

Removing Ostrogradsky's ghost from  
general higher derivative gravity  
and its cosmological applications.

**立教大学 M2 秋田悠児**

第4回観測的宇宙論ワークショップ@YITP

共同研究者：小林努

# Overview

---

## Introduction

- 高階微分理論
- Ostrogradsky不安定性

## 重力理論におけるOstrogradsky不安定性

## 理論の安定化：拘束条件の導入

## 宇宙論への応用

Y.Akita and T. Kobayashi

[arXiv:1507.00812[gr-qc]]



# Introduction

---

 運動方程式：時間について2階微分方程式

- 古典力学 … Newtonの運動方程式
- 一般相対論 … Einstein方程式
- Horndeski理論 (とその拡張)

 “高階”の微分を考えたら何が起こるか??

# Introduction – Higher derivative theory

---

## Ostrogradsky不安定性の出現

自由度が縮退していない理論は不安定である。

単純な例：

$$S = \int dt \left[ \frac{1}{2} \ddot{q}^2 - V(q) \right] \longrightarrow H = P_1 Q_2 + \frac{P_1^2}{2} + V(Q_1)$$

$$\begin{aligned} \text{正準変数：} \quad Q_1 &:= q \\ Q_2 &:= \dot{q} \end{aligned}$$

Hamiltonianに下限が無い

# Introduction – Higher derivative theory

---

## Ostrogradsky不安定性の出現

自由度が縮退していない理論は不安定である。

単純な例：

$$S = \int dt \left[ \frac{1}{2} \ddot{q}^2 - V(q) \right] \longrightarrow H = P_1 Q_2 + \frac{P_1^2}{2} + V(Q_1)$$

正準変数：  $Q_1 := q$   
 $Q_2 := \dot{q}$

Hamiltonianに下限が無い

量子重力 → 高階微分重力理論を示唆

# Gravity with instability

---

**GR** : 低エネルギー領域において有効な理論

**Quantum Gravity** : 高エネルギーで有効

➡ Suggestion: 高次の曲率項を追加

---

よく知られている例 :  $\mathcal{L} = R + \alpha R^2$  (Starobinskyモデル)

【Planckの観測結果をよく説明する】

他の曲率項を加えると?  $R_{\mu\nu}^2, R_{\mu\nu\rho\sigma}^2, C_{\mu\nu\rho\sigma}^2$

➡ Ostrogradsky不安定性に直面

# Gravity with instability

---

## 不安定性の出現 (Minkowski時空まわりの摂動)

$$S = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda + \alpha R^2 + \beta R_{\mu\nu} R^{\mu\nu})$$



metric:  $ds^2 = -dt^2 + (\delta_{ij} + h_{ij} + \frac{1}{2}h_{ik}h_{kj})dx^i dx^j$

$$S = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{8} \int d\eta d^3x \left\{ (h'_{ij})^2 + h^{ij} \partial^2 h_{ij} + \beta [(h''_{ij})^2 + 2h'_{ij} \partial^2 h'_{ij} + (\partial^2 h_{ij})^2] \right\}$$

Hamiltonian:

$$H = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \int d^3x \left[ \frac{1}{4\beta} p^{ij} p_{ij} + \pi^{ij} q_{ij} - 2\beta q_{ij} \partial^2 q_{ij} - q_{ij} q^{ij} - \beta \partial^2 h_{ij} \partial^2 h^{ij} - h_{ij} \partial^2 h_{ij} \right] .$$

【線型項→不安定】

# Stabilization- add constraint

---

実は安定化が可能である! [Chen et. al. 2013]

 適切な拘束条件を課す

Lagrangian:

$$\mathcal{L} \supset (h''_{ij})^2 \quad \longrightarrow \quad \mathcal{L} \supset (h''_{ij} - \lambda_{ij})^2, \quad \lambda_{ij} \partial^2 h_{ij}$$

時間の高階微分  $\longleftrightarrow$  空間微分

【extra d.o.f (ghost)】

【Good for renormalizability】

Hamiltonian:

$$H \supset \pi_{ij} q_{ij} \quad \longrightarrow \quad \text{Positive! due to } \pi_{ij} \propto q_{ij}$$



# Stabilization- add constraint

---

実は安定化が可能である! [Chen et. al. 2013]

Reduced Hamiltonian

$$\mathcal{H}_R = \frac{1}{4} \pi^{ij} (1 - 2\beta \partial^2) \pi_{ij} \\ + h^{ij} (-\partial^2 + 3\beta \partial^2 \partial^2) h_{ij}$$

【All terms are Quadratic】

Hamiltonian:

$$H \supset \pi_{ij} q_{ij} \longrightarrow \text{Positive! due to } \pi_{ij} \propto q_{ij}$$

# A brief summary

---

高階微分項  不安定性

ex) 重力理論 :  $R^2_{\mu\nu}$ ,  $R^2_{\mu\nu\rho\sigma}$ ,  $C^2_{\mu\nu\rho\sigma}$

**拘束条件を課して、不安定なモードを取り除ける**

$$S = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda + \alpha R^2 + \beta R_{\mu\nu} R^{\mu\nu})$$

(背景時空はMinkowski)




- ・ 膨張宇宙へ適用できるか？
- ・ できるだけ広く応用できる設定

# Generalization:

---

できました。 Y.Akita and T. Kobayashi, [arXiv:1507.00812[gr-qc]]

 **Backgroundはフリードマン時空**

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[ -d\eta^2 + (\delta_{ij} + h_{ij} + \frac{1}{2}h_{ik}h_{kj}) \right] dx^i dx^j$$

 **モデルはできるだけ一般化**

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} f(R, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}, C_{\mu\nu\rho\sigma}C^{\mu\nu\rho\sigma})$$

fは任意関数



- 非自明な組み合わせを含む拡張
- 応用：ダークエネルギーの代替等

# Generalization: Check the instability

---

出発点 :  $S = \int d^4x \sqrt{-g} f(R, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}, C_{\mu\nu\rho\sigma}C^{\mu\nu\rho\sigma})$

$$r_1 := R, \quad r_2 := R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}, \quad r_3 := C_{\mu\nu\rho\sigma}C^{\mu\nu\rho\sigma}$$

Quadratic action:

$$S = \int d^4x \left\{ \frac{a^2}{8} (Ah'_{ij}{}^2 + Ch_{ij}\partial^2 h_{ij}) + \frac{\beta}{8} [h''_{ij}{}^2 + 2h'_{ij}\partial^2 h'_{ij} + (\partial^2 h_{ij})^2] \right\}$$

係数の定義 :  $f_i := \partial f / \partial r_i$

$$\beta := 2f_2 + 4f_3$$

$$A := 2f_1 + \frac{8f_2}{a^2} (\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}') - 4f_2' \frac{\mathcal{H}}{a^2},$$

$$C := 2f_1 + \frac{8f_2}{a^2} (\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}') + \frac{4f_2'}{a^2} \mathcal{H} - \frac{2}{a^2} (f_2'' - 2f_3'')$$

時間依存性をもつ

# Generalization: Check the instability

---

出発点 :  $S = \int d^4x \sqrt{-g} f(R, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}, C_{\mu\nu\rho\sigma}C^{\mu\nu\rho\sigma})$

$$r_1 := R, \quad r_2 := R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}, \quad r_3 := C_{\mu\nu\rho\sigma}C^{\mu\nu\rho\sigma}$$

Quadratic action:

$$S = \int d^4x \left\{ \frac{a^2}{8} (Ah'_{ij}{}^2 + Ch_{ij}\partial^2 h_{ij}) + \frac{\beta}{8} [h''_{ij}{}^2 + 2h'_{ij}\partial^2 h'_{ij} + (\partial^2 h_{ij})^2] \right\}$$

Hamiltonian:

$$H = \int d^3x \left\{ \pi^{ij} q_{ij} + \frac{2}{\beta} p_{ij}^2 - \frac{1}{8} h_{ij} (a^2 C \partial^2 + \beta \partial^2 \partial^2) h_{ij} - \frac{1}{8} q_{ij} (a^2 A + 2\beta \partial^2) q_{ij} \right\}$$

# Generalization: Add constraints

$$S = \int d^4x \left\{ \frac{a^2}{8} (Ah_{ij}'^2 + Ch_{ij}\partial^2 h_{ij}) + \frac{\beta}{8} [h_{ij}''^2 + 2h_{ij}'\partial^2 h_{ij}' + (\partial^2 h_{ij})^2] \right\}$$

拘束条件は同じ形でOK

$$\mathcal{L} \supset (h_{ij}'')^2 \quad \longrightarrow \quad \mathcal{L} \supset (h_{ij}'' - \lambda_{ij})^2, \quad \lambda_{ij}\partial^2 h_{ij}$$

時間の高階微分  $\longleftrightarrow$  空間微分

【extra d.o.f (ghost)】

【Good for renormalizability】

**Constructing**  $h_{ij} := h_{ij} \longleftrightarrow \pi^{ij} := \partial\mathcal{L}/\partial h_{ij}'$

**Hamiltonian:**  $q_{ij} := h_{ij}' \longleftrightarrow p^{ij} := \partial\mathcal{L}/\partial h_{ij}''$

$\lambda_{ij} := \lambda_{ij} \longleftrightarrow \pi_{\lambda}^{ij} = 0$

# Generalization: Add constraints


---

## Hamiltonian with constraint


$$H = \int d^3x \left[ \pi^{ij} q_{ij} + \frac{2}{\beta} p_{ij}^2 + \lambda_{ij} \left( p_{ij} - \frac{\beta}{2} \partial^2 h_{ij} \right) - \frac{1}{8} h_{ij} (a^2 C \partial^2 + \beta \partial^2 \partial^2) h_{ij} - \frac{1}{8} q_{ij} (a^2 A + 2\beta \partial^2) q_{ij} \right]$$

---

Primary constraint  $\phi_1 : \pi_{\lambda}^{ij} = 0$

 Secondary constraints  $\cdots$  **primary constraint**  
の整合性から。

$$\phi_2 : \dot{\phi}_1 = 0 \Leftrightarrow \{\phi_1, H\}_{\text{PB}} = 0 \text{ 等々}$$

 複数の拘束条件が得られる。 i.g,  $\pi_{ij} \propto q_{ij}$

# Generalization: Reduced Hamiltonian

---

## Results of Stabilization

得られた拘束条件を全て使うと、、、

 Reduced Hamiltonian - tensor perturbation

$$H_R = \int d^3x \left\{ \frac{2}{a^4 A^2} \pi_{ij} (a^2 A - 2\beta \partial^2) \pi_{ij} + \frac{1}{8} h_{ij} (-a^2 C \partial^2 + 3\beta \partial^2 \partial^2) h_{ij} \right\}$$

$A, C, \beta > 0$  で安定



# Generalization: Reduced Hamiltonian

---

## Results of Stabilization

### Phase space dimensionality:

Original: 8 d.o.f  $\cdots h_{ij}, q_{ij}$  and their conjugate

add  $\lambda_{ij}$  and conjugate  $\rightarrow +4$  d.o.f  $\blacktriangleright 12$  d.o.f

+8 second class constraint

 4 d.o.f : same with GR **【ghosts are removed】**

# Generalization: Vector sector

---

$$ds^2 = a^2 \left[ - (1 - B_i B^i) d\eta^2 + 2B_i dx^i d\eta + \delta_{ij} dx^i dx^j \right]$$

ベクトルモードは2階微分方程式に従う:

$$S = \int d^4x \left[ \frac{\beta}{4} (\hat{v}'_{ij}{}^2 + \hat{v}_{ij} \partial^2 \hat{v}_{ij}) + \frac{a^2 A}{4} \hat{v}_{ij}{}^2 \right] \text{ with } \hat{v}_{ij} := \partial_i B_j$$

**Stable for**  $\beta > 0$  and  $A < 0$

【テンソル摂動の安定条件と両立不可能】

➡ **ベクトルモードは理論から取り除く**

# Generalization: Vector sector

---

## 拘束条件の導入

$$S = \int d^4x \left\{ \frac{\beta}{4} \left[ \left( \hat{v}'_{ij} - \hat{\lambda}_{ij} \right)^2 + \hat{v}_{ij} \partial^2 \hat{v}_{ij} \right] + \frac{a^2 A}{4} \hat{v}_{ij}^2 \right\}$$

$$\Rightarrow H = \int d^3x \left( \frac{\hat{\pi}_{ij}^2}{\beta} + \hat{\pi}_{ij} \hat{\lambda}_{ij} - \frac{\beta}{4} \hat{v}_{ij} \partial^2 \hat{v}_{ij} - \frac{a^2 A}{4} \hat{v}_{ij}^2 \right)$$

primary constraint, Secondary constraints,.....

**reduced Hamiltonian Vanishes!**

# Generalization: Scalar sector

---

スカラー摂動に関しても、同様に安定化が可能。  
(表式は複雑)

---

Flat gauge metric:

$$ds^2 = a^2 [-(1 + 2\Phi)d\eta^2 + 2\partial_i B d\eta dx^i + \delta_{ij} dx^i dx^j]$$

Quadratic action:

$$S = \int d^4x [b_0 (\Phi')^2 + b_1 (\partial^2 \Phi + \mathcal{B}')^2 + b_2 \Phi' \mathcal{B}' + b_3 \Phi \mathcal{B}' \\ + c_1 \Phi^2 + c_2 \Phi \partial^2 \Phi + c_3 \Phi \mathcal{B} + c_4 \mathcal{B}^2 + c_5 \mathcal{B} \partial^2 \Phi]$$

$$\mathcal{B} := \partial_i^2 B$$

$$\begin{aligned}
c_1 := & -6f_1 a^2 \mathcal{H}^2 + 36f_{11} \left[ 4\mathcal{H}^4 - 2\mathcal{H}\mathcal{H}'' + (\mathcal{H}')^2 + \mathcal{H}^2 \mathcal{H}' \right] c_2 := 2(2f_2 + 3f_{11})(4\mathcal{H}^2 + 3\mathcal{H}') + \frac{24}{a^2} f_{12} \left[ 10\mathcal{H}^4 - 3\mathcal{H}\mathcal{H}'' + 6(\mathcal{H}')^2 + 11\mathcal{H}^2 \mathcal{H}' \right] \\
& + \frac{72}{a^2} f_{12} \left[ 22\mathcal{H}^6 + 4(\mathcal{H}')^3 + 19\mathcal{H}^4 \mathcal{H}' - 8\mathcal{H}^3 \mathcal{H}'' - 14\mathcal{H}\mathcal{H}'\mathcal{H}'' \right] + \frac{36}{a^2} f_{111} \mathcal{H} (2\mathcal{H}^3 - \mathcal{H}'') \\
& + \frac{216}{a^2} f_{111} \mathcal{H} (\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}') (2\mathcal{H}^3 - \mathcal{H}'') + \frac{24}{a^2} f_{22} \left[ 20\mathcal{H}^6 + 12(\mathcal{H}')^3 + 35\mathcal{H}^4 \mathcal{H}' - 6\mathcal{H}^3 \mathcal{H}'' - 12\mathcal{H}\mathcal{H}'\mathcal{H}'' + 32\mathcal{H}^2 (\mathcal{H}')^2 \right] \\
& + \frac{288}{a^4} f_{22} \left[ 12\mathcal{H}^8 + 2(\mathcal{H}')^4 + 21\mathcal{H}^6 \mathcal{H}' - 4\mathcal{H}^5 \mathcal{H}'' + 11\mathcal{H}^4 (\mathcal{H}')^2 \right. \\
& \quad \left. - 10\mathcal{H} (\mathcal{H}')^2 \mathcal{H}'' + 11\mathcal{H}^2 (\mathcal{H}')^3 - 10\mathcal{H}^3 \mathcal{H}'\mathcal{H}'' \right] + \frac{72}{a^4} f_{112} \mathcal{H} \left[ 8\mathcal{H}^5 - 3\mathcal{H}^2 \mathcal{H}'' + 2\mathcal{H} (\mathcal{H}')^2 + 8\mathcal{H}^3 \mathcal{H}' - 6\mathcal{H}'\mathcal{H}'' \right] \\
& + \frac{864}{a^4} f_{112} \mathcal{H} \left[ 5\mathcal{H}^7 + \mathcal{H} (\mathcal{H}')^3 + 7\mathcal{H}^5 \mathcal{H}' - 2\mathcal{H}^4 \mathcal{H}'' + 5\mathcal{H}^3 (\mathcal{H}')^2 \right] + \frac{144}{a^6} f_{122} \mathcal{H} (\mathcal{H}^2 + 2\mathcal{H}') \left[ 10\mathcal{H}^5 - 3\mathcal{H}^2 \mathcal{H}'' + 4\mathcal{H} (\mathcal{H}')^2 + 4\mathcal{H}^3 \mathcal{H}' - 6\mathcal{H}'\mathcal{H}'' \right] \\
& + \frac{864}{a^6} f_{122} \mathcal{H} \left[ 16\mathcal{H}^9 + 8\mathcal{H} (\mathcal{H}')^4 + 32\mathcal{H}^7 \mathcal{H}' - 5\mathcal{H}^6 \mathcal{H}'' + 34\mathcal{H}^5 (\mathcal{H}')^2 \right. \\
& \quad \left. - 20\mathcal{H}^2 (\mathcal{H}')^2 \mathcal{H}'' - 12(\mathcal{H}')^3 \mathcal{H}'' - 17\mathcal{H}^4 \mathcal{H}'\mathcal{H}'' \right] + \frac{288}{a^8} f_{222} \mathcal{H} (\mathcal{H}^2 + 2\mathcal{H}')^2 \left[ 4\mathcal{H}^5 - \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'' + 2\mathcal{H} (\mathcal{H}')^2 - 2\mathcal{H}'\mathcal{H}'' \right], \\
& + \frac{3456}{a^8} f_{222} \mathcal{H} \left[ \mathcal{H}^6 + 2(\mathcal{H}')^3 + 3\mathcal{H}^4 \mathcal{H}' + 3\mathcal{H}^2 (\mathcal{H}')^2 \right] \left[ 4\mathcal{H}^5 - \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'' + 2\mathcal{H} (\mathcal{H}')^2 - 2\mathcal{H}'\mathcal{H}'' \right], \quad \text{too complicated...}
\end{aligned}$$

(A1)

$$\begin{aligned}
c_3 := & -4f_1 a^2 \mathcal{H} + 12f_{11} (8\mathcal{H}^3 - \mathcal{H}'') + 8f_2 (6\mathcal{H}^3 - \mathcal{H}'' - 2\mathcal{H}\mathcal{H}') \\
& + \frac{48}{a^2} f_{12} \left[ 26\mathcal{H}^5 - 8\mathcal{H}^2 \mathcal{H}'' + \mathcal{H} (\mathcal{H}')^2 + 11\mathcal{H}^3 \mathcal{H}' - 2\mathcal{H}'\mathcal{H}'' \right] + \frac{216}{a^2} f_{111} (3\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}') \left[ 2\mathcal{H}^5 - \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'' + \mathcal{H} (\mathcal{H}')^2 \right] + \frac{8}{a^2} f_{12} \left[ 29\mathcal{H}^4 - 8\mathcal{H}\mathcal{H}'' - 5(\mathcal{H}')^2 + 10\mathcal{H}^2 \mathcal{H}' \right] \\
& + \frac{48}{a^4} f_{22} \left[ 60\mathcal{H}^7 + 4\mathcal{H} (\mathcal{H}')^3 + 70\mathcal{H}^5 \mathcal{H}' - 19\mathcal{H}^4 \mathcal{H}'' \right. \\
& \quad \left. + 22\mathcal{H}^3 (\mathcal{H}')^2 - 28\mathcal{H}^2 \mathcal{H}'\mathcal{H}'' - 4(\mathcal{H}')^2 \mathcal{H}'' \right] + \frac{36}{a^2} f_{111} \mathcal{H} (2\mathcal{H}^3 - \mathcal{H}'') \\
& + \frac{144}{a^4} f_{112} \mathcal{H}^2 \left[ 28\mathcal{H}^5 - 11\mathcal{H}^2 \mathcal{H}'' + 6\mathcal{H} (\mathcal{H}')^2 + 20\mathcal{H}^3 \mathcal{H}' - 16\mathcal{H}'\mathcal{H}'' \right] + \frac{24}{a^4} f_{22} \left[ 69\mathcal{H}^6 - 8(\mathcal{H}')^3 + 71\mathcal{H}^4 \mathcal{H}' - 20\mathcal{H}^3 \mathcal{H}'' - 28\mathcal{H}\mathcal{H}'\mathcal{H}'' + 18\mathcal{H}^2 (\mathcal{H}')^2 \right] \\
& + \frac{288}{a^6} f_{122} \mathcal{H}^2 \left[ 42\mathcal{H}^7 + 20\mathcal{H} (\mathcal{H}')^3 + 68\mathcal{H}^5 \mathcal{H}' - 13\mathcal{H}^4 \mathcal{H}'' \right. \\
& \quad \left. - 40\mathcal{H}^2 \mathcal{H}'\mathcal{H}'' - 28(\mathcal{H}')^2 \mathcal{H}'' \right] + \frac{48}{a^6} f_{222} \mathcal{H}^2 \left[ 42\mathcal{H}^7 + 20\mathcal{H} (\mathcal{H}')^3 + 68\mathcal{H}^5 \mathcal{H}' - 13\mathcal{H}^4 \mathcal{H}'' \right. \\
& \quad \left. + 32\mathcal{H}^3 (\mathcal{H}')^2 - 40\mathcal{H}^2 \mathcal{H}'\mathcal{H}'' - 28(\mathcal{H}')^2 \mathcal{H}'' \right] \\
& + \frac{576}{a^8} f_{222} \mathcal{H}^2 \left[ 5\mathcal{H}^4 + 8(\mathcal{H}')^2 + 14\mathcal{H}^2 \mathcal{H}' \right] \left[ 4\mathcal{H}^5 - \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'' + 2\mathcal{H} (\mathcal{H}')^2 - 2\mathcal{H}'\mathcal{H}'' \right] + \frac{96}{a^8} f_{222} \mathcal{H} \left[ 5\mathcal{H}^4 + 8(\mathcal{H}')^2 + 14\mathcal{H}^2 \mathcal{H}' \right] \left[ 4\mathcal{H}^5 - \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'' + 2\mathcal{H} (\mathcal{H}')^2 - 2\mathcal{H}'\mathcal{H}'' \right], \quad \text{(A3)}
\end{aligned}$$

$$c_1 := -6f_1 a^2 \mathcal{H}^2 + 36f_{11} [4\mathcal{H}^4 - 2\mathcal{H}\mathcal{H}'' + (\mathcal{H}')^2 + \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'] c_2 := 2(2f_2 + 3f_{11})(4\mathcal{H}^2 + 3\mathcal{H}') + \frac{24}{a^2} f_{12} [10\mathcal{H}^4 - 3\mathcal{H}\mathcal{H}'' + 6(\mathcal{H}')^2 + 11\mathcal{H}^2 \mathcal{H}']$$

$$+ \frac{72}{a^2} f_{12} [22\mathcal{H}^6 + 4(\mathcal{H}')^3 + 19\mathcal{H}^4 \mathcal{H}' - 8\mathcal{H}^3 \mathcal{H}'' - 14\mathcal{H}\mathcal{H}'\mathcal{H}'' + \frac{36}{a^2} f_{111} \mathcal{H} (2\mathcal{H}^3 - \mathcal{H}'')] + \frac{216}{a^2} f_{111} \mathcal{H} (\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}') (2\mathcal{H}^3 - \mathcal{H}'')$$

$$+ \frac{288}{a^4} f_{22} [12\mathcal{H}^8 + 2(\mathcal{H}')^4 - 10\mathcal{H}(\mathcal{H}')^2 \mathcal{H}'' - 6\mathcal{H}^3 \mathcal{H}'' - 12\mathcal{H}\mathcal{H}'\mathcal{H}'' + 32\mathcal{H}^2 (\mathcal{H}')^2 \mathcal{H}'']$$

$$+ \frac{864}{a^4} f_{112} \mathcal{H} [5\mathcal{H}^7 + \mathcal{H}(\mathcal{H}')^3 - 8\mathcal{H}^3 \mathcal{H}' - 6\mathcal{H}'\mathcal{H}''] + \frac{864}{a^6} f_{122} \mathcal{H} [16\mathcal{H}^9 + 8\mathcal{H}(\mathcal{H}')^3 - 20\mathcal{H}^2 (\mathcal{H}')^2 \mathcal{H}'' - 8\mathcal{H}^3 \mathcal{H}' - 6\mathcal{H}'\mathcal{H}'']$$

$$+ \frac{3456}{a^8} f_{222} \mathcal{H} [\mathcal{H}^6 + 2(\mathcal{H}')^2 \mathcal{H}'' - 2\mathcal{H}(\mathcal{H}')^2 \mathcal{H}''] + 2\mathcal{H}(\mathcal{H}')^2 - 2\mathcal{H}'\mathcal{H}''],$$

$$c_3 := -4f_1 a^2 \mathcal{H} + 12f_{11} (8\mathcal{H}^3 - \mathcal{H}'') + \dots$$

$$c_4 := 2(2f_2 + 3f_{11})(3\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}') + \frac{8}{a^2} f_{12} [29\mathcal{H}^4 - 8\mathcal{H}\mathcal{H}'' - 5(\mathcal{H}')^2 + 10\mathcal{H}^2 \mathcal{H}']$$

$$+ \frac{48}{a^2} f_{12} [26\mathcal{H}^5 - 8\mathcal{H}^2 \mathcal{H}'' + \mathcal{H}(\mathcal{H}')^2 + 11\mathcal{H}^3 \mathcal{H}'] c_5 := 2(2f_2 + 3f_{11})(3\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}') + \frac{8}{a^2} f_{12} [29\mathcal{H}^4 - 8\mathcal{H}\mathcal{H}'' - 5(\mathcal{H}')^2 + 10\mathcal{H}^2 \mathcal{H}']$$

$$+ \frac{48}{a^4} f_{22} [60\mathcal{H}^7 + 4\mathcal{H}(\mathcal{H}')^3 + 70\mathcal{H}^5 \mathcal{H}' - 19\mathcal{H}^4 \mathcal{H}'' + \frac{36}{a^2} f_{111} \mathcal{H} (2\mathcal{H}^3 - \mathcal{H}'')] + \frac{8}{a^4} f_{22} [69\mathcal{H}^6 - 8(\mathcal{H}')^3 + 71\mathcal{H}^4 \mathcal{H}' - 20\mathcal{H}^3 \mathcal{H}'' - 28\mathcal{H}\mathcal{H}'\mathcal{H}'' + 18\mathcal{H}^2 (\mathcal{H}')^2]$$

$$+ 22\mathcal{H}^3 (\mathcal{H}')^2 - 28\mathcal{H}^2 \mathcal{H}'\mathcal{H}'' - 4(\mathcal{H}')^2 \mathcal{H}''] + \frac{24}{a^4} f_{112} \mathcal{H} [28\mathcal{H}^5 - 11\mathcal{H}^2 \mathcal{H}'' + 6\mathcal{H}(\mathcal{H}')^2 + 20\mathcal{H}^3 \mathcal{H}'] + \frac{24}{a^4} f_{112} \mathcal{H} [28\mathcal{H}^5 - 11\mathcal{H}^2 \mathcal{H}'' + 6\mathcal{H}(\mathcal{H}')^2 + 20\mathcal{H}^3 \mathcal{H}' - 16\mathcal{H}'\mathcal{H}'']$$

$$+ \frac{288}{a^6} f_{122} \mathcal{H}^2 [42\mathcal{H}^7 + 20\mathcal{H}(\mathcal{H}')^3 + 68\mathcal{H}^5 \mathcal{H}' - 13\mathcal{H}^4 \mathcal{H}'' + \frac{48}{a^6} f_{122} \mathcal{H} [42\mathcal{H}^7 + 20\mathcal{H}(\mathcal{H}')^3 + 68\mathcal{H}^5 \mathcal{H}' - 13\mathcal{H}^4 \mathcal{H}''$$

$$- 40\mathcal{H}^2 \mathcal{H}'\mathcal{H}'' - 28(\mathcal{H}')^2 \mathcal{H}''] + 32\mathcal{H}^3 (\mathcal{H}')^2 - 40\mathcal{H}^2 \mathcal{H}'\mathcal{H}'' - 28(\mathcal{H}')^2 \mathcal{H}'']$$

$$+ \frac{576}{a^8} f_{222} \mathcal{H}^2 [5\mathcal{H}^4 + 8(\mathcal{H}')^2 + 14\mathcal{H}^2 \mathcal{H}'] [4\mathcal{H}^5 - \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'' + 2\mathcal{H}(\mathcal{H}')^2 - 2\mathcal{H}'\mathcal{H}''] + \frac{96}{a^8} f_{222} \mathcal{H} [5\mathcal{H}^4 + 8(\mathcal{H}')^2 + 14\mathcal{H}^2 \mathcal{H}'] [4\mathcal{H}^5 - \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'' + 2\mathcal{H}(\mathcal{H}')^2 - 2\mathcal{H}'\mathcal{H}'']$$

係数の中にあるのは…

- ハッブルパラメータ  $\mathcal{H}$

- モデルに依存するパラメータ

$$c_3 := -4f_1 a^2 \mathcal{H} + 12f_{11} (8\mathcal{H}^3 - \mathcal{H}'') + \dots$$

# Generalization: Scalar sector

---

Quadratic action:

$$S = \int d^4x \left[ b_0 (\Phi')^2 + b_1 (\partial^2 \Phi + \mathcal{B}')^2 + b_2 \Phi' \mathcal{B}' + b_3 \Phi \mathcal{B}' \right. \\ \left. + c_1 \Phi^2 + c_2 \Phi \partial^2 \Phi + c_3 \Phi \mathcal{B} + c_4 \mathcal{B}^2 + c_5 \mathcal{B} \partial^2 \Phi \right]$$

Hamiltonian:

$$H = \int d^3x \left[ \frac{3}{4\beta} \left( \pi_{\mathcal{B}} - \frac{1}{3} \frac{\pi_{\Phi}}{\mathcal{H}} - b_3 \Phi - 2b_1 \partial^2 \Phi \right)^2 + \frac{\pi_{\Phi}^2}{24\mathcal{H}^2 \mathcal{I}} - \frac{2\mathcal{I} + \beta}{3} (\partial^2 \Phi)^2 \right. \\ \left. - c_1 \Phi^2 - c_2 \Phi \partial^2 \Phi - c_3 \Phi \mathcal{B} - c_4 \mathcal{B}^2 - c_5 \mathcal{B} \partial^2 \Phi \right].$$

**不安定性のCheck: 正準変換を施す**

# Generalization: Scalar sector

---

$$\tilde{H} = \int d^3x \left\{ \frac{3}{4\beta} \left( \tilde{\pi}_B - \tilde{\Phi} b_3 - 2b_1 \partial^2 \tilde{\Phi} \right)^2 + \frac{\tilde{\pi}_\Phi^2}{24\mathcal{H}^2 \mathcal{I}} \right. \\ \left. - \frac{2\mathcal{I} + \beta}{3} \left[ \partial^2 \left( \tilde{\Phi} - \frac{\tilde{B}}{3\mathcal{H}} \right) \right]^2 + \dots \right\}$$

安定化の条件は . . .

- 運動項:  $\beta > 0$  and  $\mathcal{I} > 0$



**二行目の項が負になる**

( $\rightarrow$  High momentumで不安定)



# Generalization: Scalar sector

---

拘束条件の入れ方:

$$S = \int d^4x [b_0(\Phi')^2 + b_1 (\partial^2\Phi + \mathcal{B}' - \lambda)^2 + b_2\Phi'(\mathcal{B}' - \lambda) + b_3\Phi(\mathcal{B}' - \lambda) + c_1\Phi^2 + c_2\Phi\partial^2\Phi + c_3\Phi\mathcal{B} + c_4\mathcal{B}^2 + c_5\mathcal{B}\partial^2\Phi].$$

つまり、 $\mathcal{B}' \longrightarrow \mathcal{B}' - \lambda$  と導入する。

Reduced Hamiltonian:

$$\tilde{H}_R = \int d^3x \left[ \frac{2\mathcal{I} + \beta}{24\mathcal{H}^2\mathcal{I}\beta} \tilde{\pi}_\Phi^2 + \frac{c_5^2}{4c_4} \left( \partial^2\tilde{\Phi} \right)^2 + d_1\tilde{\Phi}^2 - d_2\tilde{\Phi}\partial^2\tilde{\Phi} \right]$$

# Brief review of above discussions

---

- 高階微分項 → **Ostrogradsky不安定性**

重力理論の場合： $R^2_{\mu\nu}$ ,  $R^2_{\mu\nu\rho\sigma}$ ,  $C^2_{\mu\nu\rho\sigma}$

➡ 適切な**拘束条件**の下で不安定性を取り除ける

一般的なモデル： $f(R, R^2_{\mu\nu}, C^2_{\mu\nu\rho\sigma})$

について、膨張宇宙を記述するBackgroundの上で安定化を行った。

# Cosmological Aspects 1

---


## 重力波のパワースペクトル

 Primordial power spectrum

$$\mathcal{P}_h = \frac{1}{A + s\beta H^2} \frac{2H^2}{\pi^2}, \quad s \simeq \text{const.} = \mathcal{O}(1)$$

Suppression factor

Assumptions: de Sitter limit.

 関数の具体型を決めずにこの結果が得られた

# Cosmological Aspects 2

---

## Effective gravitational coupling

重力と最小結合する物質： $\delta T_0^0 = -\rho\delta$ ,  $\delta T_i^0 = \rho\partial_i\delta q$ ,  $\delta T_j^i = 0$ .

➡  $\delta(\nabla_\mu T_\nu^\mu) = 0$ . から、  $\delta' + \partial^2\delta q = \mathcal{B}$ ,

$$\delta q' + \mathcal{H}\delta q = -\Phi.$$

→ **密度ゆらぎの発展方程式：**

$$\delta'' + \mathcal{H}\delta' = \underline{\partial^2\Phi + \mathcal{B}' + \mathcal{H}\mathcal{B}}.$$

SourceをEinstein eqで決める

# Cosmological Aspects 2

---

$$\delta'' + \mathcal{H}\delta' = \underline{\partial^2\Phi + \mathcal{B}' + \mathcal{H}\mathcal{B}}.$$

**GR case:**  $\mathcal{L} = -3M_{\text{Pl}}^2 a^2 \mathcal{H}^2 \Phi^2 - 2M_{\text{Pl}}^2 a^2 \mathcal{H} \Phi \mathcal{B} + \mathcal{L}_{\text{int}}.$

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -a^4 \rho (\Phi \delta + \mathcal{B} \delta q). \sim \delta g^{\mu\nu} \delta T_{\mu\nu}$$

Einstein eqs.

$$\begin{aligned} 6\mathcal{H}^2\Phi + 2\mathcal{H}\mathcal{B} &= -\frac{a^2\rho}{M_{\text{Pl}}^2}\delta, \\ -2\mathcal{H}\Phi &= \frac{a^2\rho}{M_{\text{Pl}}^2}\delta q, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \delta'' + \mathcal{H}\delta' \simeq \frac{a^2\rho}{2M_{\text{Pl}}^2}\delta.$$

On sub-horizon scales.

# Cosmological Aspects 2

---

$$\delta'' + \mathcal{H}\delta' = \underline{\partial^2\Phi + \mathcal{B}' + \mathcal{H}\mathcal{B}}.$$

On sub-horizon, reduced.

**Constrained case:**  $\mathcal{L} \simeq c_4\mathcal{B}^2 + c_5\mathcal{B}\partial^2\Phi + \mathcal{L}_{\text{int}}.$

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -a^4\rho(\Phi\delta + \mathcal{B}\delta q). \sim \delta g^{\mu\nu}\delta T_{\mu\nu}$$

Einstein eqs.

$$c_5k^2\mathcal{B} + a^4\rho\delta = 0,$$

$$2c_4\mathcal{B} - c_5k^2\Phi - a^4\rho\delta q = 0,$$

➔  $\partial^2\Phi + \mathcal{B}' + \mathcal{H}\mathcal{B} \simeq \frac{a^4\rho}{c_5^2k^2}(2c_4 + c_5' - 2\mathcal{H}c_5)\delta.$

# Cosmological Aspects 2

---

$$\delta'' + \mathcal{H}\delta' = \underline{\partial^2\Phi + \mathcal{B}' + \mathcal{H}\mathcal{B}}.$$

**GR case:**  $\delta'' + \mathcal{H}\delta' \simeq \frac{a^2\rho}{2M_{\text{Pl}}^2}\delta.$

**Constrained case:**

$$\partial^2\Phi + \mathcal{B}' + \mathcal{H}\mathcal{B} \simeq \frac{a^4\rho}{c_5^2 k^2} (2c_4 + c_5' - 2\mathcal{H}c_5)\delta.$$



$$4\pi G_{\text{eff}} = \frac{a^2(2c_4 + c_5' - 2\mathcal{H}c_5)}{c_5^2 k^2}.$$

$$G_{\text{eff}} \sim M_{\text{Pl}}^{-2} (a^2 H_0^2 / k^2) \ll M_{\text{Pl}}^{-2}$$

物質の密度ゆらぎが、少スケールで成長しない。

# Summary

---

- ・ 高階微分項 → **Ostrogradsky不安定性**

重力理論の場合： $R^2_{\mu\nu}$ ,  $R^2_{\mu\nu\rho\sigma}$ ,  $C^2_{\mu\nu\rho\sigma}$

➡ 適切な**拘束条件**の下で不安定性を取り除ける

一般的なモデル： $f(R, R^2_{\mu\nu}, C^2_{\mu\nu\rho\sigma})$

について、膨張宇宙を記述するBackgroundの上で安定化を行った。

宇宙論的応用：重力波のパワースペクトル

Effective gravitational coupling