

共形ブートストラップで解く フラストレート磁性体の相転移

中山 優 (Caltech, Kavli IPMU)

[arXiv:1407.6195](https://arxiv.org/abs/1407.6195) [arXiv:1404.0489](https://arxiv.org/abs/1404.0489)

大槻 知貴氏との共同研究に基づく

共形ブートストラップでできる(ない)こと

模型を「解かず」に**対称性**と**無矛盾性条件**だけから
臨界現象を「解く」、秘伝の極意 (Polyakov, Rychkov...)

- 分配関数は計算しない

$$\cancel{Z = \text{Tr} e^{\beta \mathcal{H}}}$$

- ハミルトニアンも仮定しない

$$\cancel{\mathcal{H} = \sum_i J \sigma_i \sigma_{i+1}}$$

- 臨界指数 + 対称性 → **No** or **Maybe**

- 十分情報があれば、臨界現象が無矛盾性だけから解ける

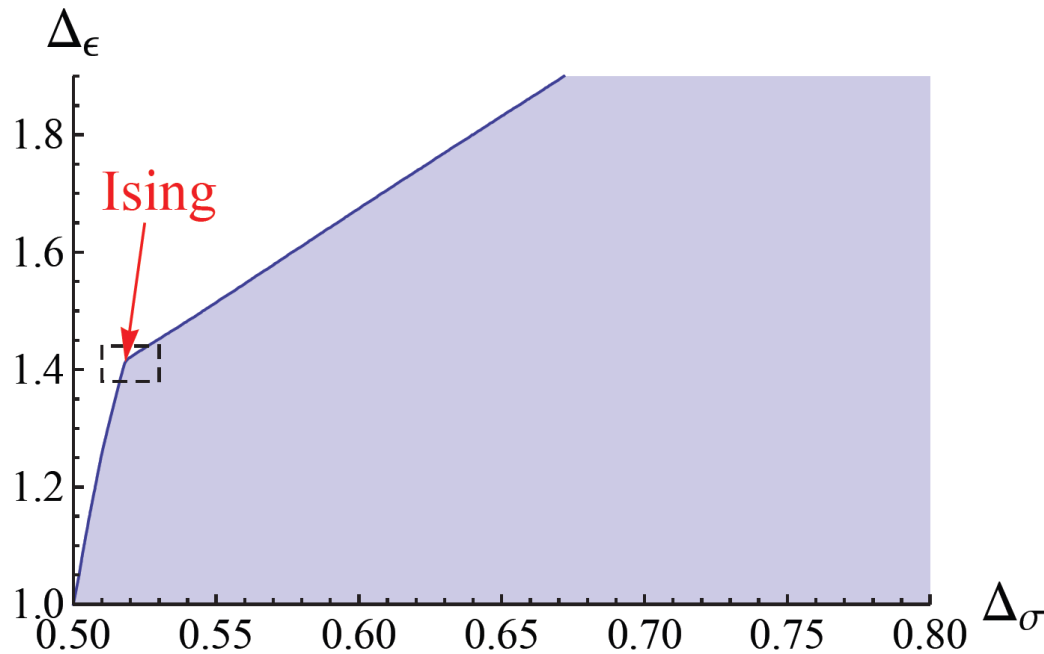
- 「普遍性」と「繰り込み群」の考え方の最終到着点？

例えば(古典)3次元イジングモデルを解く

- 分配関数は計算しない(多分できないし、その意義は?)
- 3次元イジングモデルの**普遍クラス**とは?
- Landau-Ginzburg-Wilson の考えでは、**ユークリッド回転対称性**を持つ、3次元の ϕ^4 場の理論
- **臨界点**では、 Z_2 (スピンの反転)対称性を持った場の理論で、relevant な演算子が ϕ と ϕ^2 だけ。
- 臨界点では、**スケール不変性**が**共形不変性**に持ち上がると考えられている(後でもう一度考えてみる)

共形ブートストラップの予言

共形対称性によって3次元イジングモデルの臨界指数が存在できる領域は決まっている



$$\Delta_\sigma = \frac{3}{1 + \delta}$$

$$\Delta_\epsilon = 3 \frac{\alpha - 1}{\alpha - 2}$$

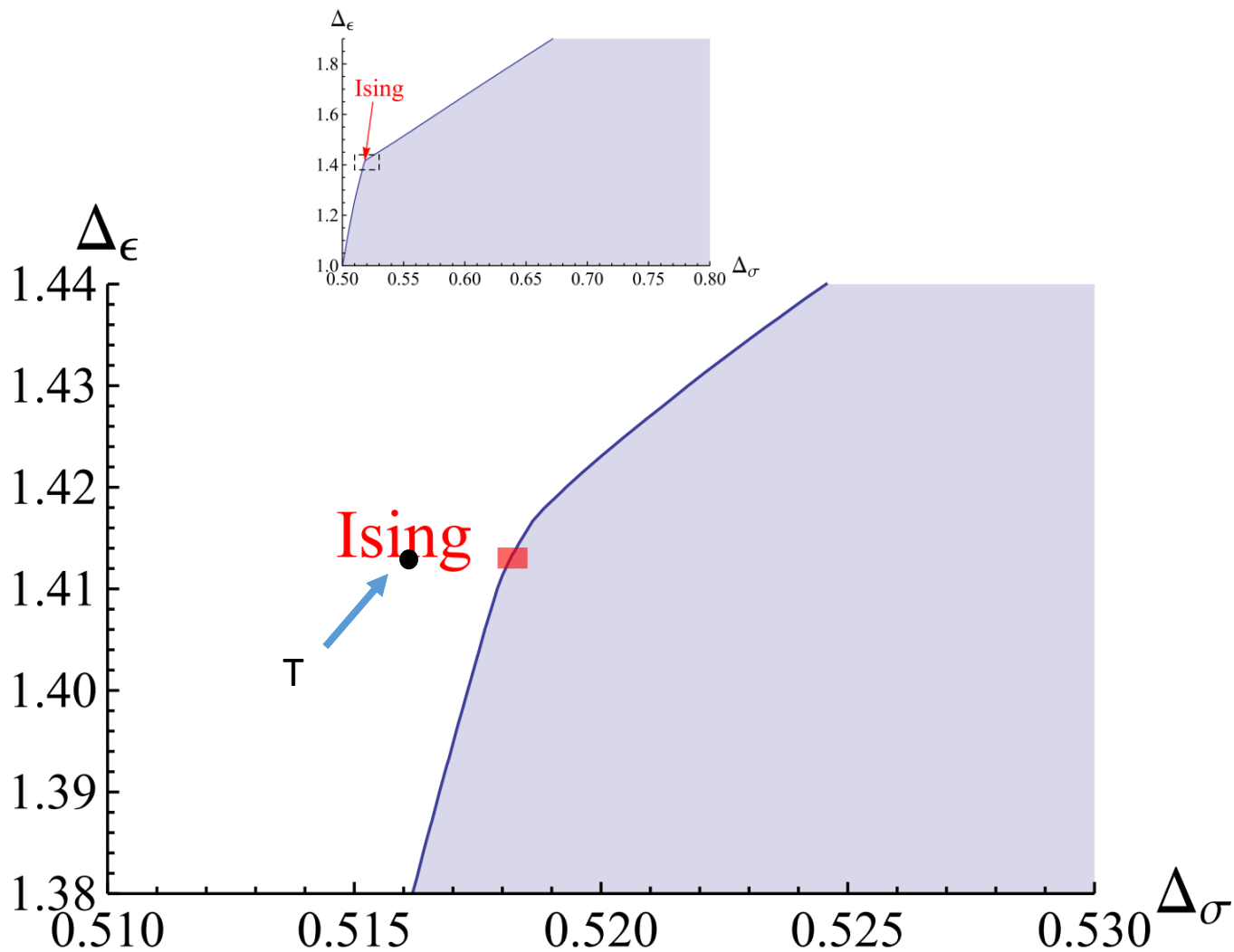
$$C = (T - T_c)^{-\alpha}$$

$$m = (T - T_c)^\beta$$

$$m = h^{1/\delta}$$

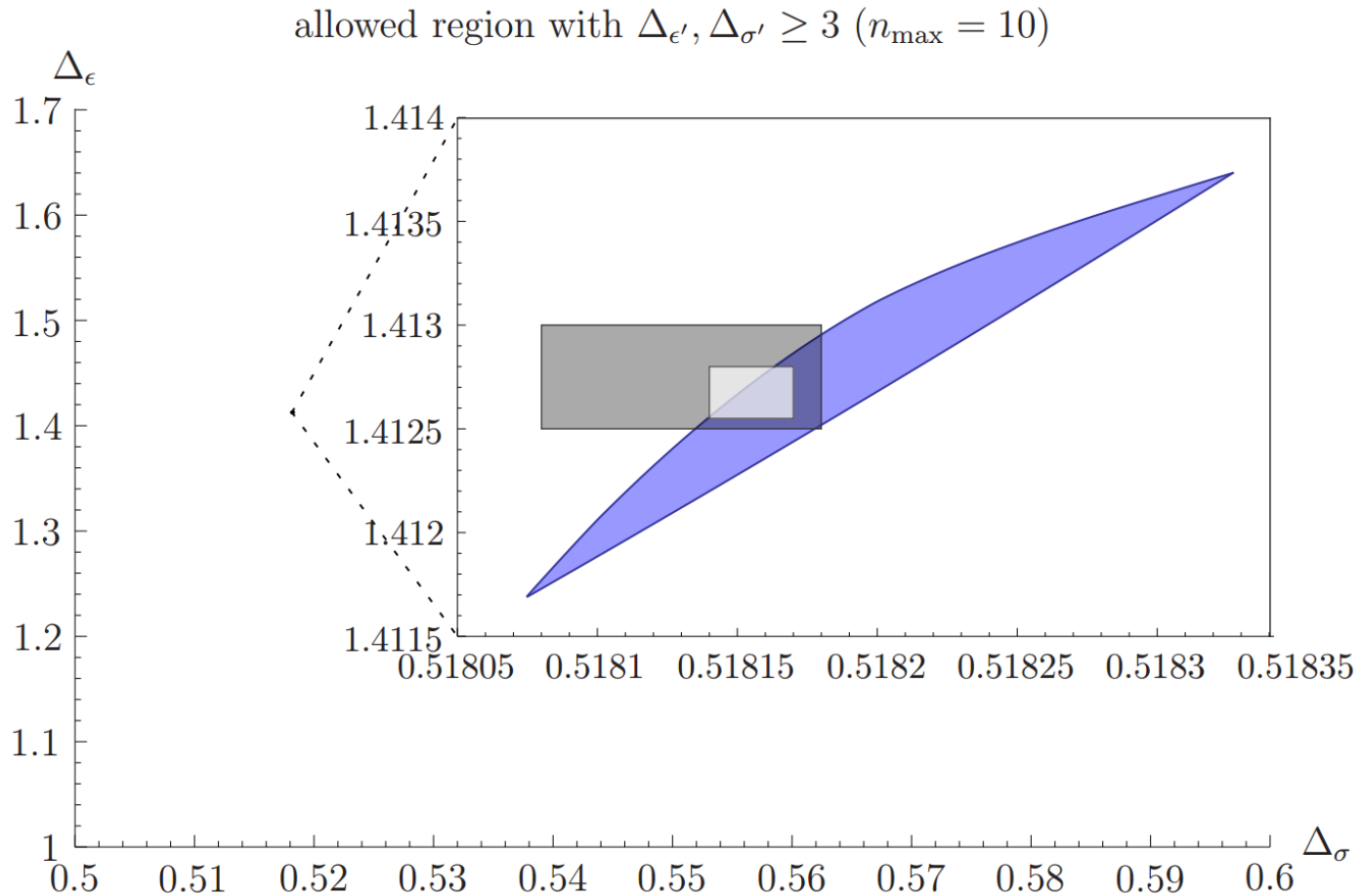
スケールリング仮説: $2 - \alpha = \beta(\delta + 1)$

2年前の結果 (El-Showk et al [1203.6064](#))



最新結果 (Kos et al [1406.4858](#))

仮定: 共形不変かつ、relevant なパラメタが外部磁場と温度だけ



3次元臨界現象の普遍性はもはや証明された？

共形不変性とは？

場の理論・繰り込み群・スケール/共形不変性

3次元イジング模型と同じ普遍性を持つと思われる
ランダウ・ギンツブルグ ϕ^4 の理論を考える

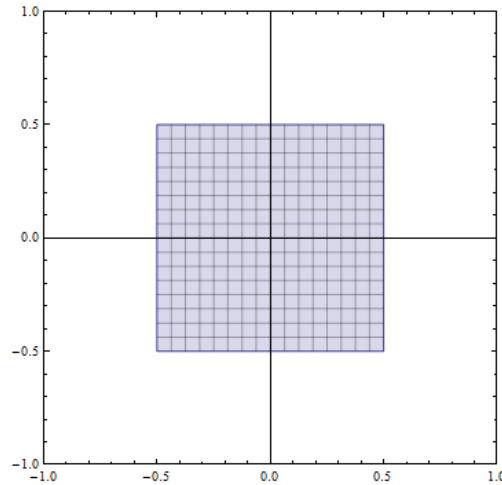
$$\mathcal{H} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + m^2 \phi^2 + \lambda \phi^4 \quad Z = \int \mathcal{D}\phi e^{-\int d^3x \mathcal{H}}$$

• ウィルソンの繰り込み群変換

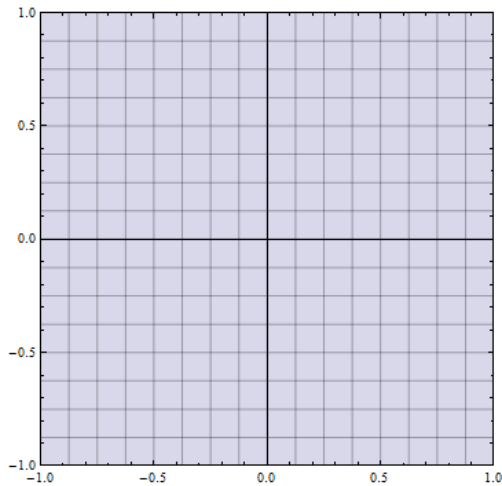
$$Z = \int_{\mu < \Lambda} \mathcal{D}\phi e^{-\int d^3x \mathcal{H}_\Lambda} \quad e^{-\int d^3x \mathcal{H}_\Lambda} = \int_{\Lambda < \mu} \mathcal{D}\phi e^{-\int d^3x \mathcal{H}}$$

- (近似的な)繰り込み群方程式 $\frac{d\mathcal{H}}{d\Lambda} = \beta_\lambda \phi^4 + \dots$
- 繰り込み群の固定点が臨界現象を特徴づける
- 場の理論において、スケール不変な固定点は(ほとんどの場合)エネルギー・運動量テンソルのトレースが消えるため、スケール不変だけではなく創発的な共形対称性を持つ

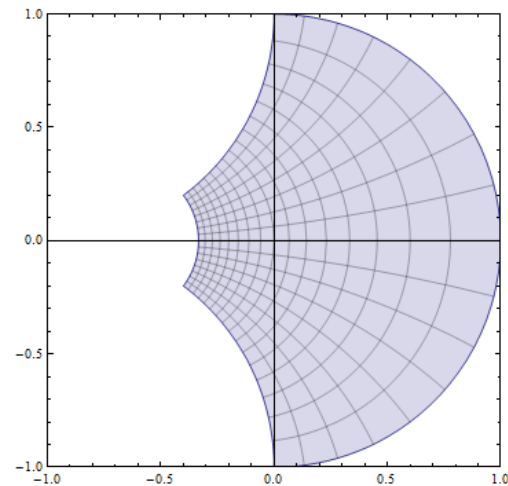
スケール不変性 vs 共形不変性



Scale transformation



Conformal transformation



共形不変な場の理論

時空の対称性 → ネーターカレントとしてのエネルギー運動量テンソルの性質 (レビュー: [arXiv:1302.0884](https://arxiv.org/abs/1302.0884))

- 並進対称性:

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$$

- ローレンツ(回転)対称性:

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu} \quad T^\mu{}_\mu = \beta^I O_I$$

- スケール対称性:

$$x^\mu \rightarrow \lambda x^\mu$$

$$T^\mu{}_\mu = \partial^\mu J_\mu \quad D_\mu = x^\nu T_{\mu\nu} - J_\mu$$

- 特殊共形対称性:

$$T^\mu{}_\mu = 0$$

J: ビリアルカレント

$$x^\mu \rightarrow \frac{x^\mu + a^\mu x^2}{1 + 2a^\mu x_\mu + a^2 x^2}$$

$$K_\mu(a_\nu) = [a_\nu x^2 - 2x_\nu a^\sigma x_\sigma] T^\nu{}_\mu$$

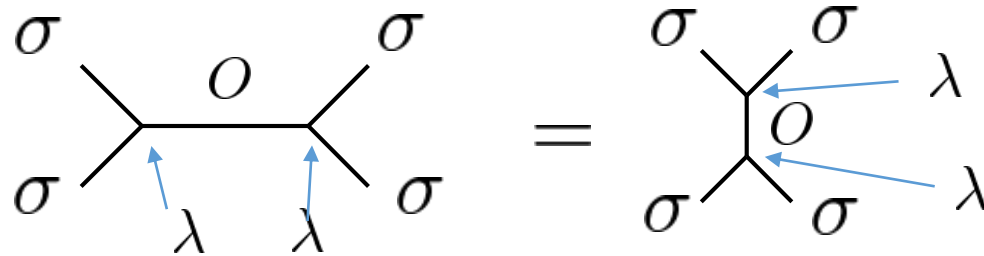
共形ブートストラップ方程式速習1

- 4点関数と演算子積展開(OPE)

$$\begin{aligned} \langle \sigma(x_1)\sigma(x_2)\sigma(x_3)\sigma(x_4) \rangle &= x_{12}^{-2\Delta_\sigma} x_{34}^{-2\Delta_\sigma} g(u, v) \\ &= x_{12}^{-2\Delta_\sigma} x_{34}^{-2\Delta_\sigma} \sum_{\mathcal{O}} \lambda_{\sigma\sigma\mathcal{O}}^2 g^{(l)}(u, v) \end{aligned}$$

- 4点関数は解析的なのでOPEの順番を変えてよい

- 交差対称性



- 理論に現れる演算子の次元とOPE係数に**無限個の束縛条件**を与えている。

$$g(u, v) = (u/v)^{\Delta_\sigma} g(v, u)$$

- 無限個の演算子の和を取らないとこの式は成り立たないことが示せる

- 一方で、(特定の点で評価すれば)OPEの収束はとても速い

共形ブートストラップ方程式速習2

- 無限次元の拘束条件から有用な情報を引き出したい

$$g(u, v) = (u/v)^{\Delta_\sigma} g(v, u) \quad g(u, v) = \sum_{\mathcal{O}} \lambda_{\sigma\sigma}^2 \circ g_{\Delta_{\mathcal{O}}}^{(l)}(u, v)$$

- まず、恒等演算子の部分だけ取り出して整理すると

$$1 = \sum_{\mathcal{O} \neq 1} \lambda_{\sigma\sigma}^2 \circ (f_{\Delta_{\mathcal{O}}}^{(l)}(u, v) - f_{\Delta_{\mathcal{O}}}^{(l)}(v, u))$$

- 演算子の次元を仮定してみて $\Delta_\sigma = \delta$ $\Delta_\epsilon = \Delta^c(\delta)$ 交差対称性が満たされるか試してみる

(鏡映対称性の縛りがあって非自明 $\lambda_{\phi\phi\mathcal{O}}^2 > 0$)

- 仮定の元で右辺が常に正になるような微分演算子が見つければそのスペクトルの仮定は排除される

→ 凸的最適化問題

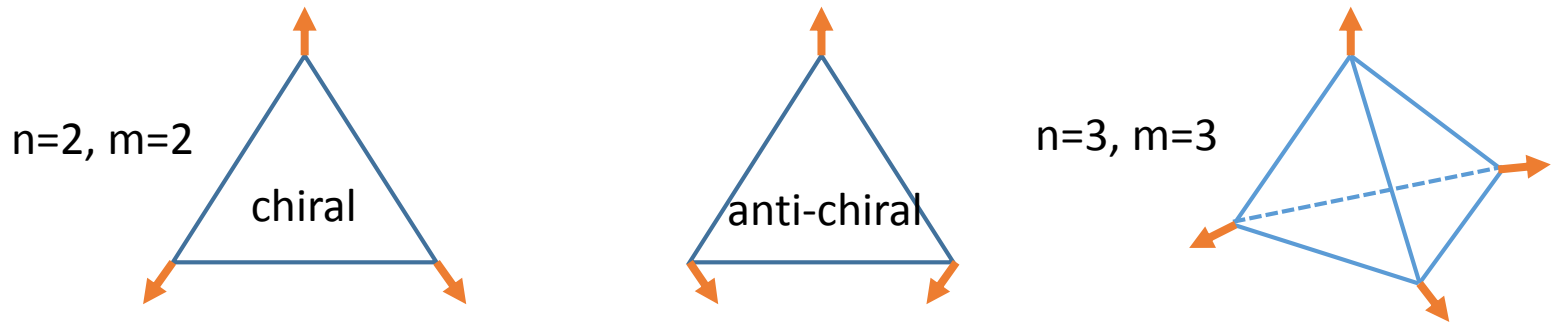
Try minimize $a[1]$ while $a[f(u,v)-f(v,u)] > 0$. If $a[1] < 0$, then assumption is excluded.

人間よりコンピュータが得意

共形ブートストラップで解く フラストレート磁性体の相転移

フラストレーションを持ったスピン系の相転移

フラストレーションを持った格子での反磁性体を考える(川村)



- 普通のハイゼンベルグ相とは異なった秩序相が存在する？
- n : component of spin, m : order of collinearity
- $O(n) \times O(m) \rightarrow O(n-2) \times O(m)$ の自発的対称性の破れ
- 例: CsMnBr_3 , CsNiCl_3
- 有限温度で対称性は回復すると信じられている
- 1次相転移か2次相転移か？ 実験的には**大激論**
- 理論的にも決着がつかない。モンテカルロ、イプシロン展開、ラージN展開、汎関数繰り込み群...

実験・計算機からの報告 (c.f. cond-mat/0309101)

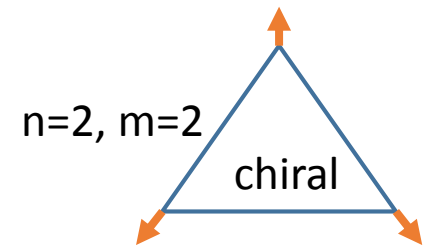
| | α | β | γ | ν |
|---------------------|-----------------------|-----------|-----------|-----------|
| VCl ₂ | | 0.20(2) | 1.05(3) | 0.62(5) |
| VBr ₂ | 0.30(5) | | | |
| CsNiCl ₃ | 0.25(8) | 0.28(3) | | |
| CsMnCl ₃ | 0.28(6) | | | |
| CsMnBr ₃ | 0.23(7) | 0.29(1) | [0.75(4)] | [0.42(3)] |
| CsCuCl ₃ | 1 st order | | | |
| STA1 | 0.245(27) | 0.289(15) | 1.176(26) | 0.585(9) |
| STA2 | 1 st order | | | |
| STAR | 0.488(30) | 0.221(9) | 1.074(29) | 0.504(10) |
| V _{3,2} | 0.479(24) | 0.193(4) | 1.136(23) | 0.507(8) |
| V _{3,2} | 1 st order | | | |
| BCT | 0.287(30) | 0.247(10) | 1.217(32) | 0.571(10) |
| GLW | 1 st order | | | |

$O(n) \times O(m)$ ランダウ・ギンツブルグ模型 1

フラストレーションを持ったスピンの有効理論

$$\mathcal{H} = \partial_\mu \phi_a^\alpha \partial_\mu \phi_a^\alpha + u(\phi_a^\alpha \phi_a^\alpha)^2 + v(\phi_a^\alpha \phi_b^\alpha \phi_a^\beta \phi_b^\beta - \phi_a^\alpha \phi_a^\alpha \phi_b^\beta \phi_b^\beta)$$

- 場 ϕ_a^α : $O(n) \times O(m)$ のグローバル対称性に対して vector x vector 表現 ($\sum_i \sigma_a^i = 0$ からの fluctuation が ϕ_a^α)



- u は $O(nm)$ 対称性を持つが v は $O(n) \times O(m)$ に破る
- いつものように質量項は臨界温度と関係している
- $v > 0$: フラストレーションを持ったスピンを記述 (chiral fixed point)
n: component of spin, m: non-collinear dimension
- $v < 0$: QCD のカイラル相転移・超流動ヘリウムの相転移を記述: $SU(2) \times SU(2) \times U(1)_a = O(4) \times O(2)$ (collinear fixed point)

$O(n) \times O(m)$ ランダウ・ギンツブルグ模型2

フラストレーションを持ったスピン系の有効理論

$$\mathcal{H} = \partial_\mu \phi_a^\alpha \partial_\mu \phi_a^\alpha + u(\phi_a^\alpha \phi_a^\alpha)^2 + v(\phi_a^\alpha \phi_b^\alpha \phi_a^\beta \phi_b^\beta - \phi_a^\alpha \phi_a^\alpha \phi_b^\beta \phi_b^\beta)$$

- 第0近似: ランダウ理論(平均場) この理論は2次相転移を示す
- しかし、揺らぎの効果を含めると?
- $v = 0$ に $O(nm)$ 対称なハイゼンベルグ固定点があるのは知っている
- ハイゼンベルグ固定点の他に、繰り込み群の固定点が存在したら2次相転移でありえる
- もし固定点が存在しなかったら1次相転移
- しかし繰り込み群の解析は非常に困難であった...
- 1-loop で、 $4 - \epsilon$ 次元では固定点は存在しない!

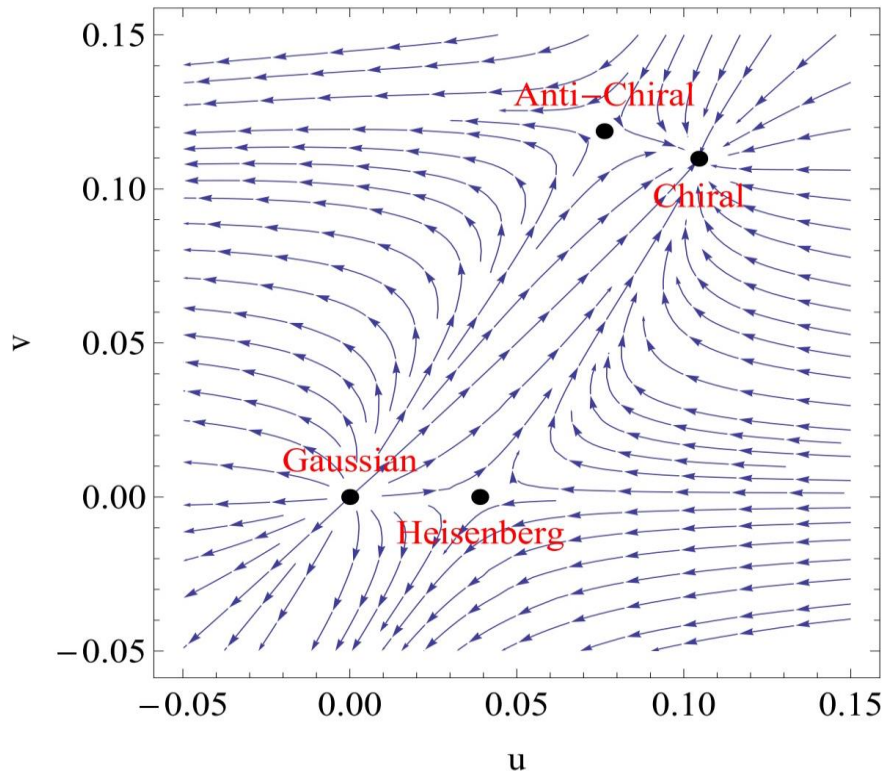
繰り込み群の計算 (Calabrese, Vicari, e.g. [1309.5446](#))

$$\mathcal{H} = \partial_\mu \phi_a^\alpha \partial_\mu \phi_a^\alpha + u(\phi_a^\alpha \phi_a^\alpha)^2 + v(\phi_a^\alpha \phi_b^\alpha \phi_a^\beta \phi_b^\beta - \phi_a^\alpha \phi_a^\alpha \phi_b^\beta \phi_b^\beta)$$

$$\begin{aligned} \beta_u(u, v) = & -u + 4u^2 + 4uv + \frac{3}{2}v^2 - \frac{57}{8}u^3 - 11u^2v - \frac{61}{8}uv^2 - 3v^3 + \frac{93}{8}u^4\zeta(3) + \frac{389}{16}u^4 + 24u^3v\zeta(3) + \frac{975}{16}u^3v \\ & + \frac{99}{4}u^2v^2\zeta(3) + \frac{9347}{128}u^2v^2 + 18uv^3\zeta(3) + 45uv^3 + 6v^4\zeta(3) + \frac{1197}{128}v^4 - \frac{1885}{16}u^5\zeta(5) - \frac{3119}{32}u^5\zeta(3) + \frac{31}{120}\pi^4u^5 \\ & - \frac{51759}{512}u^5 - 340u^4v\zeta(5) - \frac{1183}{4}u^4v\zeta(3) + \frac{161}{240}\pi^4u^4v - \frac{10449u^4}{32}v - \frac{3905}{8}u^3v^2\zeta(5) - \frac{6849}{16}u^3v^2\zeta(3) + \frac{353}{480}\pi^4u^3v^2 \\ & - \frac{391151}{768}u^3v^2 - \frac{895}{2}u^2v^3\zeta(5) - 377u^2v^3\zeta(3) + \frac{8}{15}\pi^4u^2v^3 - \frac{42919}{96}u^2v^3 - \frac{1875}{8}uv^4\zeta(5) - \frac{3049}{16}uv^4\zeta(3) \\ & + \frac{31}{96}\pi^4uv^4 - \frac{12697}{64}uv^4 - 50v^5\zeta(5) - \frac{325}{8}v^5\zeta(3) + \frac{5}{48}\pi^4v^5 - \frac{1097}{32}v^5 + \frac{646947}{512}u^6\zeta(7) + \frac{333739}{256}u^6\zeta(5) \\ & - \frac{3}{64}u^6\zeta(3)^2 + \frac{333239}{512}u^6\zeta(3) - \frac{1885}{4032}\pi^6u^6 - \frac{6827}{2560}\pi^4u^6 + \frac{121665}{256}u^6 + \frac{146853}{32}u^5v\zeta(7) + \frac{158151}{32}u^5v\zeta(5) \\ & - \frac{507}{32}u^5v\zeta(3)^2 + \frac{320791}{128}u^5v\zeta(3) - \frac{6625}{4032}\pi^6u^5v - \frac{37481}{3840}\pi^4u^5v + \frac{494921}{256}u^5v + \frac{4266675}{512}u^4v^2\zeta(7) + \frac{1144635}{128}u^4v^2\zeta(5) \\ & - \frac{7017}{256}u^4v^2\zeta(3)^2 + \frac{4795927}{1024}u^4v^2\zeta(3) - \frac{9615}{3584}\pi^6u^4v^2 - \frac{504343}{30720}\pi^4u^4v^2 + \frac{7852881}{2048}u^4v^2 + 9702u^3v^3\zeta(7) + \frac{79415}{8}u^3v^3\zeta(5) \\ & - \frac{3}{4}u^3v^3\zeta(3)^2 + \frac{171801}{32}u^3v^3\zeta(3) - \frac{155}{56}\pi^6u^3v^3 - \frac{8173}{480}\pi^4u^3v^3 + \frac{6814435}{1536}u^3v^3 + \frac{3658095}{512}u^2v^4\zeta(7) + \frac{1773961}{256}u^2v^4\zeta(5) \\ & + \frac{2777}{128}u^2v^4\zeta(3)^2 + \frac{1942077}{512}u^2v^4\zeta(3) - \frac{94645}{48384}\pi^6u^2v^4 - \frac{182363}{15360}\pi^4u^2v^4 + \frac{36147287}{12288}u^2v^4 + \frac{189189}{64}uv^5\zeta(7) \\ & + \frac{44351}{16}uv^5\zeta(5) + \frac{103}{8}uv^5\zeta(3)^2 + \frac{189841}{128}uv^5\zeta(3) - \frac{2585}{3024}\pi^6uv^5 - \frac{1647}{320}\pi^4uv^5 + \frac{2121643}{2048}uv^5 \\ & + \frac{265041}{512}v^6\zeta(7) + \frac{61459}{128}v^6\zeta(5) + \frac{81}{64}v^6\zeta(3)^2 + \frac{246291}{1024}v^6\zeta(3) - \frac{335}{2016}\pi^6v^6 - \frac{3125}{3072}\pi^4v^6 + \frac{2538035}{16384}v^6, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \beta_v(u, v) = & -v + 3uv + 2v^2 - \frac{61}{8}u^2v - 11uv^2 - \frac{27}{8}v^3 + \frac{1349}{64}u^3v + \frac{1451}{32}u^2v^2 + \frac{575}{16}uv^3 + \frac{347}{32}v^4 + \frac{33}{2}u^3v\zeta(3) \\ & + 36u^2v^2\zeta(3) + 24uv^3\zeta(3) + \frac{9}{2}v^4\zeta(3) - \frac{49815}{512}u^4v + \frac{29}{64}\pi^4u^4v - \frac{27835}{96}u^3v^2 + \frac{163}{120}\pi^4u^3v^2 - \frac{272945}{768}u^2v^3 + \frac{22}{15}\pi^4u^2v^3 \\ & - \frac{6635}{32}uv^4 + \frac{53}{80}\pi^4uv^4 - \frac{365}{8}v^5 + \frac{1}{10}\pi^4v^5 - \frac{3765}{32}u^4v\zeta(3) - \frac{691}{2}u^3v^2\zeta(3) - \frac{6111}{16}u^2v^3\zeta(3) - \frac{1507}{8}uv^4\zeta(3) - \frac{567}{16}v^5\zeta(3) \\ & - \frac{2625}{16}u^4v\zeta(5) - 480u^3v^2\zeta(5) - \frac{2115}{4}u^2v^3\zeta(5) - \frac{1045}{4}uv^4\zeta(5) - \frac{795}{16}v^5\zeta(5) + \frac{445355}{1024}u^5v - \frac{58367}{15360}\pi^4u^5v \\ & - \frac{12115}{16128}\pi^6u^5v + \frac{209163}{128}u^4v^2 - \frac{109087}{7680}\pi^4u^4v^2 - \frac{7535}{2688}\pi^6u^4v^2 + \frac{16837765}{6144}u^3v^3 - \frac{81491}{3840}\pi^4u^3v^3 - \frac{8455}{2016}\pi^6u^3v^3 \\ & + \frac{3808447}{1536}u^2v^4 - \frac{30289}{1920}\pi^4u^2v^4 - \frac{38005}{12096}\pi^6u^2v^4 + \frac{9331663}{8192}uv^5 - \frac{1485}{256}\pi^4uv^5 - \frac{28555}{24192}\pi^6uv^5 + \frac{825245}{4096}v^6 - \frac{1285}{1536}\pi^4v^6 \\ & - \frac{5}{28}\pi^6v^6 + \frac{395479}{512}u^5v\zeta(3) + \frac{734983}{256}u^4v^2\zeta(3) + \frac{282653}{64}u^3v^3\zeta(3) + \frac{56043}{16}u^2v^4\zeta(3) + \frac{736561}{512}uv^5\zeta(3) + \frac{63485}{256}v^6\zeta(3) \\ & + \frac{2499}{128}u^5v\zeta(3)^2 + \frac{4305}{64}u^4v^2\zeta(3)^2 + \frac{405}{4}u^3v^3\zeta(3)^2 + \frac{2771}{32}u^2v^4\zeta(3)^2 + \frac{2579}{64}uv^5\zeta(3)^2 + \frac{231}{32}v^6\zeta(3)^2 + \frac{105231}{64}u^5v\zeta(5) \\ & + \frac{390003}{64}u^4v^2\zeta(5) + \frac{295491}{32}u^3v^3\zeta(5) + \frac{457495}{64}u^2v^4\zeta(5) + \frac{5647}{2}uv^5\zeta(5) + \frac{29035}{64}v^6\zeta(5) + \frac{472311}{256}u^5v\zeta(7) \\ & + \frac{218295}{32}u^4v^2\zeta(7) + \frac{1325205}{128}u^3v^3\zeta(7) + \frac{1030617}{128}u^2v^4\zeta(7) + \frac{816291}{256}uv^5\zeta(7) + \frac{16317}{32}v^6\zeta(7). \end{aligned} \quad (1)$$

繰り込み群の流れの概念図



- (不)安定な固定点を (anti-)chiral 固定点と呼ぶ
- (mを固定して) n を十分大きくとれば、**両方存在する**と思われる
- しかし、n を小さくするとどうなるかは**誰も知らない...**

なぜ人によって言うことが違うのか？

- ラージ n 展開やイプシロン展開は**漸近展開**
- 結果は、5ループや6ループのファインマンダイアグラムの計算をどう **resum** するか依存する。
- **汎関数繰り込み法**は $d=3$ で直接定義されるが汎関数空間の打ち切りはコントロールされた近似ではない
- **モンテカルロ計算**もまた1次相転移と2次相転移とそれぞれのグループが争い続ける...

答えるべき問題

- $O(n) \times O(m)$ 対称性を持つ3次元のランダウ・ギンツブルグ模型での固定点を決定する
- ハイゼンベルグ固定点以外に非自明な固定点が存在するか？ → 相転移の次数が決定できる
- もし固定点が存在したら臨界指数を決定して実験やシミュレーションと比較する
- 共形ブートストラップによるアプローチはハミルトニアンすら仮定しない完全に非摂動的議論である (c.f. “Hamiltonian is dead”)

共形ブートストラップによる解析

共形ブートストラップ方程式復習

- 4点関数を考える

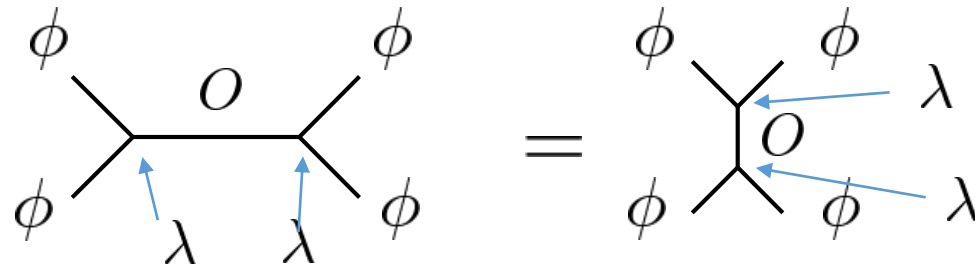
$$\langle \phi_{a_1}^{\alpha_1}(x_1) \phi_{a_2}^{\alpha_2}(x_2) \phi_{a_3}^{\alpha_3}(x_3) \phi_{a_4}^{\alpha_4}(x_4) \rangle$$

- 演算子積展開(OPE)

$$\phi_a^\alpha \times \phi_b^\beta = \sum_{I \in \mathbf{R} \otimes \mathbf{R}, l: \text{spin}} \lambda_{\phi\phi O} O^{I,l}$$

- I: SS, ST, TS, TT, AS, SA, AA ... (S: Singlet, T: Traceless symmetric, A: Anti-symmetric)

- 交差対称性



- 演算子の次元を仮定してみて(e.g. $\Delta_\phi = \delta$, $\Delta^{I,l} = \Delta_c^{I,l}(\delta)$)
交差対称性が満たされるか試してみる

(ユニタリ性の縛りがあるって非自明 $\lambda_{\phi\phi O}^2 > 0$) $1 = \sum_O \lambda_O^2 (f_O(z) - f_O(1-z))$

→ 凸的最適化問題

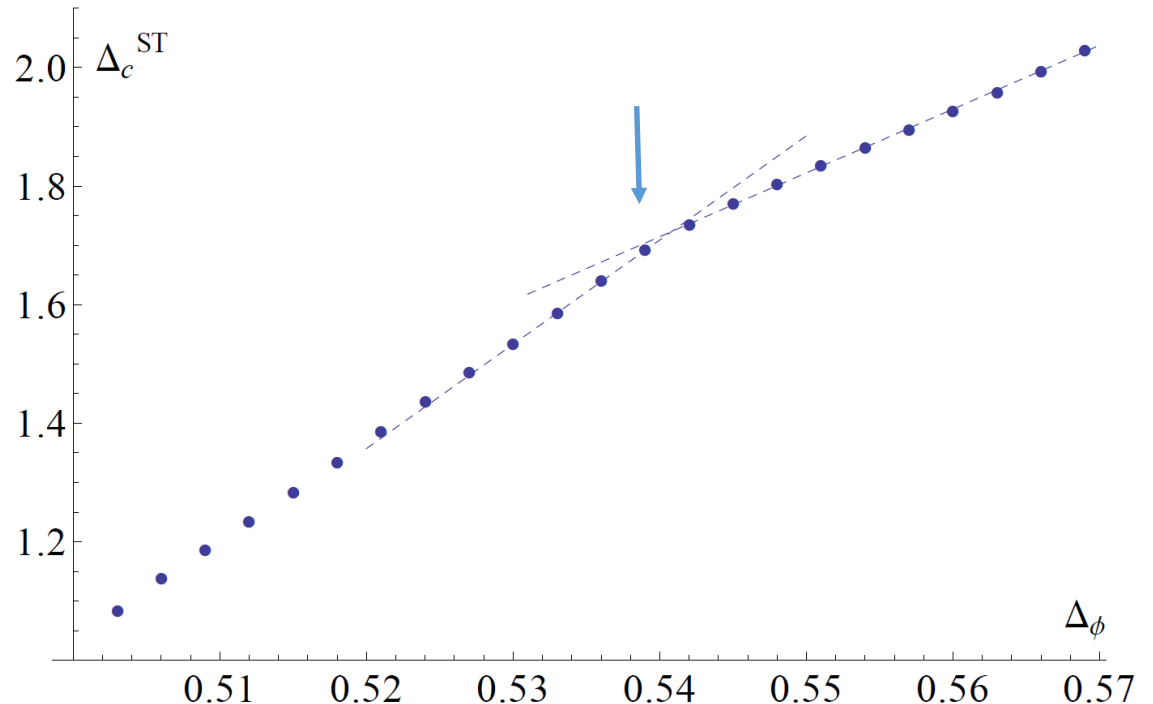
(しかし、イジングの時より100倍めんどくさい)

$O(n) \times O(2)$ 対称性を持つ理論の解析

- もっとも議論が分かれる領域
- $n > n^* \sim 5, 6$, **chiral** と **anti-chiral** 固定点は両方存在すると思われる
- $n = 2, 3, 4$ ではイタリア人は chiral fixed point と collinear fixed point があると言うが、フランス人はないと言う
- Chiral fixed point = $v > 0$, collinear fixed point = $v < 0$
- $1/n$ 展開や ϵ 展開で見えない**非摂動的な固定点**
- ブートストラップで見つかる？
- フラストレーションを持ったスピン系(と QCD、超流動ヘリウム)の相転移の次数が決定できるか？

$O(3) \times O(2)$ chiral 固定点

- ST セクター

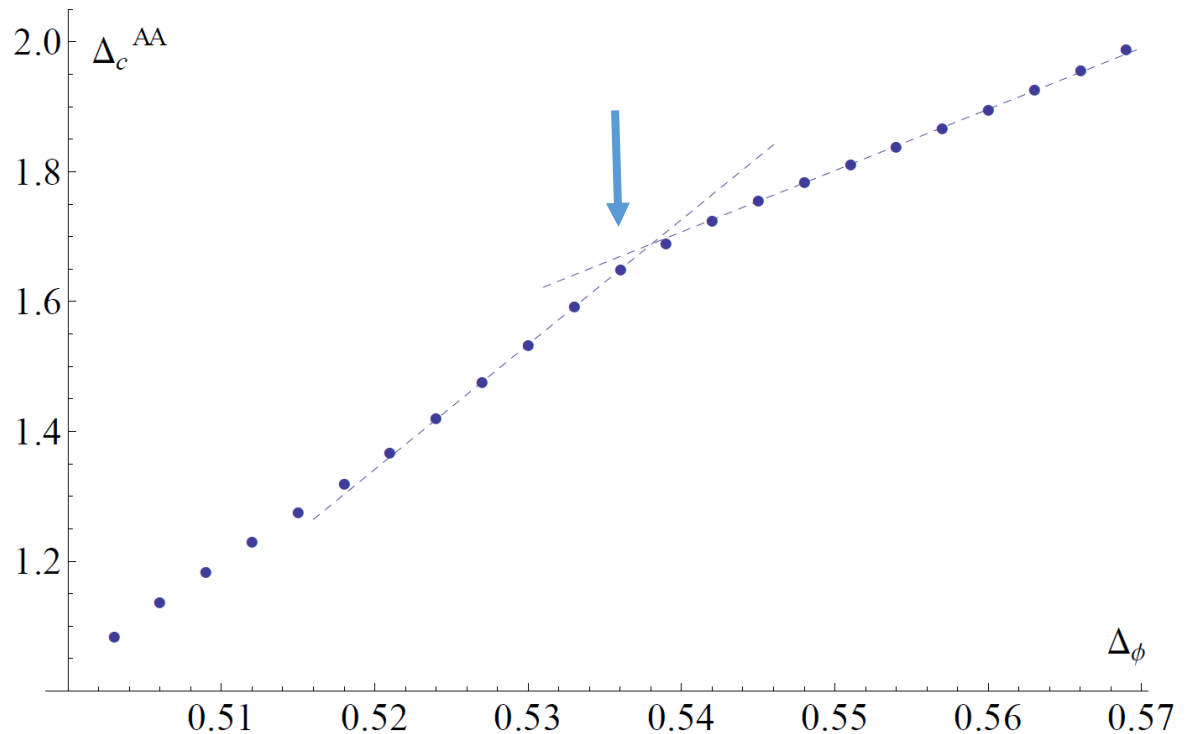


| | Δ_ϕ | Δ_{SS} | Δ_{ST} | Δ_{TS} | Δ_{TT} | Δ_{AA} |
|------------------------|---------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| bootstrap | 0.539(3) | 1.42(4) | 1.69(6) | 1.39(3) | 1.113(3) | 0.89(2) |
| $\overline{\text{MS}}$ | 0.54(2) | 1.41(12) | 1.79(9) | 1.46(8) | 1.04(11) | 0.75(12) |
| MZM | 0.55(1) | 1.18 (10) | 1.91(5) | 1.49(3) | 1.01(4) | 0.65(13) |

キルクの存在 → フラストレートスピン系は2次相転移

$O(3) \times O(2)$ collinear 固定点

- AA セクター

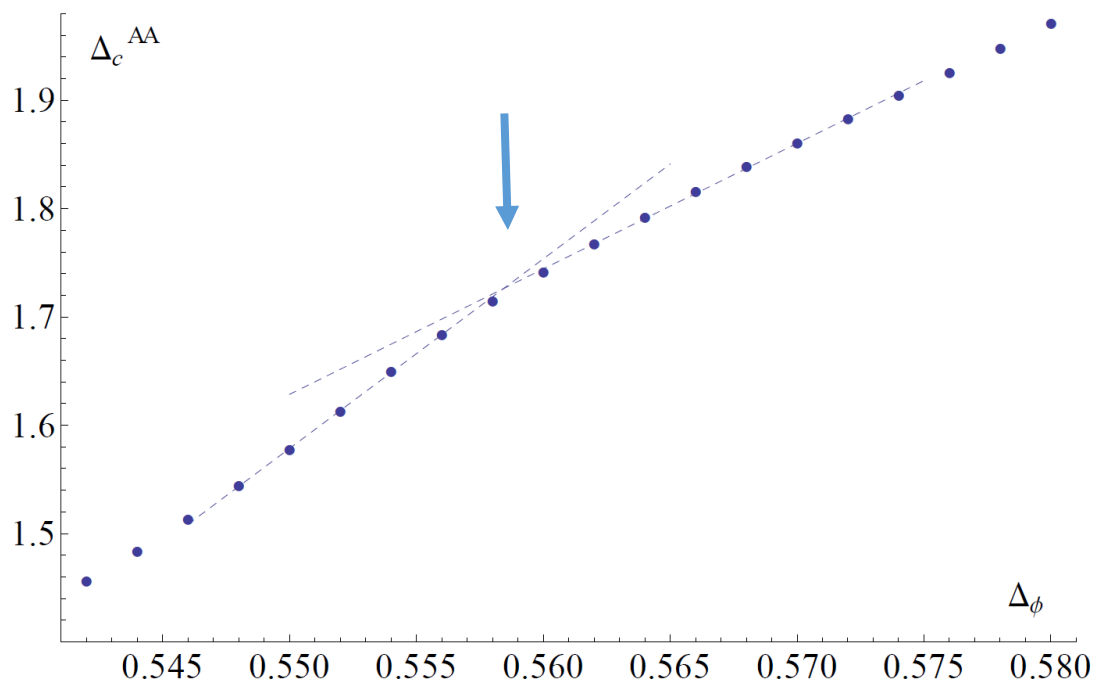


| | Δ_ϕ | Δ_{SS} | Δ_{ST} | Δ_{TS} | Δ_{TT} | Δ_{AA} |
|-----------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| bootstrap | 0.536(3) | 1.43(4) | 0.90(2) | 1.003(5) | 1.228(5) | 1.65(5) |
| \overline{MS} | 0.543(12) | 1.43(20) | 0.9(2) | 1.0(1) | 1.25(5) | 1.8(1) |
| MZM | 0.540(4) | 1.31(10) | 0.95(15) | 1.0(2) | 1.25(10) | 1.75(10) |

キルクの存在 → 超流動ヘリウム⁴の2次相転移

おまけ: $O(4) \times O(2)$ collinear 固定点

• AA セクター



| | Δ_ϕ | Δ_{SS} | Δ_{ST} | Δ_{TS} | Δ_{TT} | Δ_{AA} |
|-----------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| bootstrap | 0.558(4) | 1.52(5) | 0.82(2) | 1.045(3) | 1.26(1) | 1.71(6) |
| \overline{MS} | 0.56(3) | 1.68(17) | 1.0(3) | 1.10(15) | 1.35(10) | 1.9(1) |
| MZM | 0.56(1) | 1.59(14) | 0.95(15) | 1.25(10) | 1.34(5) | 1.90(15) |

キルクの存在 \rightarrow 2flavor QCD カイラル2次相転移

$O(n) \times O(2)$ の結果

- 共形ブーツラップでは $n = 3$ と $n = 4$ で chiral fixed point と collinear fixed point がみつかる
- Anti-chiral 固定点は $n = 3, 4$ では存在しない ($n = 10$ ではあった)
- そこでの臨界指数の値は5-loopの resummation の結果に近い(我々の方が精度はよい?)
- 例えば、 $O(3) \times O(2)$ の chiral fixed point の場合

$$\nu = 0.63 \quad \eta = 0.08 \quad \gamma = 1.21$$

- 両方固定点があるので、フラストレーションを持ったスピン系の相転移は2次の可能性
- ただし、実際にどうなるかは bare parameter の値による可能性はある(実験値のばらつきと関係?)
- なぜ、汎関数繰り込み法で見つからないのか?
- ユークリッド・ローレンツ対称性は創発されているか?

まとめと議論

- **共形仮説**は臨界現象をより深く理解する鍵
 - 普遍性
 - ユークリッド(ローレンツ)対称性
 - 鏡映正值性(ユニタリ性)
 - 演算子積展開(場の量子論の局所性)
- $O(n) \times O(m)$ ブーストラップは豊富な物理を予言
- **現実の物理の難問**を解く(フラストレーションのあるスピン系, QCD...)
- 古典スピン系だけでなく量子スピン系でもローレンツ対称性が出てくればOK。
- より情報を増やせば、完全に固定点が特定できる？
- 理論的なバックアップが必要？経験科学の段階

- 何かCFTで非摂動的に知りたい問題があったら教えてください！