

Gravitational scalar-tensor theory

= 重力的スカラーテンソル理論

成子 篤 (東工大)

共同研究者：吉田 大介 (東工大) 向山 信治 (基研)

# Gravitational scalar-tensor theory

## = 重力的スカラーテンソル理論

成子 篤 (東工大)

共同研究者：吉田 大介 (東工大) 向山 信治 (基研)

# 内容

1. イントロ [10 枚]
2. モデル [5 枚 → 3 枚 ??]
3. まとめと展望 [2 枚]

イントロ

# 宇宙の加速膨張

- インフレーション (大昔) & 暗黒エネルギー (現在)

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\rho + 3P}{6} \geq 0 \quad \rightarrow \quad P \leq -\frac{\rho}{3}$$

へんてこ物質??

重力法則の変更??

- canonical (普通の, 最も簡単な) スカラー場:

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad P = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi), \quad \rightarrow \quad P \approx -\rho$$

if  $\dot{\phi}^2 \ll V$

→ スカラー場と重力場が結合した理論

= scalar - tensor theory

# 一般相対論

- ランダウ & リフシッツ 「場の古典論」によると、  
計量とその微分を用いて、共変的に書かれ、  
その運動方程式が二階微分に従う理論 (時空は4次元)  
→ **一般相対論に唯一的に決まる!!**  
(一般には、 Lovelock 理論)
- へんてこ物質を受け入れたくなければ、  
重力理論を変更するしかない = 以下のいずれかを諦める  
→ **計量性? 共変性? 二階微分? 高次元?**

# もう少しくわしく

- 一般相対論の作用は、 $R$  に線形。  $S^{GR} = \int d^4x \sqrt{-g} R$
- $R$  自体 ( $\sim$  曲率テンソル) は計量の二階微分を含むが、運動方程式は計量の二階微分方程式にしたがう。

$$R \sim \partial\Gamma + \Gamma^2, \quad \Gamma \sim \partial g$$

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} R = \int d^4x (\partial\Gamma + \Gamma^2) \rightarrow \int d^4x (\partial g)^2$$

$(\mathcal{L} = \dot{q}^2 \rightarrow \ddot{q} = 0)$

# f (R) 理論

- 作用が リッチスカラー = R の任意関数で表される。
- 運動方程式は、4階微分方程式。

$$\int d^4x \sqrt{-g} f(R) \sim \int d^4x f(\ddot{g}) \rightarrow \dot{f}(\ddot{g}) \supset \ddot{\ddot{g}}$$

- 系の運動 (計量の発展) は、位置・速度に加え、  
加加速度、加加加速度 (?) を指定すると初めて決まる。
- 実は、f (R) 重力と、計量性には関係がある！

# 共形変換

- 計量の変換 (書き換え) :  $g \rightarrow \Omega g$  と書く

(例 : 平坦時空  $\rightarrow$  FLRW 時空、 $\eta_{\mu\nu} \rightarrow a^2 \eta_{\mu\nu}$ )

① 変数変換 :  $f(R) = f(\phi) - (\partial_\phi f)(\phi - R)$

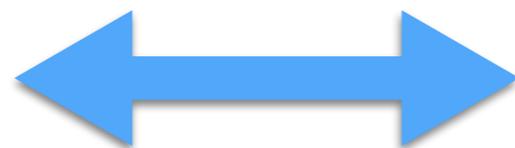
$\phi$  の eom  $\rightarrow \phi = R$

**R を線形化 !!**

② 共形変換 :  $\sqrt{-g} f_\phi R \rightarrow \sqrt{-g} \frac{f_\phi \Omega^4}{\Omega^2} \left( R - 6 \frac{(\nabla \Omega)^2}{\Omega^4} \right)$

③  $\Omega$  を選ぶ :  $2f_\phi \Omega^2 = 1 \rightarrow \mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} R - \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 - V(\varphi) \right]$

**f (R) 理論**



**S-T 理論 : 2 + 1 自由度**

# 対応表

計量 +  $\phi$  (scalar-tensor)

計量 (純粋な重力理論)

canonical scalar



f (R) theory

# S-T 理論

- S-T 理論は、近年急速に発展 (複雑化?) している。
  - ただし、**運動方程式は二階微分**。
  - = **初期位置・速度**を決めれば発展は**一意**的。

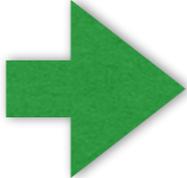
$$\alpha \ddot{\phi} = f(\dot{\phi}, \phi)$$

- 最も単純な場合 (canonical scalar) :
  - $\ddot{\phi} - \Delta\phi + \partial_{\phi}V = 0$  (平坦時空の場合)

$$\mathcal{L} = X - V, \quad X = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi$$

# S-T 理論の発展

- 伝搬速度は常に 1 ??

k-essence :  $\mathcal{L} = K(\phi, X)$    $c_s^2 \neq 1$

- 作用に 2階微分 は足せないの？ (一見ダメだけど..)

KGB :  $\mathcal{L} = K(\phi, X) + G(\phi, X)\square\phi$      $\square\phi \supset \ddot{\phi}$

$$\mathcal{L} = \dot{q} \ddot{q} = \partial_t (\dot{q}^2), \quad \rightarrow \quad \ddot{\ddot{q}} - \ddot{\dot{q}} = 0$$

- 4階微分は？ 6階微分は？ ...

# ホルンデスキー理論

- $\phi$  も  $g$  も 2階微分方程式 = 2 + 1 自由度 :

canonical :  $\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \nabla_{\mu} \phi \nabla^{\mu} \phi - V(\phi) \left( = X - V(\phi) \right)$   
 $X = -(\nabla \phi)^2 / 2$

k-essence :  $\mathcal{L} = K(\phi, X)$

KGB :  $\mathcal{L} = K(\phi, X) + G(\phi, X) \square \phi$

Horndeski :  $\mathcal{L}_4 = G_4(\phi, X) R - \frac{\partial G_4}{\partial X} \left[ (\nabla \nabla \phi)^2 - (\square \phi)^2 \right]$

$$\mathcal{L}_5 = G_5(\phi, X) G_{\mu\nu} \nabla^{\mu} \nabla^{\nu} \phi - \frac{1}{3} \frac{\partial G_5}{\partial X} \left[ (\nabla \nabla \phi)^3 + \dots \right]$$

(実はまだまだ... beyond Horn. (1404), GAO theory (1406) ... N 理論?)

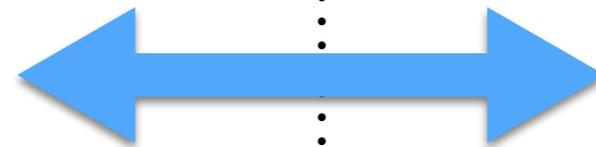
# 対応表

(私の野望)

計量 +  $\phi$  (scalar-tensor)

計量 (純粋な重力理論)

canonical scalar



f (R) theory

k-essence

**conformal**

?

KGB

??

Horndeski (L4  $\supset$  B<sup>2</sup>)

???

Horndeski (L5  $\supset$  B<sup>3</sup>)

????

↑ 今日の話

モデル

# モデル

- 今回考えるモデルは (f (R) 理論の拡張として)、

$$f\left(R, (\nabla R)^2, \dots\right)$$

$$(\nabla R)^2 = g^{\mu\nu} \partial_\mu R \partial_\nu R$$

c.f. **f (Riemann)** theory  
Deruelle et.al. (2009)

結論

ホルンデスキー (2+1) + 別のスカラー場 (+1)

の 健全な理論 だった。

# オストログラッドスキー定理

- 高階微分の理論は、**不安定性**があるのでよくない。  
→ 物理は**二階微分方程式に従うべき**だ!! (?)

$$(例) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m^2q^2 + \frac{1}{2}\ddot{q}^2$$

$$Q_1 = q, \quad Q_2 = \dot{q} \quad P_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{q}} = \dot{q} - \ddot{q} \quad P_2 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{q}} = \ddot{q}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= P_1 \dot{Q}_1 + P_2 \dot{Q}_2 - \mathcal{L}(q, \dot{q}, \ddot{q}) \\ &= P_1 Q_2 + P_2^2 - \mathcal{L}(Q_1, Q_2, P_2) \end{aligned}$$

**エネルギー = H が無限に大きく (or 小さく) なり、不安定**

# $f(R)$ のおさらい

1,  $R$  を  $\phi$  でおきかえる ←  $R$  について線形化:

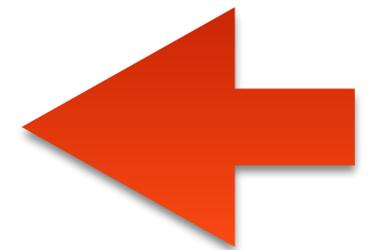
$$f(R) = f(\phi) - \lambda(\phi - R) \quad (\lambda \text{ の EOM : } \phi \rightarrow R)$$

2, 共形変換  $g \rightarrow (1/\lambda)g$  ← アインシュタイン重力に:

$$f(R) = \tilde{R} - (\tilde{\nabla}\lambda)^2 - f(\phi) - \lambda\phi$$

3,  $\phi$  を消去 ( $\phi$  の EOM = 拘束条件を使って):

$$\lambda = \partial_\phi f(\phi)$$



4,  $2 + 2 = R + \phi + \lambda \rightarrow 1 + 2 = R + \phi$

# $f(R, (\nabla R)^2)$ の場合

1,  $R$  を  $\phi$  でおきかえる ←  $R$  について線形化:

$$f\left(R, (\nabla R)^2\right) = f\left(\phi, (\nabla \phi)^2\right) - \lambda(\phi - R)$$

2, 共形変換  $g \rightarrow (1/\lambda)g$  ← アインシュタイン重力に:

$$\tilde{R} - (\tilde{\nabla} \lambda)^2 = f\left(\phi, 2\lambda (\tilde{\nabla} \phi)^2\right) - \lambda \phi$$

3,  $\phi$  を消去できない =  $\lambda$  と  $\phi$  の 2-スカラー場の理論

4, 自由度は、 $2 + 2 = R + \phi + \lambda$ 。でも不安定性なし !!

# なにがおこった？

- 高次の微分を含む理論は、**不安定**だったはず。。
- 実は、オストログラッドスキーの定理には**仮定**があり、**作用が縮退**  $\Leftrightarrow \partial^2 \mathcal{L} / \partial \ddot{q}^i \partial \ddot{q}^j = 0$  の時には成り立たない。
  - ➔ **重力系は束縛系** なので作用が縮退している。  
= オストログラッドスキーの定理 は適用されない !!
- R の1階微分だけでなく、**高次の微分** ( $\square R$  など) も導入することができる。**ホルンデスキー +  $\lambda (\phi - R)$**

まとめ & 展望

# まとめ

- $f(R)$  理論の拡張として、 $R$  と その微分 を含むような理論 (計量の高階微分を含む理論) を考えた。
- 高階微分を含む理論には、オストログラッドスキー不安定性がよく現れることが知られているが、今回は現れなかった。(定理の仮定があてはまらない)
- $R$  の1階微分だけでなく、もっと高い次数の微分も入れることができた。不安定性は現れることなく。

# 展望

- どうやって観測的に制限する？ (複数スカラー場)
- S-T 理論に対応する、重力理論は？  
(1+2 自由度。今回は、2+2 自由度。)
- $f(R) \leftrightarrow$  S-T 理論 (算数的には等価) を区別する方法 ??

ありがとうございました