

# 格子QCD: QCDのダイナミクスから素粒子現象論まで

---

@素粒子物理学の進展2012

高エネルギー加速器研究機構 橋本省二  
平成24年7月18日



# 格子ゲージ理論

- 格子ゲージ理論の始まり: K.G. Wilson (1974)
  - ゲージ理論を格子上に定義して強結合での計算を可能にする。
  - 繰り込み群: 無限自由度の場の量子論の意味が明確になった。
- 数値シミュレーション。M. Creutz (1980)
  - 最初の数値シミュレーション。強結合展開で見つかったクォークの閉じ込めは、弱結合(連続極限の近く)でも正しそう。

それから30年以上。その間、計算機の性能は100万倍になった。それなのに格子QCDはまだまだ続いている。

何でそんなに時間がかかるのか？  
何ができそうなのか？

を考えてみたい。

# もくじ

## 1. 格子ゲージ理論の基礎

- 基本的考え方のおさらい。
- 数値シミュレーションは実際には何をやるか。何に時間がかかるか。
- 最初の物理: ハドロンスペクトル、標準模型のパラメタ。

## 2. 低エネルギーQCDのダイナミクス

- カイラル対称性の破れはどこまで理解されたか。

## 3. 素粒子現象論

- フレーバー物理: 格子QCDは役に立つツールになったか。
- $K \rightarrow \pi\pi$ :  $|\Delta I|=1/2$  と CP の破れは理解できたか。
- でも実はちょっと...

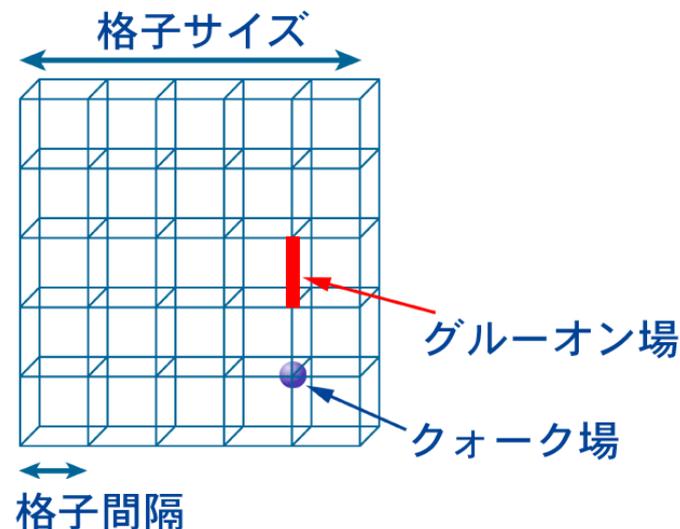
## 4. まとめ

# 格子ゲージ理論

- 4次元立方格子
  - 場の変数は格子点上のみに定義する。
  - 格子間隔をゼロにする極限(連続極限)に行けば、望みの理論になる。
    - 場の理論というのは、そもそもそういうもの。発散するので規格化しておかないと定義できない。あとで紫外切断を無限大にする。

## 摂動計算に依存しない定義

- 普通の次元正則化は摂動計算することを前提とした定義。格子は非摂動領域も含めて使える完全な“定義”



単に計算の便宜上持ち出したものではなく、場の理論の正しい定式化。

# 格子ゲージ理論

- 鍵はゲージ対称性
  - 空間の任意の点で別々のSU(3)回転を考える。
  - ラグランジアンが不変になるようにつじつま合わせの場を導入(ゲージ場)。

$$\bar{\psi}(x) \quad \psi(x + \hat{\mu})$$

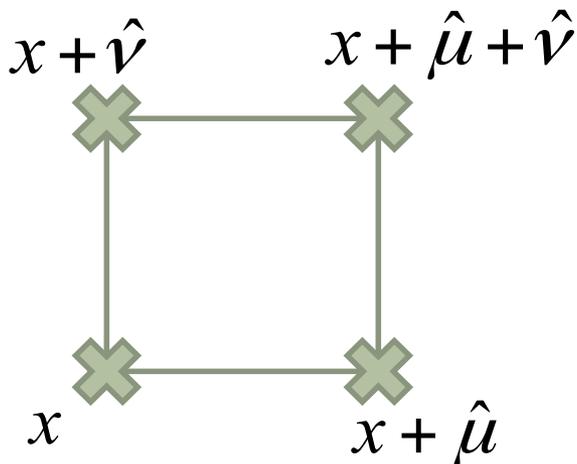
$$\bar{\psi}(x)V^\dagger(x) \quad V(x)U_\mu(x)V^\dagger(x + \hat{\mu}) \quad V(x + \hat{\mu})\psi(x + \hat{\mu})$$

$$U_\mu(x) = \exp [igaA_\mu(x)] = 1 + igaA_\mu(x) + \dots$$

$$A_\mu(x) \rightarrow V(x) \left[ A_\mu(x) + \frac{i}{g} \partial_\mu \right] V^\dagger(x)$$

# ゲージ対称性

- ゲージリンク  $U_\mu(x)$ 
  - ユニタリ行列 SU(3)
  - つなげておくとゲージ不変になる。



$$\begin{aligned}
 & \text{Tr} \left[ U_\mu(x) U_\nu(x + \hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x + \hat{\nu}) U_\nu^\dagger(x) \right] \\
 & \approx \text{Tr} \left[ e^{igaA_\mu} e^{iga(A_\nu + a\partial_\mu A_\nu)} e^{-iga(A_\mu + a\partial_\nu A_\mu)} e^{-igaA_\nu} \right] \\
 & \approx \text{Tr} \left[ e^{iga^2(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) - g^2 a^2 [A_\mu, A_\nu]} \right] = \text{Tr} \left[ e^{iga^2 F_{\mu\nu}} \right] \\
 & = \text{Tr} [1] - \frac{1}{2} g^2 a^4 \text{Tr} [F_{\mu\nu}^2] + \dots
 \end{aligned}$$

↑  
ゲージ理論のラグランジアン

# ゲージ作用

- 連続極限 $a \rightarrow 0$ では通常のものに戻る。

$$\begin{aligned} S &= \frac{6}{g^2} \sum_x \sum_{\mu < \nu} \left[ 1 - \frac{1}{3} \text{Re Tr} \left[ U_\mu(x) U_\nu(x + \hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x + \hat{\nu}) U_\nu^\dagger(x) \right] \right] \\ &\rightarrow a^4 \sum_x \sum_{\mu < \nu} \text{Re Tr} \left[ F_{\mu\nu}^2 \right] \\ &= \int d^4x \frac{1}{4} \left( F_{\mu\nu}^a \right)^2 \end{aligned}$$

- 唯一ではない。より速く連続極限に近づくもの考えてもよい。
- 結合定数:  $\beta \equiv 6/g^2$ 
  - 統計モデルでは  $1/kT$  に相当。 $\beta=0$ は高温極限。

# 経路積分

作用(ラグランジアン)が決まったら、あとは経路積分。

- A を U でおきかえ。

$$\begin{aligned} Z &= \int [dU_\mu][d\psi][d\bar{\psi}] e^{-S_g - \sum_f \int d^4x \bar{\psi}_f (D[U] + m_f) \psi_f} \\ &= \int [dU_\mu] \prod_f \det(D[U] + m_f) e^{-S_g} \end{aligned}$$

- $U = \exp(iagA) \sim 1 + iagA + \dots$ 
  - $a \sim 0$  か  $g \sim 0$  では連続理論に戻る。
- フェルミオン部分はグラスマン積分。積分すると行列式を与える。

多重積分を数値的に(モンテカルロ法で)評価する。  
= もっとも重要そうなゲージ配位だけを取り出して代表させる。

# 問題はフェルミオン

- 理論定式化としても面倒
  - カイラル対称性、ダブリング、...: あとで少し。
- 計算上もとても大変。
  - 大規模行列の行列式。全固有値を求めるのと同様 ( $\sim N^3$ )。

$$\det(D[U] + m) = \prod_k (m + i\lambda_k[U])$$

- まともにやると、
  1. 背景ゲージ場  $U$  の上でディラック演算子の固有値を求める。
  2. 固有値の積によって経路積分での重みが決まる。
  3. モンテカルロ法の原理にしたがって背景ゲージ場を少し変えてみる。
  4. また固有値を計算。この繰り返し。いくらなんでもちょっと無理。

# クォークを含むシミュレーション

- 固有値計算はあまりに大変。補助場を使って書き換える。

$$\begin{aligned} Z &= \int [dU] \det(D[U] + m)^2 e^{-S_g} \\ &= \int [dU][d\phi] e^{-S_g - \phi^\dagger (D[U] + m)^{-2} \phi} = \int [dU][d\phi] e^{-S_g - |(D[U] + m)^{-1} \phi|^2} \end{aligned}$$

- 固有値問題を逆行列の問題に帰着。これでも大変だけどだいぶまし。
  - 有効作用をあまり変えないようにゲージ場を更新。ランダムにやっていると無理。発展方程式と組み合わせる (Hybrid Monte Carlo)。
- 基本は逆行列の計算。行列の大きさは
    - 一辺が  $V \times 3$  (color)  $\times 4$  (spin) = 400M (64<sup>3</sup> $\times$ 128 格子のとき)。
    - 複素行列。最近接相互作用の場合は疎行列になる。

# どれくらいの計算量か？

- 浮動小数点演算数でオーダーを数えてみる。
  - ディラック演算子の計算1回: 1300 / 格子点
  - 逆行列の計算1回: 3,000回反復  $\times 2$  ( $D^+D$ )
  - ゲージ場を1回アップデートするのに逆行列を 20 回計算。
  - ゲージ場のアップデートは典型的には 5,000回。
  - 780 G / 格子点。格子点数 400M ( $64^3 \times 128$  格子のとき)。
  - $300 \times 10^{18}$ .
- 現状の典型的な計算機
  - Core i7: 8 FLOPS/Clock  $\times 3.3\text{GHz} \times 6$ コア = 160 GFlops
  - GPGPU: 2 FLOPS/Clock  $\times 1.5\text{GHz} \times 512$ コア = 1.5 TFlops

上記の計算は理想的には、1 TFlops で10年。実際には効率は10%程度 (たぶんもっと低い)なので100年。

# どれくらいの計算量か？

- 逆に言うと、 $64^3 \times 128$  格子の計算は、
  - 100 TFlops の計算機があれば1年。
  - 1 PFlops では1ヶ月。

でできる。

- まあ実際には複数のパラメタを取ったり、シミュレーション以外の物理量計算もやるのでさらに数倍。

そういうわけで、スーパーコンピュータ。

# スーパーコンピュータ

## ・「京」

- ・ 10ペタフロップス --- 世界最速(だった)スパコン
- ・ 理化学研究所・計算科学研究機構  
(神戸ポートアイランド)



# KEK のスパコン

- 今春から本格稼働
  - ~ 1ペタフロップス(でもこっちは素粒子・原子核専用)

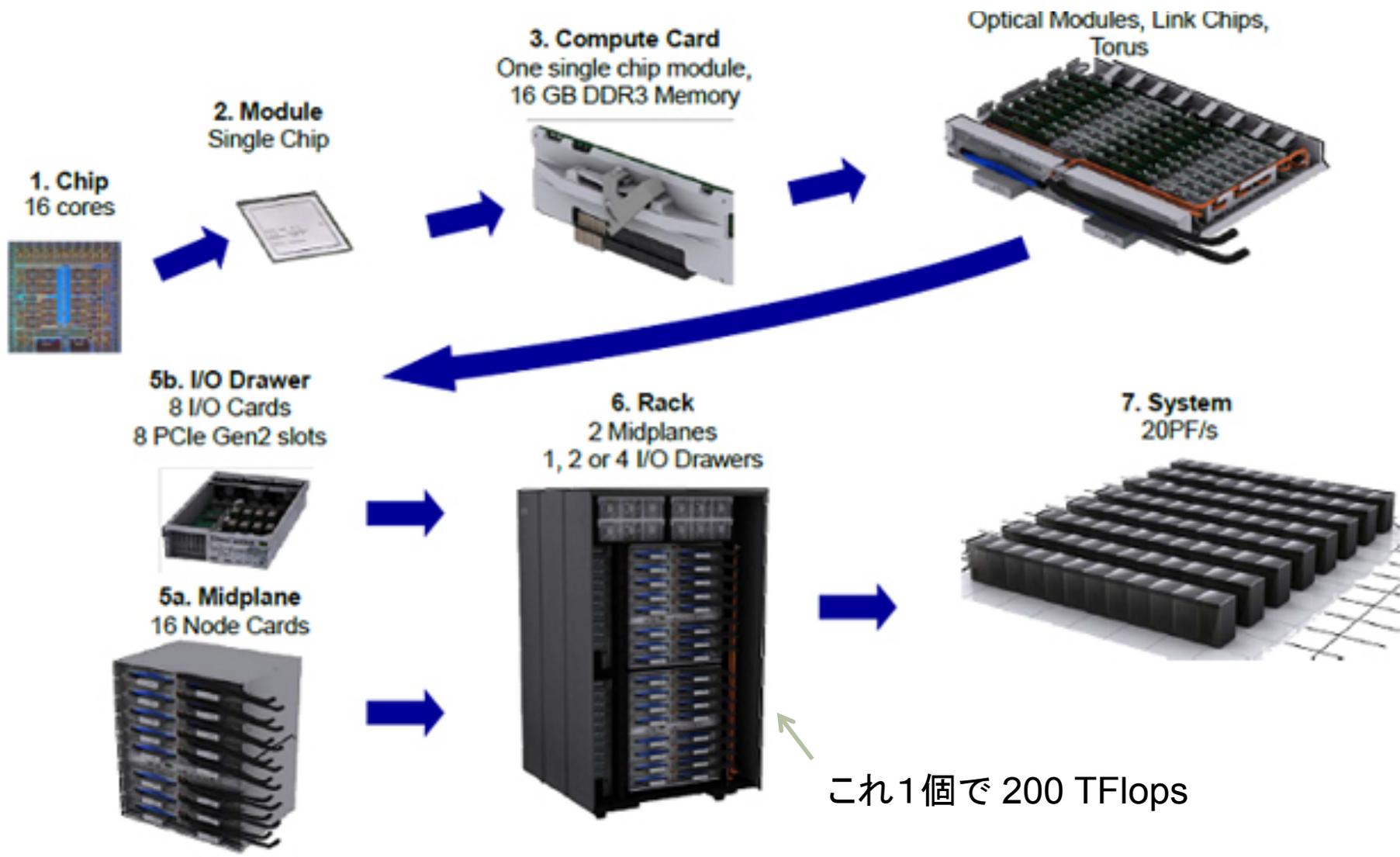
日立 SR16000 M1



IBM Blue Gene/Q

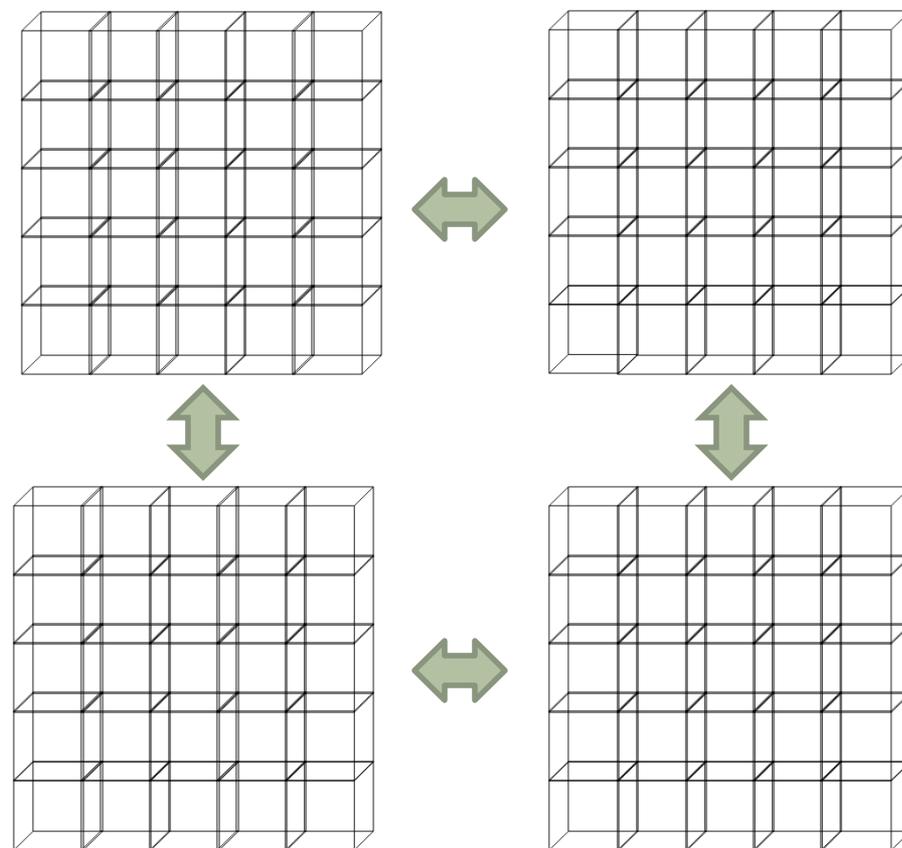


# Blue Gene/Q



# 並列計算

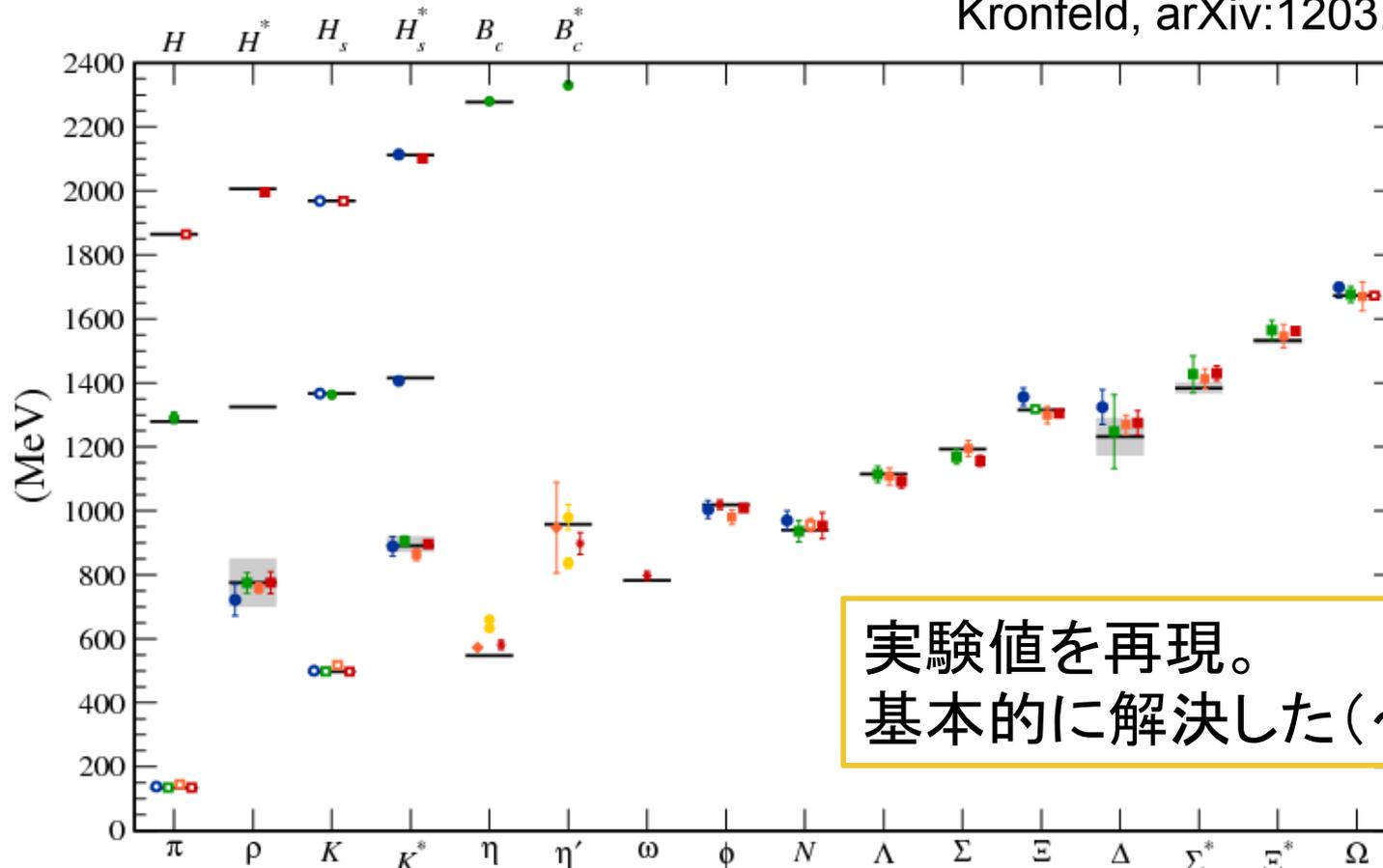
- 要はディラック演算子のかけ算。
  - 微分を差分に置き換えたものなので、基本は最近接相互作用。
  - 隣の格子点の場の値をもってきて差をとる。
- 並列化は自然
  - 各ノードの担当部分を決めて、
  - 必要に応じて端の部分のデータを通信



# 最初の物理

- まずはハドロン質量スペクトル
  - 格子QCD計算の当初からの目標。

Kronfeld, arXiv:1203.1204 [hep-lat]



# インプットは？

- 標準模型にあるパラメタと同じ。
  - 結合定数  $\alpha_s(\mu)$ :
    - スケール  $\mu$  と結合定数の関係を決める。格子理論では、 $\beta=6/g^2$  を決めると格子間隔が決まる。
  - クォーク質量  $m_f$ :
    - アップクォークとダウンクォーク ( $\sim$  数MeV) は、簡単のために縮退させる(=アイソスピン)。精密になるにつれてその破れが無視できなくなるはず。QED効果も。実際には軽くすると時間がかかるので 10~100 MeV くらいに数点とって外挿。
    - スレンジクォーク ( $\sim$  100 MeV) は、直上でできる。
    - チャームクォーク ( $\sim$  1.5 GeV) のループ効果は、低エネルギーでは小さいはず ( $\sim \alpha_s \Lambda^2/m_c^2$ )。バレンスは必要。でも重いから大変 ( $am_c \sim 0.5$ )。
    - ボトムクォーク ( $\sim$  4.5 GeV) のループ効果は、低エネルギーでは無視してよい。バレンスは必要。でも、もっと重いから大変。有効理論。
    - トップクォーク ( $\sim$  175 GeV) は、スケールが違いすぎてあまり関係ない。

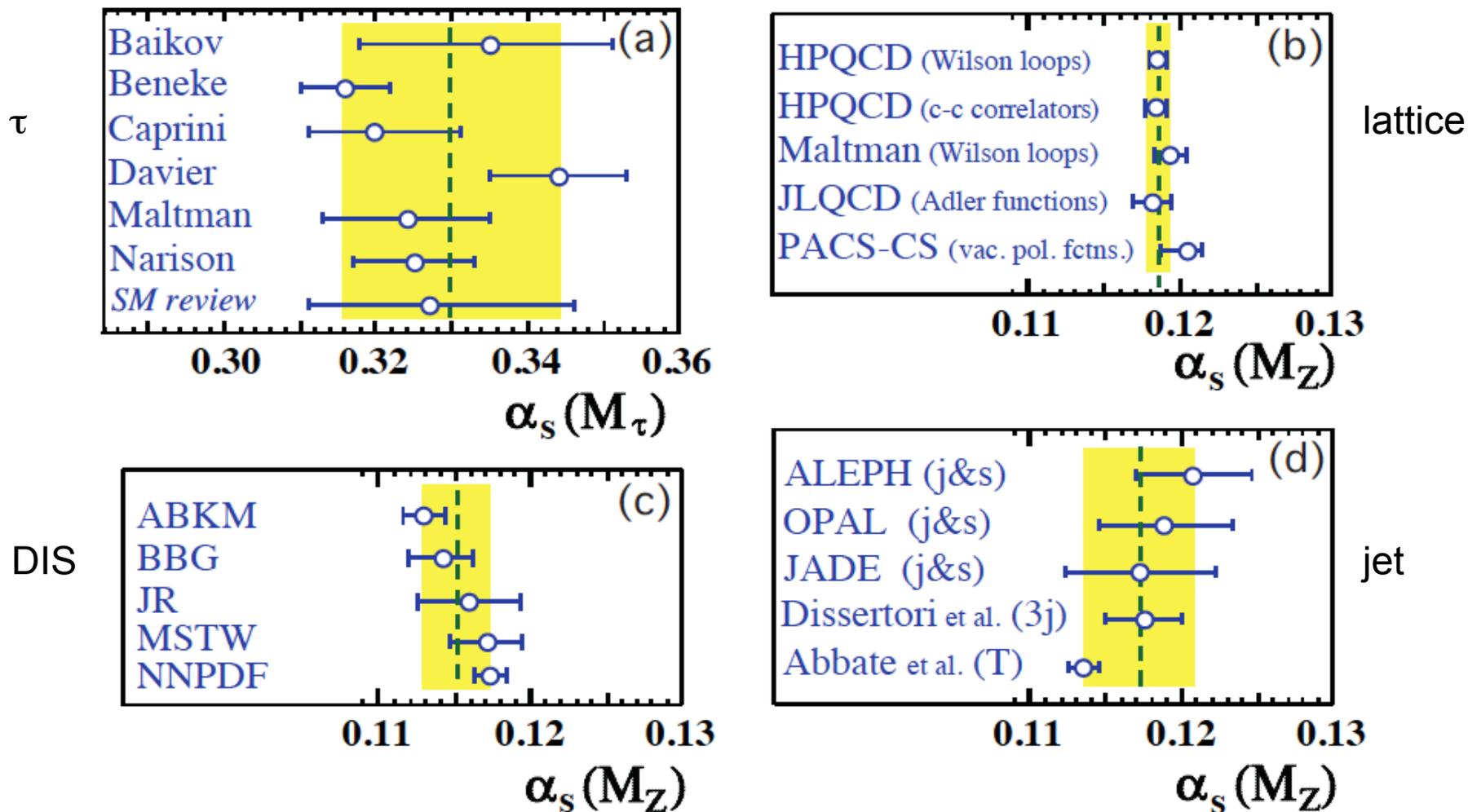
# 標準模型のパラメタ決定

- 逆に言うと、標準模型のパラメタは物理量をインプットにすれば決まる。
  - 結合定数：何かの物理量をインプットにして格子間隔を決めれば結合定数を決めたことになる。あとは MSbar への読み替え。
  - スケールのインプットに使われるのは  $f_\pi$  や  $\Omega$ バリオン質量。
- 軽いクォークの質量は、擬スカラー中間子( $\pi, K$ )の質量をインプット。GMOR 関係式。

$$m_\pi^2 = \frac{\Sigma}{f^2} (m_u + m_d) + O(m^2)$$

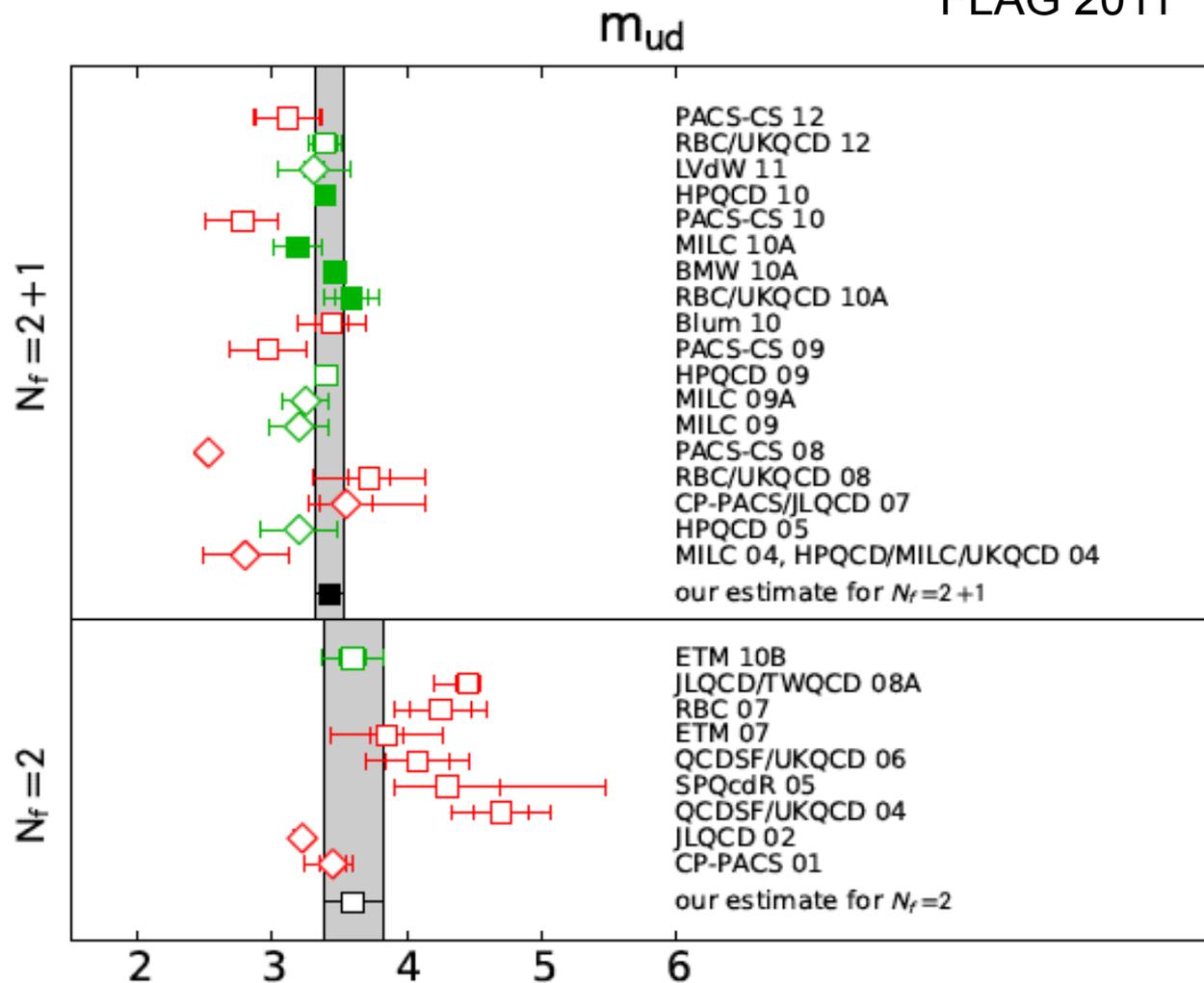
# QCD 結合定数

PDG 2012



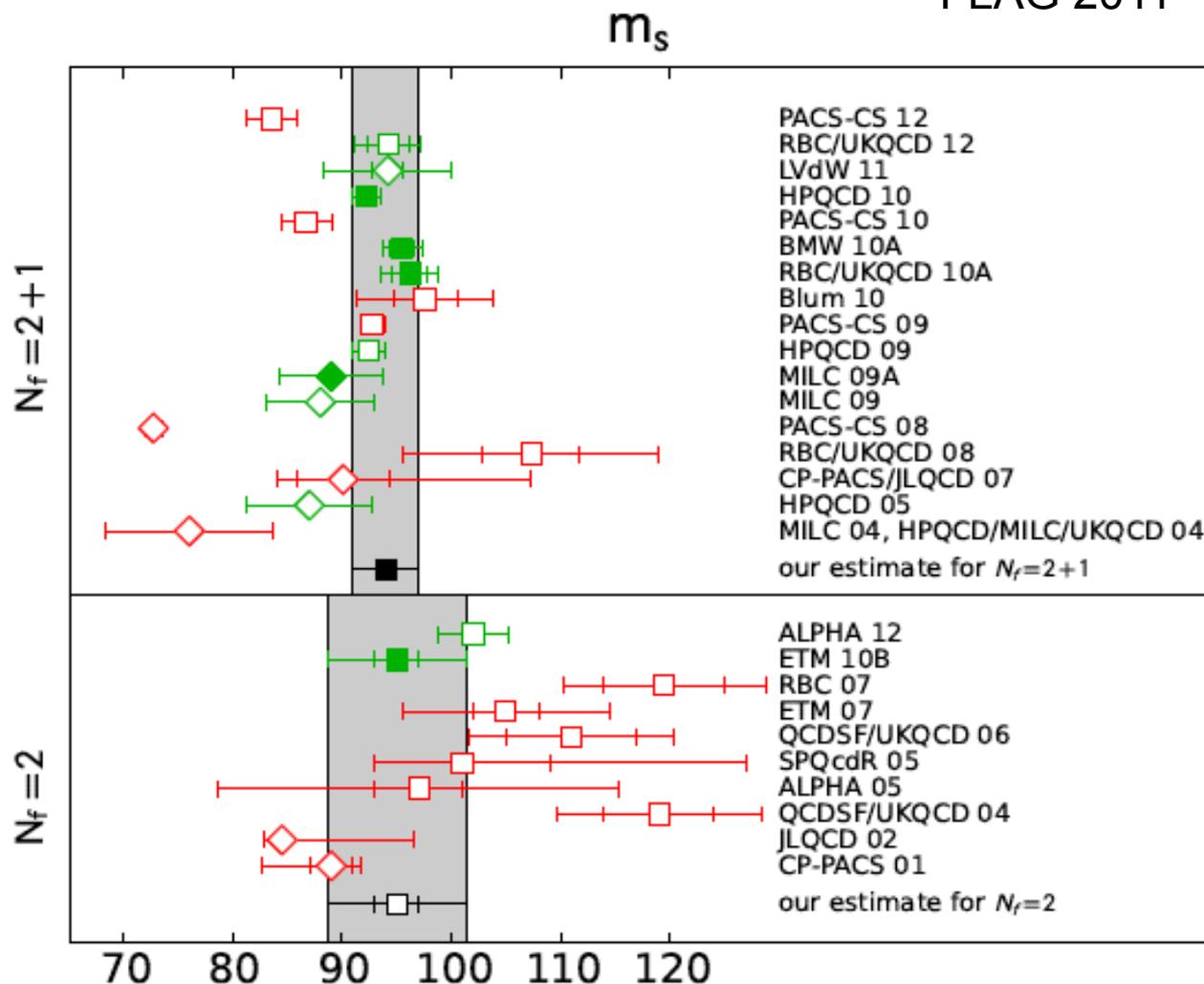
# クォーク質量

FLAG 2011



# クォーク質量

FLAG 2011



# 基本のキホン

- どうやら QCD の“シミュレーション”と呼べる段階になってきたらしい。
  - でも、やっぱり「ブラックボックス」なんだよなあ。
  - ほんとに正しいことをやってるんだろうか？
- 自信を持つためには、
  - 実験家A「実験値と合っていることを確認した？」
  - 理論家B「何が効いてこうなっているかを理解したいよね。」
  - 理論家C「少なくともわかっている関係式は全部満たしてるんだよね。チェックした？」



# 低エネルギーQCDの ダイナミクス

---

カイラル対称性の破れはどこまで理解されたか。

# 自発的カイラル対称性の破れ

- 質量発現のメカニズム (南部)
  - ということになっている。でも、本当にそうになっているかはQCDを解いてみないとわからない。
- $SU(3)_L \times SU(3)_R \rightarrow SU(3)_V$ 
  - 秩序変数はカイラル凝縮。 ← これも当然計算できるはず。  
 $\langle \bar{q}q \rangle$       その背後にある仕組みも。
  - $\pi, K, \eta$  中間子は軽くなる。 ← こっちも確認すべし。

$$m_\pi^2 = \frac{\Sigma}{f^2} (m_u + m_d) + O(m^2)$$

# カイラル凝縮

- そんなに簡単ではない。

1. 演算子混合(あるいは、2次発散)

$$\bar{q}q \Leftrightarrow \frac{1}{a^3}, \frac{m}{a^2}$$

カイラル対称性があれば3次発散は消える。  
でも、まだクォーク質量に比例する2次発散。

クォーク質量ゼロの極限に行かないと物理量は出せない。

2. 有限体積

- そもそも有限体積では自発的対称性の破れは起きない。質量ゼロでは、カイラル凝縮はゼロ。

- 熱力学極限

- クォーク質量を有限に保ったまま体積無限大の極限をとる。
- その後で、クォーク質量ゼロの極限。

とても大変そう。  
数値計算だし...

# スケーリングを知るために

- 一歩下がって、有効理論の助けを借りる。
  - 要は、「体積無限大極限」+「クォーク質量ゼロ極限」で何が起こるかわかればよい。
- カイラル有効理論 (Weinberg, Gasser-Leutwyler, ...)
  - 自発的対称性の破れが起こることを仮定して、低エネルギー極限で重要になるパイ中間子の自由度だけを残した理論。

$$L_2 = \frac{f^2}{4} \text{Tr} \left( D_\mu U D^\mu U^\dagger \right) + \frac{f^2}{4} \text{Tr} \left( \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \right),$$

$$U = \exp \left( \frac{i\tau^a \pi^a}{f} \right), \chi = 2B_0 m$$

- 「体積無限大極限」+「クォーク質量ゼロ極限」で何が起こるか調べる。

# 何を見るか

- Banks-Casher 関係式 (1980)

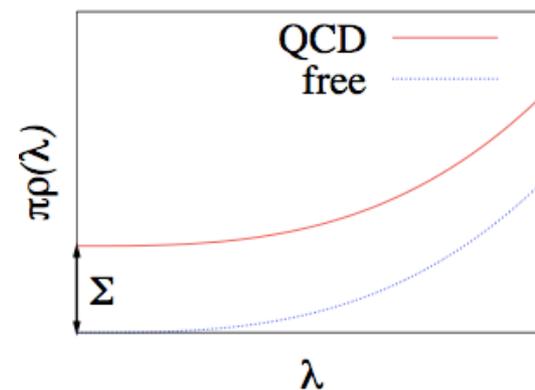
$$\lim_{m \rightarrow 0} \lim_{V \rightarrow \infty} \rho(\lambda = 0) = \frac{\Sigma}{\pi}$$

- 固有値分布  $\rho(\lambda) = \frac{1}{V} \sum_k \langle \delta(\lambda - \lambda_k) \rangle,$
- カイラル凝縮  $\langle \bar{q}q \rangle = \frac{1}{V} \sum_k \left\langle \frac{1}{m + i\lambda_k} \right\rangle$

- カイラル凝縮とは、クォークの低エネルギーモードの沈殿。

- 格子計算で固有値分布を計算

- 低エネルギーモードは出てくるか？
- 有限体積、クォーク質量ではどう見えるか？
- そのモードはどんなものか？



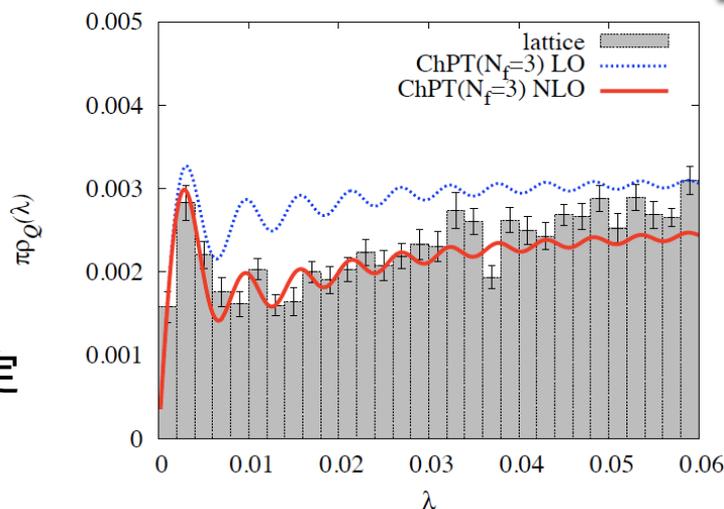
# 有効理論と格子計算

## • カイラル有効理論

- クォーク質量依存性を通じて読み取る。  $im \rightarrow \lambda$
- 体積依存性などのスケールリング

## • 格子計算

- 低エネルギーモードの分布を計算。
- カイラル対称性が鍵。



カイラル凝縮 $\Sigma$ の決定

# 格子上的カイラル対称性

- 自明ではない。軸性アノマリーが必要だから。

$$\partial_\mu j_{\mu 5} = \frac{N_f}{16\pi^2} G_{\alpha\beta}^a \tilde{G}_{\alpha\beta}^a, \quad j_{\mu 5} = \sum_f \bar{q}^f \gamma_\mu \gamma_5 q^f$$

- 格子上的カイラル対称性は、**正しく**壊れていないといけない。
  - ウィルソン・フェルミオン：陽にひどく壊す。連続極限でアノマリーも再現。他にいろんなところで問題。
  - スタッガード・フェルミオン：軸性荷電 $\pm$ の別フレーバーでキャンセル。最低4フレーバーが混ざる。このままでは違う理論。4乗根。
  - ドメインウォール or オーバーラップ・フェルミオン：修正したカイラル変換に対する対称性を保つ。連続極限でもとに戻る。

$$\delta\bar{\psi} = i\alpha\bar{\psi} \left(1 - \frac{a}{2\rho} D\right) \gamma_5, \quad \delta\psi = i\alpha\gamma_5 \left(1 - \frac{a}{2\rho} D\right) \psi$$

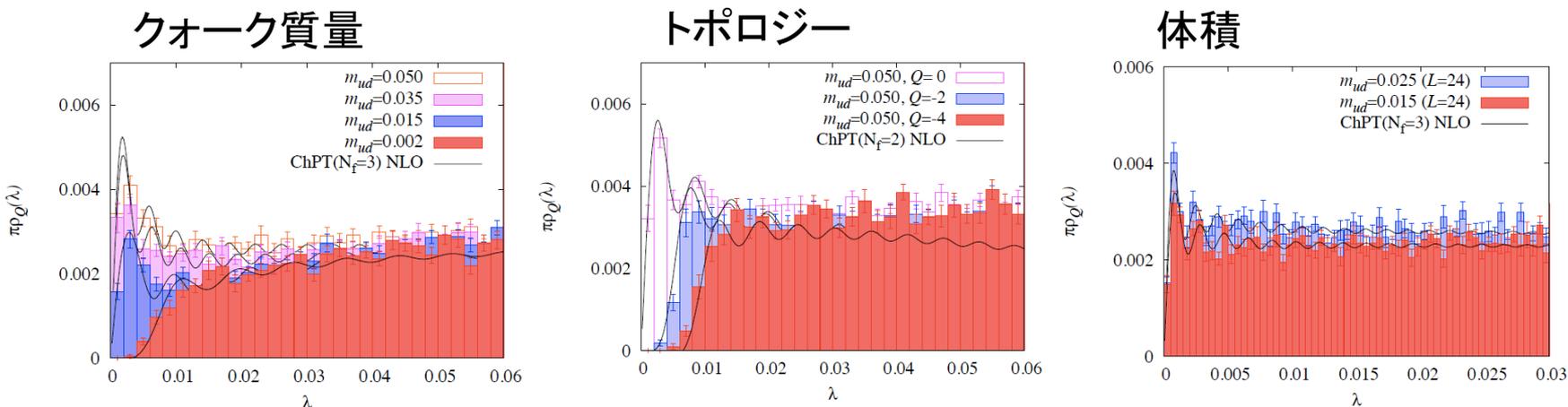
# ディラック演算子の固有値分布

- 厳密なカイラル対称性 (オーバーラップ・フェルミオン)

Fukaya et al. [JLQCD], PRL 101, 122002 (2010), PRD 83 (2011) 074501.

- 2 and 2+1 flavors
- p and e regimes (various quark masses)
- $16^3 \times 48$  and  $24^3 \times 48$
- various topological charges

- スケールリング:



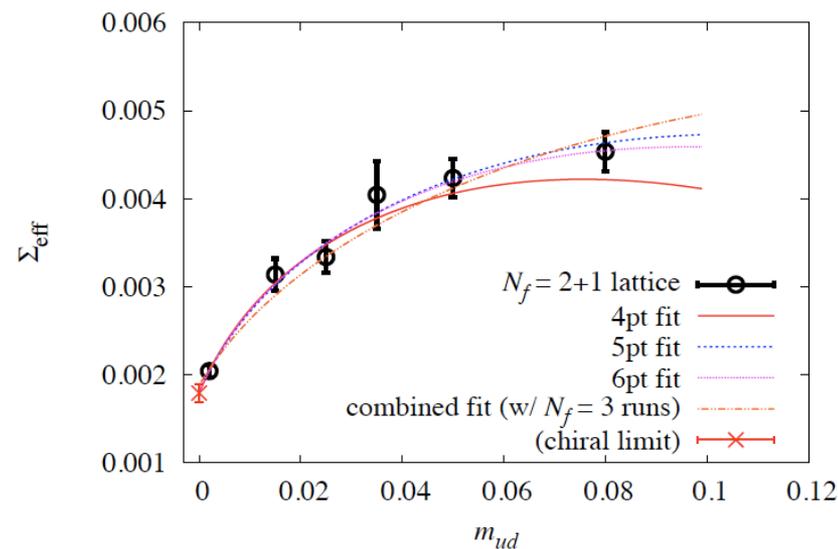
# ゼロ温度でのカイラル凝縮

## カイラル外挿

- そもそも普通にやると  $m/a^2$  の発散があってほとんど無理。
- $\varepsilon$ -領域の点があるおかげで非常に安定。
- カイラル有効理論の 1-loop

$$\Sigma(m_{ud}, m_s) = \Sigma(0, m_s) \times \left[ 1 - \frac{3M_\pi^2}{32\pi^2 F^2} \ln \frac{M_\pi^2}{\mu^2} + \frac{32L_6 M_\pi^2}{F^2} \right]$$

- 有限体積補正も取り入れる。



$$\Sigma^{\overline{MS}}(2 \text{ GeV}) = [242(04)_{-18}^{+19}] \text{ MeV}^3$$

# 疑似ゼロモードはどんなものか？

- ほとんどカイラル (L or R) で、局在
  - 局在するトポロジー荷電  $\rightarrow$  トポロジー感受率

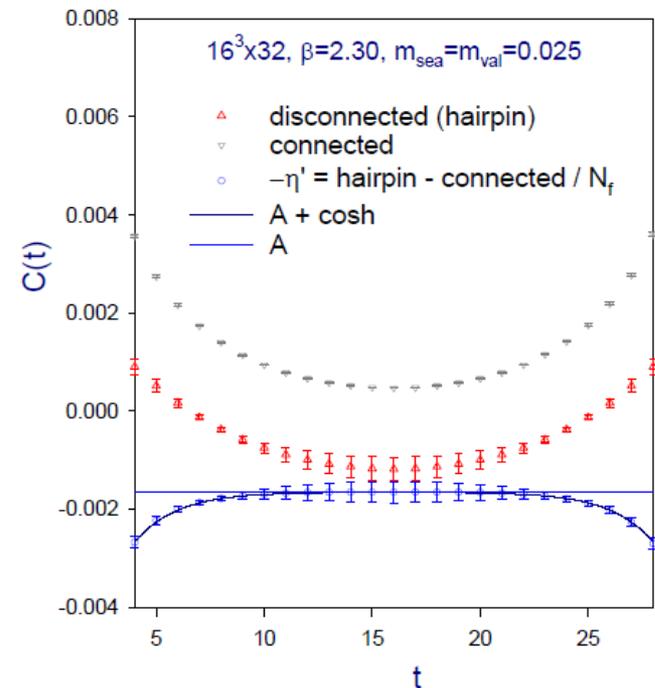
$$\chi_t = \frac{\langle Q^2 \rangle}{V} = \int d^4x \langle q(x)q(0) \rangle$$

- トポロジー荷電密度の相関から求めることができる。全体のトポロジーを固定したときも。

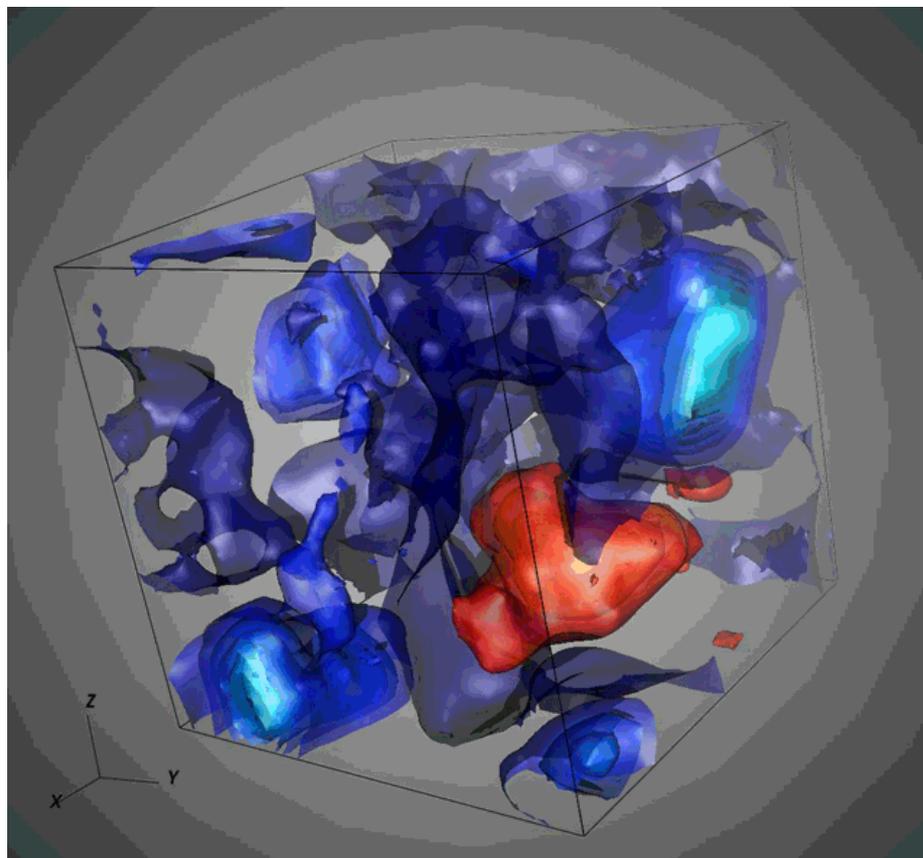
Aoki et al, PRD76, 054508 (2007)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \langle mP(x)mP(0) \rangle_Q = -\frac{1}{V} \left( \chi_t - \frac{Q^2}{V} + \dots \right) + O(e^{-m_\eta x})$$

JLQCD, PLB665, 294 (2008)



# 最低エネルギー・モード



カイラリティによる偏極

# ゼロ温度でのトポロジー感受率

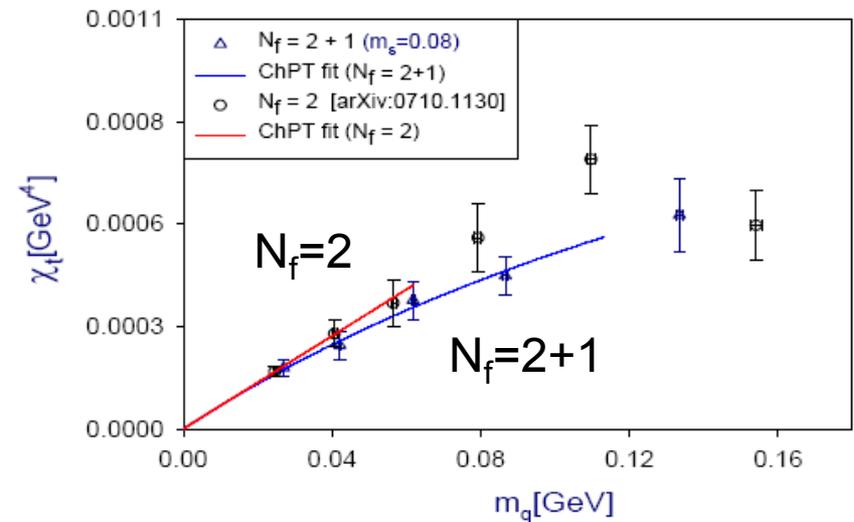
- カイラル外挿

Crewther (1977), Leutwyler-Smilga (1992)

$$\chi_t = m\Sigma / N_f, \quad \text{or}$$

$$\chi_t = \frac{\Sigma}{m_u^{-1} + m_d^{-1} + m_s^{-1}}$$

... 大局的トポロジーを固定しても局所的には励起が起きている。



$$\Sigma^{\overline{MS}}(2 \text{ GeV}) = [247(03)(XX) \text{ MeV}]^3$$

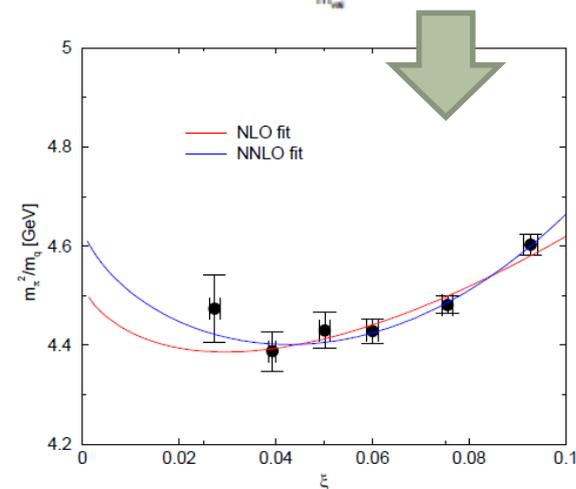
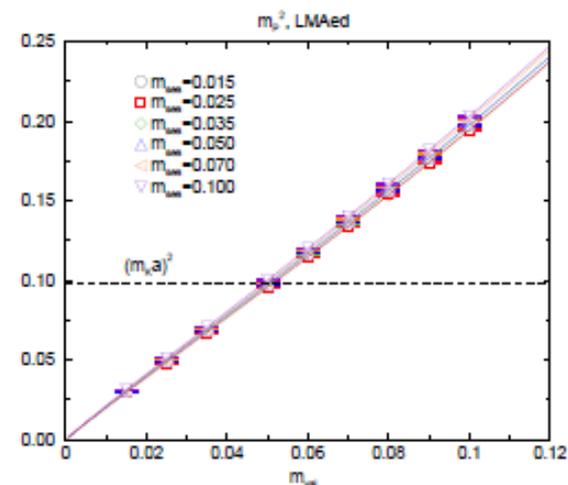
# 次のレベル

- GMOR関係式 + 高次
  - パイ中間子のループ効果

$$m_\pi^2 = 2B_0 m_q \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{m_\pi^2}{(4\pi f_\pi)^2} \ln \frac{m_\pi^2}{\mu^2} + c_3 \frac{m_\pi^2}{(4\pi f_\pi)^2} + \text{NNLO} \right]$$

特徴的なログ依存性

- 予想された曲がり方がどうやら見られる。
- 最近では up & down クォークの点でもシミュレーションができるようになった。



# 低エネルギーQCDのダイナミクス

- 自発的カイラル対称性の破れというシナリオは確かに正しそう。
  - QCDのシミュレーションで、カイラル有効理論の予想を再現。
  - カイラル有効理論は対称性にもとづく理論なので、質量ゼロの極限では正しいと考えてよい。
- どうやら正しいことをやっているらしい。
  - 数値計算に対する理論的サポート。
  - クォーク質量依存性は、最後まで追わなくても大丈夫。あるところから先はカイラル有効理論を援用して外挿。

# 素粒子現象論

---

フレーバー物理：格子QCDは役に立つツールになったか。

# フレーバー物理

- 精密実験で標準模型を超える物理の兆候を探す。
  - ほとんどのプロセスはハドロンを含む。

$$(\text{実験値}) = (\text{わかっている数}) \times (\text{CKM}) \times (\text{ハドロン行列要素})$$

- ハドロン行列要素の計算
  - 崩壊定数、セミレプトニック形状因子、Bパラメタ...
  - もっと難しいのは？
- 鍵は精度
  - ほんとうに信頼できるか？
  - どこまでチェックできているか？

# 例: $|V_{us}|$

## • K中間子セミレプトニック崩壊 $K \rightarrow \pi l \nu$

- 崩壊幅

$$\Gamma_{K \rightarrow \pi l \nu} = C_K^2 \frac{G_F^2 m_K^5}{192 \pi^3} I S_{EW} (1 + 2\Delta_{SU(2)} + 2\Delta_{EM}) |V_{us}|^2 |f^+(0)|^2$$

- ハドロン行列要素

$$\begin{aligned} \langle \pi(p_\pi) | \bar{u} \gamma_\mu s | \bar{K}(p_K) \rangle &= (p_K + p_\pi)_\mu f^+(q^2) + (p_K - p_\pi)_\mu f^-(q^2) & q = p_K - p_\pi \\ &= \left[ (p_K + p_\pi)^\mu - q^\mu \frac{m_K^2 - m_\pi^2}{q^2} \right] f^+(q^2) + q^\mu \frac{m_K^2 - m_\pi^2}{q^2} f^0(q^2) \end{aligned}$$

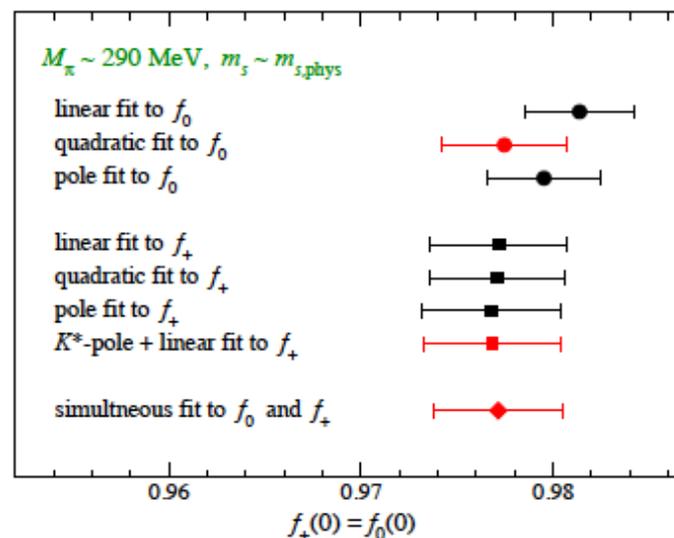
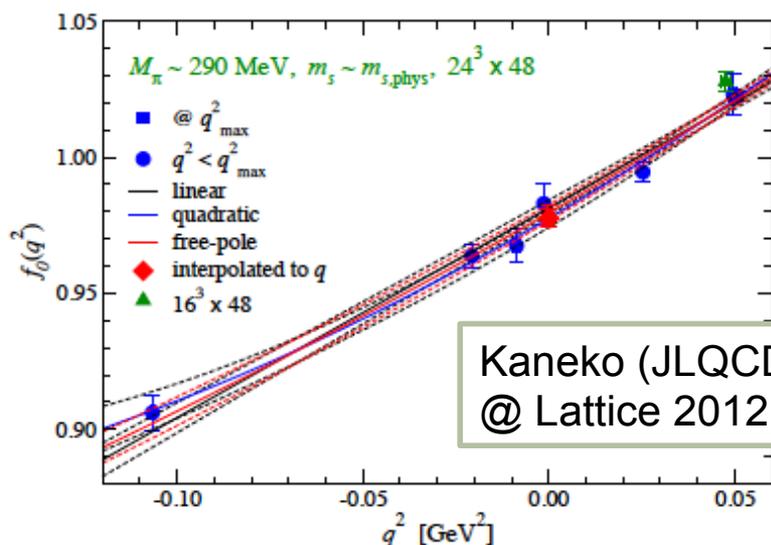
- 形状因子  $f^+(q^2)$ ,  $f^0(q^2)$  の形は実験で正確にわかる。
- 絶対値  $|f^+(0)|$  は実験では決まらない。ただし、SU(3)極限では1に定まる(ベクトルカレントの保存)。
- 格子計算で知りたいのは1からのずれ。<1%の精度で。

# 例: $|V_{us}|$

## • 3点関数を計算。

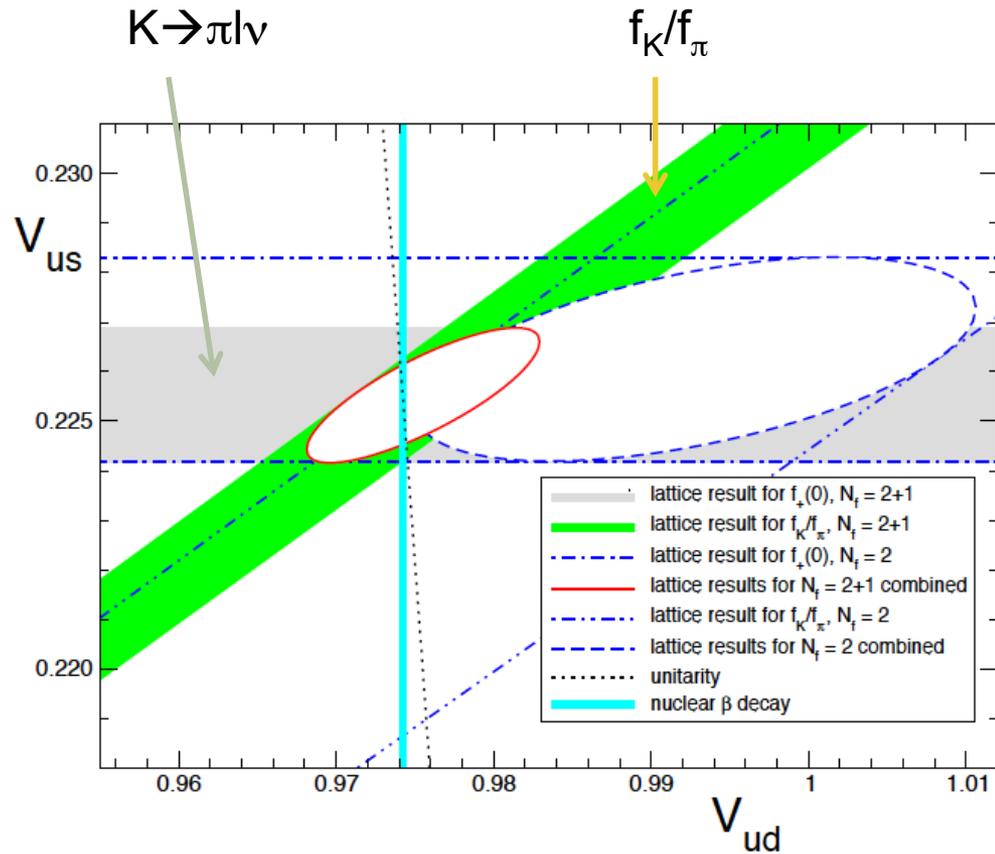
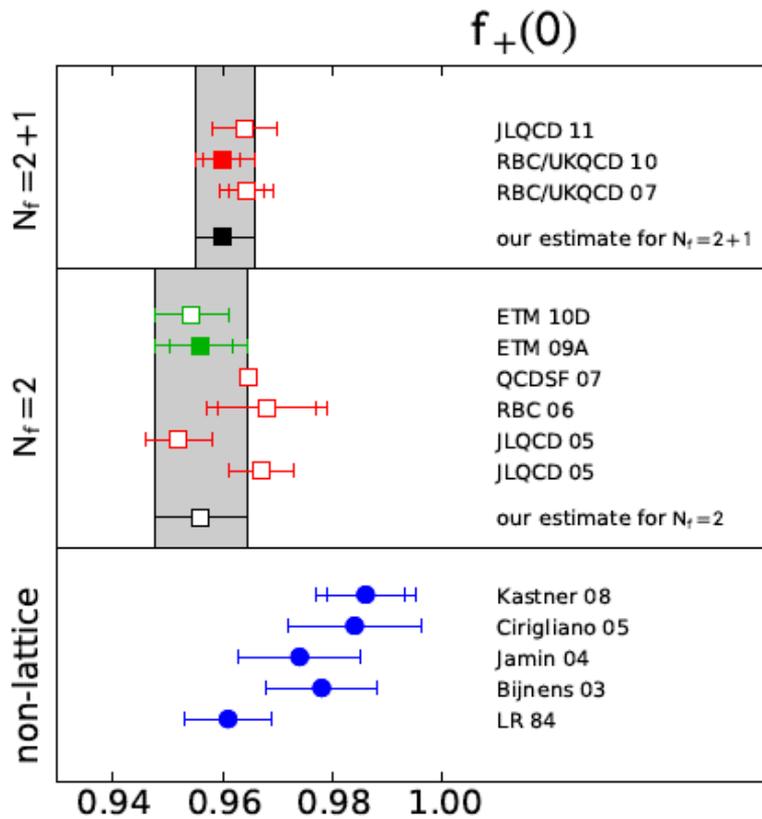
- ユークリッド空間での時間依存性は  $e^{-Et}$  となるので、十分距離を離すと基底状態の情報が得られる。
- この場合、3点関数の比を考えることで精度を向上。1%以下。

$$R = \frac{C_{V_4}^{K\pi}(0,0) C_{V_4}^{\pi K}(0,0)}{C_{V_A}^{KK}(0,0) C_{V_A}^{\pi\pi}(0,0)} \rightarrow \frac{(M_K + M_\pi)^2}{4M_K M_\pi} f_0(q_{\max}^2)^2 \quad (q_{\max}^2 = (M_K - M_\pi)^2)$$



# 例: $|V_{us}|$

- WA 2011 (FLAG)



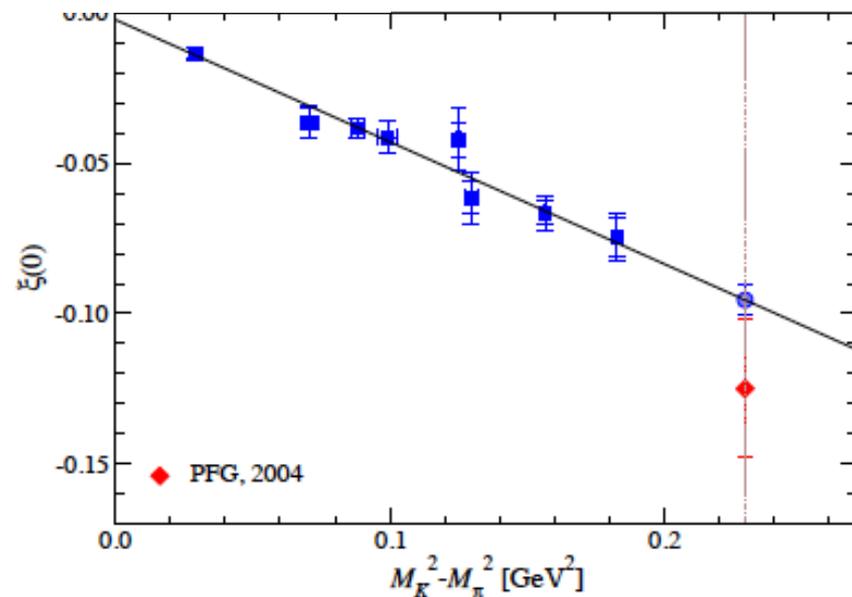
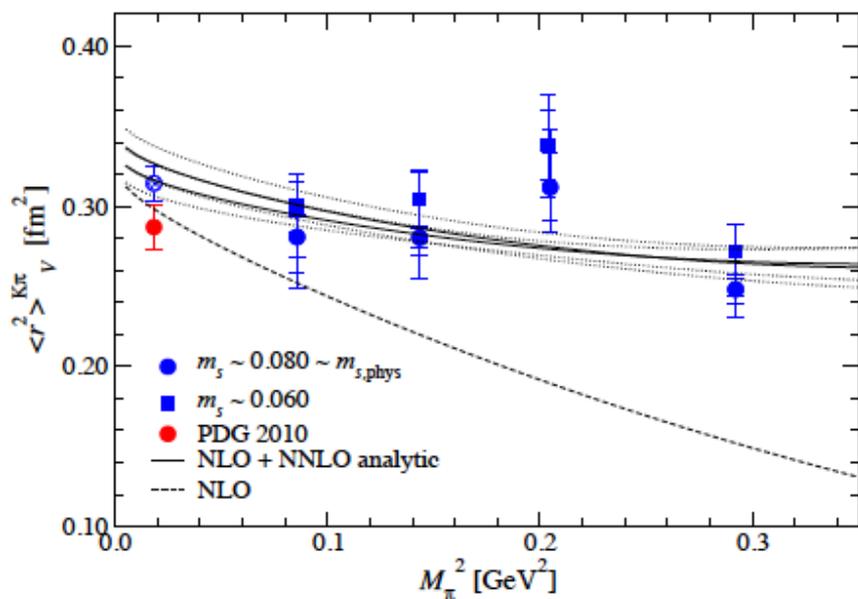
# 例: $|V_{us}|$

- 数字はいいけど、どれだけチェックされているか...
  - 例えば、形状因子の形は実験値と合うか？ 実は誰もちゃんと見ていなかったりする。

$$f_+(q^2) = f_+(0) \left\{ 1 + (1/6) \langle r^2 \rangle_V^{K\pi} q^2 + \dots \right\}$$

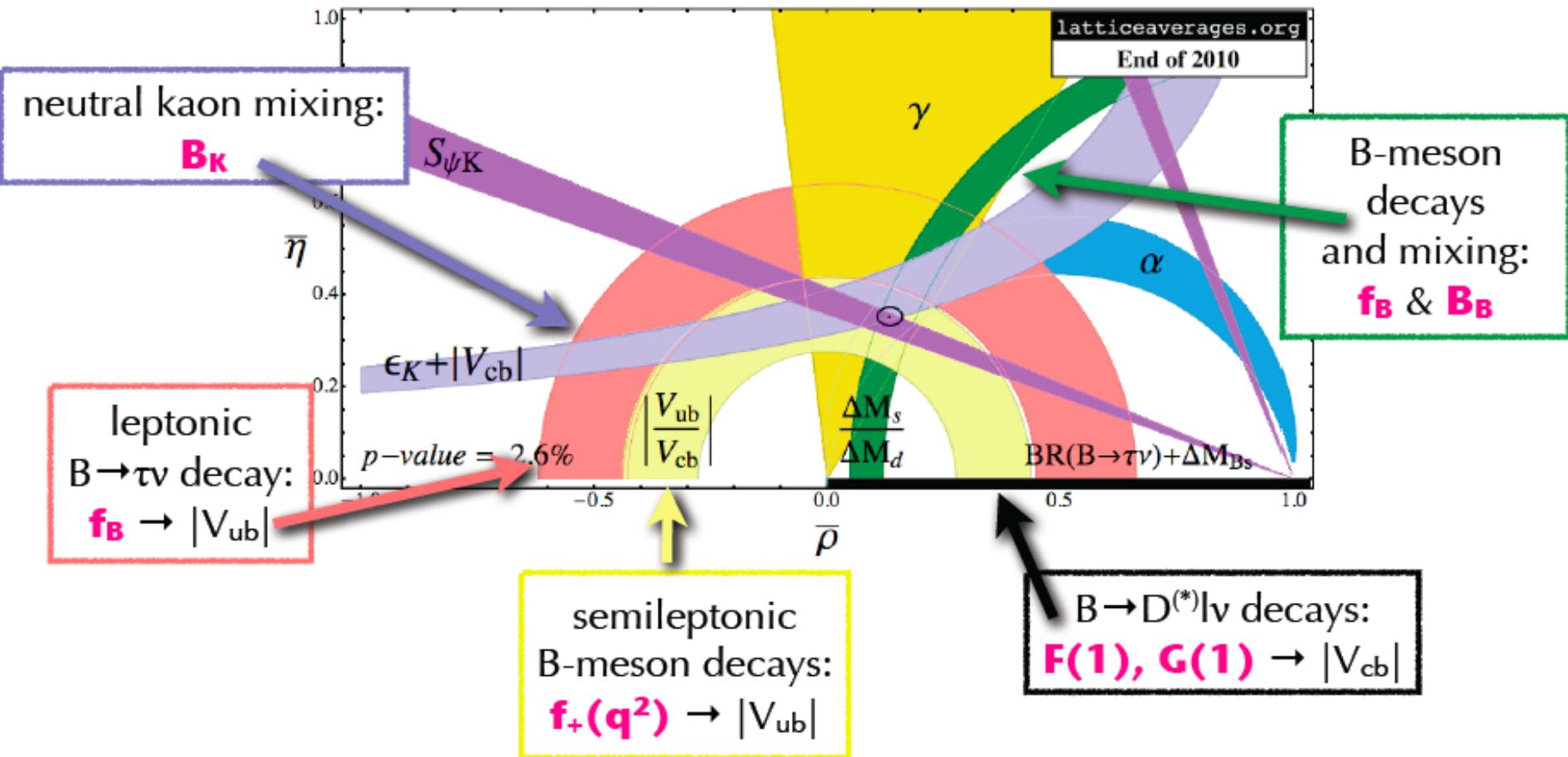
$$\xi(q^2) = \frac{f_-(q^2)}{f_+(q^2)}$$

Kaneko (JLQCD)  
@ Lattice 2012



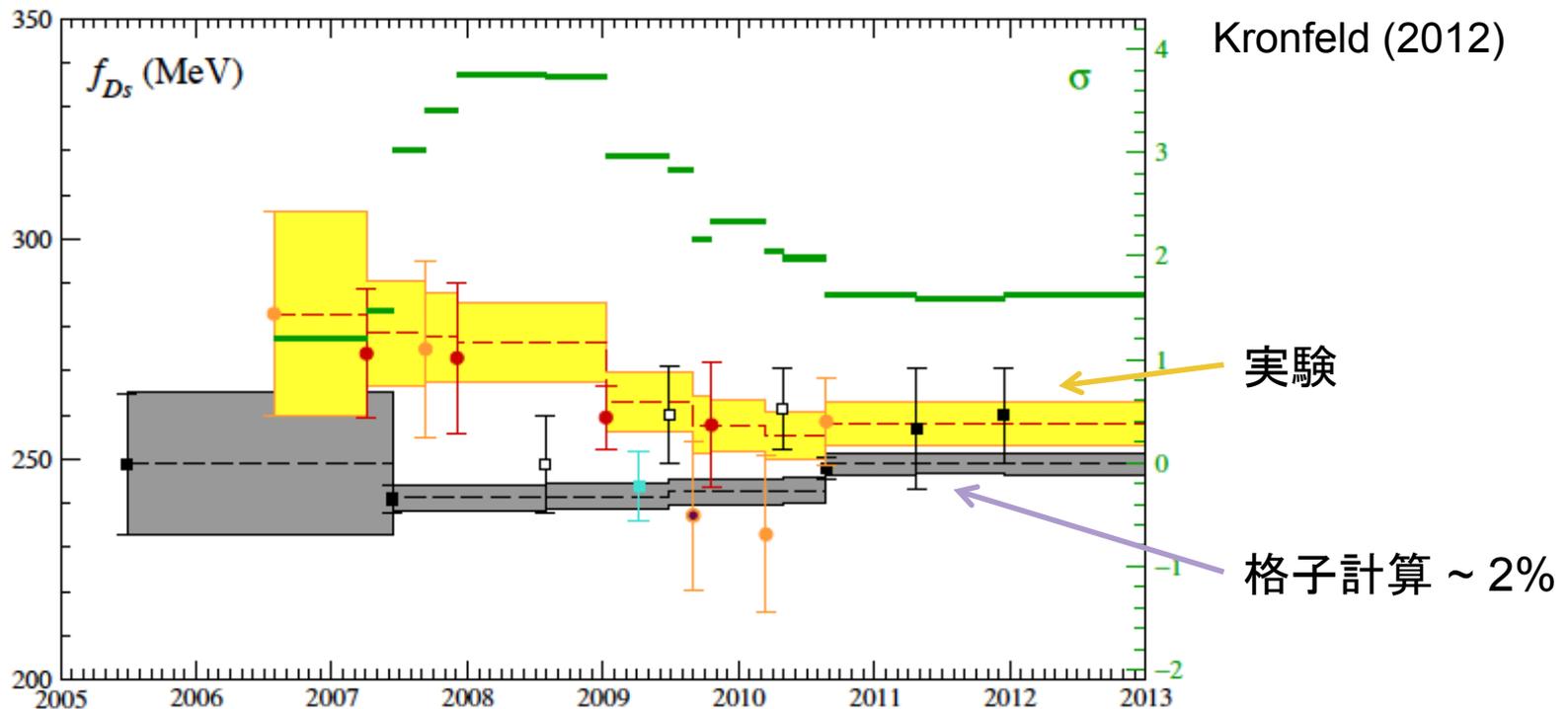
# 他の量

from Van de Water (2012)



# 他の量

- ここではレビューしません。一般論だけ。
  - 崩壊定数、セミレプトニック崩壊、Bパラメタでは、以前よりずっと精度が向上してきた。
  - ベンチマーク:  $f_{D_s}$  --- 実験値との比較が可能。



# 格子QCDは役に立つツールになったか？

- 確かにそう言ってもよいと思う。ただし、
  - ときに、誤差の評価がとてもアグレッシブ。
  - 複数のグループによるクロスチェックが重要。

- 今後の重要課題

- $|V_{cb}|$ ,  $|V_{ub}|$  の inclusive, exclusive の不一致。

$$|V_{ub}| = (4.41 \pm 0.15 \pm_{-0.17}^{+0.15}) \times 10^{-3} \quad (\text{inclusive}),$$

$$|V_{ub}| = (3.23 \pm 0.31) \times 10^{-3} \quad (\text{exclusive}).$$

PDG 2012

- $B \rightarrow \tau \nu$ ,  $D \tau \nu$

- ...

# 素粒子現象論

---

$K \rightarrow \pi\pi$  :  $\Delta I = 1/2$  と CP の破れは理解できたか。

# K → ππ

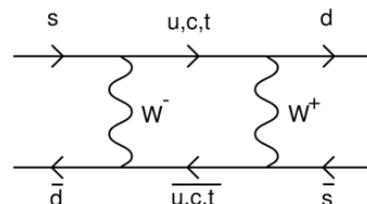
$K_S \rightarrow \pi\pi$  (CP even)

$K_L \rightarrow \pi\pi\pi$  (CP odd)

- CP の破れの発見 (Cronin-Fitch, 1964)

$$|K_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\bar{\epsilon}|^2}} \left[ |K_{CP+}^0\rangle + \bar{\epsilon} |K_{CP-}^0\rangle \right],$$

$$|K_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\bar{\epsilon}|^2}} \left[ |K_{CP-}^0\rangle + \bar{\epsilon} |K_{CP+}^0\rangle \right].$$



“Im” が CP 位相を拾う。  
top-loop が効くので、短距離の物理で決まる。

$$\bar{\epsilon} = \frac{i \operatorname{Im} M_{12} - i \operatorname{Im} \Gamma_{12} / 2}{2 \operatorname{Re} M_{12} - i \operatorname{Re} \Gamma_{12} / 2} = i \frac{\operatorname{Im} M_{12} - i \operatorname{Im} \Gamma_{12} / 2}{m_{K_L} - m_{K_S} - i(\Gamma_{K_L} - \Gamma_{K_S}) / 2}$$

$$M_{12} - \frac{i}{2} \Gamma_{12} = \langle K^0 | H_W | \bar{K}^0 \rangle$$

↑  
dispersive  
↑  
absorptive

↑  
mass difference

↑  
width difference

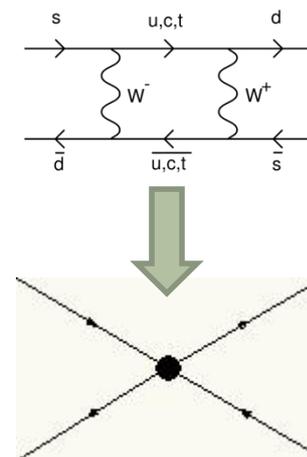
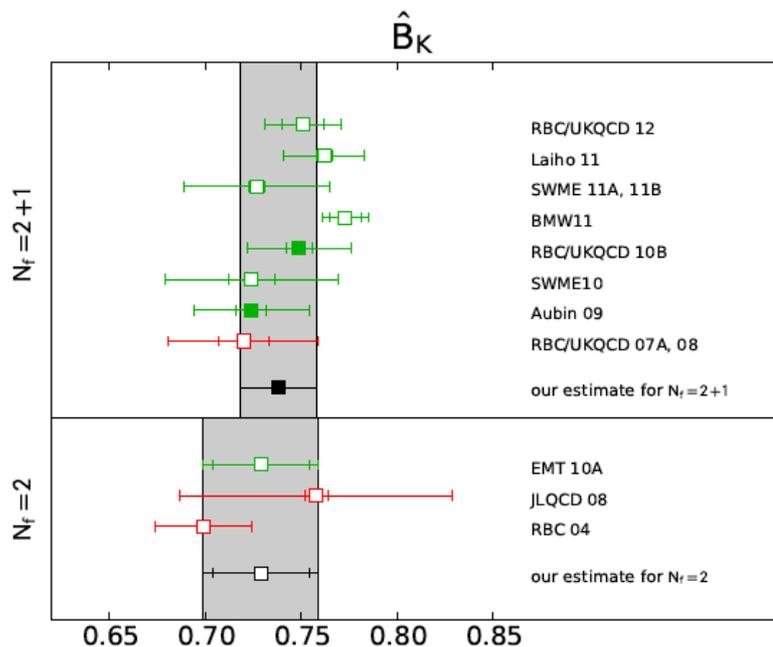
“Re” には u, c, t が全部効く。長距離の物理。計算は大変。

# B<sub>K</sub>

- どちらかというと簡単な部分。
  - ハドロン効果は B<sub>K</sub> に押し込められる。

$$\langle \bar{K}^0 | O_{LL}(\mu) | K^0 \rangle = \frac{8}{3} B_K(\mu) f_K^2 m_K^2$$

- 格子計算のまとめ (FLAG, 2012)



もう少し正確に言うと、なぜか

$$\Delta m_K \cong \Delta \Gamma_K / 2$$

がとてもよく成り立っているので、  
 いろんなところで簡単になっている。  
 ここからのずれを考えると崩壊振幅の詳細が必要になる。

B<sub>K</sub>の計算は(ほぼ)終わり。別の問題へ。

# $\Delta I=1/2, \varepsilon'/\varepsilon$

## • $\Delta I=1/2$ ルール

- 終状態をアイソスピン 2 と 0 に分けてみると、 $\text{Re } A_0 \sim \text{Re } A_2 \times 20$
- ずっと前から全然理解が進んでいない。これがちゃんと理解できてないと  $\varepsilon'/\varepsilon$  の理解も進まない。

$$A(K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-) = \sqrt{\frac{2}{3}} A_0 e^{i\delta_0} + \sqrt{\frac{1}{3}} A_2 e^{i\delta_2}$$

$$A(\bar{K}^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-) = -\sqrt{\frac{2}{3}} A_0^* e^{i\delta_0} - \sqrt{\frac{1}{3}} A_2^* e^{i\delta_2}$$



$$\varepsilon' = \frac{ie^{i(\delta_2 - \delta_0)}}{\sqrt{2}} \frac{\text{Re } A_2}{\text{Re } A_0} \left[ \frac{\text{Im } A_2}{\text{Re } A_2} - \frac{\text{Im } A_0}{\text{Re } A_0} \right]$$

$$\eta_{+-} = \frac{A(K_L \rightarrow \pi^+ \pi^-)}{A(K_S \rightarrow \pi^+ \pi^-)} \cong \varepsilon + \varepsilon'$$

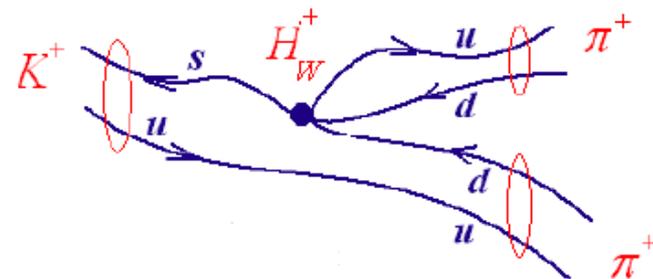
$$\eta_{00} = \frac{A(K_L \rightarrow \pi^0 \pi^0)}{A(K_S \rightarrow \pi^0 \pi^0)} \cong \varepsilon - 2\varepsilon'$$

$$\text{Re}(\varepsilon'/\varepsilon) = \begin{cases} 0.00207(28) & (\text{KTeV 2003}) \\ 0.00147(22) & (\text{NA48 2002}) \end{cases}$$

直接的 CP の破れ: K中間子混合ではなく、崩壊振幅の干渉で CP が破れる。

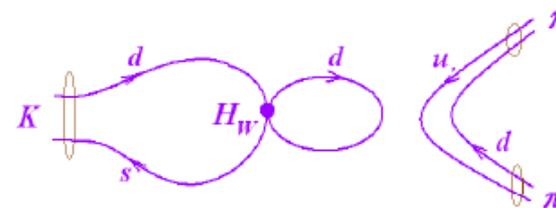
# 20世紀の難問→21世紀には解決しないと

- 格子計算でも直接アタック可能になりつつある。
  - $K \rightarrow \pi\pi$  の振幅:  $\pi\pi$  散乱で使われる Luscher の方法を応用。有限体積でのエネルギーのずれと散乱位相差を関係づける (Lellouch-Luscher)。
  - それでも簡単ではない。
    - $\pi$  中間子質量を物理点に取っておかないと、振幅の質量依存性はよくわからない。
    - 散乱を扱えるほど大きい体積 +  $\pi\pi$  のエネルギーを  $K$  中間子質量にマッチ。
    - $\Delta s=1$  演算子の間の混合をできるだけ避けるよう、カイラル対称性をもつ格子定式化。
  - まずは  $\Delta I = 3/2$  の計算 (RBC/UKQCD, 2012)
    - $\text{Re}(A_2) = (1.436 \pm 0.063_{\text{stat}} \pm 0.258_{\text{sys}}) 10^{-8} \text{ GeV}$   
Experiment:  $1.479(4) 10^{-8} \text{ GeV}$
    - $\text{Im}(A_2) = -(6.29 \pm 0.46_{\text{stat}} \pm 1.20_{\text{sys}}) 10^{-13} \text{ GeV}$

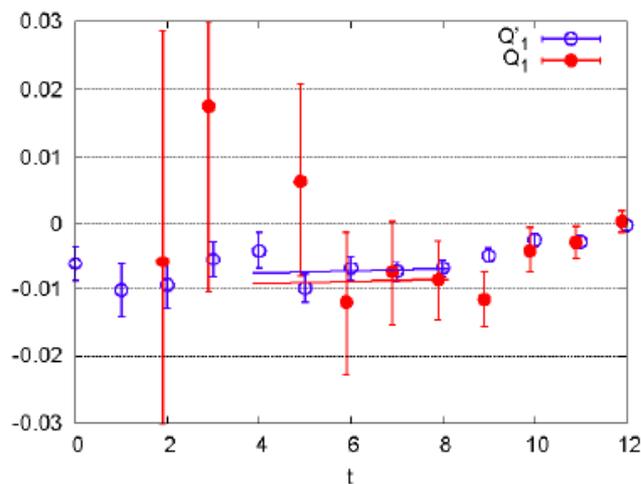


# $\Delta I = 1/2$

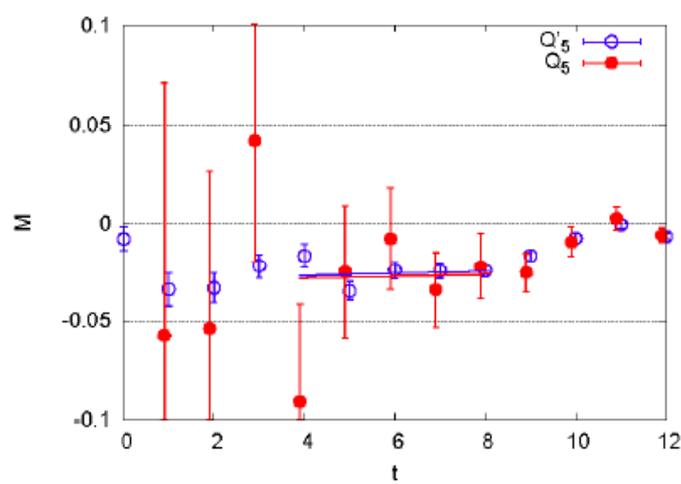
- $I=0$  の振幅はずっと難しい。
  - 真空中に消えるダイアグラムがあるため。



Q2 - largest part of  $\text{Re}(A_0)$



Q6 - largest part of  $\text{Im}(A_0)$



RBC/UKQCD  
(2012)

- 統計的にまだ厳しいけど、悲観する必要もなさそう。

そう遠くない将来に、 $\Delta I=1/2$  ルールや  $\epsilon'/\epsilon$  も解決可能。

# 素粒子現象論

---

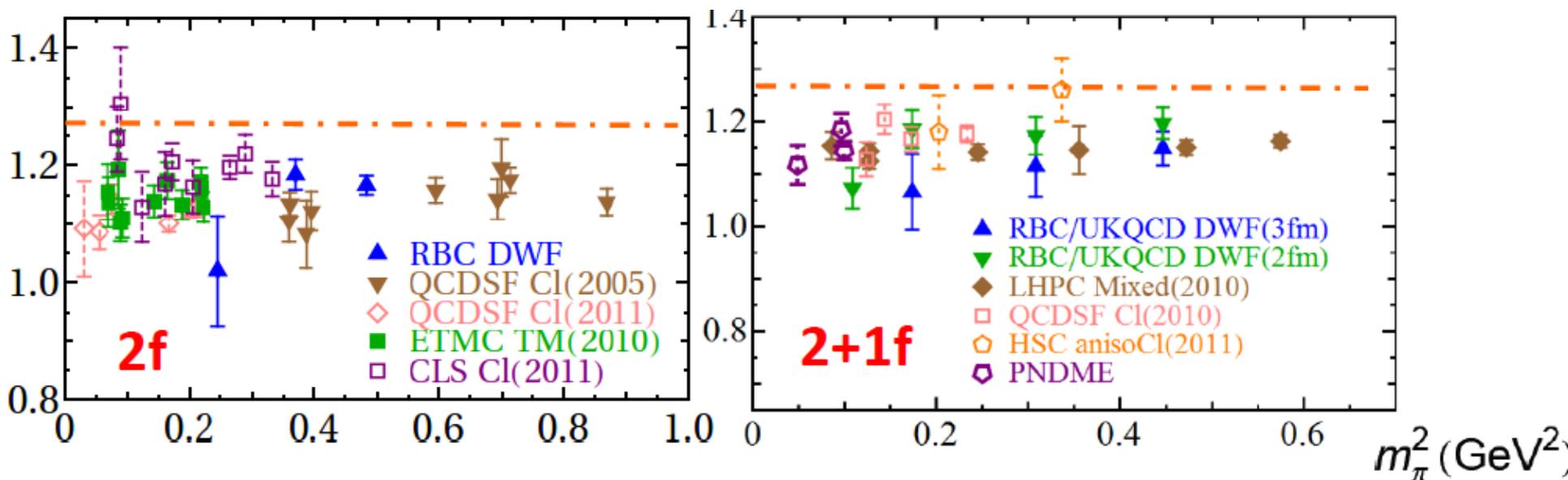
でも実はちょっと...

# でも実はちょっと...

- などなどと、よいことを並べてきたわけです。
- ほんとですかねえ。うまくいかないのを黙ってるだけでは？

## • 核子の軸性荷電 $g_A$

Lin @ Lattice 2012

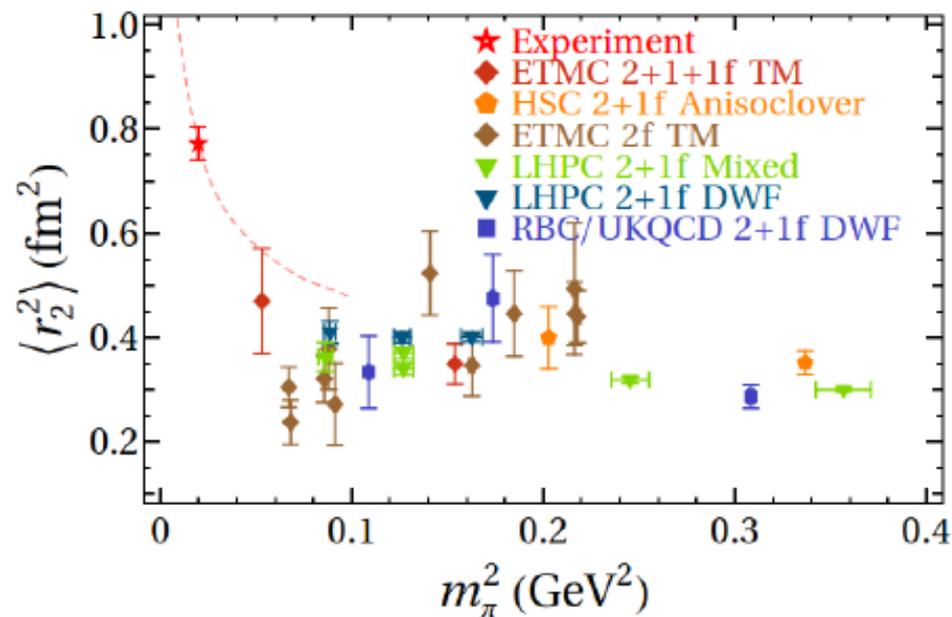
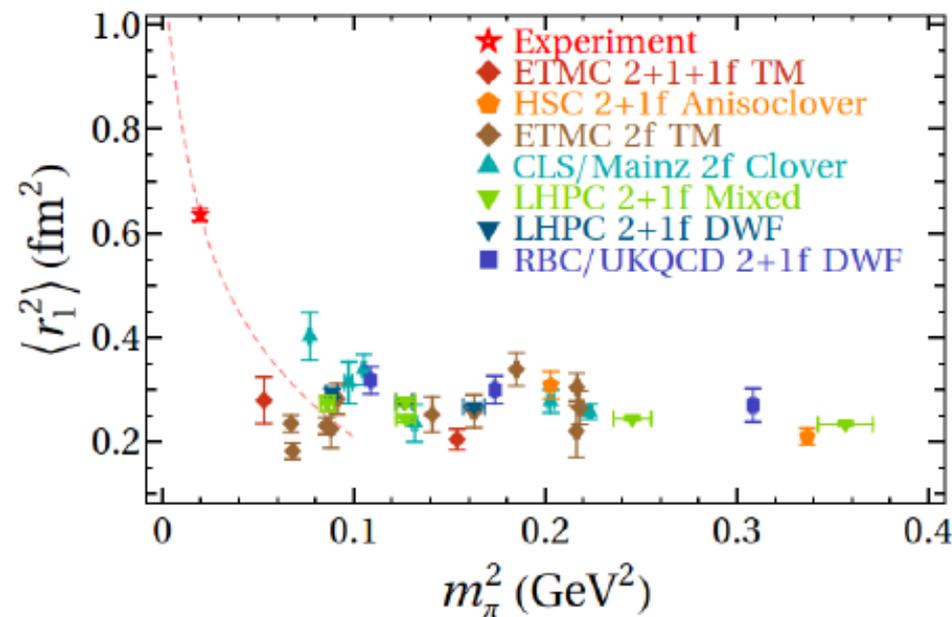


どうも合わない。有限体積効果？ 励起状態の寄与？ よくわかってない。

# 他にもこんなの。

- 核子の荷電半径 (形状因子のスロープ)

Lin @ Lattice 2012



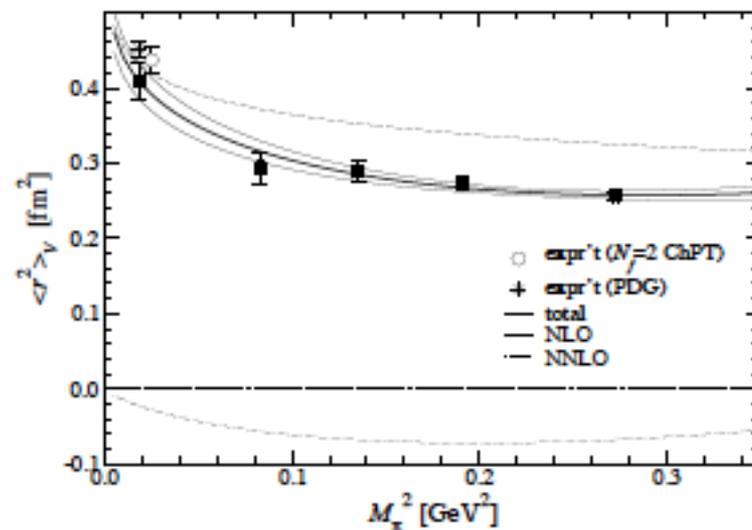
- 単に核子は難しいというだけ？

- それはそう。でもそれならそれで、誤差が評価できないと。

# 他にもこんなの。

- 一番よくわかっているはずなのは、パイ中間子
  - カイラル有効理論を信頼してもよさそう。
  - 格子計算ももっとも簡単。精度のよい計算ができる。
- パイ中間子の荷電半径(形状因子の $Q^2=0$ での傾き)
  - カイラル摂動論によれば質量ゼロでログ発散。
  - 現象論的にもっともらしい係数をとると高次の項が無視できない。

JLQCD (2009)



# まとめ

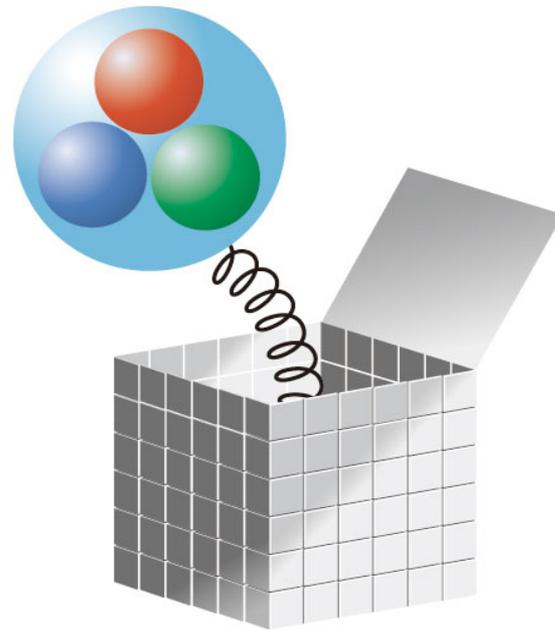
---

# まとめ (達成 or 挫折?)

- 昔と比べると...
  - 20年前 (3 GFlops): クエンチ近似。小さい格子。重いパイ中間子。それでも気分は楽観的。そのうち計算機は速くなるし、ダイナミカル・クォークができればいろんな量の精密計算はすぐできる... はず。
  - 10年前 (1 TFlops): ダイナミカル・クォークができるようになった。でも、カイラル摂動論と全然合わない。きっとまだ重すぎる。しかし軽くできるのはいつのことやら。
  - 今 (1 PFlops): 軽いダイナミカル・クォークは普通になってきた。系統誤差もある程度制御できる。計算できる物理量の幅が広がった。多少の問題はあるにしても... 。
- 10年後 (EFlops): ...

# まとめ (宿題 ?)

- 私が面白そうだと思うこと。
  - D と B の物理: 10年くらい遠ざかっていたけど、今の技術でもう一度。exclusive vs inclusive を何とかしないと。
  - パイ中間子の物理: カイラル摂動論との整合性はかなりチェックされた。でもまだ完全ではない。荷電半径。
  - K中間子: セミレプトニックがちゃんとできたら次は稀崩壊も。K $\rightarrow$ pp も進歩しそう。
  - 他の応用:  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$  の計算ができるようになった。他にも  $\pi \rightarrow l\nu\gamma$  とか。
  - 核子: 大事なんだけど問題山積み。
  - NEDM: トポロジーとの関係を理解したい。
  - ...
  - muon g-2: 山田さん!



予備

---

# 質量、崩壊定数...

- 2点関数

$$C_{XY}(t; \vec{p}) = \sum_{\vec{x}} \langle O_X(t, \vec{x}) O_Y^\dagger(0) \rangle e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}}.$$

- 状態の完全系で展開

$$C_{XY}(t; \vec{p}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2E_i(\vec{p})} \langle 0 | O_X(0) | H_i(\vec{p}) \rangle \langle H_i(\vec{p}) | O_Y^\dagger(0) | 0 \rangle e^{-E_i(\vec{p})t}$$

- 十分離れたところでみる

$$C_{XY}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2E_0(\vec{p})} \langle 0 | O_X(0) | H_0(\vec{p}) \rangle \langle H_0(\vec{p}) | O_Y^\dagger(0) | 0 \rangle e^{-E_0(\vec{p})t}$$

↑  
演算子の行列要素

↑  
基底状態の質量

# 形状因子

- 3点関数
  - 例えば、

$$C_{KV_\mu D}(t_x, t_y; \vec{p}) = \sum_{\vec{x}, \vec{y}} \langle O_K(t_x, \vec{x}) V_\mu(0) O_D^\dagger(t_y, \vec{y}) \rangle e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}}$$

- 完全系を挿入

$$C_{KV_\mu D}(t_x, t_y; \vec{p}) = \sum_{i,j} \frac{1}{2m_{D_i} 2E_{K_j}(\vec{p})} e^{-m_{D_i} t_x - E_{K_j}(\vec{p}) |t_y|} \times$$

$$\times \langle 0 | O_K(t_x, \vec{x}) | K_i(\vec{p}) \rangle \langle K_i(\vec{p}) | V_\mu(0) | D_j(\vec{0}) \rangle \langle D_j(\vec{0}) | O_D^\dagger(0) | 0 \rangle$$

知りたい行列要素



# 核子の形状因子

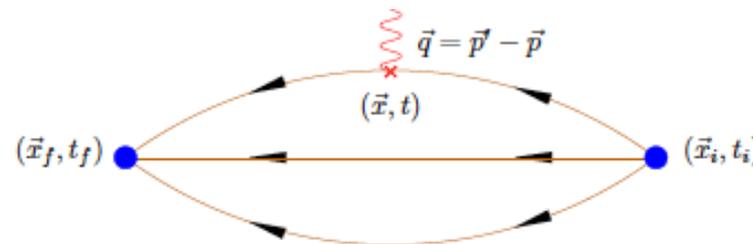
- ベクトル・カレント

$$\langle N(p', s') | j^\mu | N(p, s) \rangle = \left( \frac{m_N^2}{E_N(\mathbf{p}') E_N(\mathbf{p})} \right)^{1/2} \bar{u}(p', s') \left[ \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m_N} F_2(q^2) \right] u(p, s)$$

- 電弱形状因子

$$G_E(q^2) = F_1(q^2) + \frac{q^2}{(2m_N)^2} F_2(q^2)$$

$$G_M(q^2) = F_1(q^2) + F_2(q^2)$$



- 軸性ベクトルカレント

$$\langle N(p', s') | A_\mu^3 | N(p, s) \rangle = \frac{i}{2} \left( \frac{m_N^2}{E_N(\mathbf{p}') E_N(\mathbf{p})} \right)^{1/2} \bar{u}(p', s') \left[ \gamma_\mu \gamma_5 G_A(q^2) + \frac{q_\mu \gamma_5}{2m_N} G_P(q^2) \right] u(p, s)$$