

# Lagrange 的摂動論の高次摂動の検証、 および近似公式の構築

立川崇之（福井大情基セ，早大理工研）

共同研究者：水野俊太郎（早大高等研）

# I. Introduction

- 宇宙の大規模構造形成について，Newton的宇宙論の枠組みで考える.
- 1970年にZel'dovichが提案したLagrange的摂動論は，摂動が線形でも密度揺らぎが準非線形段階に至るまで精度が良いことが知られている.
- その後，2次，3次と精度が上げられ，球対称ダスト崩壊などのような厳密解との比較から，精度が向上していることが検証されている.
- 宇宙論的N体シミュレーションの初期条件作成でもLagrange的摂動論が使用されている.  
長年，Lagrange的線形摂動論が用いられてきたが，2006年に2次摂動の重要性が指摘されている  
(Crocce, Pueblas, Scoccimarro, MNRAS, 373, 369 (2006)).

# Introduction (続き)

- 近年, Lagrange的摂動論の4次摂動の論文が2つ発表されている.  
Tatekawa, Prog.Theor. Exp. Phys. 013E03 (2013).  
Rampf and Buchert, JCAP 06, 021 (2012).
- これらは空間微分の変換の違いにより, 異なる結果を与えている.

どちらが物理的に妥当な結果を与えるのか?

## 本日の発表内容

1. 4次摂動について, どちらが物理的に妥当な結果を与えるかを検証する.
2. 1.の結果に基づき, 物理的に妥当な方法で5次の摂動方程式を導出する.
3. 5次の摂動に関して, LCDMモデルの下での成長率に対し  
精度の高い近似公式を構築する.

## 2. 4次摂動方程式の検証

Newton的宇宙論の枠組み（膨張宇宙の中でNewton的に物質が運動する）で考える。膨張宇宙に乗った座標系で運動を考えると、基礎方程式は以下の3つの方程式である。

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a} \nabla_x \cdot \{\mathbf{v}(1 + \delta)\} = 0, \quad \text{連続の方程式}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{a} (\mathbf{v} \cdot \nabla_x) \mathbf{v} + \frac{\dot{a}}{a} \mathbf{v} = \frac{1}{a} \tilde{\mathbf{g}}, \quad \text{Euler 方程式}$$

$$\nabla_x \times \tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{0}, \quad \nabla_x \cdot \tilde{\mathbf{g}} = -4\pi G \rho_b a \delta, \quad \delta \equiv \frac{\rho - \rho_b}{\rho_b}. \quad \text{Poisson 方程式}$$

物質の一様分布からの変位を摂動として与える。

$$\mathbf{x} = \mathbf{q} + \mathbf{s}(\mathbf{q}, t)$$

$\mathbf{x}$ : Euler的共動座標,  $\mathbf{q}$ : Lagrange的座標,  $\mathbf{s}$ : Lagrange的摂動

基礎方程式はLagrange的摂動を用いて、最終的に以下の様になる。

$$\nabla_x \cdot \left( \ddot{\mathbf{s}} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\mathbf{s}} \right) = -4\pi G \rho_b (J^{-1} - 1),$$

$$\nabla_x \times \left( \ddot{\mathbf{s}} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\mathbf{s}} \right) = 0. \quad \delta = 1 - J^{-1}, \quad J \equiv \det \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right)$$

# 空間微分の取扱い

- 2つの方法が提案されている.

- Tatekawa (2013) : 空間微分をひたすら展開する.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} - s_{j,i} \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial q_i} - s_{j,i} \frac{\partial}{\partial q_j} + s_{j,i} s_{k,j} \frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial q_i} - s_{j,i} \frac{\partial}{\partial q_j} + s_{j,i} s_{k,j} \frac{\partial}{\partial q_k} + \dots$$

もしn次の摂動を計算するならば, 摂動をn回かける項が現れる.

- Rampf and Buchert (2012):  
Jacobianの逆行列を導入する.

$$\frac{\partial}{\partial q_i} = \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} = J_{ij}^{-1} \frac{\partial}{\partial q_j}$$
$$J_{ij} \equiv \frac{\partial x_j}{\partial q_i}, \quad J_{ij}^{-1} = \frac{1}{J} \text{adj}[J_{ij}] = \frac{1}{2J} \varepsilon_{ilm} \varepsilon_{jpq} J_{pl} J_{qm}$$

n次の摂動を計算しても, 摂動方程式には摂動の3乗の項までしか現れない.

- いずれの方法でも, 3次までの摂動は同じ結果を与える.

# 妥当な結果を与えるのはどちらか

- ところが、4次の摂動で両者の方法による結果が異なる。  
5次以上でも結果が異なる。
- 「精密宇宙論」において、より高次の摂動を考えるならば、  
どちらの方法が妥当なのかを検証しなければならない。
- そこで、簡単なケースを考えて線形摂動として与え、4次の摂動が  
どのようなになるかを見てみることを考える。
- まず、4次摂動までの結果を示し、簡単なケースで検証することを  
考える。

# 1LPT, 2LPT 方程式

以後, 摂動は longitudinal mode (rot free) と transverse modes (div free) で考える.

摂動は時間成分, 空間成分で変数分離できる (カンマはLagrange座標による微分) .

$$s_i = S_{,i} + s_i^T = g(t)\psi_{,i}(\mathbf{q}) + g_T(t)\zeta_{,i}(\mathbf{q}).$$

$$\zeta_{,ii} = 0.$$

## 1LPT

$$\ddot{g}_1 + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{g}_1 - 4\pi G\rho_b g_1 = 0.$$

空間成分は初期密度揺らぎから与える.  
transverse mode は成長解を持たないので,

**1LPT transverse mode を無視する.**

## 2LPT

$$\ddot{g}_2 + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{g}_2 - 4\pi G\rho_b g_2 = -4\pi G\rho_b g_1^2,$$

$$\psi_{,ii}^{(2)} = \frac{1}{2} \left( \psi_{,ii}^{(1)} \psi_{,jj}^{(1)} - \psi_{,ij}^{(1)} \psi_{,ij}^{(1)} \right).$$

transverse mode の式は1LPTの場合と全く同じ形になる.

**2LPT transverse mode も無視する.**

# 3LPT 方程式

## Longitudinal mode

$$\ddot{g}_{3a} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{g}_{3a} - 4\pi G\rho_b g_{3a} = -8\pi G\rho_b g_1(g_2 - g_1^2),$$

$$\ddot{g}_{3b} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{g}_{3b} - 4\pi G\rho_b g_{3b} = -8\pi G\rho_b g_1^3,$$

$$\psi_{,ii}^{(3a)} = \frac{1}{2} \left( \psi_{,ii}^{(1)} \psi_{,jj}^{(2)} - \psi_{,ij}^{(1)} \psi_{,ij}^{(2)} \right),$$

$$\psi_{,ii}^{(3b)} = \det \left( \psi_{,ij}^{(1)} \right).$$

## Transverse mode

$$\ddot{g}_{3T} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{g}_{3T} = 4\pi G\rho_b g_1^3,$$

$$\varepsilon_{ijk} \zeta_{k,j}^{(3)} = \varepsilon_{ijk} \psi_{,jl}^{(2)} \psi_{,kl}^{(1)}.$$

たとえ 1LPT で transverse mode を無視しても, 3LPT では現れる.

ただし, このモードは「線形摂動の渦の成長率」にしか寄与しないので

Kelvin の循環定理とは矛盾しない.



# 4LPTの方程式

- 先述の通り, 4次以上では結果が異なる.
- Tatekawa (2013)  
6 longitudinal modes  
4 transverse modes
- Rampf and Buchert (2012)  
5 longitudinal modes  
3 transverse modes
- 後者の方が式の数が少ない.  
(1次) $\times$ (1次) $\times$ (2次), (1次)<sup>4</sup> から派生するモードでズレが生じる.
- どちらが物理的に妥当な結果を与えるのか検証する必要がある.

# 4LPT の方程式 (longitudinal mode)

- Tatekawa (2013)

$$\ddot{g}_{4a} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{g}_{4a} - 4\pi G\rho_b g_{4a} = -8\pi G\rho_b g_1(g_{3a} - 2g_1g_2 + 2g_1^3),$$

$$\ddot{g}_{4b} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{g}_{4b} - 4\pi G\rho_b g_{4b} = -8\pi G\rho_b g_1(g_{3b} - 2g_1^3),$$

$$\ddot{g}_{4c} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{g}_{4c} - 4\pi G\rho_b g_{4c} = 4\pi G\rho_b g_1^4,$$

$$\ddot{g}_{4d} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{g}_{4d} - 4\pi G\rho_b g_{4d} = -4\pi G\rho_b g_2(g_2 - 2g_1^2),$$

$$\ddot{g}_{4e} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{g}_{4e} - 4\pi G\rho_b g_{4e} = 4\pi G\rho_b g_1^2(2g_2 - g_1^2),$$

$$\ddot{g}_{4f} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{g}_{4f} - 4\pi G\rho_b g_{4f} = 4\pi G\rho_b g_1^4,$$

} 両者で異なる  
モード

$$\psi_{,ii}^{(4a)} = \frac{1}{2} \left( \psi_{,ii}^{(1)} \psi_{,jj}^{(3a)} - \psi_{,ij}^{(1)} \psi_{,ij}^{(3a)} \right),$$

$$\psi_{,ii}^{(4b)} = \frac{1}{2} \left( \psi_{,ii}^{(1)} \psi_{,jj}^{(3b)} - \psi_{,ij}^{(1)} \psi_{,ij}^{(3b)} \right),$$

$$\psi_{,ii}^{(4c)} = \psi_{,ij}^{(1)} \zeta_{i,j}^{(3)},$$

$$\psi_{,ii}^{(4d)} = \frac{1}{2} \left( \psi_{,ii}^{(2)} \psi_{,jj}^{(2)} - \psi_{,ij}^{(2)} \psi_{,ij}^{(2)} \right),$$

$$\psi_{,ii}^{(4e)} = \psi_{,ii}^{(1)} \psi_{,jk}^{(1)} \psi_{,jk}^{(2)} - \psi_{,ij}^{(1)} \psi_{,jk}^{(1)} \psi_{,ki}^{(2)} - \frac{3}{8} \psi_{,ii}^{(2)} \left\{ \psi_{,jj}^{(1)} \psi_{,kk}^{(1)} - \psi_{,jk}^{(1)} \psi_{,jk}^{(1)} \right\},$$

$$\begin{aligned} \psi_{,ii}^{(4f)} = & -\frac{7}{16} \left\{ \psi_{,ii}^{(1)} \psi_{,jj}^{(1)} - \psi_{,ij}^{(1)} \psi_{,ij}^{(1)} \right\} \left\{ \psi_{,kk}^{(1)} \psi_{,ll}^{(1)} - \psi_{,kl}^{(1)} \psi_{,kl}^{(1)} \right\} \\ & + \frac{7}{3} \psi_{,ii}^{(1)} \psi_{,jj}^{(1)} \psi_{,kk}^{(1)} \psi_{,ll}^{(1)} - \frac{4}{3} \psi_{,ii}^{(1)} \psi_{,jk}^{(1)} \psi_{,kl}^{(1)} \psi_{,li}^{(1)} + \psi_{,ij}^{(1)} \psi_{,jk}^{(1)} \psi_{,kl}^{(1)} \psi_{,li}^{(1)}. \end{aligned}$$

} 両者で異なる  
モード  
ここに注目

# 4LPT の方程式 (transverse mode)

$$\ddot{g}_{4Ta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{g}_{4Ta} = -8\pi G\rho_b g_1^2 (g_2 - g_1^2),$$

$$\ddot{g}_{4Tb} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{g}_{4Tb} = -8\pi G\rho_b g_1^4,$$

$$\ddot{g}_{4Tc} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{g}_{4Tc} = 4\pi G\rho_b g_1 (g_{3T} + g_1^3),$$

$$\ddot{g}_{4Td} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{g}_{4Td} = -4\pi G\rho_b g_1^4,$$

両者で異なる  
モード

$$-\nabla^2 \zeta_i^{(4a)} = \left( \psi_{,il}^{(1)} \psi_{,kl}^{(3a)} - \psi_{,kl}^{(1)} \psi_{,il}^{(3a)} \right)_{,k},$$

$$-\nabla^2 \zeta_i^{(4b)} = \left( \psi_{,il}^{(1)} \psi_{,kl}^{(3b)} - \psi_{,kl}^{(1)} \psi_{,il}^{(3b)} \right)_{,k},$$

$$-\nabla^2 \zeta_i^{(4c)} = \left( \psi_{,il}^{(1)} \zeta_{k,l}^{(3)} - \psi_{,kl}^{(1)} \zeta_{i,l}^{(3)} \right)_{,k},$$

$$-\nabla^2 \zeta_i^{(4d)} = \left( \psi_{,ij}^{(1)} \psi_{,jk}^{(1)} \psi_{,kl}^{(2)} - \psi_{,jk}^{(1)} \psi_{,kl}^{(1)} \psi_{,ij}^{(2)} \right)_{,l}.$$

# 4LPT の方程式 (longitudinal mode)

- Rampf and Buchert (2012)

$$\ddot{g}_{4a} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{g}_{4a} - 4\pi G\rho_b g_{4a} = -8\pi G\rho_b g_1(g_{3a} - 2g_1g_2 + 2g_1^3),$$

$$\ddot{g}_{4b} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{g}_{4b} - 4\pi G\rho_b g_{4b} = -8\pi G\rho_b g_1(g_{3b} - 2g_1^3),$$

$$\ddot{g}_{4c} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{g}_{4c} - 4\pi G\rho_b g_{4c} = -8\pi G\rho_b g_1^4,$$

$$\ddot{g}_{4d} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{g}_{4d} - 4\pi G\rho_b g_{4d} = -4\pi G\rho_b g_2(g_2 - 2g_1^2),$$

$$\ddot{g}_{4e} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{g}_{4e} - 4\pi G\rho_b g_{4e} = -12\pi G\rho_b g_1^2(2g_2 - g_1^2).$$

両者で異なる  
モード

$$\psi_{,ii}^{(4a)} = \frac{1}{2} \left( \psi_{,ii}^{(1)} \psi_{,jj}^{(3a)} - \psi_{,ij}^{(1)} \psi_{,ij}^{(3a)} \right),$$

$$\psi_{,ii}^{(4b)} = \frac{1}{2} \left( \psi_{,ii}^{(1)} \psi_{,jj}^{(3b)} - \psi_{,ij}^{(1)} \psi_{,ij}^{(3b)} \right),$$

$$\psi_{,ii}^{(4c)} = -\frac{1}{2} \psi_{,ij}^{(1)} \zeta_{i,j}^{(3)},$$

$$\psi_{,ii}^{(4d)} = \frac{1}{2} \left( \psi_{,ii}^{(2)} \psi_{,jj}^{(2)} - \psi_{,ij}^{(2)} \psi_{,ij}^{(2)} \right),$$

$$\psi_{,ii}^{(4e)} = \frac{1}{6} \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{jmn} \psi_{,ij}^{(1)} \psi_{,km}^{(1)} \psi_{,nl}^{(2)}.$$

# 4LPT の方程式 (transverse mode)

$$\ddot{g}_{4Ta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{g}_{4Ta} = 8\pi G\rho_b g_1^2 (g_2 - g_1^2),$$

$$\ddot{g}_{4Tb} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{g}_{4Tb} = 8\pi G\rho_b g_1^4,$$

$$\ddot{g}_{4Tc} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{g}_{4Tc} = 4\pi G\rho_b g_1 (g_{3T} - g_1^3),$$

$$\varepsilon_{ijk}\zeta_{k,j}^{(4a)} = \varepsilon_{ijk}\psi_{,jl}^{(3a)}\psi_{,kl}^{(1)},$$

$$\varepsilon_{ijk}\zeta_{k,j}^{(4b)} = \varepsilon_{ijk}\psi_{,jl}^{(3b)}\psi_{,kl}^{(1)},$$

$$\varepsilon_{ijk}\zeta_{k,j}^{(4c)} = \varepsilon_{ijk}\zeta_{l,j}^{(3)}\psi_{,kl}^{(1)}.$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad -\nabla^2 \zeta_i^{(4a)} &= \left( \psi_{,il}^{(1)}\psi_{,kl}^{(3a)} - \psi_{,kl}^{(1)}\psi_{,il}^{(3a)} \right)_{,k}, \\ -\nabla^2 \zeta_i^{(4b)} &= \left( \psi_{,il}^{(1)}\psi_{,kl}^{(3b)} - \psi_{,kl}^{(1)}\psi_{,il}^{(3b)} \right)_{,k}, \\ -\nabla^2 \zeta_i^{(4c)} &= \left( \psi_{,il}^{(1)}\zeta_{k,l}^{(3)} - \psi_{,kl}^{(1)}\zeta_{i,l}^{(3)} \right)_{,k}. \end{aligned}$$

# 4LPTの検証

- 周期的境界条件が成り立つ, 簡単な摂動を考える.

$$\psi^{(1)} = \varepsilon(\cos q_1 + \cos q_2 + \cos q_3).$$

$$q_1 \equiv q_x, q_2 \equiv q_y, q_3 \equiv q_z.$$

- 4LPT (Tatekawa (2013)) を計算すると...

$$\begin{aligned} \psi_{,ii}^{(4e)} = & \{ \cos 2q_1 \cos 2q_2 + \cos 2q_2 \cos 2q_3 + \cos 2q_3 \cos 2q_1 + 2(\cos 2q_1 + \cos 2q_2 + \cos 2q_3) \} \\ & - \frac{\varepsilon^4}{4} (\cos 2q_1 \cos q_2 \cos q_3 + \cos q_1 \cos 2q_2 \cos q_3 + \cos q_1 \cos q_2 \cos 2q_3 \\ & + \cos q_1 \cos q_2 + \cos q_2 \cos q_3 + \cos q_3 \cos q_1) + \frac{3\varepsilon^4}{16}, \\ \psi_{,ii}^{(4f)} = & \frac{\varepsilon^4}{4} (\cos 4q_1 + \cos 4q_2 + \cos 4q_3) \\ & + 2\varepsilon^4 \{ \cos 3q_1 (\cos q_2 + \cos q_3) + \cos 3q_2 (\cos q_3 + \cos q_1) + \cos 3q_3 (\cos q_1 + \cos q_2) \} \\ & + \frac{49\varepsilon^4}{16} (\cos 2q_1 \cos 2q_2 + \cos 2q_2 \cos 2q_3 + \cos 2q_3 \cos 2q_1) \\ & + \frac{49\varepsilon^4}{4} (\cos 2q_1 \cos q_2 \cos q_3 + \cos q_1 \cos 2q_2 \cos q_3 + \cos q_1 \cos q_2 \cos 2q_3) \\ & + \frac{65\varepsilon^4}{4} (\cos q_1 \cos q_2 + \cos q_2 \cos q_3 + \cos q_3 \cos q_1) \\ & + \frac{57\varepsilon^4}{8} (\cos 2q_1 + \cos 2q_2 + \cos 2q_3) + \frac{183\varepsilon^4}{16} \end{aligned}$$

# 4LPTの検証（続）

- Tatekawa(2013) では空間成分のラプラシアンに定数項が現れる.  
→ 摂動に三角関数で表せない（非物理的な）項が現れる.  
周期的境界条件が成り立たなくなる.
- 一方, Rampf and Buchert (2012) では, 空間成分のラプラシアンは  
全て三角関数で記述できる.
- 後者の方が物理的に妥当な結果を与えていると言えるのではないか.
- 以後, Rampf and Buchert (2012) の方法に沿って, 5LPTの方程式を  
導出する.

# 3. 5次の摂動方程式 (5LPT)の導出

- Rampf and Buchert (2012)の方法に基づき, 5次の摂動方程式を導出した.
- 15 longitudinal modes and 11 transverse modes.
  - (4LPT) × (1LPT): 8 longitudinal modes, 8 transverse modes.
  - (3LPT) × (2LPT): 3 longitudinal modes, 3 transverse modes.
  - (3LPT) × (1LPT) × (1LPT): 3 longitudinal modes.
  - (2LPT) × (2LPT) × (1LPT): 1 longitudinal mode.
- 次のページ以降で結果を示す.



# 5LPT equations (longitudinal mode)

$$\begin{aligned}
 \ddot{g}_{5a} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{g}_{5a} - 4\pi Gg_{5a} &= -4\pi G\rho_b g_1 (g_{4a} - 2g_1 g_{3a} + 4g_1^2 g_2 - 4g_1^4), & \mu_1^{(5a)} &= \mu_2^{(1,4a)}, \\
 \ddot{g}_{5b} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{g}_{5b} - 4\pi Gg_{5b} &= -4\pi G\rho_b g_1 (g_{4b} - 2g_1 g_{3b} + 4g_1^4), & \mu_1^{(5b)} &= \mu_2^{(1,4b)}, \\
 \ddot{g}_{5c} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{g}_{5c} - 4\pi Gg_{5c} &= -4\pi G\rho_b g_1 (g_{4c} - g_1^4), & \mu_1^{(5c)} &= \mu_2^{(1,4c)}, \\
 \ddot{g}_{5d} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{g}_{5d} - 4\pi Gg_{5d} &= -4\pi G\rho_b g_1 (g_{4d} - g_2^2 + 2g_1^2 g_2), & \mu_1^{(5d)} &= \mu_2^{(1,4d)}, \\
 \ddot{g}_{5e} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{g}_{5e} - 4\pi Gg_{5e} &= -4\pi G\rho_b g_1 (g_{4e} - 6g_1^2 g_2 + 3g_1^4), & \mu_1^{(5e)} &= \mu_2^{(1,4e)}, \\
 \ddot{g}_{5f} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{g}_{5f} - 4\pi Gg_{5f} &= -4\pi G\rho_b g_1 (g_{4Ta} - 2g_1^2 g_2 + 2g_1^4), & \mu_1^{(5f)} &= \psi_{,ij}^{(1)} \zeta_{i,j}^{(4a)}, \\
 \ddot{g}_{5g} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{g}_{5g} - 4\pi Gg_{5g} &= -4\pi G\rho_b g_1 (g_{4Tb} - 2g_1^4), & \mu_1^{(5g)} &= \psi_{,ij}^{(1)} \zeta_{i,j}^{(4b)}, \\
 \ddot{g}_{5h} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{g}_{5h} - 4\pi Gg_{5h} &= -4\pi G\rho_b g_1 (g_{4Tc} - g_1 g_{3T} + g_1^4), & \mu_1^{(5h)} &= \psi_{,ij}^{(1)} \zeta_{i,j}^{(4c)}, \\
 \ddot{g}_{5i} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{g}_{5i} - 4\pi Gg_{5i} &= 4\pi G\rho_b (g_{3a} - 2g_1 g_2)(g_2 - g_1^2), & \mu_1^{(5i)} &= \mu_2^{(2,3a)}, \\
 \ddot{g}_{5j} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{g}_{5j} - 4\pi Gg_{5j} &= 4\pi G\rho_b (g_1^2 g_{3b} - g_2 g_{3b} - 2g_1^3 g_2), & \mu_1^{(5j)} &= \mu_2^{(2,3b)}, \\
 \ddot{g}_{5k} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{g}_{5k} - 4\pi Gg_{5k} &= -4\pi G\rho_b g_2 (g_{3T} - g_1^3), & \mu_1^{(5k)} &= \psi_{,ij}^{(2)} \zeta_{i,j}^{(3)}, \\
 \ddot{g}_{5l} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{g}_{5l} - 4\pi Gg_{5l} &= -24\pi G\rho_b g_1^2 (g_{3a} - 2g_1 g_2 + g_1^3), & \mu_1^{(5l)} &= \varepsilon_{ilm} \varepsilon_{j pq} \psi_{,pl}^{(1)} \psi_{,qm}^{(1)} \psi_{,ij}^{(3a)}, \\
 \ddot{g}_{5m} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{g}_{5m} - 4\pi Gg_{5m} &= -24\pi G\rho_b g_1^2 (g_{3b} - g_1^3), & \mu_1^{(5m)} &= \varepsilon_{ilm} \varepsilon_{j pq} \psi_{,pl}^{(1)} \psi_{,qm}^{(1)} \psi_{,ij}^{(3b)}, \\
 \ddot{g}_{5n} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{g}_{5n} - 4\pi Gg_{5n} &= -12\pi G\rho_b g_1^2 (g_{3T} + g_1^3), & \mu_1^{(5n)} &= \varepsilon_{ilm} \varepsilon_{j pq} \psi_{,pl}^{(1)} \psi_{,qm}^{(1)} \zeta_{j,i}^{(3)}, \\
 \ddot{g}_{5o} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{g}_{5o} - 4\pi Gg_{5o} &= -24\pi G\rho_b g_1 g_2 (g_2 - g_1^2), & \mu_1^{(5o)} &= \varepsilon_{ilm} \varepsilon_{j pq} \psi_{,pl}^{(1)} \psi_{,qm}^{(2)} \psi_{,ij}^{(2)}. \\
 & & \mu_1^{(n)} &\equiv \psi_{,ii}^{(n)}, \\
 & & \mu_2^{(m,n)} &\equiv \frac{1}{2} \left( \psi_{,ii}^{(m)} \psi_{,jj}^{(n)} - \psi_{,ij}^{(m)} \psi_{,ij}^{(n)} \right).
 \end{aligned}$$

# 5LPT equations (transverse mode)

$$\begin{aligned}
 \ddot{g}_{5Ta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{g}_{5Ta} &= -8\pi G\rho_b g_1^2 (g_{3a} - 2g_1g_2 + 2g_1^3) , & \varepsilon_{ijk}\zeta_{k,j}^{(5a)} &= \varepsilon_{ijk}\psi_{,jl}^{(1)}\psi_{,kl}^{(4a)} , \\
 \ddot{g}_{5Tb} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{g}_{5Tb} &= -8\pi G\rho_b g_1^2 (g_{3b} - 2g_1^3) , & \varepsilon_{ijk}\zeta_{k,j}^{(5b)} &= \varepsilon_{ijk}\psi_{,jl}^{(1)}\psi_{,kl}^{(4b)} , \\
 \ddot{g}_{5Tc} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{g}_{5Tc} &= -8\pi G\rho_b g_1^5 , & \varepsilon_{ijk}\zeta_{k,j}^{(5c)} &= \varepsilon_{ijk}\psi_{,jl}^{(1)}\psi_{,kl}^{(4c)} , \\
 \ddot{g}_{5Td} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{g}_{5Td} &= -4\pi G\rho_b g_1g_2 (g_2 - 2g_1^2) , & \varepsilon_{ijk}\zeta_{k,j}^{(5d)} &= \varepsilon_{ijk}\psi_{,jl}^{(1)}\psi_{,kl}^{(4d)} , \\
 \ddot{g}_{5Te} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{g}_{5Te} &= -12\pi G\rho_b g_1^3 (2g_2 - g_1^2) , & \varepsilon_{ijk}\zeta_{k,j}^{(5e)} &= \varepsilon_{ijk}\psi_{,jl}^{(1)}\psi_{,kl}^{(4e)} , \\
 \ddot{g}_{5Tf} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{g}_{5Tf} &= -4\pi G\rho_b g_1 (g_{4Ta} - 2g_1^2g_2 + 2g_1^4) , & \varepsilon_{ijk}\zeta_{k,j}^{(5f)} &= \varepsilon_{ijk}\psi_{,jl}^{(1)}\zeta_{l,k}^{(4a)} , \\
 \ddot{g}_{5Tg} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{g}_{5Tg} &= -4\pi G\rho_b g_1 (g_{4Tb} - 2g_1^4) , & \varepsilon_{ijk}\zeta_{k,j}^{(5g)} &= \varepsilon_{ijk}\psi_{,jl}^{(1)}\zeta_{l,k}^{(4b)} , \\
 \ddot{g}_{5Th} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{g}_{5Th} &= -4\pi G\rho_b g_1 (g_{4Tc} - g_1g_{3T} + g_1^4) , & \varepsilon_{ijk}\zeta_{k,j}^{(5h)} &= \varepsilon_{ijk}\psi_{,jl}^{(1)}\zeta_{l,k}^{(4c)} , \\
 \ddot{g}_{5Ti} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{g}_{5Ti} &= 4\pi G\rho_b (g_1^2g_{3a} + 2g_1^3g_2 - 2g_1g_2^2) , & \varepsilon_{ijk}\zeta_{k,j}^{(5i)} &= \varepsilon_{ijk}\psi_{,jl}^{(2)}\psi_{,kl}^{(3a)} , \\
 \ddot{g}_{5Tj} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{g}_{5Tj} &= 4\pi G\rho_b g_1^2 (g_{3b} - 2g_1g_2) , & \varepsilon_{ijk}\zeta_{k,j}^{(5j)} &= \varepsilon_{ijk}\psi_{,jl}^{(2)}\psi_{,kl}^{(3b)} , \\
 \ddot{g}_{5Tk} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{g}_{5Tk} &= -4\pi G\rho_b (g_2g_{3T} - g_1^2g_{3T} - g_1^3g_2) , & \varepsilon_{ijk}\zeta_{k,j}^{(5k)} &= \varepsilon_{ijk}\psi_{,jl}^{(2)}\zeta_{l,k}^{(3)} .
 \end{aligned}$$

# 5LPT solutions

- E-dS 宇宙モデルならば, 5LPTでも時間成分の厳密解が与えられる.

$$g_5 \propto g_1^5 \propto a^5$$

係数については, 各々のモードについて計算する必要がある.  
(代数方程式なので, 容易に導出できる)

- E-dS 宇宙モデル以外の場合は, 高次の摂動は数値的に解く必要がある.

LCDMモデルの場合は線形摂動は超幾何関数もしくは不完全ベータ関数で時間成分が記述できるが, 2次以上は数値的に求める必要がある.

$$g_1(t) = \frac{h}{2} B_{1/h^2} \left( \frac{5}{6}, \frac{2}{3} \right), \quad h \equiv \frac{H(t)}{\sqrt{\Lambda/3}}.$$

## 4. 時間成分の近似公式の構築

- Einstein-de Sitter 宇宙モデルならば、5次の摂動であっても時間成分は解析的に記述できる。一般の LCDM モデルに対しては、Friedmann 方程式と摂動の時間発展方程式（5次までだと38本）を連立して解かなければならない。
- そこで、時間発展に関する近似公式を構築する。

Peebles ,ApJ 284, 439 (1984),

Bouchet et al., A&A 296, 575 (1995) で3次まで導出されている。

まず、以下のような時間成分の対数微分を定義する。

$$f_n \equiv \frac{a}{g_n} \frac{dg_n}{da}.$$

過去の近似公式 (LCDM, Bouchet et al. (1995)):

$$(0.1 \leq \Omega_M \leq 1)$$

$$f_1 \simeq \Omega_M^{5/9}, f_2 \simeq 2\Omega_M^{6/11},$$

$$f_{3a} \simeq 3\Omega_M^{13/24}, f_{3b} \simeq 3\Omega_M^{13/24}.$$

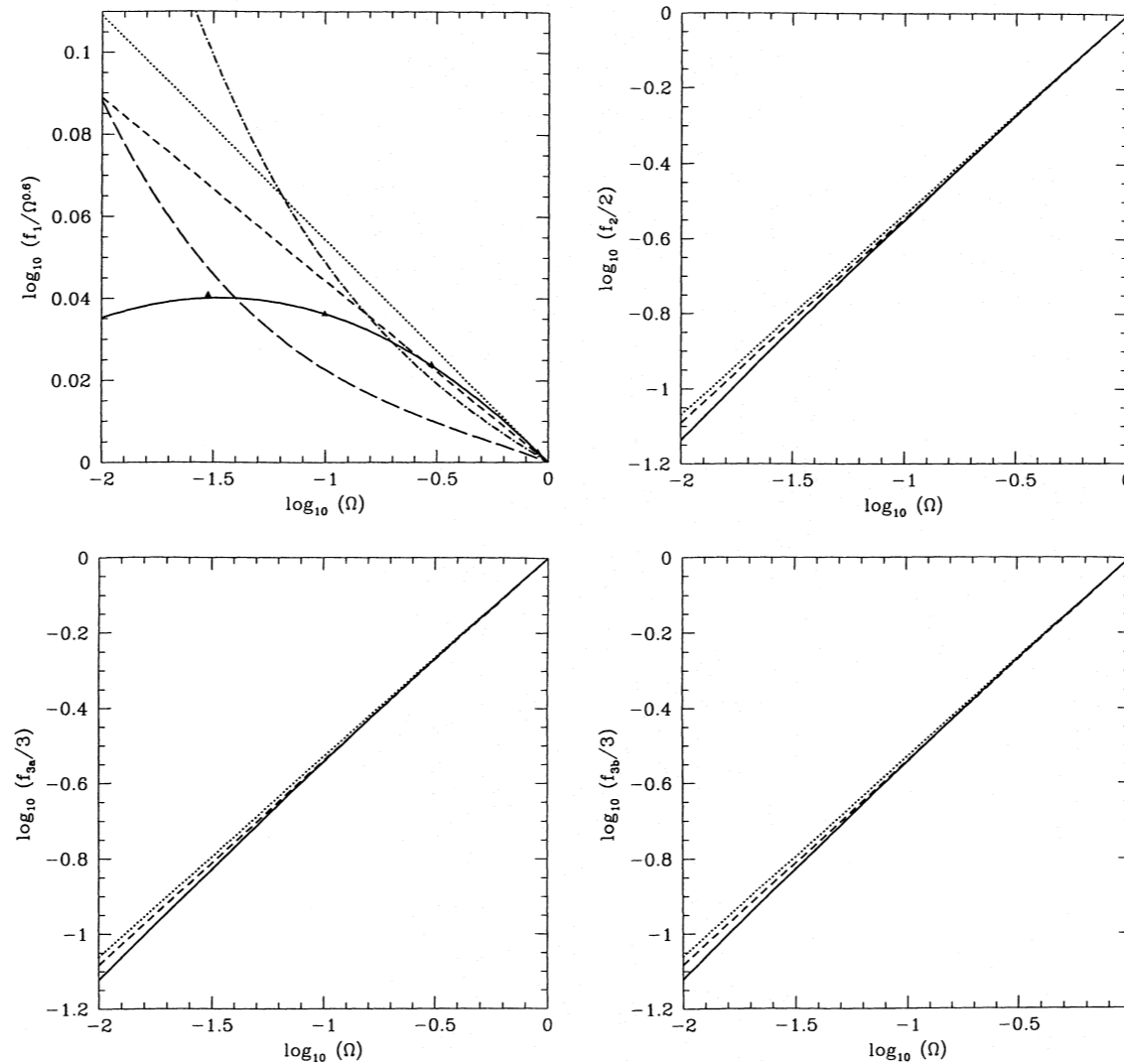
$$(\Omega_M \simeq 1)$$

$$f_1 \simeq \Omega_M^{6/11}, f_2 \simeq 2\Omega_M^{153/286},$$

$$f_{3a} \simeq 3\Omega_M^{146/275}, f_{3b} \simeq 3\Omega_M^{9481/17875},$$

我々はより精度の高い近似公式を5次摂動まで構築する。

# 過去の近似公式



横軸が $\Omega$ ，縦軸が $f$ の比の両対数グラフ

上段は1次，2次，下段は3次の longitudinal mode.  
破線が近似公式 (Bouchet et al. (1995)).

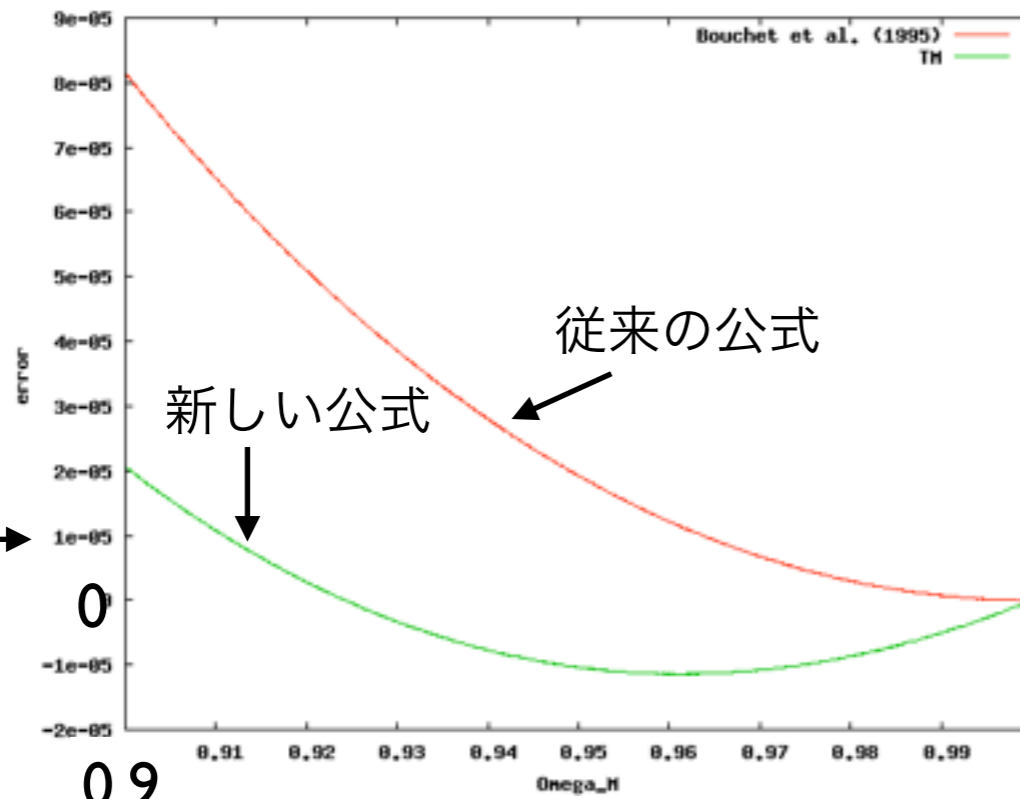
# 新たな近似公式の構築I

- 従来のもと同じ形で、最小二乗法で最適なものを探す。

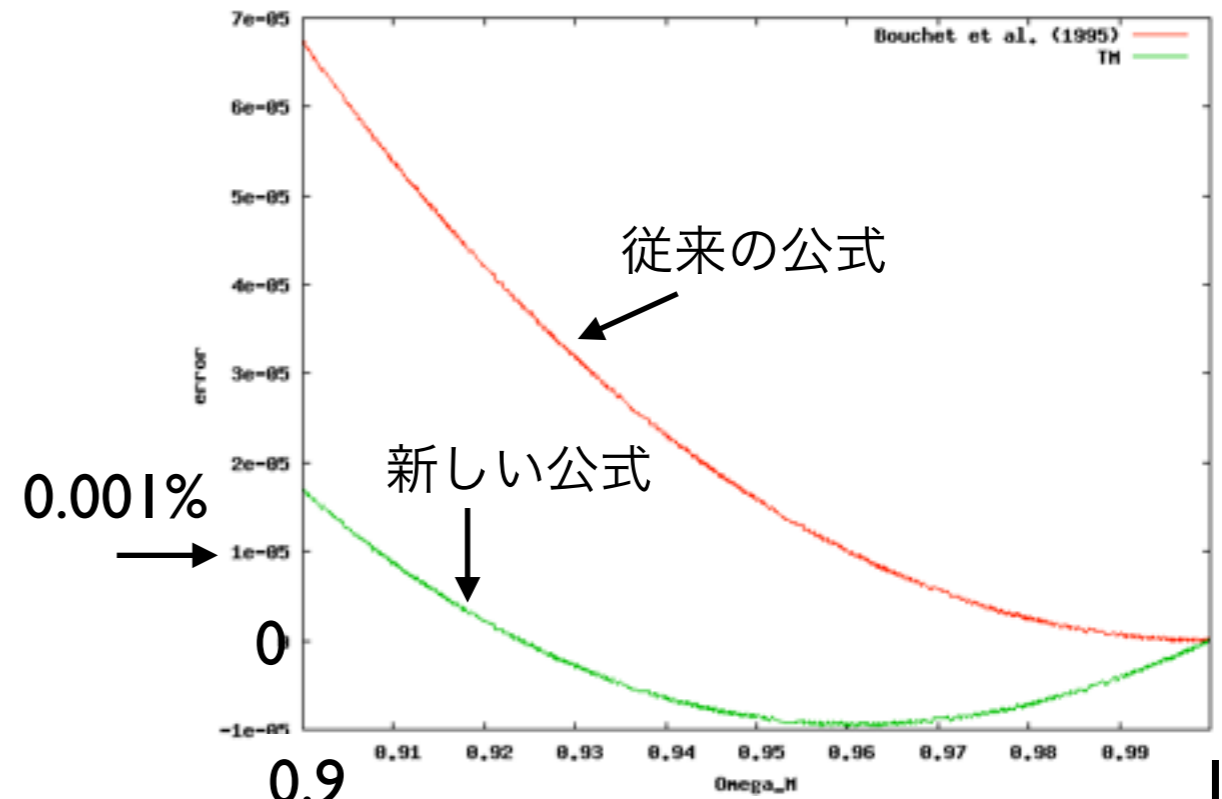
$$f_n = n\Omega_M^\alpha.$$

- $\alpha$ はなるべく大きくない（3桁まで）整数比にする。

- まず、 $0.9 \leq \Omega_M \leq 1$  の範囲で探す。（High-z で有用）



一次摂動  $f_1$  の誤差



二次摂動  $f_2$  の誤差

$0.9 < \Omega < 0.94$  付近でよくなったが、 $\Omega$ が1に近づくと従来の方が良い。

# 新しい近似公式での指数

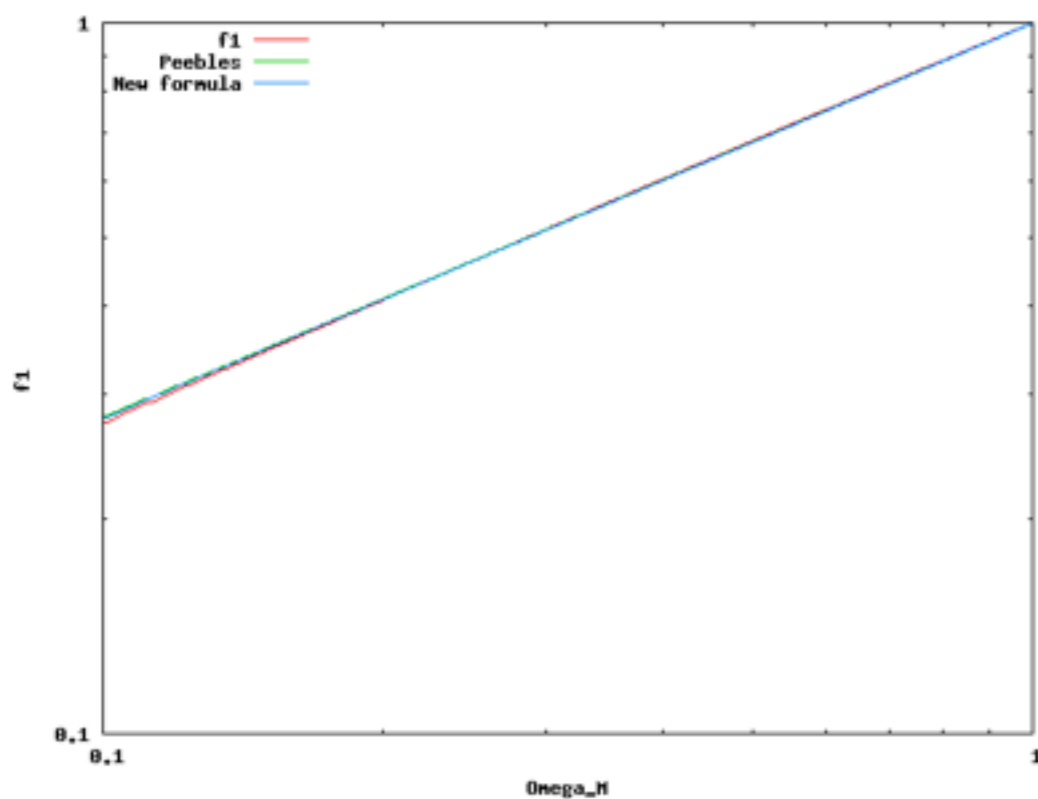
- 分母が3桁以内の範囲で最適なものを探すと、以下のようになった。

mode	$\alpha$	mode	$\alpha$	mode	$\alpha$	mode	$\alpha$
$f_1$	172/315	$f_{5d}$	165/313	$f_{3T}$	442/831	$f_{5Te}$	73/138
$f_2$	423/790	$f_{5e}$	299/566	$f_{4Ta}$	312/589	$f_{5Tf}$	223/421
$f_{3a}$	155/292	$f_{5f}$	370/699	$f_{4Tb}$	482/909	$f_{5Tg}$	114/215
$f_{3b}$	441/830	$f_{5g}$	71/134	$f_{4Tc}$	499/940	$f_{5Th}$	241/454
$f_{4a}$	321/607	$f_{5h}$	61/115	$f_{5Ta}$	413/781	$f_{5Ti}$	167/316
$f_{4b}$	244/461	$f_{5i}$	515/978	$f_{5Tb}$	425/803	$f_{5Tj}$	181/342
$f_{4c}$	329/621	$f_{5j}$	26/49	$f_{5Tc}$	347/655	$f_{5Tk}$	185/349
$f_{4d}$	19/36	$f_{5k}$	28/53	$f_{5Td}$	19/36		
$f_{4e}$	383/724	$f_{5l}$	442/837				
$f_{5a}$	357/676	$f_{5m}$	324/613				
$f_{5b}$	315/596	$f_{5n}$	447/845				
$f_{5c}$	397/751	$f_{5o}$	29/55				

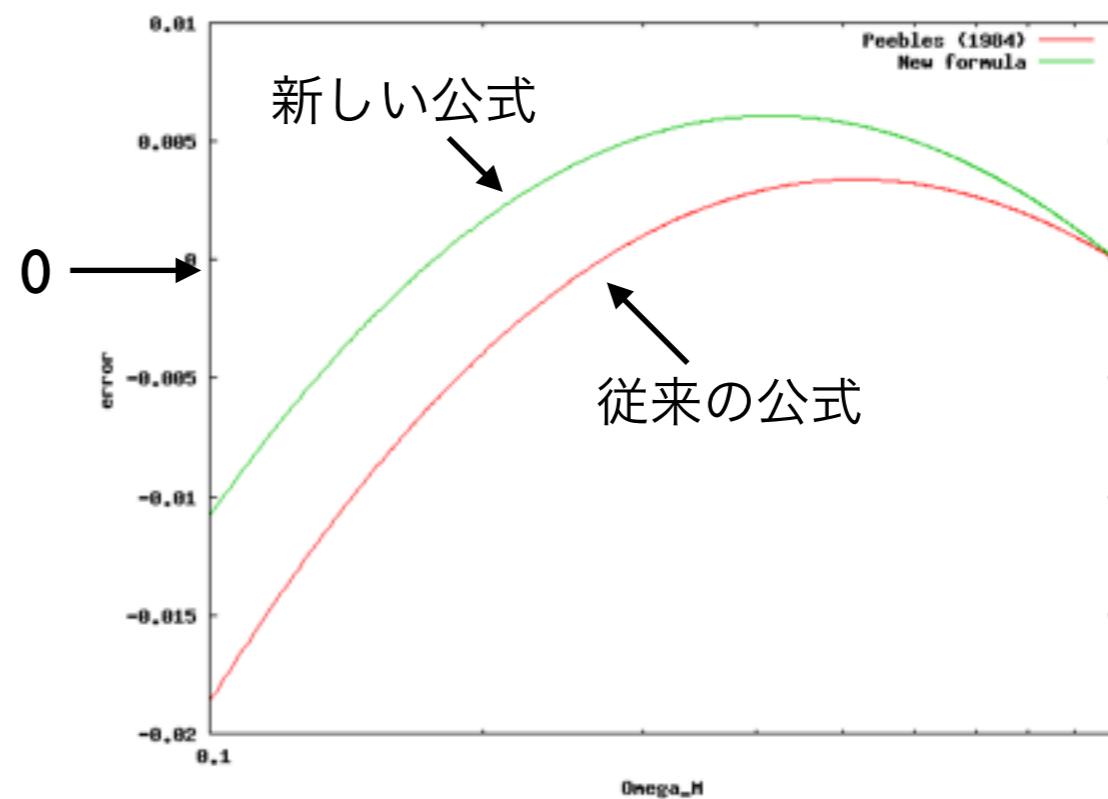
でも、 $0.1 \leq \Omega_M \leq 1$  でも適用できる精度の高い公式が欲しい。  
 →まずは同様の式の形で探してみる。

# 従来の方法を拡張しても

- 最小二乗法で最適値を求めようとしたが、精度の向上が見られなかった。



$\Omega$ と $f1$ の関係  
(両対数グラフ)



線形摂動の近似公式の誤差  
 $0.1 < \Omega < 1$  の全範囲での改善ができない。



# 新たな近似公式の構築2

- 近似公式は  $0.9 \leq \Omega_M \leq 1$  で導出し, 多少はよくなったかもしれない.
- 一方, 過去の近似公式は  $0.1 \leq \Omega_M \leq 1$  で適用されている.  
 $\Omega_M \simeq 1$  のみ有効な公式ならば, high-z ならば使い道があるかもしれないが, もっと適用範囲を広げたい.
- $0.1 \leq \Omega_M \leq 1$  の範囲で適用可能な, より精度の高い近似公式を構築したい.

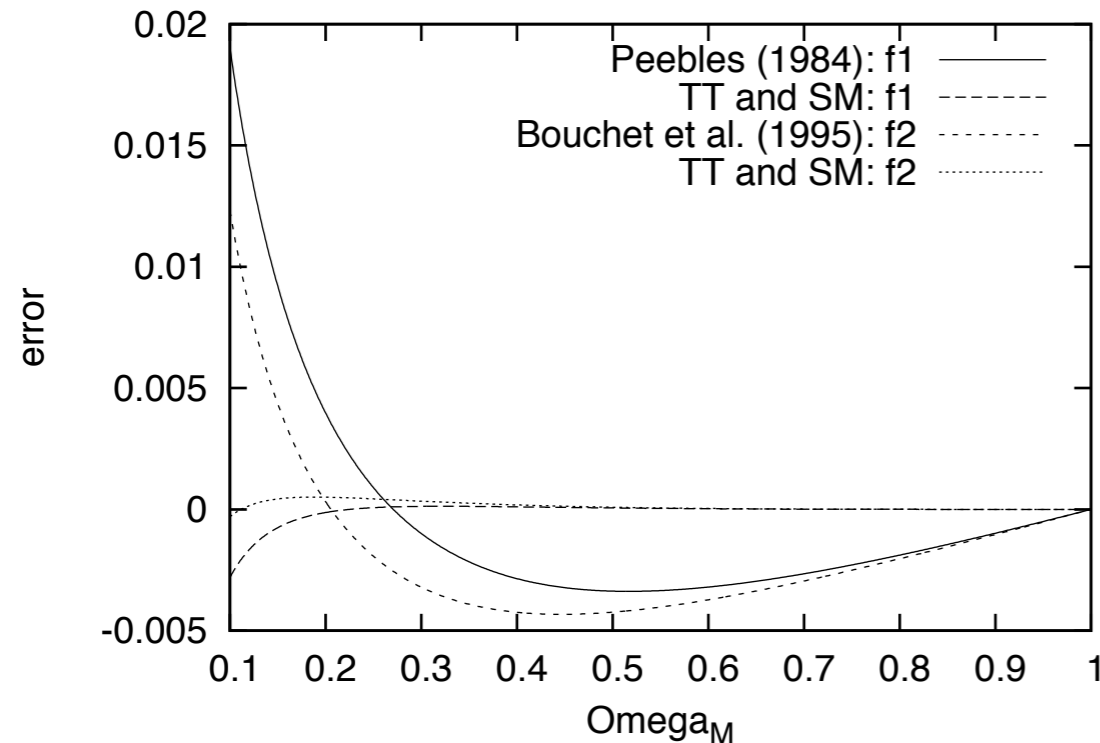
そこで我々は, 以下のような式を考えてみた.

$$f_n \simeq n \left\{ -A\Omega_M^{2\alpha} + B\Omega_M^\alpha + (1 + A - B) \right\} .$$

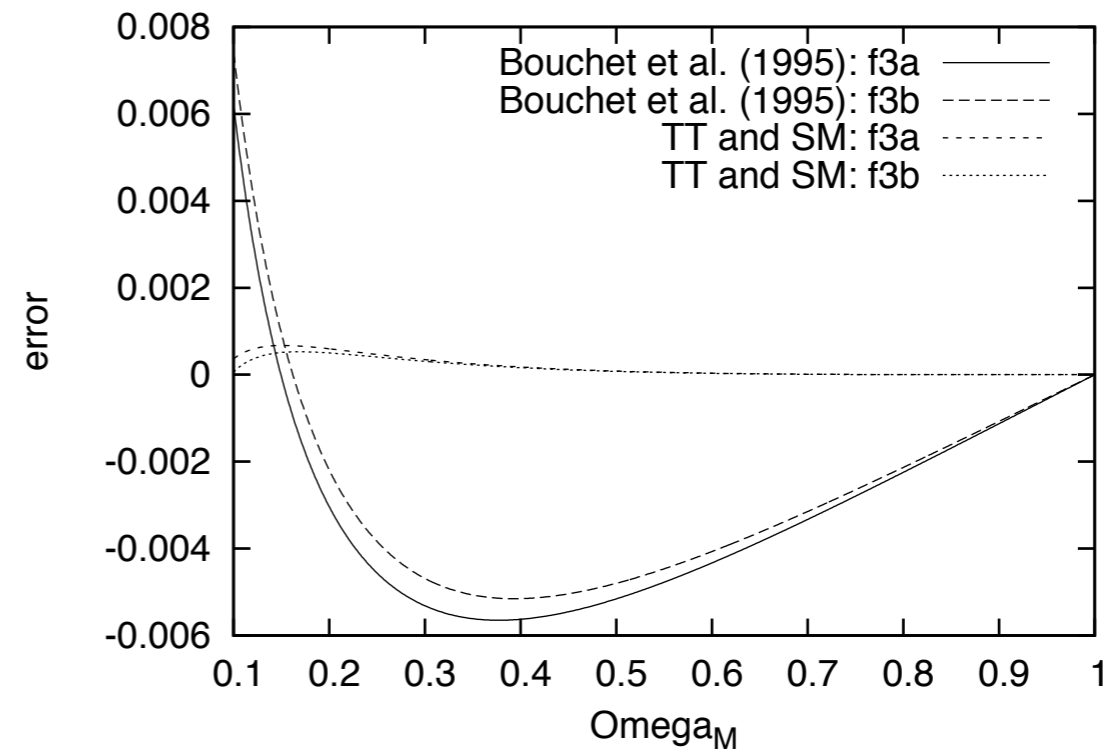
$\alpha$ は先ほどの  $0.9 \leq \Omega_M \leq 1$  の範囲で近似公式で求めた時の値を使う.

A, B について, 最小二乗法で最適値を求める.

# 新たな近似公式2の評価



一次, 二次摂動



三次摂動

$\Omega_M \simeq 0.3 (z = 0)$  でも, 従来の公式より1~2桁精度が高い.

$0.9 \leq \Omega_M \leq 1$  (High-z region) では, 従来の公式より3~4桁精度が高い.

非常に精度の高い近似公式が構築できた.

「精密宇宙論」の理論予想を行うには, 従来の近似公式に代わり我々の公式を使ったほうが, より高い精度の予想ができる.

# 新しい近似公式2での指数

mode	A	B	mode	A	B	mode	A	B	mode	A	B
$f_1$	25/993	149/142	$f_{5d}$	11/684	753/730	$f_{3T}$	19/987	413/398	$f_{5Te}$	6/365	577/559
$f_2$	5/232	1037/995	$f_{5e}$	9/554	616/597	$f_{4Ta}$	1/57	933/902	$f_{5Tf}$	9/542	857/830
$f_{3a}$	11/577	250/241	$f_{5f}$	11/667	639/619	$f_{4Tb}$	17/964	599/579	$f_{5Tg}$	15/898	789/764
$f_{3b}$	17/887	829/799	$f_{5g}$	13/784	731/708	$f_{4Tc}$	11/620	506/489	$f_{5Th}$	13/772	595/576
$f_{4a}$	13/749	669/647	$f_{5h}$	13/778	978/947	$f_{5Ta}$	1/61	257/249	$f_{5Ti}$	9/548	802/777
$f_{4b}$	5/287	818/791	$f_{5i}$	5/313	659/639	$f_{5Tb}$	4/243	32/31	$f_{5Tj}$	11/664	509/493
$f_{4c}$	11/628	211/204	$f_{5j}$	4/237	125/121	$f_{5Tc}$	3/181	922/893	$f_{5Tk}$	12/715	911/882
$f_{4d}$	14/815	706/683	$f_{5k}$	13/797	807/782	$f_{5Td}$	15/923	616/597			
$f_{4e}$	15/862	91/88	$f_{5l}$	5/308	292/283						
$f_{5a}$	15/926	1008/977	$f_{5m}$	8/491	97/94						
$f_{5b}$	15/922	259/251	$f_{5n}$	1/61	932/903						
$f_{5c}$	7/430	453/439	$f_{5o}$	1/62	98/95						

以前と同様，分母を3桁までの範囲にとどめ，最適な係数を分数で表すと上記のようになる。

# 5. Summary

- 宇宙の大規模構造形成で、Lagrange 的摂動論が長く用いられてきた。
- 最近、4次の摂動論が発表されたが、計算方法により摂動方程式が2組導出されていた。
- 4次の摂動方程式で物理的に妥当なものはどちらかを評価した。
- この評価を踏まえて5次の摂動方程式を導出した。
- 計算が複雑な摂動の時間成分について、LCDMモデルにおける従来の近似公式よりも格段に精度のよい近似公式を構築した。

# Future work I

- 高次の摂動解を用いた loop 補正の計算に応用できる.
- 5次の摂動を用いれば, スペクトルについては3-loop補正まで計算できる.  
→ 「精密宇宙論」の予言に大きく寄与できる.  
(cf. Okamura, Taruya, Matsubara, JCAP 08, 012 (2011); Matsubara, Phys. Rev. D 92, 023534 (2015))
- スペクトル計算で1-loop, 2-loop の補正に比べ, 3-loop の効果が大きいという報告がなされている (Blas, Garny, Konstandin, JCAP 01, 010 (2014)).

3-loop の効果が大きいのはなぜ？

# Future work I (続)

- 計算方法を改良すれば「実は小さかった」ということになるかもしれない。

Pade 近似 (Matsubara, Yoshisato, Morikawa, ApJ 504, 7 (1998))

$$f(t) = \sum_{j=0}^{M+N} \gamma_j t^j + o(t^{M+N+1}) \rightarrow f(t) \simeq \frac{\sum_{k=0}^M \alpha_k t^k}{1 + \sum_{k=1}^N \beta_k t^k}.$$

Shanks 変換 (Tatekawa, PRD 75, 044028(2007))

$$f_n \equiv \sum_{j=0}^n \gamma_j t^j \rightarrow \tilde{f}_n = \frac{f_{n+1} f_{n-1} - f_n^2}{f_{n+1} + f_{n-1} - 2f_n}.$$

ただ、これらの方法は分母が0になると摂動そのものが発散するため、取り扱いに注意が必要である。

「Zel'dovich のパンケーキ」は、密度揺らぎは発散するが摂動である変位は有限である。

# Future work 2

- 宇宙論的N体シミュレーションについても，初期条件の設定に Lagrange 的摂動論の高次摂動論が有用と考えられる.
- 3次の Longitudinal mode は，1%精度の計算に必要そう (Tatekawa and Mizuno (2007))  
3次の Transverse mode は，密度場にはほとんど影響しない (Tatekawa (2014)) .
- これらは，古いP3Mコード (Bertschinger (1995)) で行っている.
- 最近のコード (例えば Gadget2) で使える 3LPT を含めた初期条件コードの作成に取り掛かっている.