Gravitational scalar-tensor theory

= 重力的スカラーテンソル理論

成子　篤　(東工大)

共同研究者 : 吉田 大介 (東工大)　向山 信治 (基研)

Gravitational scalar-tensor theory

= 重力的スカラーテンソル理論

成子　篤　(東工大)

共同研究者 : 吉田 大介 (東工大)　向山 信治 (基研)

内容

1. イントロ　[10 枚]

2. モデル　[5 枚 → 3 枚 ??]

3. まとめと展望　[2 枚]

イントロ

宇宙の加速膨張

- インフレーション (大昔)　&　暗黒エネルギー (現在)

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\rho + 3P}{6} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad P \leq -\frac{\rho}{3}$$

へんてこ物質 ??　　**重力法則の変更 ??**

- canonical (普通の, 最も簡単な) スカラー場 :

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)\,, \quad P = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)\,, \quad \Rightarrow \quad P \approx -\rho$$

$$\text{if} \quad \dot{\phi}^2 \ll V$$

→　スカラー場と重力場が結合した理論

= scalar - tensor theory

一般相対論

- ランダウ & リフシッツ「場の古典論」によると、

  計量 と その微分 を用いて、共変的に書かれ、

  その運動方程式が二階微分に従う理論 (時空は4次元)

  → **一般相対論 に唯一的に決まる !!**

  (一般には、Lovelock 理論)

- へんてこ物質を受け入れたくなければ、

  重力理論を変更するしかない = 以下のいずれかを諦める

  → **計量性？　共変性？　二階微分？　高次元？**

もう少しくわしく

- 一般相対論の作用は、R に線形。 $S^{GR} = \int \mathrm{d}^4 x \sqrt{-g}\, R$

- R 自体 (~ 曲率テンソル) は計量の二階微分を含むが、
  運動方程式は計量の二階微分方程式にしたがう。

$$R \sim \partial\Gamma + \Gamma^2 \,, \quad \Gamma \sim \partial g$$

$$S = \int \mathrm{d}^4 x \sqrt{-g}\, R = \int \mathrm{d}^4 x \left(\partial\Gamma + \Gamma^2\right) \to \int \mathrm{d}^4 x \, (\partial g)^2$$

$$(\mathcal{L} = \dot{q}^2 \;\; \to \;\; \ddot{q} = 0)$$

f (R) 理論

- 作用が リッチスカラー = R の任意関数で表される。

- 運動方程式は、4階微分方程式。

$$\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\, f(R) \sim \int \mathrm{d}^4x\, f(\ddot{g}) \;\rightarrow\; \ddot{f}(\ddot{g}) \supset \ddddot{g}$$

- 系の運動 (計量の発展) は、位置・速度に加え、

  加速度、加加速度 (?) を指定すると初めて決まる。

- 実は、f (R) 重力と、計量性には関係がある！

共形変換

- 計量の変換 (書き換え) : g -> Ω g と書く

  (例 : 平坦時空 -> FLRW 時空、 $\eta_{\mu\nu} \to a^2 \eta_{\mu\nu}$)

① 変数変換 : $f(R) = f(\phi) - (\partial_\phi f)(\phi - R)$

ϕ の eom → $\phi = R$

R を線形化 !!

② 共形変換 : $\sqrt{-g}\, f_\phi\, R \to \sqrt{-g}\, \frac{f_\phi\, \Omega^4}{\Omega^2} \left(R - 6 \frac{(\nabla\Omega)^2}{\Omega^4} \right)$

③ Ω を選ぶ : $2 f_\phi\, \Omega^2 = 1 \;\to\; \mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} R - \frac{1}{2} (\nabla\varphi)^2 - V(\varphi) \right]$

f (R) 理論 ⟷ **S-T 理論 : 2 + 1 自由度**

対応表

計量 + ϕ (scalar-tensor)	計量 (純粋な重力理論)
canonical scalar ⟷	f (R) theory

S-T 理論

- S-T 理論は、近年急速に発展 (複雑化 ?) している。

　→ ただし、**運動方程式は二階微分**。

　= 初期位置・速度を決めれば発展は一意的。

$$\alpha\,\ddot{\phi} = f(\dot{\phi}\,,\phi)$$

- 最も単純な場合 (canonical scalar) :

　→　$\ddot{\phi} - \triangle\phi + \partial_\phi V = 0$　(平坦時空の場合)

$$\mathcal{L} = X - V\,, \qquad X = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$$

S-T 理論の発展

- 伝搬速度は常に 1 ??

k-essence : $\mathcal{L} = K(\phi\,, X)$ $\Rightarrow$ $c_s^2 \neq 1$

- 作用に 2階微分 は足せないの？　(一見ダメだけど..)

KGB : $\mathcal{L} = K(\phi\,, X) + G(\phi\,, X)\Box\phi$　　$\Box\phi \supset \ddot{\phi}$

$$\mathcal{L} = \dot{q}\,\ddot{q} = \partial_t\left(\dot{q}^2\right)\,, \quad \rightarrow \quad \dddot{q} - \dddot{q} = 0$$

- 4階微分は？　6階微分は？　…

Horndeski (1974) Deffayet et.al. (2011) Kobayashi et.al. (2011)

ホルンデスキー理論

- φ も g も 2階微分方程式 = 2 + 1 自由度 :

canonical : $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi - V(\phi)\Big(= X - V(\phi)\Big)$

$X = -(\nabla\phi)^2/2$

k-essence : $\mathcal{L} = K(\phi\,, X)$

KGB : $\mathcal{L} = K(\phi\,, X) + G(\phi\,, X)\Box\phi$

Horndeski : $\mathcal{L}_4 = G_4(\phi\,, X)\,R - \frac{\partial G_4}{\partial X}\Big[(\nabla\nabla\phi)^2 - (\Box\phi)^2\Big]$

$$\mathcal{L}_5 = G_5(\phi\,, X)\,G_{\mu\nu}\nabla^\mu\nabla^\nu\phi - \frac{1}{3}\frac{\partial G_5}{\partial X}\Big[(\nabla\nabla\phi)^3 + \cdots\Big]$$

(実はまだまだ… beyond Horn. (1404), GAO theory (1406) … N 理論 ?)

対応表 (私の野望)

計量 + ϕ (scalar-tensor)		計量 (純粋な重力理論)
canonical scalar	conformal	f (R) theory
k-essence		?
KGB		??
Horndeski ($L4 \supset B^2$)		???
Horndeski ($L5 \supset B^3$)		????

↑ 今日の話

モデル

モデル

- 今回考えるモデルは (f (R) 理論の拡張として)、

$$f\left(R\,,\,(\nabla R)^2\,,\,\cdots\right)$$

$$(\nabla R)^2 = g^{\mu\nu}\partial_\mu R \partial_\nu R$$

c.f. **f (Riemann)** theory

Deruelle et.al. (2009)

結論

ホルンデスキー (2+1) **+** **別のスカラー場 (+1)**

の **健全な理論** だった。

オストログラッドスキー定理

- 高階微分の理論は、**不安定性**があるのでよくない。

→ 物理は**二階微分方程式に従うべき**だ !! (?)

(例) $$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m^2q^2 + \frac{1}{2}\ddot{q}^2$$

$$Q_1 = q\,, \quad Q_2 = \dot{q} \quad P_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{q}} = \dot{q} - \dddot{q} \quad P_2 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{q}} = \ddot{q}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= P_1\dot{Q}_1 + P_2\dot{Q}_2 - \mathcal{L}(q\,,\dot{q}\,,\ddot{q}) \\ &= P_1 Q_2 + P_2^2 - \mathcal{L}(Q_1\,,Q_2\,,P_2)\end{aligned}$$

エネルギー = H が無限に大きく (or 小さく) なり、不安定

f(R) のおさらい

1, R を ϕ でおきかえる ⬅ R について**線形化** :

$$f(R) = f(\phi) - \lambda(\phi - R)$$ (λ の EOM : ϕ → R)

2, 共形変換 g → (1/λ) g ⬅ アインシュタイン重力に :

$$f(R) = \widetilde{R} - (\widetilde{\nabla}\lambda)^2 - f(\phi) - \lambda\phi$$

3, **ϕ を消去** (ϕ のEOM = 拘束条件を使って) :

$$\lambda = \partial_\phi f(\phi)$$

4, **2 + 2 = R + ϕ + λ** → **1 + 2 = R + ϕ**

f(R, (∇R)^2) の場合

1, **R** を **φ** でおきかえる ← R について線形化 :

$$f\left(R\,,(\nabla R)^2\right) = f\left(\phi\,,(\nabla\phi)^2\right) - \lambda(\phi - R)$$

2, 共形変換 g → (1/λ) g ← アインシュタイン重力に :

$$\widetilde{R} - (\widetilde{\nabla}\lambda)^2 - f\left(\phi\,,2\lambda\,(\widetilde{\nabla}\phi)^2\right) - \lambda\,\phi$$

3, **φ を消去できない** = **λ と φ の 2-スカラー場**の理論

4, 自由度は、**2 + 2 = R + φ + λ**。でも**不安定性なし !!**

なにがおこった？

- 高次の微分を含む理論は、**不安定**だったはず。。

- 実は、オストログラッドスキーの定理には**仮定**があり、
  作用が縮退 $\Leftrightarrow \partial^2\mathcal{L}/\partial\ddot{q}^i\partial\ddot{q}^j = 0$ の時には成り立たない。

  ➡ **重力系は束縛系** なので作用が縮退している。

  ＝ オストログラッドスキーの定理 は適用されない !!

- R の1階微分だけでなく、**高次の微分** (□R など) も
  導入することができる。**ホルンデスキー + λ (φ - R)**

まとめ & 展望

まとめ

- f (R) 理論の拡張として、R と その微分 を含むような理論 (計量の高階微分を含む理論) を考えた。
- 高階微分を含む理論には、オストログラッドスキー不安定性がよく現れることが知られているが、今回は現れなかった。(定理の仮定があてはまらない)
- R の1階微分だけでなく、もっと高い次数の微分も入れることができた。不安定性は現れることなく。

展望

- どうやって観測的に制限する？ (複数スカラー場)

- S-T 理論に対応する、重力理論は？
  (1+2 自由度。今回は、2+2 自由度。)

- f(R) <-> S-T 理論 (算数的には等価) を区別する方法 ??

ありがとうございました