \beta_i \log \beta_i + (1 - \beta_i) \log(1 - \beta_i) \} \end{aligned} \quad (5.14)$$

となる。これにより、系全体のエントロピー S は

$$\begin{aligned} S &= \sum_i S_i \\ &\approx - \sum_i \frac{A}{2\pi\hbar} \{ \beta_i \log \beta_i + (1 - \beta_i) \log(1 - \beta_i) \} \end{aligned}$$

$$\approx - \int \frac{dq dp}{2\pi\hbar} \{ \bar{z}_0 \log \bar{z}_0 + (1 - \bar{z}_0) \log(1 - \bar{z}_0) \} \quad (5.15)$$

と求められる。 $M \gg 1$ であれば、この結果は M の大きさの詳細によらない。

5.2.3 分配関数の計算

温度 β と化学ポテンシャル μ が与えられたとき、 $1/2$ BPS セクターに限って、それに対する (グランドカノニカル) 分配関数を求めてみよう。これまでの議論をもとに、粗視化された古典的な量を用いる古典統計力学の方法と、量子的な統計力学との 2 通りで計算し、その結果を比較する [20]。

古典統計力学に基づく計算

このような分配関数は素朴には、重力側で

$$Z(\beta, \mu) = \int \mathcal{D}g_{\mu\nu} \dots \exp[-\beta (H[g_{\mu\nu}, \dots] - \mu N[g_{\mu\nu}, \dots])] \quad (5.16)$$

のように表されると思える (ここで \dots は、超重力理論における計量以外の場を表す)。ここで H はハミルトニアン、 N は D3 プレーンの荷電で、それぞれ時間断面上の汎関数である。しかしよく知られているように、勿論これはうまくいかない。また、積分の測度としてどのようなものをとるかも非自明である。

しかし、このセクターでは計量をはじめ全ての場が、巨視的には $\bar{z}_0(x_1, x_2)$ によって決定される。従って、これは実は

$$Z(\beta, \mu) = \int \mathcal{D}\bar{z}_0(x_1, x_2) \rho[\bar{z}_0] \exp[-\beta (H[\bar{z}_0] - \mu N[\bar{z}_0])] \quad (5.17)$$

と表されるはずである。これを Z_{cl} としよう。ここで測度因子である汎関数 $\rho[\bar{z}_0]$ には、 $g_{\mu\nu}$ などからの変数変換のヤコビアンのほか、各幾何的状态が持つエントロピーの効果も含まれている。このような表示が有効なのは、 \bar{z}_0 が粗視化されているからである。言い方を変えると、この分配関数は $L \gg l_p$ として、 L 以下のスケールの自由度について積分した低エネルギー有効理論を表す。

いま、 $\rho[\bar{z}_0]$ は同じ巨視的な z_0 を与える微視的状态の数と考えられるので、(5.15) から

$$\begin{aligned} \rho[\bar{z}_0] &= e^{S[\bar{z}_0]} \\ &= \exp \left[- \int \frac{dx_1 dx_2}{2\pi\hbar} \{ \bar{z}_0 \log \bar{z}_0 + (1 - \bar{z}_0) \log(1 - \bar{z}_0) \} \right] \end{aligned} \quad (5.18)$$

である。また

$$\begin{aligned}
-\beta(H[\bar{z}_0] - \mu N[\bar{z}_0]) &= -\beta \int \frac{dx_1 dx_2}{2\pi\hbar} \left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} - \mu \right) \bar{z}_0(x_1, x_2) \\
&= -\int \frac{dx_1 dx_2}{2\pi\hbar} f(x_1, x_2) \bar{z}_0(x_1, x_2) \\
&\quad \left(f(x_1, x_2) \equiv \beta \left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} - \mu \right) \right)
\end{aligned} \tag{5.19}$$

なので、これらをあわせると

$$\begin{aligned}
Z_{cl}(\beta, \mu) &= \int \mathcal{D}z_0 \exp \left[-\int \frac{dx_1 dx_2}{2\pi\hbar} \{ \bar{z}_0 \log \bar{z}_0 + (1 - \bar{z}_0) \log(1 - \bar{z}_0) + f(x_1, x_2) \bar{z}_0(x_1, x_2) \} \right]
\end{aligned} \tag{5.20}$$

となる。古典的には、この汎関数積分は z_0 に関する鞍点で評価すれば良い。実際に \bar{z}_0 に関して変分をとると、鞍点は

$$\bar{z}_0(x_1, x_2) = \frac{1}{e^{f(x_1, x_2)} + 1} \tag{5.21}$$

で与えられることがわかるので、 Z_{cl} は

$$\begin{aligned}
\ln Z_{cl}(\beta, \mu) &\approx \int \frac{d^2x}{2\pi\hbar} \ln \left(1 + e^{-f(x_1, x_2)} \right) \\
&= \int_0^\infty ds \frac{s}{e^{s-\beta\mu} + 1} \quad \left(s = \beta \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \right) \\
&\equiv \frac{1}{\beta} F_2(e^{\beta\mu})
\end{aligned} \tag{5.22}$$

と求められる。ここで F_2 はフェルミ・ディラック関数である。

量子統計力学に基づく計算

一方、フェルミオン側で前項で述べたようなコヒーレント状態基底による微視的状态を考え、それによって同じ分配関数を計算しよう。このようにして求められる分配関数

Z_{micro} は

$$\begin{aligned}
Z_{micro}(\beta, \mu) &= \sum_{z_0} \exp[-\beta\{H - \mu N\}] \\
&= \sum_{z_0} \exp \left[- \sum_{(n_1, n_2)} f(n_1, n_2) z_0(n_1, n_2) \right] \quad ((n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2, z_0 : \mathbb{N}^2 \rightarrow \{0, 1\}) \\
&= \sum_{z_0} \prod_{(n_1, n_2)} e^{-f(n_1, n_2) z_0(n_1, n_2)} \\
&= \prod_{(n_1, n_2)} (1 + e^{-f(n_1, n_2)}) \tag{5.23a}
\end{aligned}$$

と表される。ただしここで

$$x_i = \sqrt{2\pi\hbar} n_i \quad (i = 1, 2) \tag{5.24a}$$

$$z_0(n_1, n_2) = z_0(x_1, x_2), \quad f(n_1, n_2) = f(x_1, x_2) \tag{5.24b}$$

とした。すると

$$\begin{aligned}
\ln Z_{micro}(\beta, \mu) &= \sum_{(n_1, n_2)} \ln (1 + e^{-f(n_1, n_2)}) \\
&\approx \int \frac{d^2x}{2\pi\hbar} \ln (1 + e^{-f(n_1, n_2)}) \\
&= \ln Z_{cl}(\beta, \mu) \tag{5.25}
\end{aligned}$$

となって、両者の結果は一致することがわかる。

2つの結果が一致することは、古典重力における汎関数積分の測度を確かに (5.18) で与えて良いことを示しており、上とは別の方法でのエントロピー導出あるいは無矛盾性チェックとなっている。また、両者の描像・計算過程を見やすい形で対比することができる。

5.3 分布関数と計量演算子

前節では、相平面上のフェルミオン分布やその粗視化をやや概念的に考えた。ここではフェルミオン側の具体的な状態に対して、どのような場合であれば粗視化によって重力側で古典的な幾何が対応し、それはどのような解となるのかを考えよう。

5.3.1 第 1 量子化形式と 1 粒子分布関数

まずはフェルミオン系の状態が (4.54) の例のように表される場合に限って、第 1 量子化形式で議論する [19]。

N 粒子波動関数と 1 粒子密度行列

系が状態 $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \dots, f_N\}$ にあるとき、系全体の N 粒子波動関数 $\Phi_{\mathcal{F}}$ は、1 粒子エネルギー固有状態の波動関数

$$\phi_n(q) = A_n H_n\left(\frac{q}{\sqrt{\hbar}}\right) e^{-q^2/2\hbar} \quad (5.26)$$

($H_n(x)$ はエルミート多項式、 A_n は規格化係数) を用いて、それらの Slater 行列式として

$$\Phi_{\mathcal{F}}(q_1, q_2, \dots, q_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \det [\phi_{f_i}(q_j)]_{ij} \quad (5.27)$$

と表される。

いま我々が得たいのは 1 粒子相平面上の情報なので、この状態に付随する 1 粒子状態密度行列 $\rho_{\mathcal{F}}^{(1)}$ を求めよう。まず N 粒子状態の密度行列 $\rho_{\mathcal{F}}$ は

$$\rho_{\mathcal{F}}(x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N) = \Phi_{\mathcal{F}}^*(x_1, \dots, x_N) \Phi_{\mathcal{F}}(y_1, \dots, y_N) \quad (5.28)$$

と求められる。 $\rho_{\mathcal{F}}^{(1)}$ は $\rho_{\mathcal{F}}$ の 1 粒子以外を積分することにより

$$\rho_{\mathcal{F}}^{(1)}(x, y) = \int d^{N-1}q \Phi_{\mathcal{F}}^*(x, q_1, \dots, q_{N-1}) \Phi_{\mathcal{F}}(y, q_1, \dots, q_{N-1}) \quad (5.29)$$

と定められるが、いま $\{\phi_n\}$ は直交系をなしているので、(5.27) を代入すると結局これは

$$\begin{aligned} \rho_{\mathcal{F}}^{(1)}(x, y) &= \sum_{f \in \mathcal{F}} \psi_f^*(x) \psi_f(y) \\ &= \sum_{f \in \mathcal{F}} \rho_f(x, y) \end{aligned} \quad (5.30)$$

(ρ_f は 1 粒子状態 ϕ_f に付随する密度行列) となり、各粒子に関する密度行列の和で求められることがわかる。

Winger 分布関数

一般に混合状態を扱う量子力学においては、密度行列 ρ に付随して定められる相平面上の分布関数 (distribution function) と呼ばれる量を用いるのが便利である [51]。中でも最も良く知られているのが Wiger 分布関数と呼ばれるもので、空間 1 次元の 1 粒子系に対しては

$$W(q, p)_\rho = \frac{1}{\pi\hbar} \int dy \langle q - y | \hat{\rho} | q + y \rangle e^{2ipy/\hbar} = \frac{1}{\pi\hbar} \int dy \rho(q - y, q + y) e^{2ipy/\hbar} \quad (5.31)$$

によって定められる。いま任意の古典物理量 $A(q, p)$ に対して、 \hat{q} , \hat{p} の Weyl 順序積 (対称化積) で作られる演算子を \hat{A}_W としよう。するとこの関数は、量子物理量 A_W の期待値 $\langle A_W \rangle_\rho = \text{Tr}(\hat{A}\hat{\rho})$ に対して

$$\langle A_W \rangle_\rho = \int dp dq W_\rho(p, q) A(p, q) \quad (5.32)$$

という性質を持っている。従って、いま ρ が通常の 1 粒子状態に付随する密度行列ならば、 W_ρ は規格化条件として

$$\int dp dq W_\rho(p, q) = 1 (= \text{Tr}\hat{\rho}) \quad (5.33)$$

を満たす。(5.32) は混合状態の量子力学に準古典的な描像を与えており、それが直観的に意味するところは明らかであろう。ただ、この W_ρ は正值でない。この点は古典的なアンサンブルとしての解釈に反しており、ある種の量子的な性質を表しているとも言える。

(5.30) に対する Wiger 分布関数の計算には、エルミート多項式 H_n とラゲール陪多項式 L_n^α に関する恒等式

$$\int dx e^{-x^2} H_m(x + y) H_n(x + z) = 2^n \sqrt{\pi} m! z^{n-m} L_m^{n-m}(-2yz) \quad (m \leq n) \quad (5.34)$$

が利用できて、結果は

$$W_{\rho_{\mathcal{F}}^{(1)}}(q, p) = \frac{1}{\pi\hbar} e^{-(q^2+p^2)/\hbar} \sum_{f \in \mathcal{F}} (-1)^f L_f \left(\frac{2}{\hbar} (q^2 + p^2) \right) \quad (5.35)$$

となる。

この $W_{\rho_{\mathcal{F}}^{(1)}}$ を z_0 とみなすことはできるだろうか。このような $W(p, q)$ の性質で注目すべきものとしては

1. $0 \leq W < 1$ 及び負の値もとる。

2. $q^2 + p^2$ に対して \hbar 程度のスケールで振動する。

ということが挙げられる。つまりこれを z_0 として AdS 側で解釈すると l_p 程度のスケールの微細な構造を持った荷電分布で、超重力解としては特異点や時間方向のループも含む解に対応していることがわかる。

これらの意味するところは必ずしも明らかではないが、少なくとも AdS 側で準古典的に扱える範囲を超えていることは明らかである。従ってここでは微視的状态のこの形での表示には深く立ち入らず、これを \hbar 程度のスケールで弱く粗視化することを考えてみよう。

伏見分布関数

Wigner 分布関数を「弱く粗視化」したような関数として、伏見分布関数 [52] と呼ばれるものが知られている。これは \hbar の幅を持つガウス核で Wigner 分布関数を畳み込んだもので、1 次元 1 粒子系では

$$\text{Hu}_\rho(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dq' dp' W_\rho(q, p) \exp\left[-\frac{1}{2\hbar} \{(q - q'^2) + (p - p'^2)\}\right] \quad (5.36)$$

によって定められる。ただしこの操作は可逆であり、情報は失われていない。

この関数は Wigner 分布関数と似た性質を持つ。すなわち古典物理量 $A(q, p)$ に対して、今度は逆正規順序積によって作られる演算子を \hat{A}_R とすれば

$$\langle A_R \rangle_\rho = \int dp dq \text{Hu}_\rho(p, q) A(p, q) \quad (5.37)$$

の関係がある。

また特に今考えている調和振動子系においては、この分布関数はコヒーレント状態 (3.9) と結び付いており^{*1}

$$\text{Hu}_\rho(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \langle \alpha | \hat{\rho} | \alpha \rangle \quad \left(\alpha = \frac{q + ip}{\sqrt{2\hbar}} \right) \quad (5.38)$$

と表される。1 粒子のコヒーレント状態基底は (3.11d) のように近似的な直交系なので、(5.38) は、相平面上の点 (q, p) に配置されたコヒーレント状態の粒子がアンサンブル ρ に対して観測される確率を表していると解釈できる。これにより Hu_ρ は正定値だけでなく、少なくとも 1 粒子状態については $0 \leq 2\pi\hbar \text{Hu}_\psi \leq 1$ であることも明らかである。

^{*1} 以下コヒーレント状態については、特に断らない限り第 3 章と同じ記法を用いる。ただしここでは $m\omega = 1$ である。

(5.38) および (3.9) を用いると、1 粒子エネルギー固有状態 $|n\rangle$ の分布関数は

$$\text{Hu}_n(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \frac{1}{n!} e^{-(q^2+p^2)/2\hbar} \left(\frac{q^2+p^2}{2\hbar} \right)^n \quad (5.39)$$

と容易に計算され、これにより (5.30) に対応する $\text{Hu}_{\rho_{\mathcal{F}}^{(1)}}$ は

$$\text{Hu}_{\rho_{\mathcal{F}}^{(1)}}(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} e^{-(q^2+p^2)/2\hbar} \sum_{f \in \mathcal{F}} \frac{1}{f!} \left(\frac{q^2+p^2}{2\hbar} \right)^f \quad (5.40)$$

となる。(5.39) は $q^2 + p^2 = 2\hbar n$ に幅 $\sim \hbar$ のただ 1 つのピークを持ち、微細な構造を持たない滑らかな関数である。

5.3.2 第 2 量子化形式と計量演算子

本節では、フェルミオン側で第 2 量子化形式を用いた取り扱いについて述べる [20]。

フェルミオン系の第 2 量子化

前節では扱う状態を限定して第 1 量子化による考察を行ったが、より一般的に 1/2 BPS セクター全体について議論するには、フェルミオン側で第 2 量子化形式を用いる方が便利である。

これまで考えてきたフェルミオン系を第 2 量子化すると、2 次元時空上のフェルミオン場 λ の理論となる。この理論における 1 粒子状態空間を、第 1 量子化形式における 1 粒子状態空間 \mathcal{H}_1 と同一視しよう。このとき第 2 量子化の真空 $|0\rangle$ から 1 粒子状態 $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_1$ に粒子を励起する生成演算子を $b^\dagger(\psi)$ 、その共役の消滅演算子を $b(\psi)$ とする。

いま λ はフェルミオンなので、通常通り

$$\{b(\psi_1), b(\psi_2)\} = \{b^\dagger(\psi_1), b^\dagger(\psi_2)\} = 0 \quad \text{for } \forall \psi_1, \psi_2 \quad (5.41)$$

を要請しよう。また、上の同一視により

$$b^\dagger(\psi) |0\rangle = |\psi\rangle, \quad b(\psi) |0\rangle = 0 \quad (5.42)$$

であり、 λ が自由場であることから $\{b(\psi_1), b^\dagger(\psi_2)\}$ は定数であることに注意すると

$$\{b(\psi_1), b^\dagger(\psi_2)\} = \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle \quad (5.43)$$

と定められる。また特に、コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ に対応する b は $b(\alpha)$ と書くものと約束しておく。

計量演算子

前節では、AdS 側の荷電分布 z_0 に対応するものとして分布関数を考えた。そもそも z_0 は、少なくとも準古典近似の良い範囲では、時空の幾何を決定する量である。従って通常の量子論の発想に従うならば、 z_0 は演算子であって、その固有状態が古典的な幾何で記述される状態にあたるのが自然であろう。この予想が正しければ、対応するフェルミオン側では分布関数に相当するような演算子が存在するはずである。この演算子を、フェルミオン側での計量演算子と呼ぶ^{*2}。

前項で構成した第 2 量子化形式では、このような演算子の候補として簡単かつ良い性質を持つものが存在する。いま

$$\hat{z}_0(x_1, x_2) = \hat{z}_0(\alpha) = b^\dagger(\alpha)b(\alpha) \quad \left(\alpha = \frac{x_1 + ix_2}{\sqrt{2\hbar}} \right) \quad (5.44)$$

と定めよう。これは 1 粒子コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ にある粒子に対する、近似的な個数演算子である。これが分布関数に似た性質を持つであろうことは、直観的には明らかであろう。

実際、この演算子の基本的な性質として、個数演算子、ハミルトニアン、高次ハミルトニアンとの間に

$$\hat{N} = \int \frac{dx_1 dx_2}{2\pi\hbar} \hat{z}_0(x_1, x_2) \quad (5.45a)$$

$$\hat{H} = \int \frac{dx_1 dx_2}{2\pi\hbar} \frac{x_1^2 + x_2^2}{2\hbar} \hat{z}_0(x_1, x_2) \quad (5.45b)$$

$$\hat{M}_k = \int \frac{dx_1 dx_2}{2\pi\hbar} \left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{2\hbar} \right)^k \hat{z}_0(x_1, x_2) \quad (5.45c)$$

のように、古典的な z_0 が満たしているのと同じ関係がある。

また、 $\{|\alpha\rangle\}_{\alpha \in \mathbb{C}}$ は 1 粒子状態の (過) 完全系をなすので、1 粒子エネルギー固有状態基底 $\{\psi_n\}$ に対して

$$|\psi_m\rangle\langle\psi_n| = \iint d^2\alpha f_{mn}(\alpha) |\alpha\rangle\langle\alpha| \quad (\exists f_{mn} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}) \quad (5.46)$$

が成立する。この形では両辺は 1 粒子状態への作用に関してしか意味を持たないが、これ

^{*2} z_0 は AdS 側で計量だけでなくゲージ場なども含めた解全体を決定する関数なので、幾何演算子などと呼ぶ方が適切かもしれないが、ここでは [20] に倣う。

は一般の状態への作用に拡張されて

$$b^\dagger(\psi_m)b^\dagger(\psi_n) = \iint d^2\alpha f_{mn}(\alpha) \hat{z}_0(\alpha) \quad (5.47)$$

となることがわかる。従って $\{\hat{z}_0(\alpha)\}_{\alpha \in \mathbb{C}}$ は、粒子数を保存するような演算子の完全系をなす。

伏見分布関数との関係

(5.38) と (5.44) を見比べると、 Hu と \hat{z}_0 の間に関係がつくことは容易に推察される。実際、任意の N 粒子状態 $|\Psi\rangle$ に対して

$$\langle \Psi | \hat{z}_0(x_1, x_2) | \Psi \rangle = 2\pi\hbar \text{Hu}_{\rho_\psi^{(1)}}(x_1, x_2) \quad (5.48)$$

の関係が成立する。これは、 $|\Psi\rangle$ をスペクトル固有状態 $|\mathcal{F}^w\rangle$ によって

$$|\Psi\rangle = \sum_w d_w |\mathcal{F}^w\rangle \quad (5.49)$$

$$|\mathcal{F}^w\rangle = |f_1^w, \dots, f_N^w\rangle = b^\dagger(\psi_{f_1^w}) \dots b^\dagger(\psi_{f_N^w}) |0\rangle \quad (5.50)$$

と表し、両辺をそれぞれ頭々に展開することで確かめられる。

粗視化計量演算子

上のように定めた $\hat{z}_0(x_1, x_2)$ は、Wigner 分布関数に比べれば滑らかであるとはいえ、フェルミオン側で \hbar 、重力側で言えば l_p 程度のスケールの構造を持っている。このような微細な構造に古典解の式である LLM 公式をそのまま適用するのは難があり、またこのような量は準古典的な観測者にとっては観測量ではない。従ってマクロな観測量となるのは、これをあるスケール $L \gg \sqrt{\hbar}$ で粗視化したものと考えられる。このような粗視化された計量演算子は、幅 L を持つガウス核との畳み込み積によって

$$\hat{\hat{z}}_0 = \frac{1}{\pi L^2} \iint dx'_1 dx'_2 \hat{z}_0(x'_1, x'_2) \exp\left\{-\frac{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2}{L^2}\right\} \quad (5.51)$$

と定めるのが自然であろう。このような $\hat{\hat{z}}_0$ は 0 から 1 の連続スペクトルを持ち、またプランク長 (\hbar) 程度の微細構造によらない。これらのことから、LLM 公式で用いる z_0 としては、この $\hat{\hat{z}}_0$ を用いるのが妥当と考えられる。

なお準古典的な状況とは、 l_p ないし \hbar が観測精度 L に比べて十分に小さく、同時に観

測精度 L は系全体に比べれば十分に小さい、すなわち

$$\frac{\hbar}{L^2} \ll 1 \quad (5.52a)$$

$$\frac{L^2}{\hbar N} \ll 1 \quad (5.52b)$$

が満たされている場合をいう。(5.52a) は常に成立していると考えられるから、必要な条件は (5.52b)、すなわちラージ N である。これは前章の 4.2.2 項で述べた古典重力近似の条件とも、定性的にはよく一致していると言える。

「計量固有状態」の条件

相異なる 1 粒子コヒーレント状態同士は、(3.11d) の通り正確には直交しない。従って、粗視化計量演算子 \hat{z}_0 についても

$$[\hat{z}_0(\alpha), \hat{z}_0(\beta)] \neq 0 \quad (\alpha \neq \beta) \quad (5.53)$$

である。よって相平面上の相異なる点における粗視化計量演算子は同時対角化不可能で、 $\hat{z}_0(x_1, x_2)$ が正確な固有値関数 $z_0(x_1, x_2)$ を持つことは、 $z_0(x_1, x_2) \equiv 0$ または $z_0(x_1, x_2) \equiv 1$ の場合を除きありえない。従って、考えることができるのは高々、 $\hat{z}_0(x_1, x_2)$ の近似的な固有状態であることがわかる。実際、 z_0 に関しては微細な構造だけでなく、ごく僅かな値の違いなどは準古典的な観測者には検出できない。従って、このように誤差を許して考えることも理に適っている。

このような状態を定義しよう。 \hat{z}_0 の近似的な固有状態 $|\Psi\rangle$ とは、固有値関数 $z_0(x_1, x_2)$ 及び観測精度 ϵ に対して

$$\int_{\mathcal{C}} d^2\alpha |(\hat{z}_0(\alpha) - z_0(\alpha)) |\Psi\rangle|^2 < \epsilon \quad (5.54)$$

で与えられる状態とするのが妥当と考えられる。この条件を満たす $|\Psi\rangle$ は AdS 側で巨視的には古典幾何として記述され、その古典解は固有値関数 z_0 を代入した LLM 幾何によって与えられる。また、その幾何は一般に特異点 (及びホライズン) を持つ。逆に (5.54) を満たさないような $|\Psi\rangle$ は、古典幾何による記述を持たず、それらの重ね合わせ状態として考えなければならない。

また、ここでは上のように計量演算子を粗視化して古典幾何との対応について考えたが、逆に粗視化しない計量演算子について調べることで、より量子論的な重力の解析にも利用できる可能性があると考えられる。

5.4 LLM bubbling 幾何における fuzzball 予想

本節では、第 3 章で述べた fuzzball 予想および fuzzball 解との関連について考察する。

5.4.1 superstar の fuzzball 解

再びブラックホールについて考えよう。簡単のため、ここでもやはり superstar 解を例とする。前述の通り、この解に対応するフェルミオン分布はある密度 $0 < \beta < 1$ を持つ円板上の一様分布である。このような分布は \hbar (重力側では l_p) 程度の大きさを認識できない古典的な観測者から見た粗視化分布であり、これに対しては格子点上に配置されたコヒーレント状態からなる微視的状态群が対応する。エントロピー S_{micro} も統計力学的に計算可能である。これら微視的状态は近似的には $z_o \in \{0, 1\}$ ととらえられ、形式的に LLM 公式に代入すれば、重力側の微視的状态としての滑らかな古典解を得る。

この状況は、NS1-P 系の fuzzball 解の時と一見して非常によく似ている。しかも今回は、fuzzball 解の時のような、ある意味で人為的な操作を施さなくとも、古典解群はほぼ自動的に決まり、全て滑らかとみなせるという特徴がある。では、これらの解は superstar における fuzzball 解となりうるだろうか。

5.4.2 fuzzball 解と量子効果

すぐにわかることは、これら微視的状态に関しては z_0 の分布が l_p 程度の微細構造を持っているため、超重力理論に対しては弦理論 (l_s) 補正だけでなく量子補正も効いてくるということである。当然これは困難をもたらし、単純に構成した古典超重力解は素朴に考えて信用できない。

しかし、逆に NS1-P 系などではそのような状況になかったために、fuzzball 解の意味や量子重力との関係が不明瞭という問題があったことを思い出そう。そのような立場からは、この系は fuzzball 予想について調べる対象として格好であるという見方もできる。

この系における fuzzball 描像はまだあまり研究されていない。しかしこの系で信用できる fuzzball 解またはその他何らかの fuzzball 的な描像を提示し、その粗視化で現れるホライズンの S_{Bek} で S_{micro} を再現するようなことができれば非常に面白いであろう。これは fuzzball 予想の強力な傍証となるだけでなく、fuzzball 予想の意味や効果をより深く理解し、量子重力の理解に近付けるのではないかと考えられる。

5.5 まとめ

$z_0 \in \{0, 1\}$ でない場合の LLM bubbling 幾何は 2 つの場合が考えられる。 $z_0 < 0$ または $z_0 > 1$ の場合には時間的な閉曲線が現れてしまうが、プランク長以上の大きさを見ている時はこのような配位が現れることはない。 $0 < z_0 < 1$ の場合は、微視的には $z_0 \in \{0, 1\}$ であるものが粗視化されて連続的に見えていると考えられる。純粋状態に対して LLM 公式が意味を持つのは $z_0 \in \{0, 1\}$ の場合に限られ、そうでない場合には AdS 側で異なる古典幾何の重ね合わせ状態に対応することになるために、平均の密度を重力解に代入しても無意味である。

$0 < z_0 < 1$ の領域を持つ z_0 には多数の異なる微視的状态が対応しているが、微視的状态をフェルミオンのコヒーレント状態基底で表すことで、巨視的な \bar{z}_0 に対応する微視的状态は容易に同定できる。これにより、例えば superstar などのエントロピー S_{micro} も容易に計算することができる。また分配関数の計算を通じ、巨視的な量と微視的な量による描像・計算を対比して見ることができる。これはエントロピー表式の無矛盾性チェックともなっている。

フェルミオン側で相平面上の粒子分布をより機械的に与える方法としては、密度行列の準古典的な表現である分布関数を用いることが考えられる。最もよく知られている Wigner 分布関数は、正定値でない、プランク長よりも小さい構造を持つなどの問題点があり、そのまま LLM 対応に用いる z_0 とみなすのには向かない。形式的には Wigner 分布関数の弱い粗視化として与えられる伏見分布関数は、正定値であり、プランク程度の長さでは滑らかであるという特徴を持つ。また、コヒーレント状態と密接な関わりを持っている。

フェルミオン系を第 2 量子化すると、その固有値が古典幾何に対応するような演算子として非常に単純なものを考えることができる。この演算子は計量演算子と呼ばれ、コヒーレント状態の近似的な個数演算子として定義される。これは期待値が伏見分布関数に等しくなるという性質を持つ。さらに、計量演算子を粗視化すると、古典幾何としての意味を持つようになる。古典幾何で記述される状態はこの粗視化計量演算子の近似的な固有状態とみなせることから、この演算子は準古典的な状態の定義を与える。また、重力のより量子的な解析にも利用できる可能性がある。

superstar の微視的状态を考えると、fuzzball 解との類似点が自然に見出される。これらには量子効果が強く作用するために解自体は信用できないが、強い量子効果は逆に、NS1-P 系における fuzzball 解の適切な解釈が不明であるという問題などに対して、この

系の研究によって手掛かりを得られる可能性を示唆している。

第 6 章

まとめと展望

本修士論文では、弦理論を用いてブラックホールの微視的状态を記述し、またそれらの粗視化によって巨視的なブラックホールが再現される過程を調べる近年の研究の一部について取り扱った。

第 1 章では、ブラックホールの微視的状态の構成とエントロピーの計算について述べた。古典論におけるブラックホールは微視的状态を持たないが、ホライズン面積と関係づけられたエントロピーを持つ。重力の量子論はこのエントロピーを再現する統計力学を与えることが期待され、弦理論はこれまでに唯一それに成功した。D1-D5-P 系などの 3 荷電系ではエントロピーを係数まで含めて完全に再現する。また D1-D5 系などの 2 荷電系では 2 つのエントロピーは一致しないが、これは逆に古典重力理論の近似が破綻している結果であると自然に理解される。

第 2 章では、ブラックホールの fuzzball 描像を扱った。第 1 章で存在が確認された微視的状态の性質を考えようとすると、情報損失のパラドックスをいかにして回避するかが問題となる。fuzzball 予想は、微視的状态としてのブラックホールの存在自体を否定することによってこれを解決する。同時にこの予想は、微視的状态同士が相異なる領域の境界面が粗視化によってホライズンに見えるという、ブラックホールに対する新しい描像を提示する。そのような微視的状态の準古典近似として提案された fuzzball 解は、遠方ではブラックホール解に一致する滑らかな解である。fuzzball 予想に従って fuzzball 解の粗視化を行うと、得られるホライズンはちょうど統計力学的エントロピーに一致するオーダーの大きさを持つ。このことは fuzzball 予想の傍証と考えられるが、fuzzball 解についてはその正当性や解釈など、未解決の問題も多い。

第 3 章では、第 4 章への準備として、AdS 空間の性質と AdS/CFT 対応、さらに AdS/CFT 対応の具体化である LLM 対応について述べた。IIB 型超弦理論で D3 プレー

ンのホライズン近傍極限を考えると、 $\text{AdS}_5 \times S^5$ 背景時空上の IIB 型超弦理論と、その共形境界で定義された 4 次元 $\mathcal{N} = 4$ 超対称 $\text{SU}(N)$ Yang-Mills 理論とが等価であるという予想 (AdS/CFT 対応) が自然に導かれる。このときの両理論における状態間の対応を $1/2$ BPS セクターについて考えると、CFT 側は自由フェルミオンの理論、AdS 側は LLM bubbling 幾何と呼ばれる一群の解で表される。これらはいずれも 2 次元面上の荷電分布で表されており、それらの分布を同一視する LLM 予想によって、状態間の具体的な対応をつけることができる。また、AdS 側の解が滑らかなになる条件は、荷電分布関数 $z_0(x_1, x_2)$ が $z_0 \in \{0, 1\}$ であることとして簡単に表現される。

第 5 章では、第 4 章を受けて LLM bubbling 幾何の粗視化を取り扱い、それを通じて量子重力やブラックホールの性質について考えた。ここでは粗視化された状態は必ず特異点を持つ解に対応し、純粹状態は古典近似が良ければ滑らかな解に対応する。これは第 3 章の fuzzball 予想とも矛盾しない性質である。また、粗視化された状態の微視的状态は容易に同定・数え上げをすることができ、superstar などのエントロピー S_{micro} も容易に計算できる。分配関数の計算を通じて、巨視的状态の古典論と量子統計による計算の対比を見ることもできる。また、状態からフェルミオン分布を取り出す方法として、Wigner 分布関数と伏見分布関数を導入し、その性質を比較した。次に第 2 量子化形式に移行することにより計量演算子を導入した。これは古典幾何で記述される準古典的状态の定義を与えるが、それとは逆に、より量子論的な解析にも利用できる可能性がある。最後に、この LLM 系のブラックホール、例えば superstar などにおける fuzzball 描像について考えた。一見 fuzzball 解と同じようにも見えるこの系の微視的状态は、 l_p 程度の構造を持つために量子効果が無視できないという困難がある。しかし逆の見方をすれば、この系を研究することによって fuzzball 予想・fuzzball 解と量子重力の関係や、量子重力自体について、より理解を深められる可能性がある。

重力の量子論へのアプローチとしては、本修士論文で扱ったような、どちらかと言えば現象論的なもののほか、弦理論自体の定義・定式化を進めることによる演繹的な導出を目指す方向性もあり、それが非常に重要であることも疑いようがない。現象論的なアプローチも、量子重力の性質・特徴の一端を明らかにすることで、より理論的な事柄に対する手掛かりを得ることが大きな目的の一つと言える。

一方で、fuzzball 描像などブラックホールの微視的状态と粗視化に関わる研究にとって、量子重力と古典重力との関わりを明らかにするという観点からは、これまで述べた他にはどのような可能性や目標が考えられるだろうか。大きな目標の一つとして、ブラックホールのエントロピー面積比例則 (または高次微分項補正で修正された Hawking-Bekenstein 規則) の起源の解明ということが挙げられる。第 2 章で扱った D1-D5-P 系などを含め、

個別にその一致が確かめられている系はあるが、微視的な立場からの一般的な導出や起源、その意味などはわかっていない。微視的状态や粗視化の研究により、例えばこの問題への具体的なアプローチが可能になれば面白い。ホログラフィック原理との関わりなどは当然ながら重要なポイントとなるだろう。今後の発展に期待したい。

謝辞

本修士論文のテーマ選定から執筆、またその他学業研究の全般にわたり、丁寧に指導・助言して頂いた基礎物理学研究所の寺嶋靖治助教に深く感謝します。その他、國友浩准教授をはじめ江口徹所長ほか基礎物理学研究所素粒子論グループの教員の方々、木村哲士博士をはじめポストドクの方々、先輩の徳永達哉さん・笹井裕也さん・太田満久さん、一緒に弦理論の勉強をした久保田達也君と、その他基研の村田仁樹君をはじめ素粒子論分科の同期の面々、基研素粒子論グループ M1 の高力麻衣子さん・中井雄一郎君・三角樹弘君、その他青井順一君・山内大介君をはじめ基研 K402 号室のルームメイト、川中宣太さん・田中義晴さんをはじめその他の基研の大学院生の方々、基研のその他各種教職員の方々、その他お世話になった全ての方々に感謝します。

参考文献

- [1] C. Rovelli, “Quantum Gravity,”. Cambridge, UK: Univ. Pr. (2004) 455 p.
- [2] T. Thiemann, “Modern Canonical Quantum General Relativity,”. Cambridge, UK: Univ. Pr. (2007) 819 p.
- [3] M. B. Green, J. H. Schwarz, and E. Witten, “Superstring Theory. Vol. 1: Introduction,”. Cambridge, UK: Univ. Pr. (1987) 469 p.
- [4] M. B. Green, J. H. Schwarz, and E. Witten, “Superstring Theory. Vol. 2: Loop amplitudes, anomalies and phenomenology,”. Cambridge, UK: Univ. Pr. (1987) 596 p.
- [5] J. Polchinski, “String Theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string,”. Cambridge, UK: Univ. Pr. (1998) 402 p.
- [6] J. Polchinski, “String Theory. Vol. 2: Superstring theory and beyond,”. Cambridge, UK: Univ. Pr. (1998) 531 p.
- [7] J. D. Bekenstein, “Black holes and entropy,” *Phys. Rev.* **D7** (1973) 2333–2346.
- [8] J. D. Bekenstein, “Generalized second law of thermodynamics in black hole physics,” *Phys. Rev.* **D9** (1974) 3292–3300.
- [9] S. W. Hawking, “Black holes and thermodynamics,” *Phys. Rev.* **D13** (1976) 191–197.
- [10] S. W. Hawking, “Breakdown of predictability in gravitational collapse,” *Phys. Rev.* **D14** (1976) 2460–2473.
- [11] S. W. Hawking, “Particle creation by black holes,” *Commun. Math. Phys.* **43** (1975) 199–220.
- [12] A. Strominger and C. Vafa, “Microscopic origin of the Bekenstein-Hawking entropy,” *Phys. Lett.* **B379** (1996) 99–104, [hep-th/9601029](#).
- [13] C. G. Callan and J. M. Maldacena, “D-brane approach to black hole quantum

- mechanics,” *Nucl. Phys.* **B472** (1996) 591–610, [hep-th/9602043](#).
- [14] J. M. Maldacena, “The large N limit of superconformal field theories and supergravity,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 231–252, [hep-th/9711200](#).
- [15] S. S. Gubser, I. R. Klebanov, and A. M. Polyakov, “Gauge theory correlators from non-critical string theory,” *Phys. Lett.* **B428** (1998) 105–114, [hep-th/9802109](#).
- [16] E. Witten, “Anti-de Sitter space and holography,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 253–291, [hep-th/9802150](#).
- [17] O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri, and Y. Oz, “Large N field theories, string theory and gravity,” *Phys. Rept.* **323** (2000) 183–386, [hep-th/9905111](#).
- [18] H. Lin, O. Lunin, and J. M. Maldacena, “Bubbling AdS space and 1/2 BPS geometries,” *JHEP* **10** (2004) 025, [hep-th/0409174](#).
- [19] V. Balasubramanian, J. de Boer, V. Jejjala, and J. Simon, “The library of babel: On the origin of gravitational thermodynamics,” *JHEP* **12** (2005) 006, [hep-th/0508023](#).
- [20] V. Balasubramanian, B. Czech, K. Larjo, D. Marolf, and J. Simon, “Quantum geometry and gravitational entropy,” *JHEP* **12** (2007) 067, [arXiv:0705.4431 \[hep-th\]](#).
- [21] J. M. Maldacena and A. Strominger, “Statistical entropy of four-dimensional extremal black holes,” *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996) 428–429, [hep-th/9603060](#).
- [22] J. M. Maldacena and L. Susskind, “D-branes and fat black holes,” *Nucl. Phys.* **B475** (1996) 679–690, [hep-th/9604042](#).
- [23] J. Callan, Curtis G., C. Lovelace, C. R. Nappi, and S. A. Yost, “Loop corrections to superstring equations of motion,” *Nucl. Phys.* **B308** (1988) 221.
- [24] M. R. Douglas, “Branes within branes,” [hep-th/9512077](#).
- [25] M. F. Atiyah, N. J. Hitchin, V. G. Drinfeld, and Y. I. Manin, “Construction of instantons,” *Phys. Lett.* **A65** (1978) 185–187.
- [26] N. H. Christ, E. J. Weinberg, and N. K. Stanton, “General self-dual Yang-Mills solutions,” *Phys. Rev.* **D18** (1978) 2013.
- [27] J. L. Cardy, “Operator content of two-dimensional conformally invariant theories,” *Nucl. Phys.* **B270** (1986) 186–204.
- [28] S. D. Mathur, “The fuzzball proposal for black holes: An elementary review,”

- Fortsch. Phys.* **53** (2005) 793–827, hep-th/0502050.
- [29] C. Vafa, “Instantons on D-branes,” *Nucl. Phys.* **B463** (1996) 435–442, hep-th/9512078.
- [30] K. Sfetsos and K. Skenderis, “Microscopic derivation of the Bekenstein-Hawking entropy formula for non-extremal black holes,” *Nucl. Phys.* **B517** (1998) 179–204, hep-th/9711138.
- [31] O. Lunin and S. D. Mathur, “AdS/CFT duality and the black hole information paradox,” *Nucl. Phys.* **B623** (2002) 342–394, hep-th/0109154.
- [32] J. von Neumann, “Mathematical foundations of quantum mechanics,” translated by R. T. Beyer, Princeton Univ. Pr. (1955) 472 p.
- [33] V. Bargmann, P. Butera, L. Girardello, and J. R. Klauder, “On the completeness of the coherent states,” *Rept. Math. Phys.* **2** (1971) 221–228.
- [34] O. Lunin and S. D. Mathur, “Statistical interpretation of Bekenstein entropy for systems with a stretched horizon,” *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002) 211303, hep-th/0202072.
- [35] A. Sen, “Extremal black holes and elementary string states,” *Mod. Phys. Lett.* **A10** (1995) 2081–2094, hep-th/9504147.
- [36] S. Giusto and S. D. Mathur, “Fuzzball geometries and higher derivative corrections for extremal holes,” *Nucl. Phys.* **B738** (2006) 48–75, hep-th/0412133.
- [37] S. S. Gubser, I. R. Klebanov, and A. A. Tseytlin, “String theory and classical absorption by three-branes,” *Nucl. Phys.* **B499** (1997) 217–240, hep-th/9703040.
- [38] G. ’t Hooft, “Dimensional reduction in quantum gravity,” gr-qc/9310026.
- [39] L. Susskind, “The world as a hologram,” *J. Math. Phys.* **36** (1995) 6377–6396, hep-th/9409089.
- [40] D. Berenstein, “A toy model for the AdS/CFT correspondence,” *JHEP* **07** (2004) 018, hep-th/0403110.
- [41] D. E. Berenstein, J. M. Maldacena, and H. S. Nastase, “Strings in flat space and pp waves from $\mathcal{N} = 4$ super Yang Mills,” *JHEP* **04** (2002) 013, hep-th/0202021.
- [42] A. Hashimoto, S. Hirano, and N. Itzhaki, “Large branes in AdS and their field theory dual,” *JHEP* **08** (2000) 051, hep-th/0008016.

- [43] V. Balasubramanian, B. Czech, K. Larjo, and J. Simon, “Integrability vs. information loss: A simple example,” *JHEP* **11** (2006) 001, [hep-th/0602263](#).
- [44] G. Milanesi and M. O’Loughlin, “Singularities and closed time-like curves in type IIB 1/2 BPS geometries,” *JHEP* **09** (2005) 008, [hep-th/0507056](#).
- [45] L. D’Errico, W. Mueck, and R. Pettorino, “Stretched horizon and entropy of superstars,” *JHEP* **05** (2007) 063, [hep-th/0703223](#).
- [46] M. Cvetič, M. J. Duff, P. Hoxha, J. T. Liu, H. Lü, J. X. Lu, R. Martinez-Acosta, C. N. Pope, H. Sati, and T. A. Tran, “Embedding AdS black holes in ten and eleven dimensions,” *Nucl. Phys.* **B558** (1999) 96–126, [hep-th/9903214](#).
- [47] K. Behrndt, A. H. Chamseddine, and W. A. Sabra, “BPS black holes in $\mathcal{N} = 2$ five dimensional AdS supergravity,” *Phys. Lett.* **B442** (1998) 97–101, [hep-th/9807187](#).
- [48] K. Behrndt, M. Cvetič, and W. A. Sabra, “Non-extreme black holes of five dimensional $\mathcal{N} = 2$ AdS supergravity,” *Nucl. Phys.* **B553** (1999) 317–332, [hep-th/9810227](#).
- [49] R. C. Myers and O. Tafjord, “Superstars and giant gravitons,” *JHEP* **11** (2001) 009, [hep-th/0109127](#).
- [50] S. S. Gubser, “Curvature singularities: The good, the bad, and the naked,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **4** (2002) 679–745, [hep-th/0002160](#).
- [51] M. Hillery, R. F. O’Connell, M. O. Scully, and E. P. Wigner, “Distribution functions in physics: Fundamentals,” *Phys. Rept.* **106** (1984) 121–167.
- [52] K. Husimi, “Some formal properties of the density matrix,” *Proc. Phys. Math. Soc. Japan.* **22** (1940) 264–314.