Removing Ostrogradsky’s ghost from general higher derivative gravity and its cosmological applications.

立教大学 M2 秋田悠児

第４回観測的宇宙論ワークショップ@YITP

共同研究者：小林努

Overview

- Introduction
  - 高階微分理論
  - Ostrogradsky不安定性

- 重力理論におけるOstrogradsky不安定性

- 理論の安定化：拘束条件の導入

- 宇宙論への応用

Y.Akita and T. Kobayashi
[arXiv:**1507.00812**[gr-qc]]

Introduction

運動方程式：時間について２階微分方程式

- 古典力学　…　Newtonの運動方程式
- 一般相対論　…　Einstein方程式
- Horndeski理論 (とその拡張)

“高階”の微分を考えたら何が起こるか？？

Introduction – Higher derivative theory

Ostrogradsky不安定性の出現

自由度が縮退していない理論は不安定である。

単純な例：

$$S = \int \mathrm{d}t \left[\frac{1}{2}\ddot{q}^2 - V(q) \right] \quad \Rightarrow \quad H = P_1 Q_2 + \frac{P_1^2}{2} + V(Q_1)$$

正準変数： $Q_1 := q$

$Q_2 := \dot{q}$

Hamiltonianに下限が無い

Introduction – Higher derivative theory

Ostrogradsky不安定性の出現

自由度が縮退していない理論は不安定である。

単純な例：

$$S = \int \mathrm{d}t \left[\frac{1}{2}\ddot{q}^2 - V(q) \right]$$

$$H = P_1 Q_2 + \frac{P_1^2}{2} + V(Q_1)$$

正準変数： $Q_1 := q$

$Q_2 := \dot{q}$

Hamiltonianに下限が無い

量子重力　→　高階微分重力理論を示唆

Gravity with instability

GR：　**低**エネルギー領域において有効な理論

Quantum Gravity：　**高**エネルギーで有効

→ Suggestion:　高次の曲率項を追加

よく知られている例：$\mathcal{L} = R + \alpha R^2$　(Starobinskyモデル)

【Planckの観測結果をよく説明する】

他の曲率項を加えると?　$R_{\mu\nu}^2,\ R_{\mu\nu\rho\sigma}^2,\ C_{\mu\nu\rho\sigma}^2$

→ Ostrogradsky不安定性に直面

Gravity with instability

不安定性の出現　(Minkowski時空まわりの摂動)

$$S=\frac{M_{\rm Pl}^2}{2}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left(R-2\Lambda+\alpha R^2+\beta R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}\right)$$

metric: $\mathrm{d}s^2=-\mathrm{d}t^2+(\delta_{ij}+h_{ij}+\frac{1}{2}h_{ik}h_{kj})\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$

$$S=\frac{M_{\rm Pl}^2}{8}\int \mathrm{d}\eta\mathrm{d}^3x\left\{(h'_{ij})^2+h^{ij}\partial^2h_{ij}+\beta\left[(h''_{ij})^2+2h'_{ij}\partial^2h'_{ij}+(\partial^2h_{ij})^2\right]\right\}$$

Hamiltonian:

$$H=\frac{M_{\rm Pl}^2}{2}\int \mathrm{d}^3x\left[\frac{1}{4\beta}p^{ij}p_{ij}+\pi^{ij}q_{ij}-2\beta q_{ij}\partial^2q_{ij}\right.$$
$$\left.-q_{ij}q^{ij}-\beta\partial^2h_{ij}\partial^2h^{ij}-h_{ij}\partial^2h_{ij}\right]\ .$$

【線型項→不安定】

Stabilization- add constraint

実は安定化が可能である! [Chen et. al. 2013]

適切な拘束条件を課す

Lagrangian:

$$\mathcal{L} \supset (h''_{ij})^2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L} \supset (h''_{ij} - \lambda_{ij})^2, \ \lambda_{ij}\partial^2 h_{ij}$$

時間の高階微分 ⟷ 空間微分

【extra d.o.f (ghost)】 【Good for renormalizability】

Hamiltonian:

$$H \supset \pi_{ij} q_{ij} \quad \Rightarrow$$ **Positive!** due to $\pi_{ij} \propto q_{ij}$

Stabilization- add constraint

実は安定化が可能である! [Chen et. al. 2013]

Reduced Hamiltonian

$$\mathcal{H}_R = \frac{1}{4}\pi^{ij}(1-2\beta\partial^2)\pi_{ij} + h^{ij}(-\partial^2 + 3\beta\partial^2\partial^2)h_{ij}$$

【All terms are Quadratic】

Hamiltonian:

$H \supset \pi_{ij} q_{ij}$ → **Positive!** due to $\pi_{ij} \propto q_{ij}$

A brief summary

高階微分項 ➡ 不安定性

ex) 重力理論： $R^2_{\mu\nu},\ R^2_{\mu\nu\rho\sigma},\ C^2_{\mu\nu\rho\sigma}$

拘束条件を課して、不安定なモードを取り除ける

$$S = \frac{M_{\rm Pl}^2}{2}\int {\rm d}^4x\sqrt{-g}\left(R - 2\Lambda + \alpha R^2 + \beta R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}\right)$$

(背景時空はMinkowski)

➡
・膨張宇宙へ適用できるか？
・できるだけ広く応用できる設定

Generalization:

できました。 Y.Akita and T. Kobayashi, [arXiv:1507.00812[gr-qc]]

Backgroundはフリードマン時空

$$\mathrm{d}s^2 = a^2(\eta)\left[-\mathrm{d}\eta^2 + \left(\delta_{ij} + h_{ij} + \frac{1}{2}h_{ik}h_{kj}\right)\right]\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$$

モデルはできるだけ一般化

$$S = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\; f\left(R, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}, C_{\mu\nu\rho\sigma}C^{\mu\nu\rho\sigma}\right)$$

fは**任意関数**

- 非自明な組み合わせを含む拡張
- **応用：ダークエネルギーの代替等**

Generalization: Check the instability

出発点： $S = \int d^4x\sqrt{-g}\; f(R, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}, C_{\mu\nu\rho\sigma}C^{\mu\nu\rho\sigma})$

$$r_1 := R, \quad r_2 := R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}, \quad r_3 := C_{\mu\nu\rho\sigma}C^{\mu\nu\rho\sigma}$$

Quadratic action:

$$S = \int d^4x \left\{ \frac{a^2}{8}\left(Ah_{ij}^{\prime 2} + Ch_{ij}\partial^2 h_{ij}\right) + \frac{\beta}{8}\left[h_{ij}^{\prime\prime 2} + 2h'_{ij}\partial^2 h'_{ij} + \left(\partial^2 h_{ij}\right)^2\right]\right\}$$

係数の定義： $f_i := \partial f / \partial r_i$

$$\beta := 2f_2 + 4f_3,$$

$$A := 2f_1 + \frac{8f_2}{a^2}\left(\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}'\right) - 4f_2'\frac{\mathcal{H}}{a^2},$$

$$C := 2f_1 + \frac{8f_2}{a^2}\left(\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}'\right) + \frac{4f_2'}{a^2}\mathcal{H} - \frac{2}{a^2}\left(f_2'' - 2f_3''\right)$$

時間依存性をもつ

Generalization: Check the instability

出発点： $S = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\ f(R, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}, C_{\mu\nu\rho\sigma}C^{\mu\nu\rho\sigma})$

$$r_1 := R, \quad r_2 := R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}, \quad r_3 := C_{\mu\nu\rho\sigma}C^{\mu\nu\rho\sigma}$$

Quadratic action:

$$S = \int \mathrm{d}^4x \left\{ \frac{a^2}{8}\left(Ah'^2_{ij} + Ch_{ij}\partial^2 h_{ij}\right) + \frac{\beta}{8}\left[h''^2_{ij} + 2h'_{ij}\partial^2 h'_{ij} + \left(\partial^2 h_{ij}\right)^2\right]\right\}$$

Hamiltonian:

$$H = \int \mathrm{d}^3x \Big\{ \pi^{ij} q_{ij} + \frac{2}{\beta}p^2_{ij} - \frac{1}{8}h_{ij}\left(a^2 C\partial^2 + \beta\partial^2\partial^2\right)h_{ij} - \frac{1}{8}q_{ij}\left(a^2 A + 2\beta\partial^2\right)q_{ij}\Big\}$$

Generalization: Add constraints

$$S=\int \mathrm{d}^4x\left\{\frac{a^2}{8}\left(Ah'^2_{ij}+Ch_{ij}\partial^2 h_{ij}\right)+\frac{\beta}{8}\left[h''^2_{ij}+2h'_{ij}\partial^2 h'_{ij}+\left(\partial^2 h_{ij}\right)^2\right]\right\}$$

拘束条件は同じ形でOK

$$\mathcal{L}\supset (h''_{ij})^2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\supset (h''_{ij}-\lambda_{ij})^2,\ \lambda_{ij}\partial^2 h_{ij}$$

時間の高階微分 ⟷ 空間微分

【extra d.o.f (ghost)】 【Good for renormalizability】

Constructing Hamiltonian:

$$h_{ij}:=h_{ij}\longleftrightarrow \pi^{ij}:=\partial\mathcal{L}/\partial h'_{ij}$$

$$q_{ij}:=h'_{ij}\longleftrightarrow p^{ij}:=\partial\mathcal{L}/\partial h''_{ij}$$

$$\lambda_{ij}:=\lambda_{ij}\longleftrightarrow \pi^{ij}_{\lambda}=0$$

Generalization: Add constraints

Hamiltonian with constraint

$$H = \int \mathrm{d}^3x \left[\pi^{ij} q_{ij} + \frac{2}{\beta} p_{ij}^2 + \lambda_{ij} \left(p_{ij} - \frac{\beta}{2} \partial^2 h_{ij} \right) \right.$$
$$\left. - \frac{1}{8} h_{ij} \left(a^2 C \partial^2 + \beta \partial^2 \partial^2 \right) h_{ij} - \frac{1}{8} q_{ij} \left(a^2 A + 2\beta \partial^2 \right) q_{ij} \right]$$

Primary constraint $\phi_1 : \ \pi_\lambda^{ij} = 0$

Secondary constraints ··· **primary constraint の整合性から。**

$$\phi_2 : \ \dot{\phi}_1 = 0 \Leftrightarrow \{\phi_1, H\}_{\mathrm{PB}} = 0$$ 等々

複数の拘束条件が得られる。 i,g, $\pi_{ij} \propto q_{ij}$

Generalization: Reduced Hamiltonian

Results of Stabilization

得られた拘束条件を全て使うと、、、

Reduced Hamiltonian - tensor perturbation

$$H_R = \int \mathrm{d}^3x \left\{ \frac{2}{a^4A^2}\pi_{ij}\left(a^2A - 2\beta\partial^2\right)\pi_{ij} + \frac{1}{8}h_{ij}\left(-a^2C\partial^2 + 3\beta\partial^2\partial^2\right)h_{ij} \right\}$$

$A,\ C,\ \beta > 0$ で安定

Generalization: Reduced Hamiltonian

Results of Stabilization

Phase space dimensionality:

Original: 8 d.o.f $\cdots h_{ij}, q_{ij}$ and their conjugate

add λ_{ij} and conjugate $\rightarrow$ +4 d.o.f ▶12 d.o.f

+8 second class constraint

➡ 4 d.o.f : same with GR 【ghosts are removed】

Generalization: Vector sector

$$\mathrm{d}s^2 = a^2\left[-\left(1 - B_i B^i\right)\mathrm{d}\eta^2 + 2B_i \mathrm{d}x^i \mathrm{d}\eta + \delta_{ij}\mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j\right]$$

ベクトルモードは２階微分方程式に従う:

$$S = \int \mathrm{d}^4x \left[\frac{\beta}{4}\left(\hat{v}_{ij}'^2 + \hat{v}_{ij}\partial^2\hat{v}_{ij}\right) + \frac{a^2 A}{4}\hat{v}_{ij}^2\right]$$ with $\hat{v}_{ij} := \partial_i B_j$

$\boxed{\text{Stable for } \beta > 0 \text{ and } A < 0}$

【テンソル摂動の安定条件と両立不可能】

→ **ベクトルモードは理論から取り除く**

Generalization: Vector sector

拘束条件の導入

$$S=\int \mathrm{d}^4x\left\{\frac{\beta}{4}\left[\left(\hat{v}'_{ij}-\hat{\lambda}_{ij}\right)^2+\hat{v}_{ij}\partial^2\hat{v}_{ij}\right]+\frac{a^2A}{4}\hat{v}_{ij}^2\right\}$$

$$\Rightarrow\quad H=\int \mathrm{d}^3x\left(\frac{\hat{\pi}_{ij}^2}{\beta}+\hat{\pi}_{ij}\hat{\lambda}_{ij}-\frac{\beta}{4}\hat{v}_{ij}\partial^2\hat{v}_{ij}-\frac{a^2A}{4}\hat{v}_{ij}^2\right)$$

primary constraint, Secondary constraints,……

$\Rightarrow$ **reduced Hamiltonian Vanishes!**

Generalization: Scalar sector

スカラー摂動に関しても、同様に安定化が可能。
(表式は複雑)

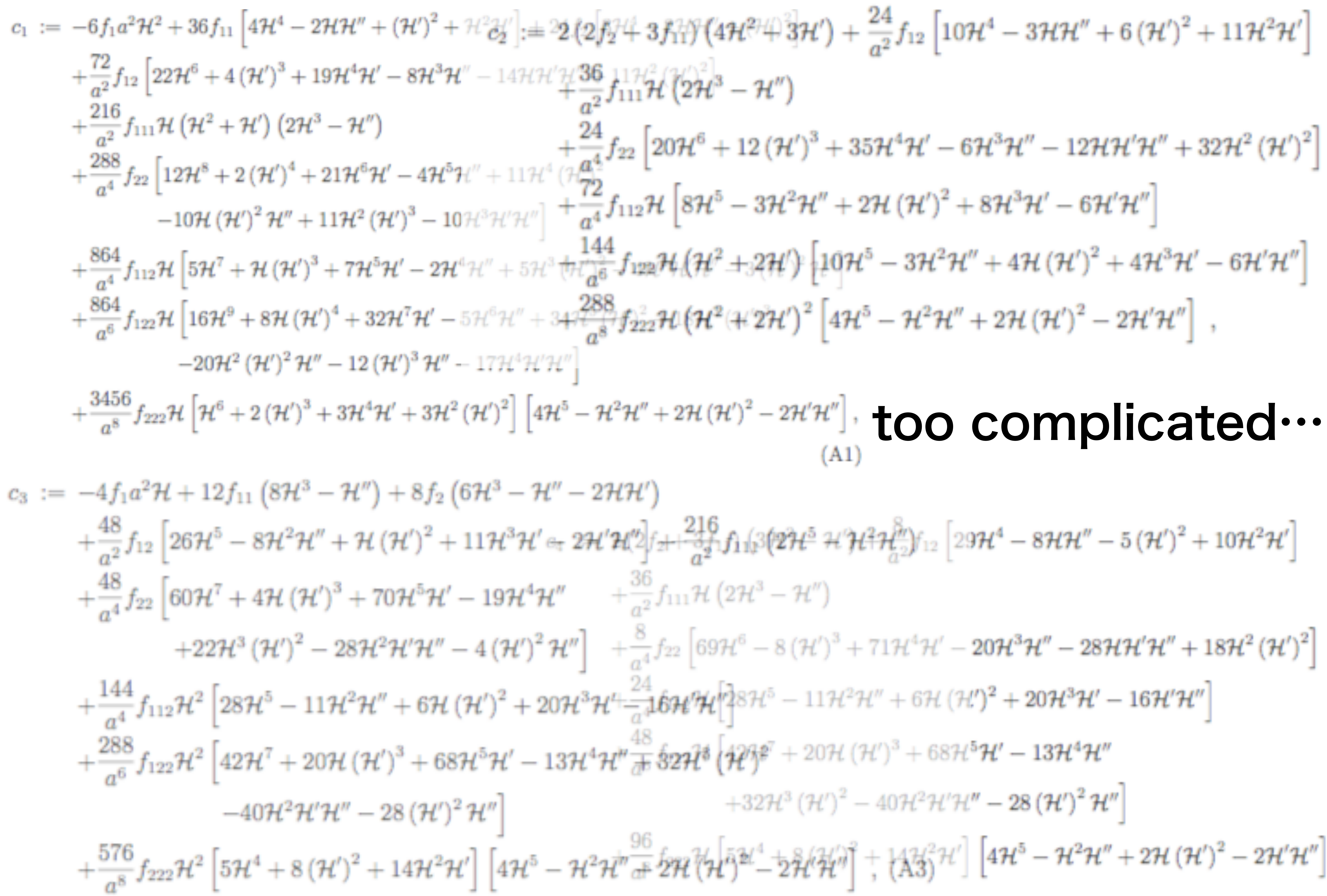
Flat gauge metric:

$$\mathrm{d}s^2 = a^2\left[-(1+2\Phi)\mathrm{d}\eta^2 + 2\partial_i B \mathrm{d}\eta \mathrm{d}x^i + \delta_{ij}\mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j\right]$$

Quadratic action:

$$S = \int \mathrm{d}^4x \Big[b_0 (\Phi')^2 + b_1 \left(\partial^2\Phi + \mathcal{B}'\right)^2 + b_2 \Phi' \mathcal{B}' + b_3 \Phi \mathcal{B}' + c_1 \Phi^2 + c_2 \Phi \partial^2 \Phi + c_3 \Phi \mathcal{B} + c_4 \mathcal{B}^2 + c_5 \mathcal{B} \partial^2 \Phi \Big]$$

$$\mathcal{B} := \partial_i^2 B$$


too complicated…

係数の中にあるのは…

- ハッブルパラメータ　H
- モデルに依存するパラメータ

$$c_3 := -4f_1 a^2\mathcal{H} + 12 f_{11}(8\mathcal{H}^3 - \mathcal{H}'') + \cdots$$

Generalization: Scalar sector

Quadratic action:

$$S = \int d^4x \Big[b_0 (\Phi')^2 + b_1 \left(\partial^2\Phi + \mathcal{B}'\right)^2 + b_2 \Phi' \mathcal{B}' + b_3 \Phi \mathcal{B}'$$
$$+ c_1 \Phi^2 + c_2 \Phi \partial^2 \Phi + c_3 \Phi \mathcal{B} + c_4 \mathcal{B}^2 + c_5 \mathcal{B} \partial^2 \Phi\Big]$$

Hamiltonian:

$$H = \int d^3x \left[\frac{3}{4\beta}\left(\pi_{\mathcal{B}} - \frac{1}{3}\frac{\pi_\Phi}{\mathcal{H}} - b_3\Phi - 2b_1\partial^2\Phi\right)^2 + \frac{\pi_\Phi^2}{24\mathcal{H}^2\mathcal{I}} - \frac{2\mathcal{I}+\beta}{3}(\partial^2\Phi)^2\right.$$
$$\left. - c_1\Phi^2 - c_2\Phi\partial^2\Phi - c_3\Phi\mathcal{B} - c_4\mathcal{B}^2 - c_5\mathcal{B}\partial^2\Phi\right].$$

不安定性のCheck:　正準変換を施す

Generalization: Scalar sector

$$\widetilde{H} = \int \mathrm{d}^3x \left\{ \underline{\frac{3}{4\beta}\left(\widetilde{\pi}_{\mathcal{B}} - \widetilde{\Phi} b_3 - 2b_1 \partial^2 \widetilde{\Phi}\right)^2 + \frac{\widetilde{\pi}_{\Phi}^2}{24\mathcal{H}^2 \mathcal{I}}} \right.$$

$$\left. - \frac{2\mathcal{I} + \beta}{3}\left[\partial^2 \left(\widetilde{\Phi} - \frac{\widetilde{\mathcal{B}}}{3\mathcal{H}}\right)\right]^2 + \cdots \right\}$$

安定化の条件は・・・

- 運動項: $\beta > 0 \text{ and } \mathcal{I} > 0$

二行目の項が負になる

(→　High momentumで不安定)

Generalization: Scalar sector

拘束条件の入れ方:

$$S = \int \mathrm{d}^4x \left[b_0(\Phi')^2 + b_1\left(\partial^2\Phi + \mathcal{B}' - \lambda\right)^2 + b_2\Phi'(\mathcal{B}' - \lambda) + b_3\Phi(\mathcal{B}' - \lambda)\right.$$
$$\left. + c_1\Phi^2 + c_2\Phi\partial^2\Phi + c_3\Phi\mathcal{B} + c_4\mathcal{B}^2 + c_5\mathcal{B}\partial^2\Phi\right].$$

つまり、$\mathcal{B}' \longrightarrow \mathcal{B}' - \lambda$ と導入する。

Reduced Hamiltonian:

$$\widetilde{H}_R = \int \mathrm{d}^3x \left[\frac{2\mathcal{I} + \beta}{24\mathcal{H}^2\mathcal{I}\beta}\widetilde{\pi}_\Phi^2 + \frac{c_5^2}{4c_4}\left(\partial^2\widetilde{\Phi}\right)^2 + d_1\widetilde{\Phi}^2 - d_2\widetilde{\Phi}\partial^2\widetilde{\Phi}\right]$$

Brief review of above discussions

・高階微分項 $\rightarrow$ **Ostrogradsky不安定性**

重力理論の場合：$R_{\mu\nu}^2,\ R_{\mu\nu\rho\sigma}^2,\ C_{\mu\nu\rho\sigma}^2$

⇒ 適切な**拘束条件**の下で不安定性を**取り除ける**

一般的なモデル： $f(R, R_{\mu\nu}^2, C_{\mu\nu\rho\sigma}^2)$
について、膨張宇宙を記述するBackgroundの上で安定化を行った。

Cosmological Aspects 1

重力波のパワースペクトル

Primordial power spectrum

Suppression factor

$$\mathcal{P}_h = \boxed{\frac{1}{A + s\beta H^2}} \frac{2H^2}{\pi^2} \quad , \; s \simeq \text{const.} = \mathcal{O}(1)$$

Assumptions: de Sitter limit.

関数の具体型を決めずにこの結果が得られた

Cosmological Aspects 2

Effective gravitational coupling

重力と最小結合する物質：$\delta T^0_0 = -\rho\delta, \quad \delta T^0_i = \rho\partial_i\delta q, \quad \delta T^i_j = 0.$

$\delta(\nabla_\mu T^\mu_\nu) = 0.$ から、
$$\delta' + \partial^2\delta q = \mathcal{B},$$
$$\delta q' + \mathcal{H}\delta q = -\Phi.$$

→ **密度ゆらぎの発展方程式：**

$$\delta'' + \mathcal{H}\delta' = \underline{\partial^2\Phi + \mathcal{B}' + \mathcal{H}\mathcal{B}}.$$

SourceをEinstein eqで決める

Cosmological Aspects 2

$$\delta'' + \mathcal{H}\delta' = \underline{\partial^2\Phi + \mathcal{B}' + \mathcal{H}\mathcal{B}}.$$

GR case: $\mathcal{L} = -3M_{\rm Pl}^2 a^2\mathcal{H}^2\Phi^2 - 2M_{\rm Pl}^2 a^2\mathcal{H}\Phi\mathcal{B} + \mathcal{L}_{\rm int}.$

$$\mathcal{L}_{\rm int} = -a^4\rho(\Phi\delta + \mathcal{B}\delta q). \quad \sim \delta g^{\mu\nu}\delta T_{\mu\nu}$$

Einstein eqs.

$$6\mathcal{H}^2\Phi + 2\mathcal{H}\mathcal{B} = -\frac{a^2\rho}{M_{\rm Pl}^2}\delta,$$

$$-2\mathcal{H}\Phi = \frac{a^2\rho}{M_{\rm Pl}^2}\delta q,$$

$$\Rightarrow \quad \delta'' + \mathcal{H}\delta' \simeq \frac{a^2\rho}{2M_{\rm Pl}^2}\delta.$$

On sub-horizon scales.

Cosmological Aspects 2

$$\delta'' + \mathcal{H}\delta' = \underline{\partial^2\Phi + \mathcal{B}' + \mathcal{H}\mathcal{B}}.$$

On sub-horizon, reduced.

Constrained case:

$$\mathcal{L} \simeq c_4\mathcal{B}^2 + c_5\mathcal{B}\partial^2\Phi + \mathcal{L}_{\rm int}.$$

$$\mathcal{L}_{\rm int} = -a^4\rho(\Phi\delta + \mathcal{B}\delta q). \sim \delta g^{\mu\nu}\delta T_{\mu\nu}$$

Einstein eqs.

$$c_5k^2\mathcal{B} + a^4\rho\delta = 0,$$

$$2c_4\mathcal{B} - c_5k^2\Phi - a^4\rho\delta q = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \partial^2\Phi + \mathcal{B}' + \mathcal{H}\mathcal{B} \simeq \frac{a^4\rho}{c_5^2k^2}(2c_4 + c_5' - 2\mathcal{H}c_5)\delta.$$

Cosmological Aspects 2

$$\delta'' + \mathcal{H}\delta' = \underline{\partial^2\Phi + \mathcal{B}' + \mathcal{H}\mathcal{B}}.$$

GR case: $$\delta'' + \mathcal{H}\delta' \simeq \frac{a^2\rho}{2M_{\rm Pl}^2}\delta.$$

Constrained case:

$$\partial^2\Phi + \mathcal{B}' + \mathcal{H}\mathcal{B} \simeq \frac{a^4\rho}{c_5^2k^2}(2c_4 + c_5' - 2\mathcal{H}c_5)\delta.$$

$$\Rightarrow \quad 4\pi G_{\rm eff} = \frac{a^2(2c_4 + c_5' - 2\mathcal{H}c_5)}{c_5^2k^2}.$$

$$G_{\rm eff} \sim M_{\rm Pl}^{-2}(a^2H_0^2/k^2) \ll M_{\rm Pl}^{-2}$$

物質の密度ゆらぎが、少スケールで成長しない。

Summary

・高階微分項 → **Ostrogradsky不安定性**

重力理論の場合：$R_{\mu\nu}^2,\ R_{\mu\nu\rho\sigma}^2,\ C_{\mu\nu\rho\sigma}^2$

適切な**拘束条件**の下で不安定性を**取り除ける**

一般的なモデル： $f(R, R_{\mu\nu}^2, C_{\mu\nu\rho\sigma}^2)$
について、膨張宇宙を記述するBackgroundの上で安定化を行った。

宇宙論的応用： 重力波のパワースペクトル
Effective gravitational coupling