高温高密度格子QCDの最近の進展

江尻信司、新潟大学

素粒子物理学の進展2014

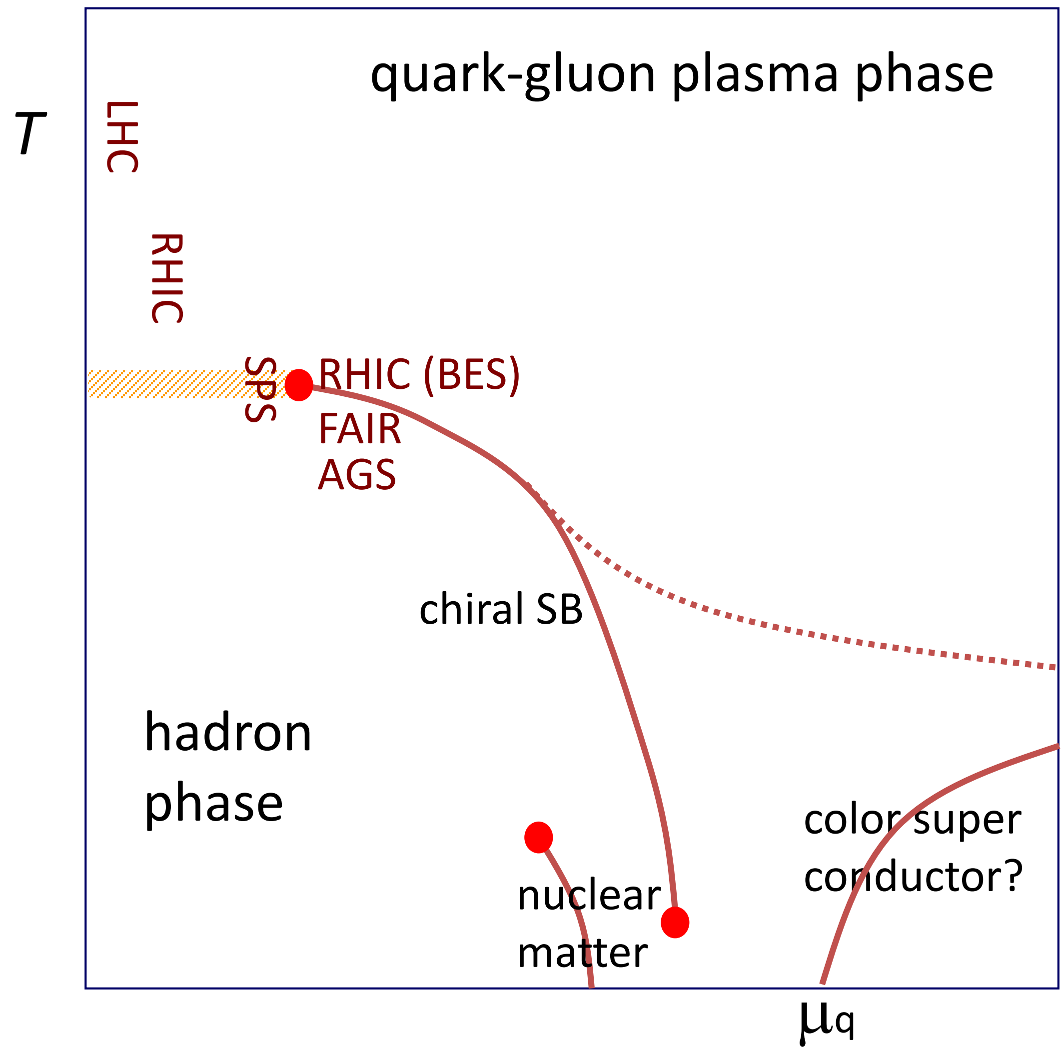
2014年7月31日、基礎物理学研究所

高温高密度でのQCDの相構造

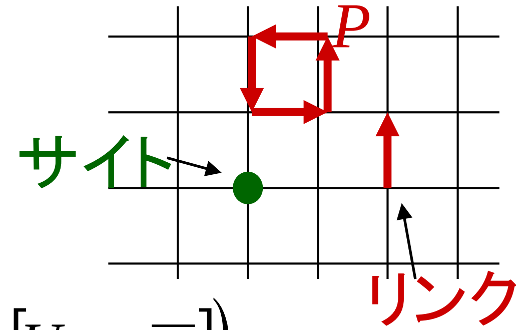
- 相構造・相境界
- 臨界点

- LHC・RHICの重イオン衝突実験
- RHIC・ビーム・エネルギー走査

- 格子QCDの数値計算
- 低密度ではいろいろな成果。
- 高密度では未だに計算ができない。



Lattice QCD (シミュレーション)



- 力学変数：ゲージ場 $U_\mu \in SU(3)$、リンク上
  クォーク場 $\psi, \bar{\psi}$（グラスマン数）、サイト上
- 分配関数:

$$Z = \int \prod_{x,\mu} dU_\mu(x) \prod_x d\psi(x) d\bar{\psi}(x) \exp\left(-S_g[U] - S_q\left[U, \psi, \bar{\psi}\right]\right)$$

$$S_g = -6N_{\text{site}}\beta P, \qquad P = \frac{1}{6N_{\text{site}}} \sum_{n,\mu\neq\nu} \frac{1}{3} \mathrm{tr}\left[U_\mu(n) U_\nu(n+\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(n+\hat{\nu}) U_\nu^\dagger(n)\right] \quad \text{(plaquette)}$$

- Grassmann 積分をする、（Grassmann数はコンピューターの上にのらない。）

$$Z = \int \prod_{x,\mu} dU_\mu(x) \left(\det M\right)^{N_\mathrm{f}} \mathrm{e}^{-S_g}, \qquad S_q = \sum_{i=1}^{N_\mathrm{f}} \bar{\psi}_i M \psi_i$$

- Monte-Carlo法でゲージ場の配位を生成して経路積分を実行する。
- 物理量Oの計算

$$\langle O \rangle_{(\beta,m)} = \frac{1}{Z} \int \underline{DU_\mu} O\left[U_\mu\right] \underline{\left(\det M\right)^{N_\mathrm{f}} \mathrm{e}^{-S_g(\beta)}}$$

この重みでゲージ場の配位を生成

熱力学量の計算

- 圧力 $$\frac{p}{T^4} = \frac{1}{VT^3} \ln Z$$
  - lnZ の微分を計算して、圧力がゼロの点から積分していく。
- lnZ の微分を計算、（ほとんどの熱力学量は微分で表せる）

$$\frac{\partial \ln Z}{\partial m} = \frac{1}{Z} \int \prod_{x,\mu} dU_\mu(x) N_\mathrm{f} \ \mathrm{tr} M^{-1} \left(\det M\right)^{N_\mathrm{f}} \ \mathrm{e}^{-S_g} \approx \frac{1}{N_\mathrm{conf.}} \sum_{\{U_\mu(x)\}} N_\mathrm{f} \ \mathrm{tr} M^{-1}$$

カイラル凝縮: $$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = \frac{T}{V} \frac{\partial \ln Z}{\partial m}$$

クォーク数密度: $$n_\mathrm{q} = \frac{T}{V} \frac{\partial \ln Z}{\partial \mu_\mathrm{q}}$$

エネルギー密度: $$\varepsilon = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T^{-1}} \right)_{\mu/T}$$

有限バリオン数密度での符号問題

$$(M(\mu))^\dagger = \gamma_5 M(-\mu)\gamma_5$$

$$\Rightarrow \underline{(\det M(\mu))^* = \det M(-\mu) \neq \det M(\mu)}$$

- Boltzmann の重み: μ>0 では複素数
  - モンテカルロ法が直接は使えない。
  - その重みでconfigurationが生成できない。

$$Z = \int DU\,(\det M(\mu))^{N_\mathrm{f}}\ \mathrm{e}^{-S_g}$$

$$\boxed{\det M \equiv \left|\det M\right| \mathrm{e}^{i\theta}}$$

- Reweighting（再重み付け）法 ➡ Sign problem（符号問題）！
  - μ=0でシミュレーションを行う。

$$\langle O\rangle_{(\beta,\mu)} = \frac{1}{Z}\int DUO\,(\det M(\mu))^{N_\mathrm{f}}\ \mathrm{e}^{-S_g(\beta)} = \frac{\left\langle O\mathrm{e}^{i\theta}\left|\det^{N_\mathrm{f}} M(\mu)/\det^{N_\mathrm{f}} M(0)\right|\right\rangle_{(\beta,0)}}{\left\langle \mathrm{e}^{i\theta}\left|\det^{N_\mathrm{f}} M(\mu)/\det^{N_\mathrm{f}} M(0)\right|\right\rangle_{(\beta,0)}}$$

  - もし $\mathrm{e}^{i\theta}$ が符号を頻繁に変えたら、$\langle O\mathrm{e}^{i\theta}\cdots\rangle_{(\beta,0)}$, $\langle \mathrm{e}^{i\theta}\cdots\rangle_{(\beta,0)}$ が非常に小さくなる。$\langle O\rangle_{(\beta,\mu)}$ は計算できなくなる。

純虚数化学ポテンシャルなら、クォーク行列式が実数

低密度領域での成功

- 相転移温度
- 状態方程式
- 低密度でのテイラー展開法

ゼロ密度での相転移温度・状態方程式

- スタッガード型クォークによる物理質量点での転移温度
- HotQCD Collaboration (2012)

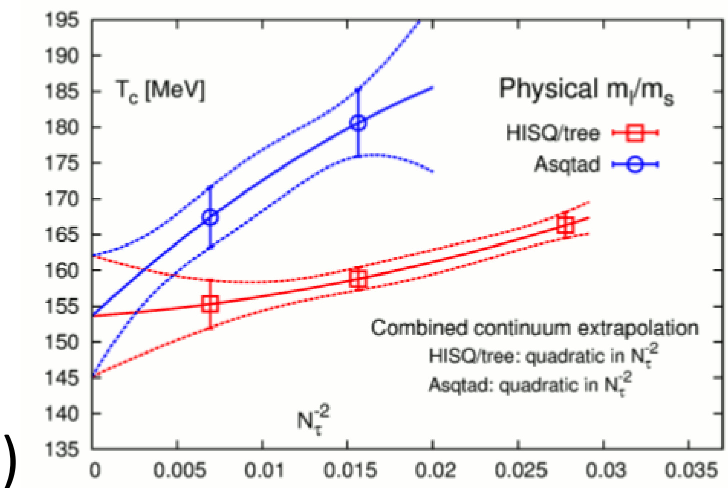
$$T_C = 154(9)\ \mathrm{MeV}$$

- Wuppertal-Budapest group(2010)

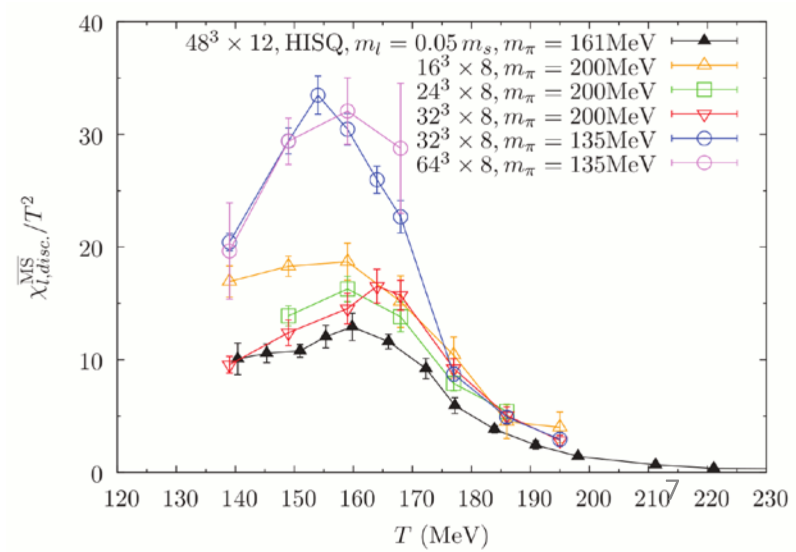
$$T_C = 147(2)(3)\ \mathrm{MeV}$$

- ウィルソン型クォークの結果
  - Domein-wall fermion
  - HotQCD、arXiv:1402.5175

$$T_C = 155(9)\ \mathrm{MeV}$$

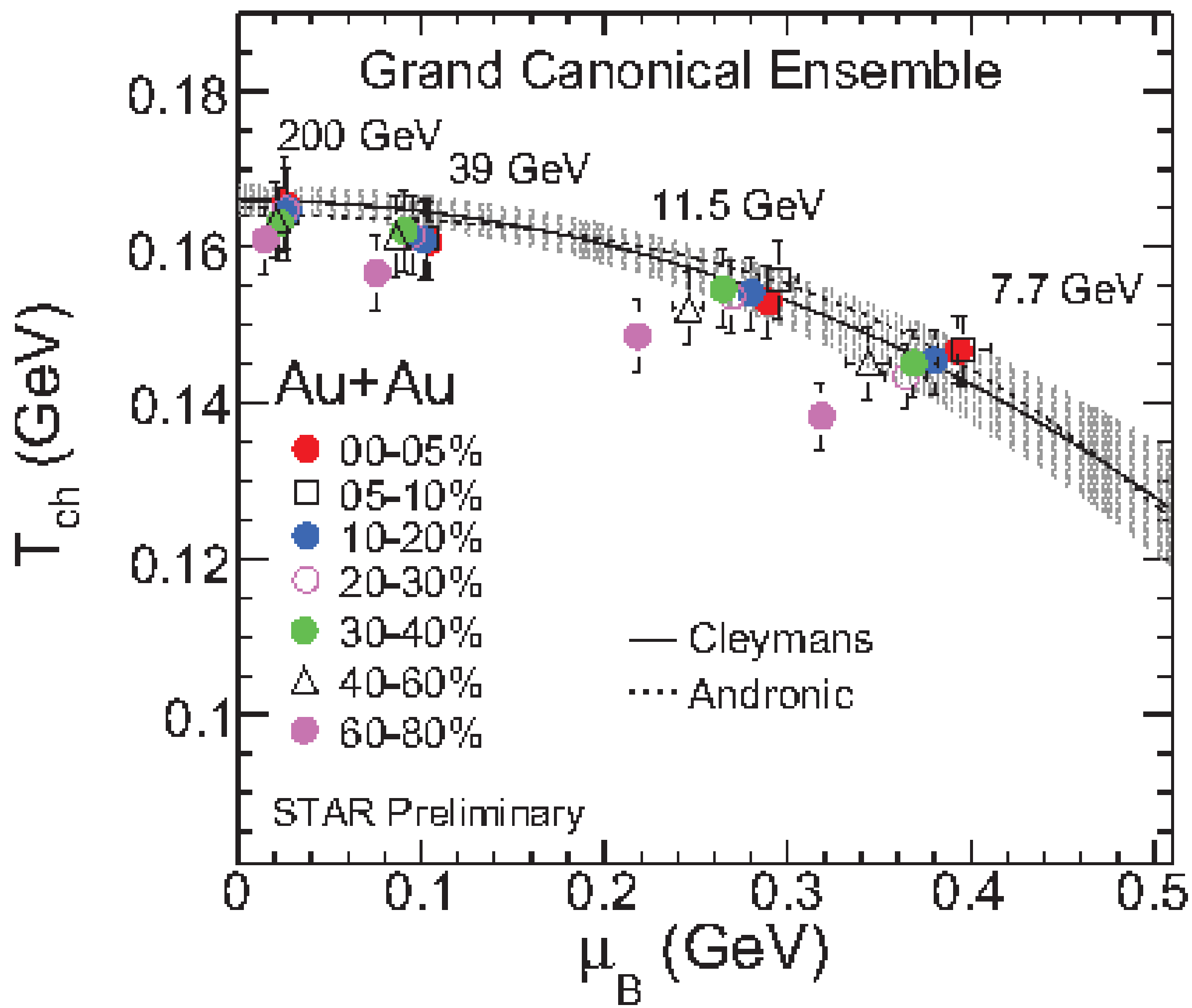


HotQCD: Phys. Rev. D85, 054503 (2012)



RHIC ビームエネルギー走査

- ビームのエネルギーを調節して密度を変化させる。



STAR, 2012
BES-I

BES-II 計画中

GSIのFair や J-PARCでも同様の実験を計画中。

化学凍結温度・化学ポテンシャル

- 従来の結果：自由粒子の温度化学ポテンシャル依存性を基礎に、粒子数比のデータを再現するように凍結点を決定。
- 最近の進展：格子QCDで計算された状態方程式から化学凍結点を決められるようになった。
- テイラー展開法：$\ln Z(T,\mu)$を$\mu=0$のまわりのテイラー展開で計算

$$\chi_n^Q(T,\vec{\mu}) = \frac{1}{VT^3}\frac{\partial^n \ln \mathbb{Z}(T,\vec{\mu})}{\partial(\mu_Q/T)^n}$$

$$\delta N_Q = N_Q - \langle N_Q \rangle$$

μ_Q:電荷の化学ポテンシャル

実験結果

$$\frac{M_Q(\sqrt{s})}{\sigma_Q^2(\sqrt{s})} = \frac{\langle N_Q \rangle}{\langle (\delta N_Q)^2 \rangle} = \frac{\chi_1^Q(T,\mu_B)}{\chi_2^Q(T,\mu_B)} = R_{12}^Q(T,\mu_B)$$

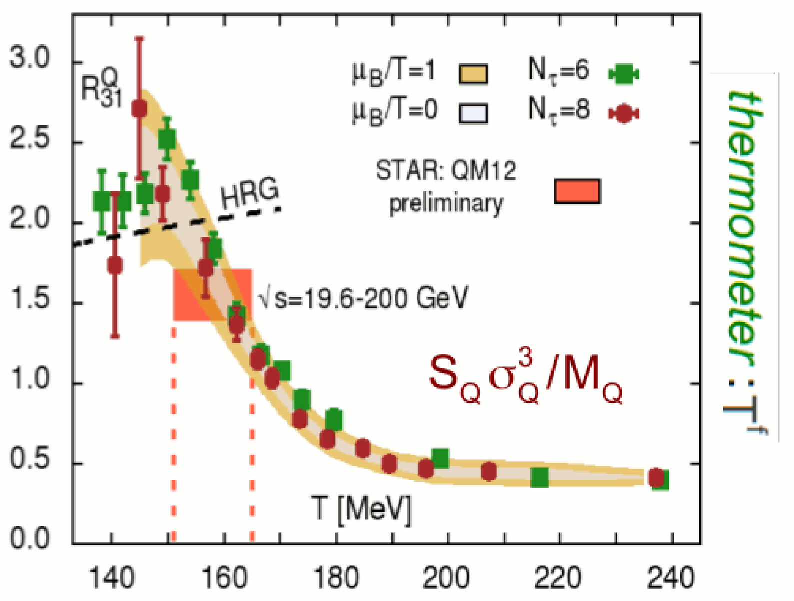
$$\frac{S_Q(\sqrt{s})\sigma_Q^3(\sqrt{s})}{M_Q(\sqrt{s})} = \frac{\langle (\delta N_Q)^3 \rangle}{\langle N_Q \rangle} = \frac{\chi_3^Q(T,\mu_B)}{\chi_1^Q(T,\mu_B)} = R_{31}^Q(T,\mu_B)$$

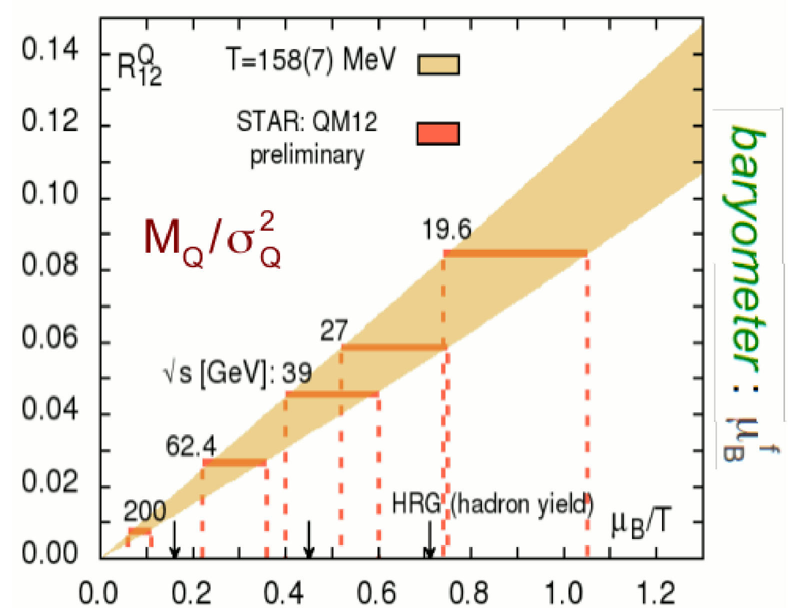
格子計算の結果

比較して、T, μ_B を決める。

保存カレント（電荷）のキュムラント比

BNL-Bielefeld, Phys. Rev. Lett. 109, 192302 (2012)



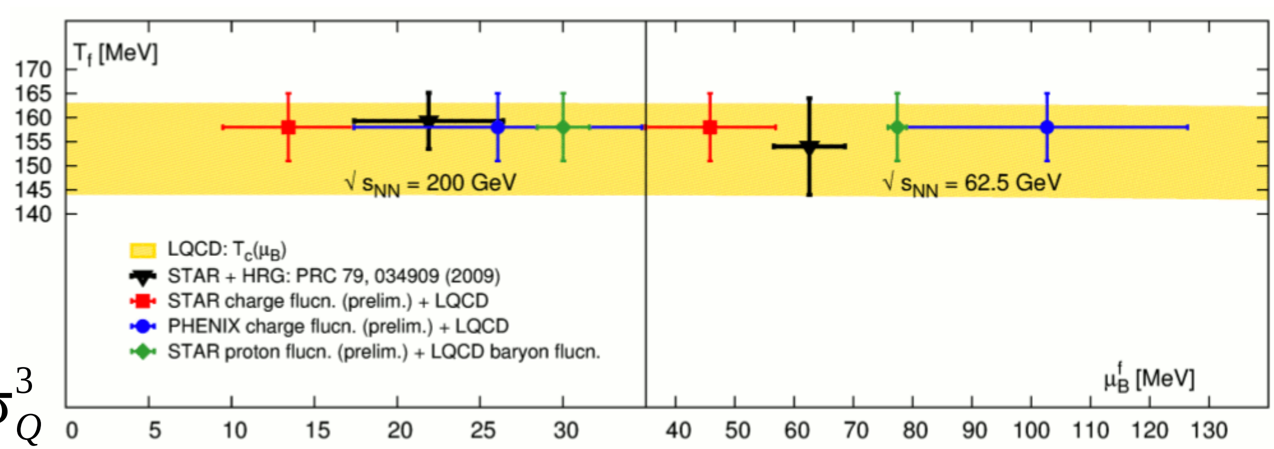


- Taylor 展開法

平均 $$M_Q = \langle n_Q \rangle$$

分散 $$\sigma_Q^2 = \left\langle (\delta n_Q)^2 \right\rangle$$

skewnes $$S_Q = \left\langle (\delta n_Q)^3 \right\rangle / \sigma_Q^3$$



Mukherjee, PoS CPOD2013, 039 (2013)

Taylor展開法による状態方程式

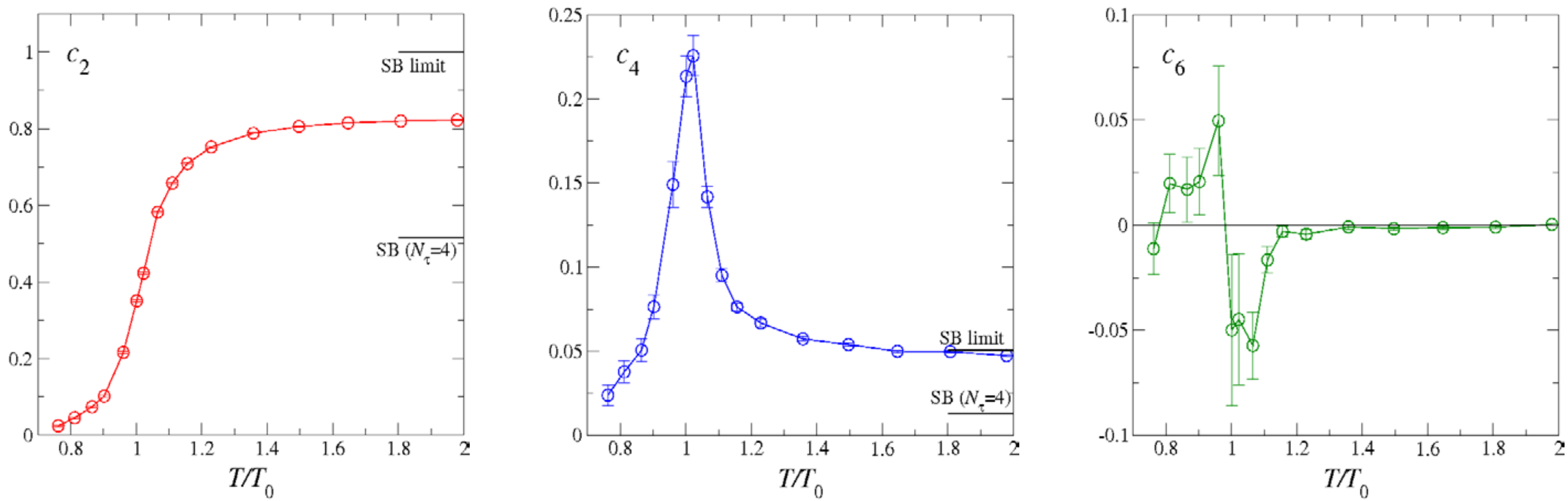
- Taylor 展開 (μ=0にて)
  - Taylor展開の係数のμ=0での計算: 符号問題と無関係。
  - 重イオン衝突実験で興味があるのは低密度領域。

$$\frac{p}{T^4} = \frac{1}{VT^3}\ln Z = c_0 + c_2\left(\frac{\mu_q}{T}\right)^2 + c_4\left(\frac{\mu_q}{T}\right)^4 + c_6\left(\frac{\mu_q}{T}\right)^6 + \cdots$$

$$\boxed{c_n = \frac{N_\tau^3}{n!\,N_\sigma^3}\frac{\partial^n \ln Z}{\partial(\mu_q/T)^n}}$$

- Bielefeld-Swansea Collab., Phys.Rev.D68(2003)014507; D71, 054508 (2005)
  - 2-flavor p4-improved staggered fermion action

m_π~770MeV, m_π/m_ρ~0.7



Derivatives of grand partition function

$$c_2 = \frac{N_\tau}{2! N_\sigma^3} \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \mu^2} = \frac{N_\tau}{2! N_\sigma^3} \mathrm{A}_2, \quad c_4 = \frac{1}{4! N_\sigma^3 N_\tau} \frac{\partial^4 \ln Z}{\partial \mu^4} = \frac{1}{4! N_\sigma^3 N_\tau} \left(\mathrm{A}_4 - 3\mathrm{A}_2^2\right),$$

$$c_6 = \frac{1}{6! N_\sigma^3 N_\tau^3} \frac{\partial^6 \ln Z}{\partial \mu^6} = \frac{1}{6! N_\sigma^3 N_\tau^3} \left(\mathrm{A}_6 - 15\mathrm{A}_4\mathrm{A}_2 + 30\mathrm{A}_2^3\right).$$

$$\left(\mu \equiv \mu_q a = \left(\mu_q / T\right) / N_\tau\right) \quad \text{Lattice size} : N_\sigma^3 \times N_\tau$$

staggered fermion の場合

$$\mathrm{A}_2 = \left\langle \frac{N_f}{4} \frac{\partial^2 \ln\det M}{\partial \mu^2} \right\rangle + \left\langle \left(\frac{N_f}{4} \frac{\partial \ln\det M}{\partial \mu} \right)^2 \right\rangle$$

$$\mathrm{A}_4 = \left\langle \frac{N_f}{4} \frac{\partial^4 \ln\det M}{\partial \mu^4} \right\rangle + 4\left\langle \left(\frac{N_f}{4}\right)^2 \frac{\partial^3 \ln\det M}{\partial \mu^3} \frac{\partial \ln\det M}{\partial \mu} \right\rangle + 3\left\langle \left(\frac{N_f}{4} \frac{\partial^2 \ln\det M}{\partial \mu^2} \right)^2 \right\rangle + 6\left\langle \left(\frac{N_f}{4}\right)^3 \frac{\partial^2 \ln\det M}{\partial \mu^2} \left(\frac{\partial \ln\det M}{\partial \mu}\right)^2 \right\rangle + \left\langle \left(\frac{N_f}{4} \frac{\partial \ln\det M}{\partial \mu} \right)^4 \right\rangle$$

$$\mathrm{A}_6 = \left\langle \frac{N_f}{4} \frac{\partial^6 \ln\det M}{\partial \mu^6} \right\rangle + 6\left\langle \left(\frac{N_f}{4}\right)^2 \frac{\partial^5 \ln\det M}{\partial \mu^5} \frac{\partial \ln\det M}{\partial \mu} \right\rangle + 15\left\langle \left(\frac{N_f}{4}\right)^2 \frac{\partial^4 \ln\det M}{\partial \mu^4} \frac{\partial^2 \ln\det M}{\partial \mu^2} \right\rangle + 10\left\langle \left(\frac{N_f}{4} \frac{\partial^3 \ln\det M}{\partial \mu^3} \right)^2 \right\rangle$$

$$+15\left\langle \left(\frac{N_f}{4}\right)^3 \frac{\partial^4 \ln\det M}{\partial \mu^4} \left(\frac{\partial \ln\det M}{\partial \mu}\right)^2 \right\rangle + 60\left\langle \left(\frac{N_f}{4}\right)^3 \frac{\partial^3 \ln\det M}{\partial \mu^3} \frac{\partial^2 \ln\det M}{\partial \mu^2} \frac{\partial \ln\det M}{\partial \mu} \right\rangle + 15\left\langle \left(\frac{N_f}{4} \frac{\partial^2 \ln\det M}{\partial \mu^2} \right)^3 \right\rangle + 20\left\langle \left(\frac{N_f}{4}\right)^4 \frac{\partial^3 \ln\det M}{\partial \mu^3} \left(\frac{\partial \ln\det M}{\partial \mu}\right)^3 \right\rangle$$

$$+45\left\langle \left(\frac{N_f}{4}\right)^4 \left(\frac{\partial^2 \ln\det M}{\partial \mu^2}\right)^2 \left(\frac{\partial \ln\det M}{\partial \mu}\right)^2 \right\rangle + 15\left\langle \left(\frac{N_f}{4}\right)^5 \frac{\partial^2 \ln\det M}{\partial \mu^2} \left(\frac{\partial \ln\det M}{\partial \mu}\right)^4 \right\rangle + \left\langle \left(\frac{N_f}{4} \frac{\partial \ln\det M}{\partial \mu} \right)^6 \right\rangle$$

- ln det *M* の微分は *M* のトレース

➡ random noise method を使って計算できる。

Derivatives of grand partition function

$$c_2 = \frac{N_\tau}{2!N_\sigma^3}\frac{\partial^2 \ln Z}{\partial\mu^2} = \frac{N_\tau}{2!N_\sigma^3}\mathrm{A}_2, \quad c_4 = \frac{1}{4!N_\sigma^3 N_\tau}\frac{\partial^4 \ln Z}{\partial\mu^4} = \frac{1}{4!N_\sigma^3 N_\tau}\left(\mathrm{A}_4 - 3\mathrm{A}_2^2\right),$$

$$c_6 = \frac{1}{6!N_\sigma^3 N_\tau^3}\frac{\partial^6 \ln Z}{\partial\mu^6} = \frac{1}{6!N_\sigma^3 N_\tau^3}\left(\mathrm{A}_6 - 15\mathrm{A}_4\mathrm{A}_2 + 30\mathrm{A}_2^3\right).$$

$$\boxed{O(\mu^{10}): 7\ \text{terms},\ \ O(\mu^{18}): 30\ \text{terms}}$$

$$\left(\mu \equiv \mu_q a = \left(\mu_q / T\right)/N_\tau\right) \quad \text{Lattice size}: N_\sigma^3 \times N_\tau$$

staggered fermion の場合

$$\mathrm{A}_2 = \left\langle \frac{N_f}{4}\frac{\partial^2 \ln\det M}{\partial\mu^2}\right\rangle + \left\langle\left(\frac{N_f}{4}\frac{\partial \ln\det M}{\partial\mu}\right)^2\right\rangle$$

$$\mathrm{A}_4 = \left\langle \frac{N_f}{4}\frac{\partial^4 \ln\det M}{\partial\mu^4}\right\rangle + 4\left\langle\left(\frac{N_f}{4}\right)^2\frac{\partial^3 \ln\det M}{\partial\mu^3}\frac{\partial \ln\det M}{\partial\mu}\right\rangle + 3\left\langle\left(\frac{N_f}{4}\frac{\partial^2 \ln\det M}{\partial\mu^2}\right)^2\right\rangle + 6\left\langle\left(\frac{N_f}{4}\right)^3\frac{\partial^2 \ln\det M}{\partial\mu^2}\left(\frac{\partial \ln\det M}{\partial\mu}\right)^2\right\rangle + \left\langle\left(\frac{N_f}{4}\frac{\partial \ln\det M}{\partial\mu}\right)^4\right\rangle$$

$$\mathrm{A}_6 = \left\langle \frac{N_f}{4}\frac{\partial^6 \ln\det M}{\partial\mu^6}\right\rangle + 6\left\langle\left(\frac{N_f}{4}\right)^2\frac{\partial^5 \ln\det M}{\partial\mu^5}\frac{\partial \ln\det M}{\partial\mu}\right\rangle + 15\left\langle\left(\frac{N_f}{4}\right)^2\frac{\partial^4 \ln\det M}{\partial\mu^4}\frac{\partial^2 \ln\det M}{\partial\mu^2}\right\rangle + 10\left\langle\left(\frac{N_f}{4}\frac{\partial^3 \ln\det M}{\partial\mu^3}\right)^2\right\rangle$$

$$+15\left\langle\left(\frac{N_f}{4}\right)^3\frac{\partial^4 \ln\det M}{\partial\mu^4}\left(\frac{\partial \ln\det M}{\partial\mu}\right)^2\right\rangle + 60\left\langle\left(\frac{N_f}{4}\right)^3\frac{\partial^3 \ln\det M}{\partial\mu^3}\frac{\partial^2 \ln\det M}{\partial\mu^2}\frac{\partial \ln\det M}{\partial\mu}\right\rangle + 15\left\langle\left(\frac{N_f}{4}\frac{\partial^2 \ln\det M}{\partial\mu^2}\right)^3\right\rangle + 20\left\langle\left(\frac{N_f}{4}\right)^4\frac{\partial^3 \ln\det M}{\partial\mu^3}\left(\frac{\partial \ln\det M}{\partial\mu}\right)^3\right\rangle$$

$$+45\left\langle\left(\frac{N_f}{4}\right)^4\left(\frac{\partial^2 \ln\det M}{\partial\mu^2}\right)^2\left(\frac{\partial \ln\det M}{\partial\mu}\right)^2\right\rangle + 15\left\langle\left(\frac{N_f}{4}\right)^5\frac{\partial^2 \ln\det M}{\partial\mu^2}\left(\frac{\partial \ln\det M}{\partial\mu}\right)^4\right\rangle + \left\langle\left(\frac{N_f}{4}\frac{\partial \ln\det M}{\partial\mu}\right)^6\right\rangle$$

$$\boxed{O(\mu^{10}): 42\ \text{terms},\ \ O(\mu^{18}): 385\ \text{terms}}$$

- ln det *M* の微分は *M* のトレース

➡ random noise method を使って計算できる。

Derivatives of grand partition function

$$\frac{\partial \ln\det M}{\partial\mu} = \mathrm{Tr}\left(M^{-1}\frac{\partial M}{\partial\mu}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \ln\det M}{\partial\mu^2} = \mathrm{Tr}\left(M^{-1}\frac{\partial^2 M}{\partial\mu^2}\right) - \mathrm{Tr}\left(M^{-1}\frac{\partial M}{\partial\mu}M^{-1}\frac{\partial M}{\partial\mu}\right)$$

$$\frac{\partial^3 \ln\det M}{\partial\mu^3} = \mathrm{Tr}\left(M^{-1}\frac{\partial^3 M}{\partial\mu^3}\right) - 3\mathrm{Tr}\left(M^{-1}\frac{\partial M}{\partial\mu}M^{-1}\frac{\partial^2 M}{\partial\mu^2}\right) + 2\mathrm{Tr}\left(M^{-1}\frac{\partial M}{\partial\mu}M^{-1}\frac{\partial M}{\partial\mu}M^{-1}\frac{\partial M}{\partial\mu}\right)$$

$$\frac{\partial^4 \ln\det M}{\partial\mu^4} = \mathrm{Tr}\left(M^{-1}\frac{\partial^4 M}{\partial\mu^4}\right) - 4\mathrm{Tr}\left(M^{-1}\frac{\partial M}{\partial\mu}M^{-1}\frac{\partial^3 M}{\partial\mu^3}\right) - 3\mathrm{Tr}\left(M^{-1}\frac{\partial^2 M}{\partial\mu^2}M^{-1}\frac{\partial^2 M}{\partial\mu^2}\right)$$
$$+12\mathrm{Tr}\left(M^{-1}\frac{\partial M}{\partial\mu}M^{-1}\frac{\partial M}{\partial\mu}M^{-1}\frac{\partial^2 M}{\partial\mu^2}\right) - 6\mathrm{Tr}\left(M^{-1}\frac{\partial M}{\partial\mu}M^{-1}\frac{\partial M}{\partial\mu}M^{-1}\frac{\partial M}{\partial\mu}M^{-1}\frac{\partial M}{\partial\mu}\right)$$

$$\boxed{\frac{\partial M^{-1}}{\partial\mu} = -M^{-1}\frac{\partial M}{\partial\mu}M^{-1}}$$

- Random noise method (A: matrix, η: random noise vector)

$$\mathrm{Tr}A \approx \frac{1}{N_n}\sum_{n=1}^{N_n}\eta_n^{+}A\,\eta_n \quad ,$$

ここで η は $\frac{1}{N_n}\sum_{n=1}^{N_n}\eta_{n\,i}^{*}\,\eta_{n\,j} \approx \delta_{i,j}$ を満たす , e.g. $\eta_{n\,j} = \{1,-1\}$

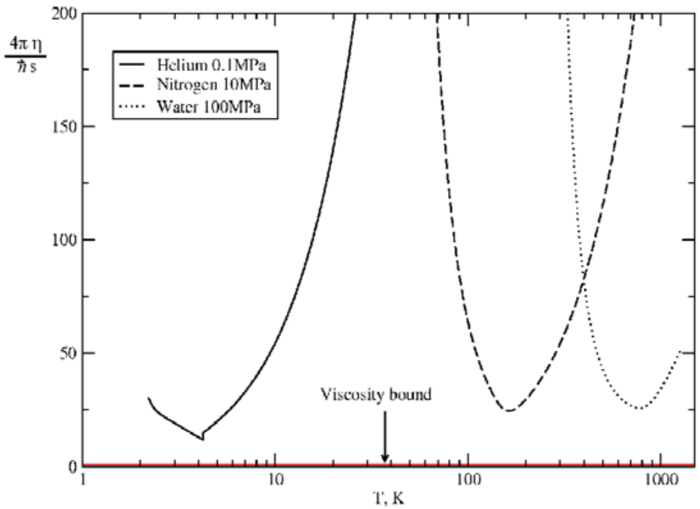
  - $M^{-1}\eta$ の計算は M^{-1} 自身の計算より簡単。

➡ CPU時間を節約して、大きな格子、高統計の計算ができる。

NFQCD 2013での実験屋の叫び「臨界点が見つからない」

- ＢＮＬ　ＲＨＩＣビームエネルギー走査実験
  - ＢＥＳ－Ⅰ　終了
  - ＢＥＳ－Ⅱ 実施予定
    - 高密度領域を重点的に測定

クォークグルーオンプラズマはほぼ完全流体
「粘性のLatticeQCD計算はまだか」

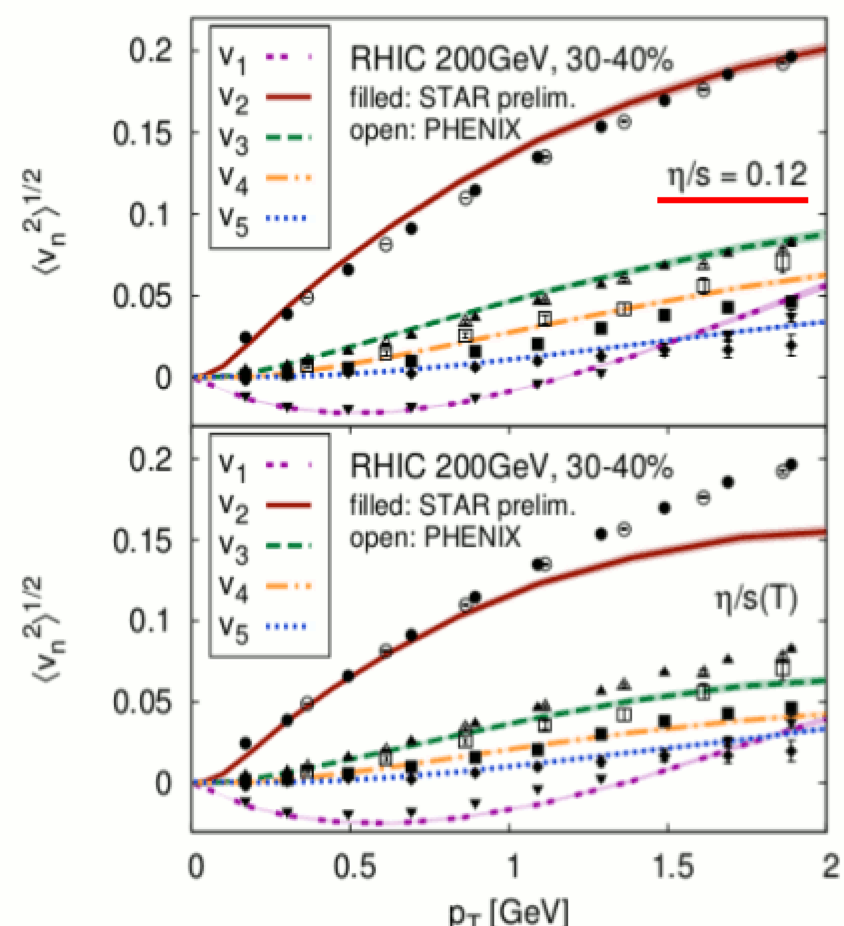


粘性の下限

$\eta/s=1/4\pi$
$=0.08$

Kovtun, Son, Starinets, PRL 94, 111601 (2005) より

Gale et al, PRL 110, 012302 (2012)



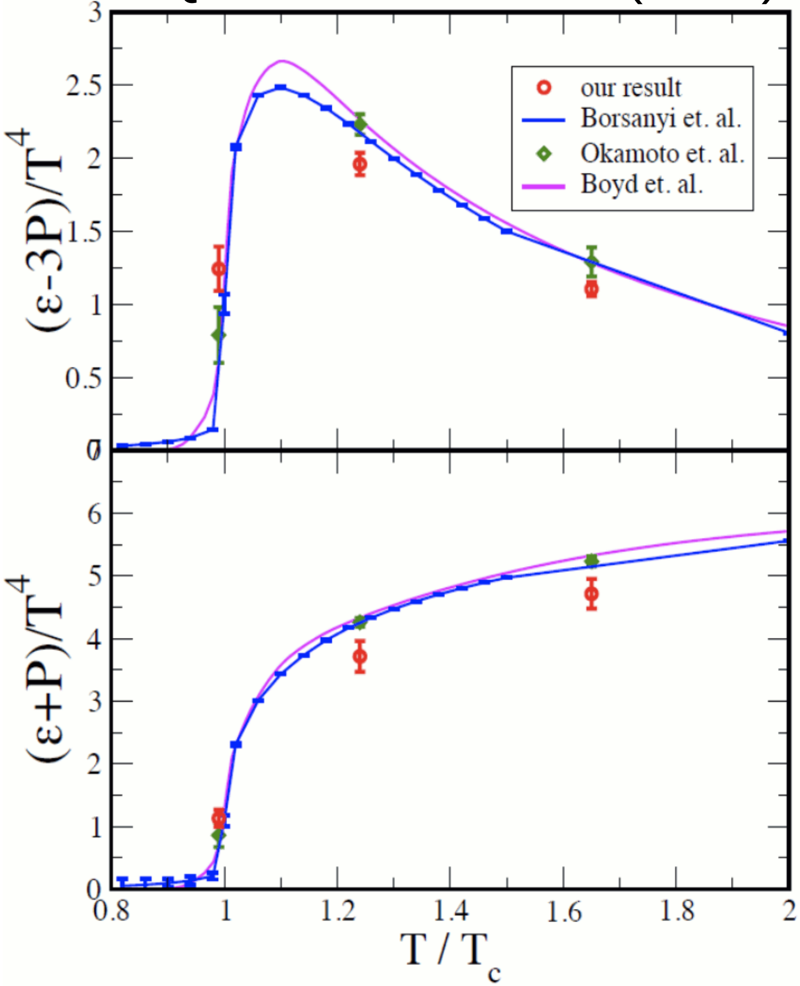
- 粘性のある流体計算:
  実験を再現する粘性: $\eta/s \approx 0.12$
- 格子計算:
  まだクエンチ近似の段階。

エネルギー運動量テンソルの新しい計算方法

- Gradient Flow、Luescher, （2010）
  - 一種のブロックスピン変換
- Gradient Flowを用いたエネルギー運動量テンソルを提案、H. Suzuki (2013)
- その定義によるエネルギー密度・圧力を計算（動的クォークなし）Flow QCD Collaboration (2014)

- 粘性係数の計算には、エネルギー運動量テンソルの相関関数の計算が必要。
- この方法が有効なら、粘性係数も？

Flow QCD Collaboration (2014)



赤が新しい方法の結果
従来の結果とほぼ一致

高密度領域への挑戦

- Reweighting法
  - オーバーラップ問題、符号問題の解決
- 直接シミュレーションを行う。
  - 複素ランジェバン法
    - cf. Lattice2012 review: G. Aarts, arXiv:1302.3028
  - Lefschetz thimble
- 周辺から攻める。
  - 相転移のクォーク質量依存性（物理点だけでなく）
    - 2-flavor QCDの相転移の性質
    - Many-flavor QCDの相転移
  - 純虚数化学ポテンシャル。クォーク行列式が実数。
  - 複素化学ポテンシャル。Lee-Yang zero

Lefschetz thimble

Cristoforetti, Di Renzo, Mukherjee, Scorzato (2012-14),Fujii, Honda, Kato, Kikukawa, Komatsu, Sano (2013), Aartz(2013)

- 領域*D*の複素数の経路積分

$$\int_{\mathscr{D}} d\phi\, \mathscr{O}(\phi) e^{-S(\phi)} = \sum_{\sigma} m_\sigma \int_{\mathscr{J}_\sigma} d\phi\, \mathscr{O}(\phi) e^{-S(\phi)}$$

- 鞍点を通る作用Sの実部の勾配最大で虚部が変化しない線 (Lefschetz thimble)上の積分の和と等しい。(E. Witten (2010))
- その線上でシミュレーションを行う。
- その線上でボルツマンの重みの位相が変わらないので、位相の値ごとに分けた経路積分ができる。
- 符号問題の解決策になるか？

鞍点

Lefschetz thimble

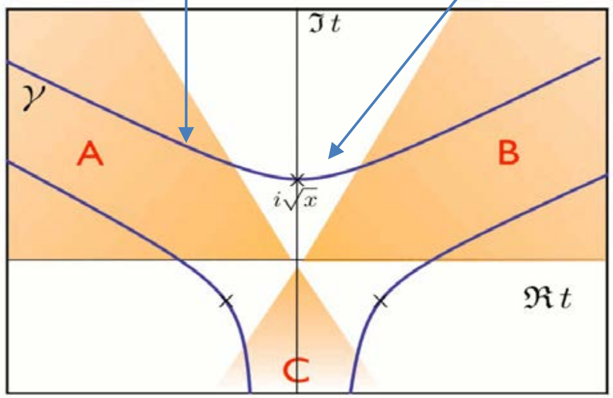
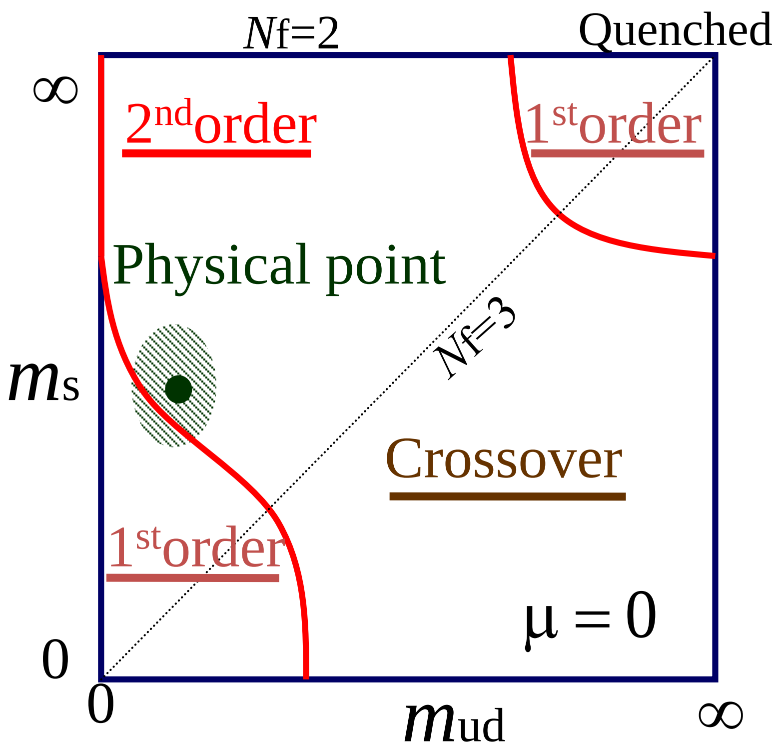
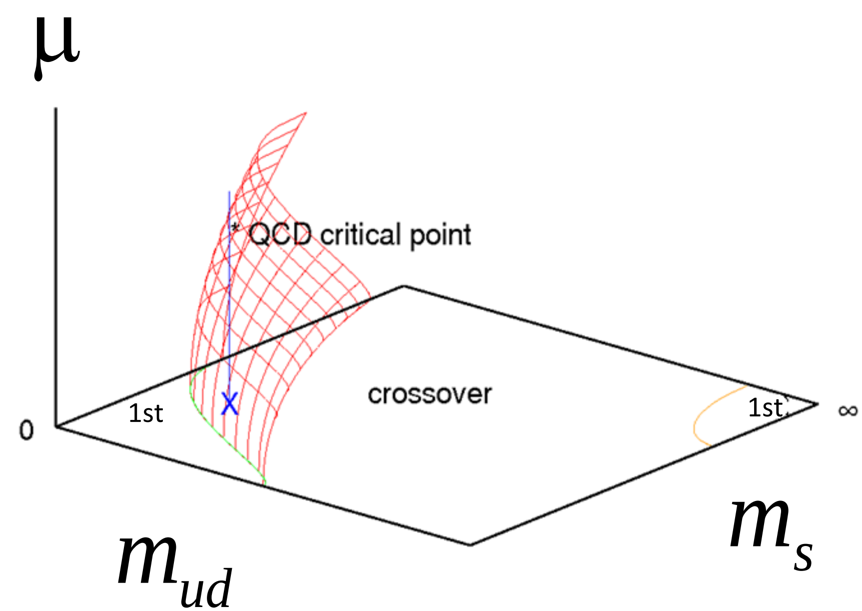


Fig: Scorzato

「熱場の量子論とその応用」
９月３－５日、理研
菊川さんが１時間の講演

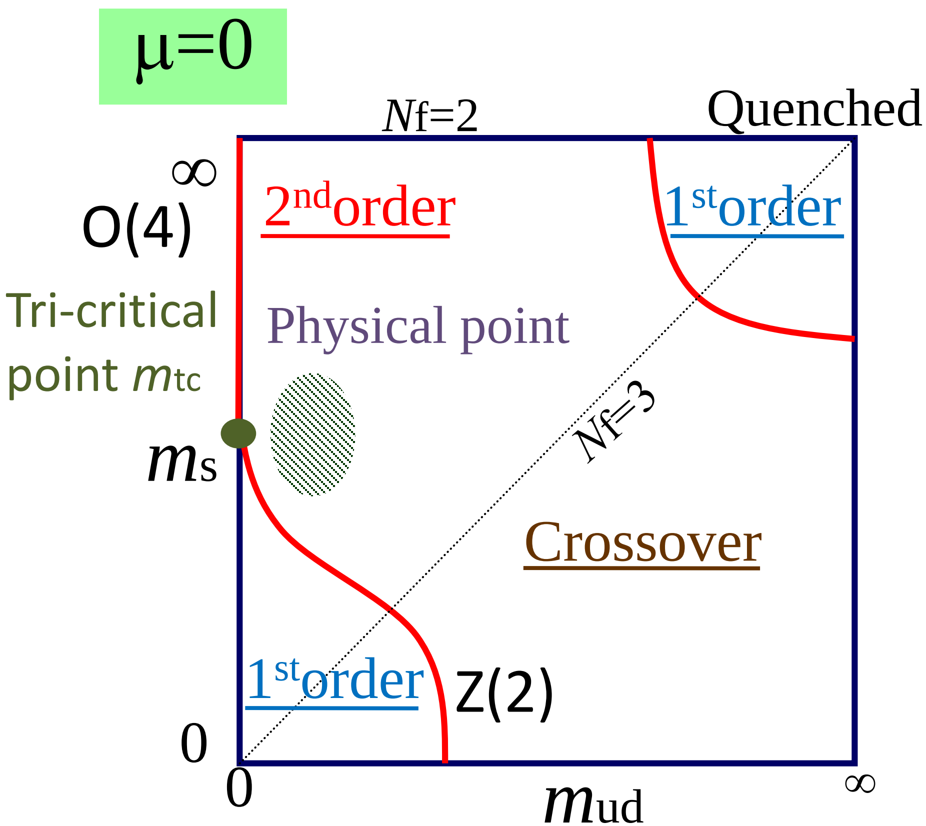
QCD相転移のクォーク質量依存性





- クォーク質量をパラメーターと思うと面白い相構造を持っている。
- 定量的に相境界を計算することが必要。
- 有限密度で物理的な質量点が臨界面を横切るところが、クロスオーバーが一次相転移に変わる臨界点

相転移の次数、スケーリング則



- 一次相転移の領域は狭い。
- 物理的な点ではクロスオーバー：スタッガードでは決定的 (Wuppertal (Aoki et al.), Nature 443(2006) 675, BNL-Bielefeld (Ejiri et al.), PRD80('09))
  - ウィルソン型クォークでは？
- クォーク質量無限大極限
  - Ｚ（３）対称性の破れによる一次相転移
- 2-flavor QCD のカイラル極限
  - ２次相転移、Ｏ（４）ユニバーサリティークラス
  - ただし、Nt=4の改良しないスタッガードフェルミオンの場合、１次？
  - Ｕ（１）Ａ対称性の回復は？

一次相転移領域が非常に小さい

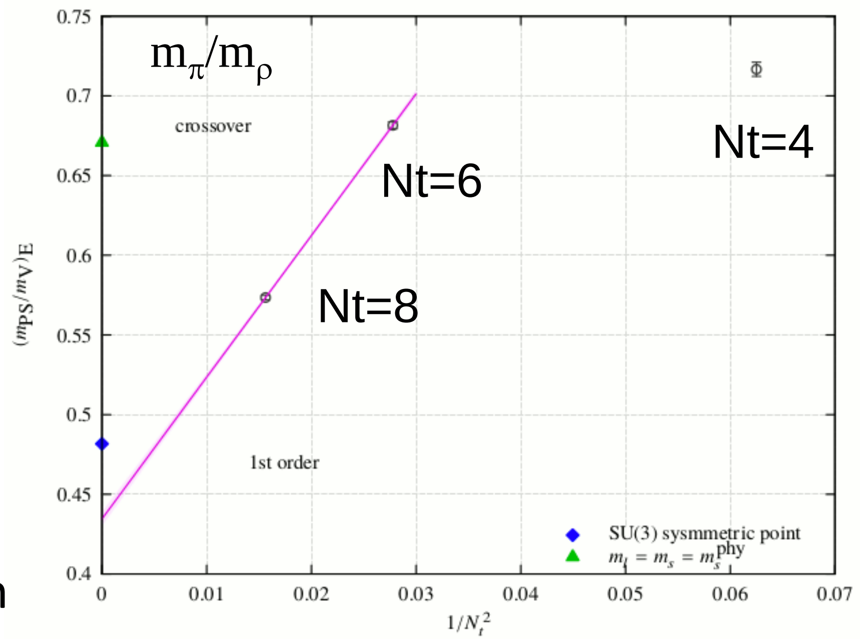
- 縮退した3-flavor QCDの臨界質量
- 格子化の誤差を減らすと領域が小さくなる

スタッガード型クォーク作用の臨界pion質量 m_π

- Nt=4, unimproved staggered,　260MeV
- Nt=6, unimproved staggered,　150MeV
- Nt=4, p4-improved staggered,　70MeV
- Nt=6, stout-improved staggered,　<50MeV
- Nt=6, HISQ,　< 45MeV

[de Forcrand, Philipsen 07, Karsch et.al. 03, Endrodi et.al. 07, Ding et.al. 11]

Y. Nakamura et.al., Lattice 2014



ウィルソン型クォーク作用の臨界質量

- Nt=4, 6, 8, Clover-improved Wilson fermion
- Y. Nakamura et.al. (RIKEN AICS group), Lattice 2014

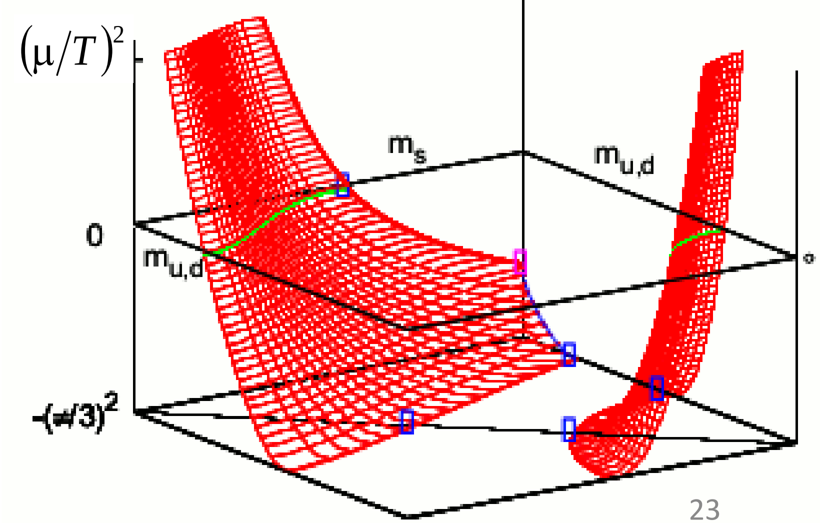
そもそも臨界点は本当にあるのか？

- 一次相転移の領域は格子間隔を小さくすると、どんどん狭くなる。
  - 物理質量点は臨界線から離れている。
    - 臨界点は高密度？

純虚数化学ポテンシャル
クォーク行列式が実数

- 標準スタッガードクォークNt=4
  - 密度が上がると一次相転移の領域が狭くなる。

    (de Forcrand, Philipsen, ’03-’08)



Bonati, D’ Elia, de Forcrand, Philipsen, Sanfilippo, arXiv:1311.0473, Lattice proc.

長い長い未解決問題

2-flavor QCD のカイラル相転移の性質

- 1994 Karsch, Laermann に始まって延々と…

- $U(1)_A$対称性が相転移点で回復するかどうか？
  - $U(1)_A$対称性が破れている。Pisarski, Wilczek (1984)
    - O(4) spin 模型と同じユニバーサリティークラス
    - 数値計算　Wilson型 : Iwasaki et al.(1995), CP-PACS(2000), staggered型 : BNL-Bielefeld(2009)
  - $U(1)_A$対称性が回復する。Aoki, Fukaya, Taniguchi(2012)
    - 一次相転移？
    - 数値計算 Pisa group (2005-2008), Bonati, D' Elia, de Forcrand, Philipsen, Sanfilippo (2013) (Staggered fermion Nt=4)

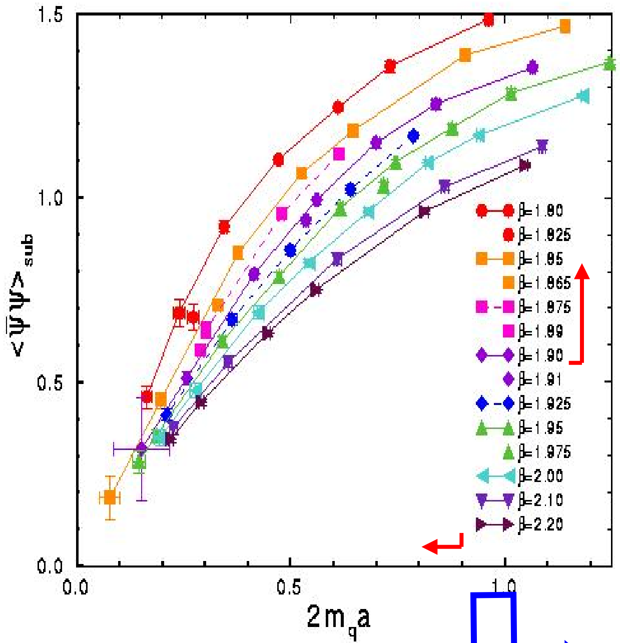
⇒ 富谷さんのトーク

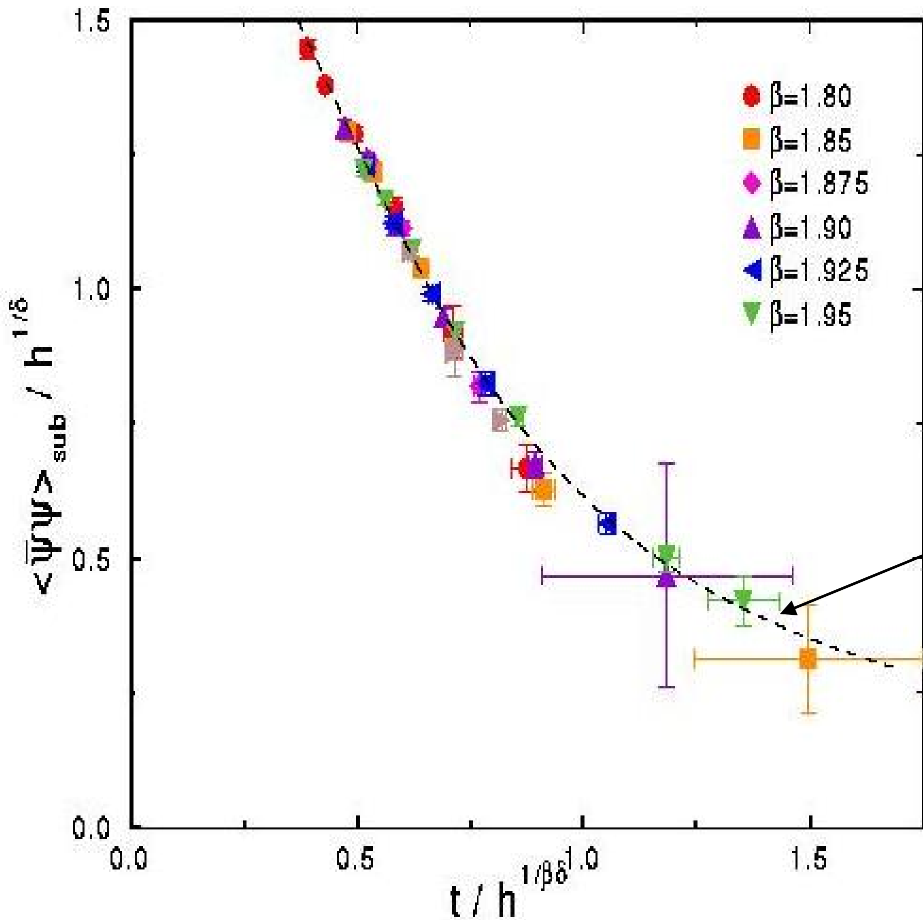
N_f=2 ウィルソン・クォークによるO(4)スケーリングテスト

Iwasaki gauge + Clover Wilson (CP-PACS, PRD63.034502(2000))

$$\boxed{M/h^{1/\delta} = f\left(t/h^{1/\beta\delta}\right)}$$

$$\beta_{ct} = 1.469(73)$$
$$\chi^2/N_{\mathrm{df}} = 0.816$$





$16^3 \times 4$ lattice

O(4) scaling function

M: カイラル凝縮

h: クォーク質量

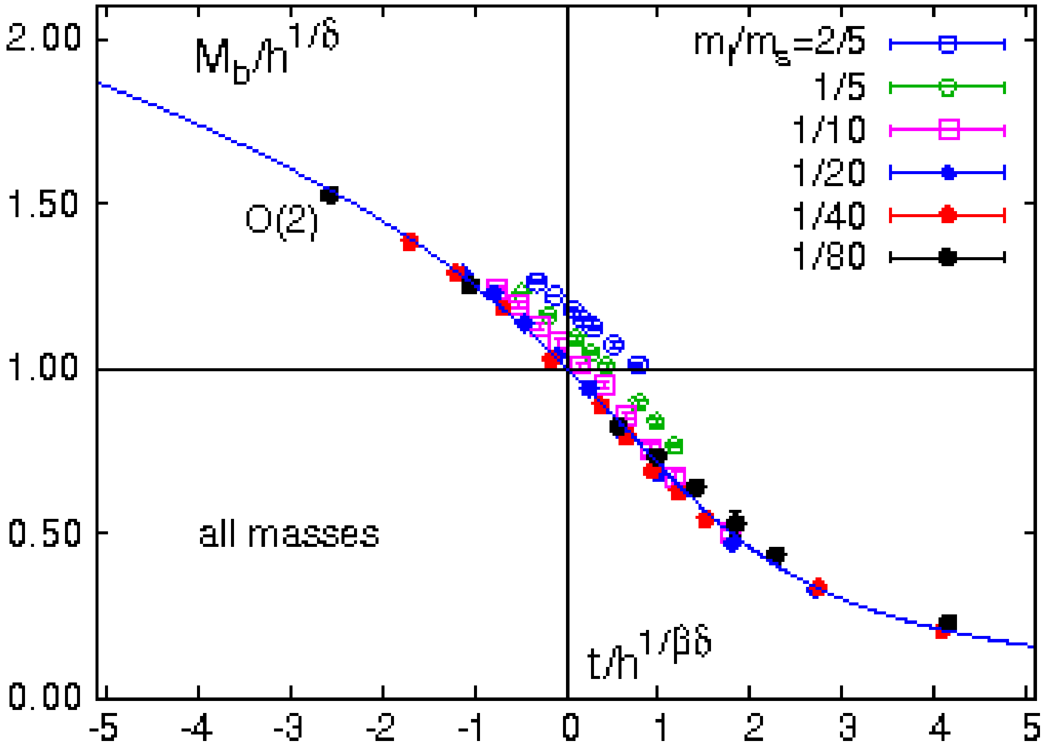
t: 既約温度

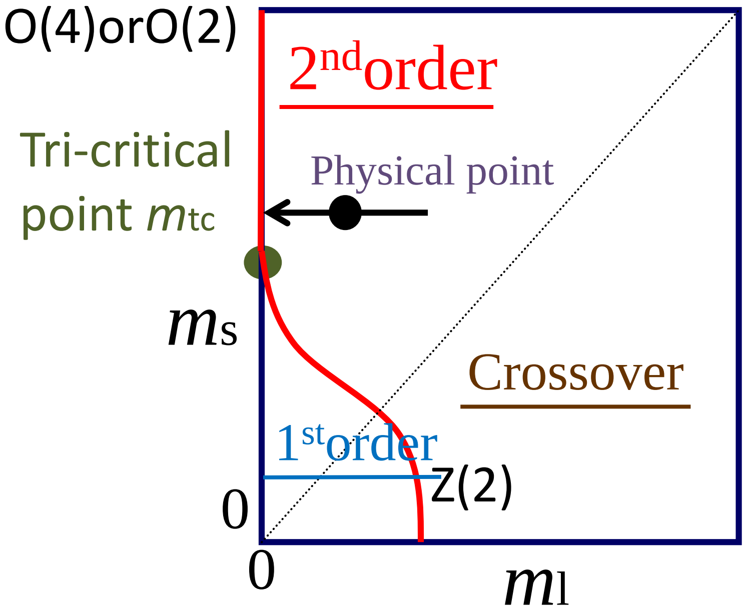
O(4)スケーリング関係をよく満たしている。

低密度領域への拡張: WHOT-QCD, arXiv:1312. 5385

スタッガードクォークによるスケーリングテスト

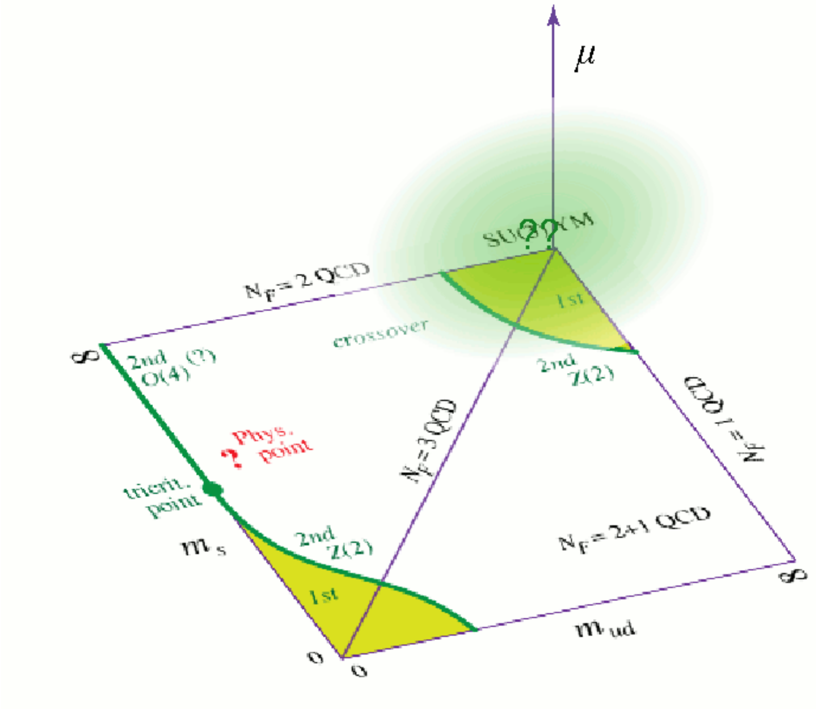
BNL-Bielefeld, PRD80,094505(2009)





- ストレンジ質量(ms)を固定して軽いクォーク質量(ml)を変化させてスケーリングテスト
- ml/ms<1/20でよく一致。
- (Tricritical point) < ms (physical) ➡ 一次転移の領域は非常に小さい。

クォークが重い領域での臨界面



WHOT-QCD, Collab.,
Phys. Rev. D84, 054502 (2011);
Phys. Rev. D89, 034507 (2014)

- Quenched simulations + Reweighting.
- lattice size: $24^3 \times 4$

Hopping parameter expansion: 1/(質量)～*K* で展開

$$N_f \ln\left(\frac{\det M(K,\mu)}{\det M(0,0)}\right) = N_f\left(288 N_{\mathrm{site}} K^4 P + 12\cdot 2^{N_t} N_s^3 K^{N_t}\left(\cosh(\mu/T)\Omega_R + \underline{\underline{i\sinh(\mu/T)\Omega_I}}\right) + \cdots\right)$$

phase

P: plaquette, $\Omega = \Omega_R + i\Omega_I$: Polyakov loop $\qquad \det M(0,0) = 1$

ヒストグラム法

- Monte-Carlo simulation (*S*g: gauge action, *M*: qaurk matrix)
  - ボルツマンの重みと測度の重みで配位を生成する。統計和をとる。

$$\langle O \rangle_{(m,T,\mu)} = \frac{1}{Z} \int DU\, O \left(\det M(m,\mu)\right)^{N_f} e^{-S_g} \approx \frac{1}{N_{\text{conf.}}} \sum_{\{\text{conf.}\}} O$$

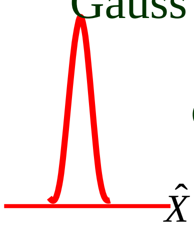
- Distribution function in Density of state method (Histogram method)

  X: オーダーパラメータ 、クォーク数、プラケット平均 など

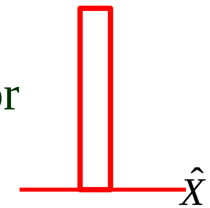
$$W(X; m, T, \mu) \equiv \int DU\, \delta\left(X - \hat{X}\right) \left(\det M(m,\mu)\right)^{N_f} e^{-S_g}$$

$$\frac{W(X)}{Z} \approx \frac{1}{N_{\text{conf.}}} \sum_{\{\text{conf.}\}} \delta\left(X - \hat{X}\right)$$

$$\delta\left(\hat{X}\right) \approx$$



or



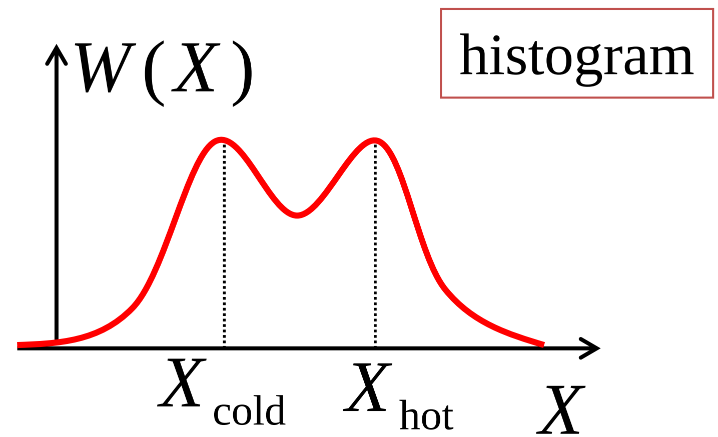
  - 期待値

$$\langle O[X] \rangle_{(m,T,\mu)} = \frac{1}{Z} \int dX\, O[X]\, W(X, m, T, \mu) \qquad Z(m,T,\mu) = \int dX\, W(X, m, T, \mu)$$

有効ポテンシャル $V_{\mathrm{eff}}(X)$
確率分布関数 (ヒストグラム) $W(X)$

- 一次相転移

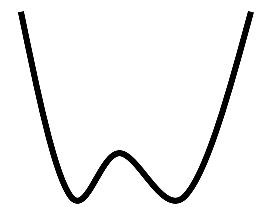
  T_cで二相共存状態



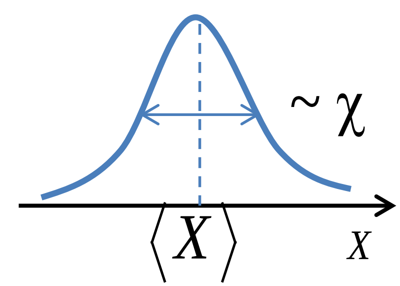
- $W(X)$ が2つピークをもってたら

  ➡ 一次相転移

- 有効ポテンシャル: $V_{\mathrm{eff}}(X) \equiv -\ln\left(W(X)\right)$



- もしW(X) がガウス分布なら
  - $W(X)$ のピークの位置 ➡ Xの期待値 (<X>)
  - $W(X)$の幅 ➡ susceptibilities $\chi = V\left\langle \left(X - \langle X \rangle\right)^2 \right\rangle$



$$W(X) \approx \sqrt{\frac{A}{\pi}}\, e^{-A\left(X - \langle X \rangle\right)^2}$$

$$A \propto V/\chi$$

Plaquette 分布関数についてのReweighting法

$$W(P,\beta,m,\mu) \equiv \int DU\,\delta(\hat{P}-P)(\det M(m,\mu))^{N_f}\, e^{6N_{\rm site}\beta\hat{P}}$$

$$S_g = -6N_{\rm site}\beta\hat{P}$$

$$(\beta = 6/g^2)$$

plaquette P (1x1 Wilson loop for the standard action)

$$R(P,\beta,\beta_0 m,m_0,\mu) \equiv W(P,\beta,m,\mu)/W(P,\beta_0,m_0,0)$$

(Reweight factor)

$$R(P) = \frac{\left\langle \delta(\hat{P}-P)\, e^{6N_{\rm site}(\beta-\beta_0)\hat{P}} \left(\frac{\det M(m_f,\mu_f)}{\det M(m_0,0)}\right)^{N_f} \right\rangle_{(\beta_0,\mu=0)}}{\left\langle \delta(\hat{P}-P) \right\rangle_{(\beta_0,\mu=0)}} \equiv \left\langle e^{6N_{\rm site}(\beta-\beta_0)\hat{P}} \left(\frac{\det M(m_f,\mu_f)}{\det M(m_0,0)}\right)^{N_f} \right\rangle_{P:\text{fixed}}$$

有効ポテンシャル:

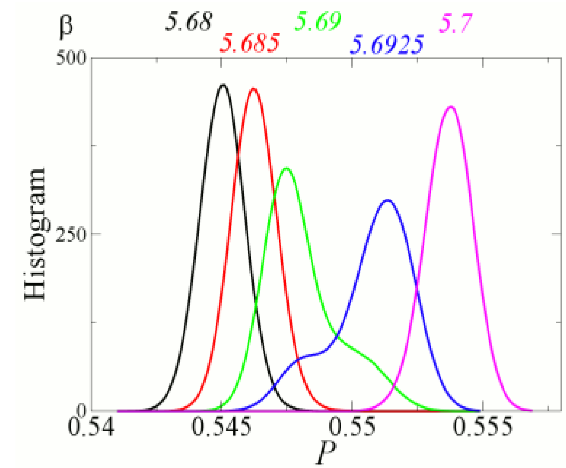
$$V_{\rm eff}(P,\beta,m,\mu) = -\ln[W(P,\beta,m,\mu)] = V_{\rm eff}(P,\beta_0,m_0,0) - \ln R(P,\beta,\beta_0 m,m_0,\mu)$$

$$\ln R(P) = \underline{6N_{\rm site}(\beta-\beta_0)P} + \ln \left\langle \underline{\left(\frac{\det M(m_f,\mu_f)}{\det M(m_0,0)}\right)^{N_f}} \right\rangle_{P:\text{fixed}}$$

Overlap problem

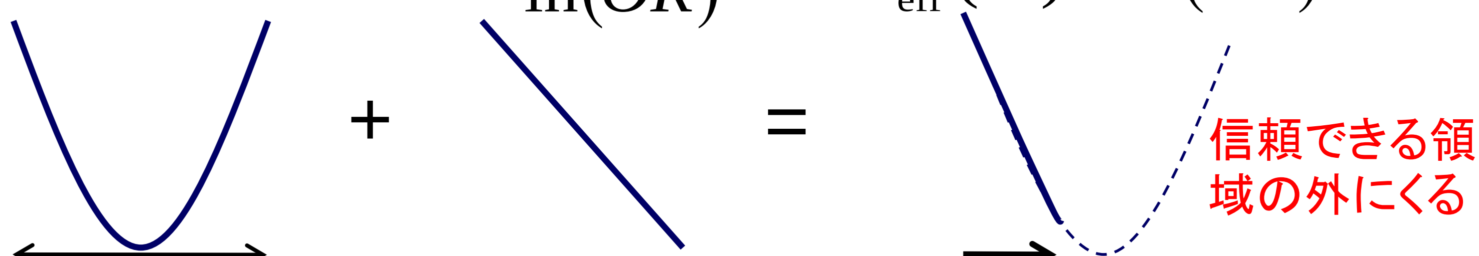
$$\langle OR \rangle = \frac{1}{Z}\int OR\,W(X)\,dX \;= \frac{1}{Z}\int \exp\left(-V_{\rm eff}(X) + \ln(OR)\right) dX$$

$$V_{\rm eff}(X) = -\ln W(X)$$



- W はモンテカルロ法のヒストグラム。
- $V_{\rm eff}(X) - \ln(OR)$ が最小になるXの周りの分布関数重要。
- $V_{\rm eff}$ を広い範囲で計算する必要。

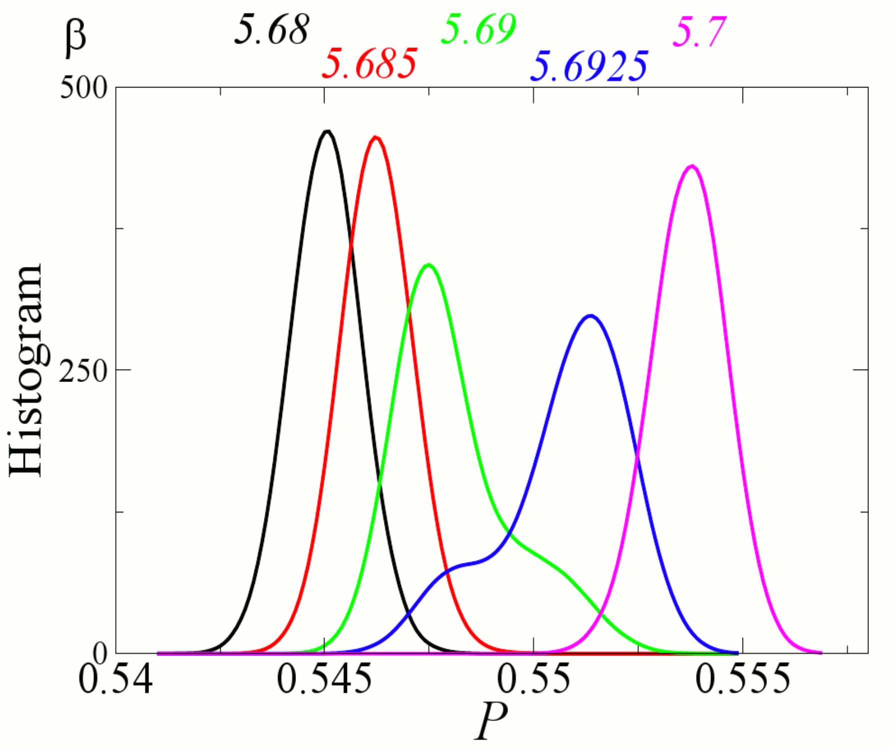
$V_{\rm eff}(X)$ $\quad$ $-\ln(OR)$ $\quad$ $V_{\rm eff}(X) - \ln(OR)$



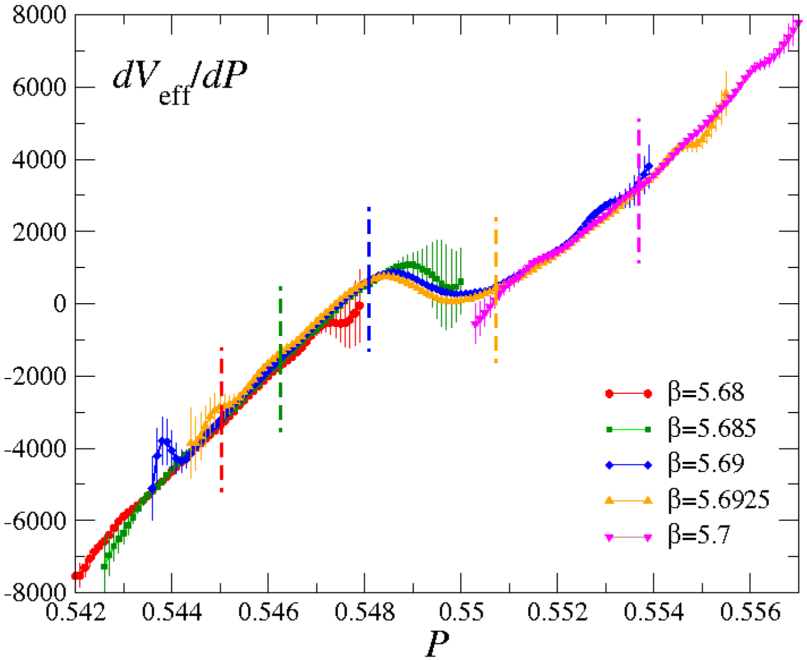
信頼できる領域 $\quad$ X-依存性が大きいとき $\quad$ 信頼できる領域

Quenchedsimulationでの分布関数

Plaquette histogram at $K=1/m_q=0$.



Derivative of Veff at β=5.69



$$V_{\mathrm{eff}}(\beta_2)=V_{\mathrm{eff}}(\beta_1)-6N_{\mathrm{site}}(\beta_2-\beta_1)P$$

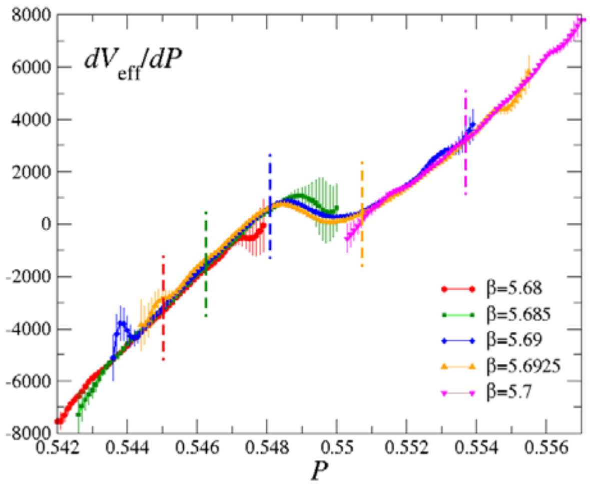
$$\frac{dV_{\mathrm{eff}}}{dP}(\beta_2)=\frac{dV_{\mathrm{eff}}}{dP}(\beta_1)-6N_{\mathrm{site}}(\beta_2-\beta_1)$$

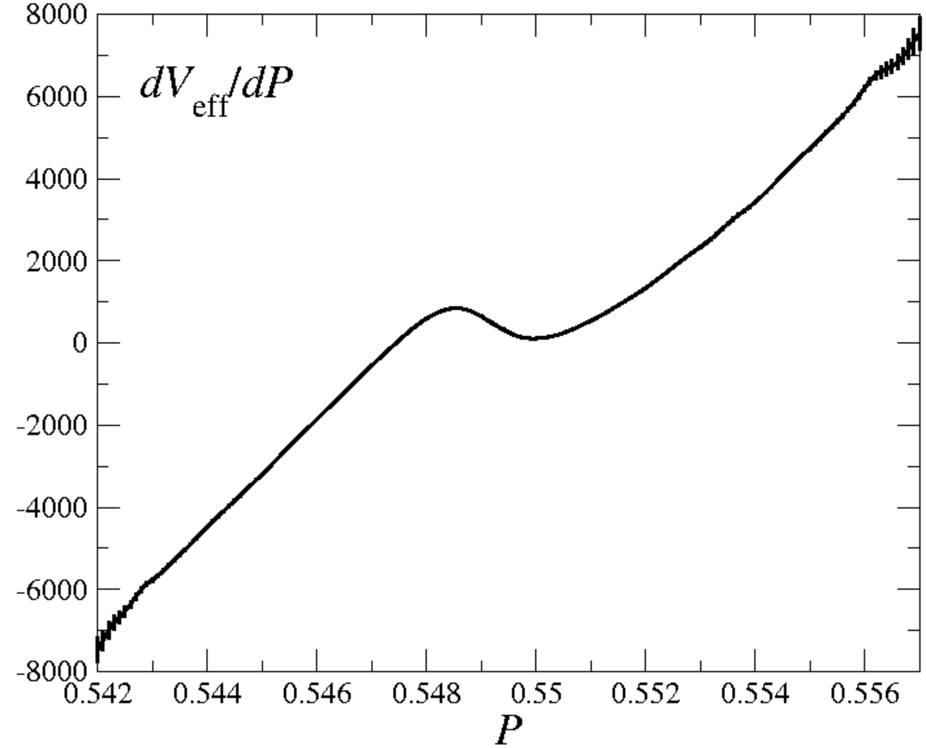
dVeff$/dP$ =0 のP がピークの位置。
この場合、Veffの曲率はβで変わらないので、Veff が
あるβで決まれば、相転移の情報はわかる。

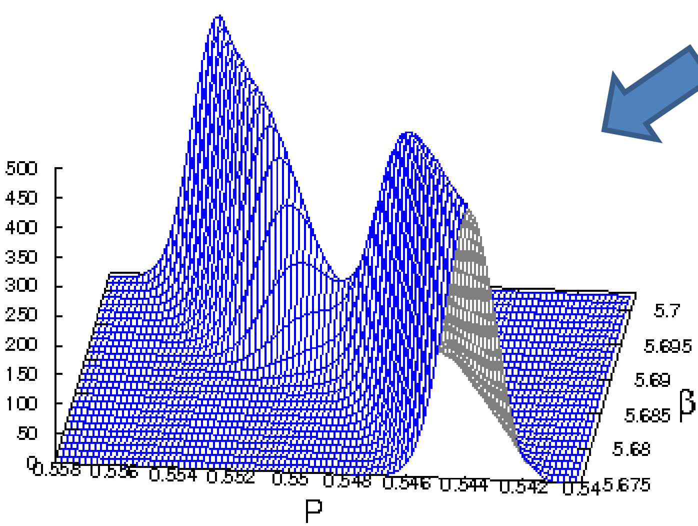
$$N_{\mathrm{site}}=24^3\times 4,$$

Quenched simulationでの分布関数

Pの有効ポテンシャルの微分





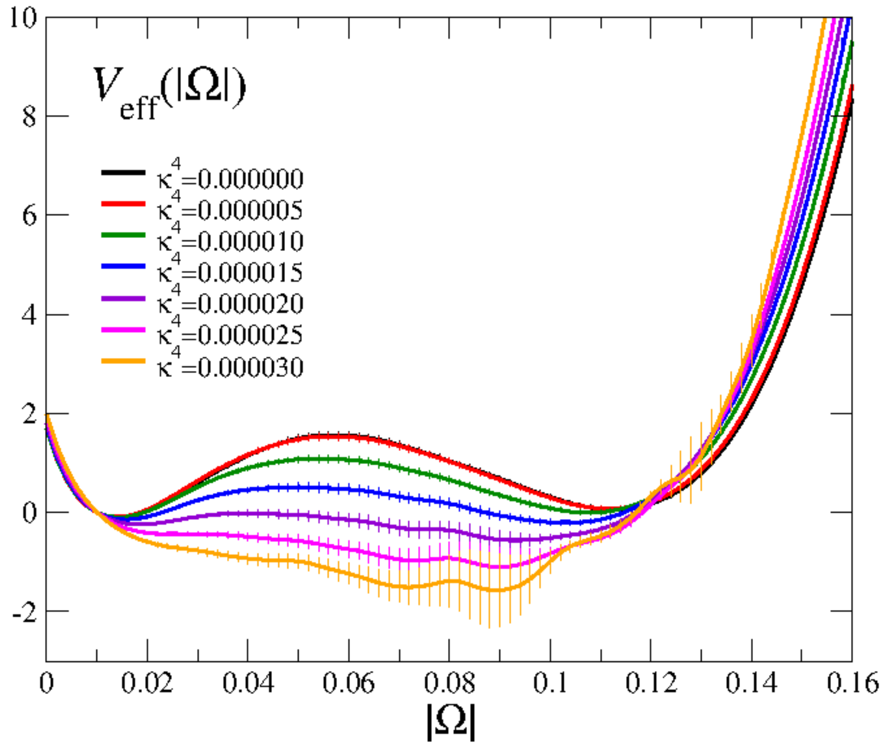


multi-point reweighting 法

- βを調節したのち、N_{conf} の重みで平均する。
- Ferrenberg-Swendsen, Phys.Rev.Lett. 63, 1195 (1989); S.E., Phys. Rev. D78, 074507 (2008); WHOT-QCD, arXiv:1309.2445.

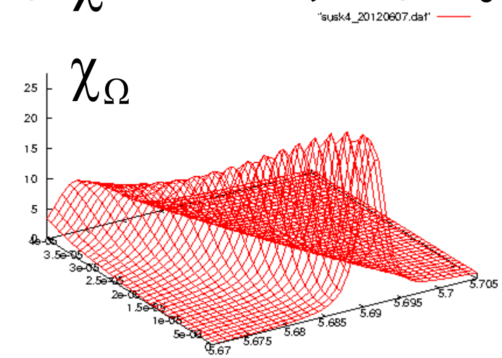
相転移の変化：Polyakov loop の分布関数 (2-flavor)

Effective potential of $|\Omega|$
on the pseudo-critical line at μ=0



臨界点：$\kappa^4 \approx 2.0\times 10^{-5}$

- 相転移点は χ_Ω のピークとした。



- Double-well： κが小さいとき
  - 一次相転移
- Single-well： κが大きいとき
  - クロスオーバー

κ～1/(クォーク質量)

Hopping parameter 展開

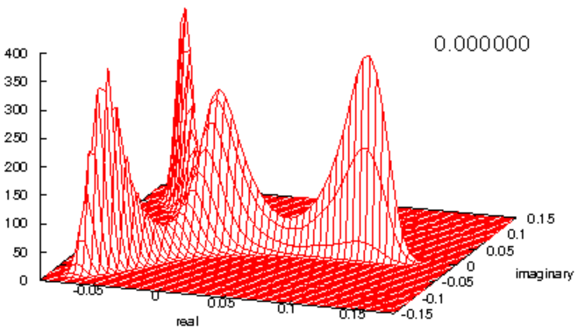
$$\left(\theta = 12\cdot 2^{N_t} N_s^3 N_{\mathrm{f}} K^{N_t} \sinh(\mu/T)\hat{\Omega}_I\right)$$

$$\frac{W(\beta,K,\mu)}{W(\beta_0,0,0)} = \left\langle \exp\left[\left(6(\beta-\beta_0)+288 N_{\mathrm{f}} K^4\right) N_{\mathrm{site}}\hat{P} - 12\times 2^{N_t} N_{\mathrm{f}} N_s^3 K^{N_t}\cosh(\mu/T)\hat{\Omega}_R + i\theta\right]\right\rangle_{\Omega_R;\beta_0,K=\mu=0}$$

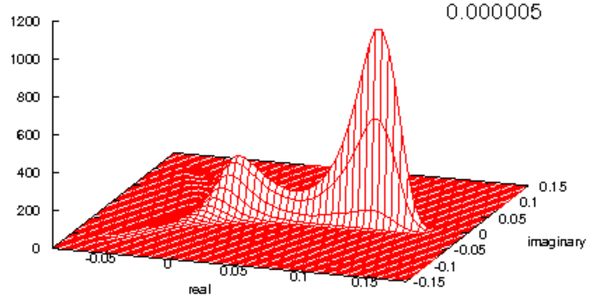
複素平面での Polyakov loop 確率分布関数

(2-flavor, μ=0)

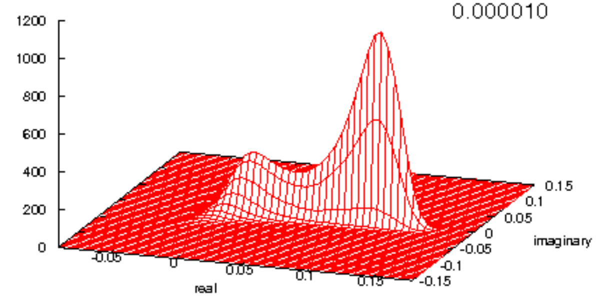
$\kappa^4 = 0.0$ Z(3) symmetric



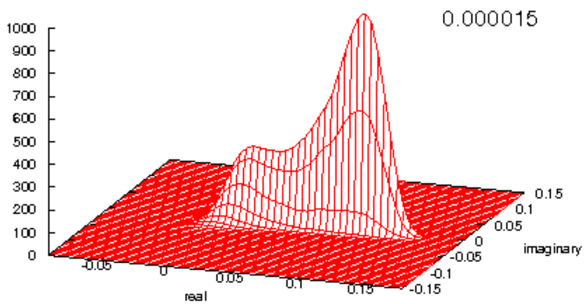
$\kappa^4 = 5.0\times10^{-6}$



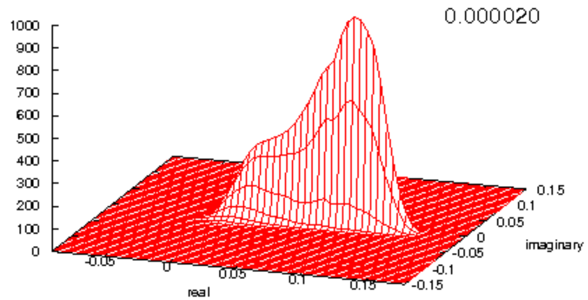
$\kappa^4 = 1.0\times10^{-5}$



$\kappa^4 = 1.5\times10^{-5}$

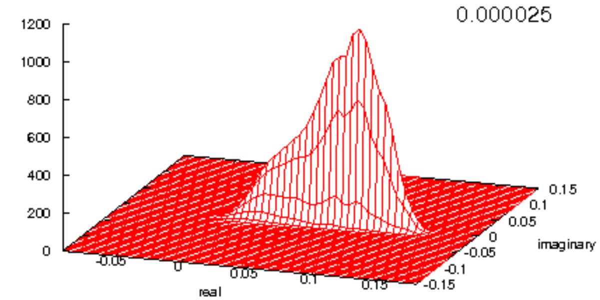


$\kappa^4 = 2.0\times10^{-5}$



critical point

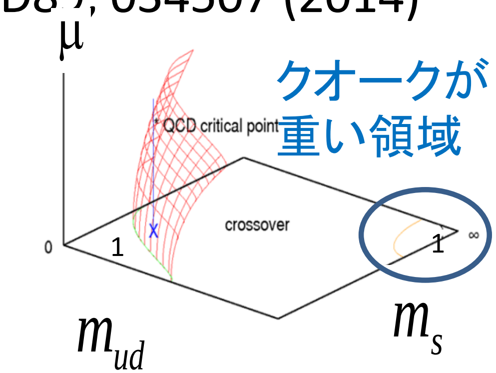
$\kappa^4 = 2.5\times10^{-5}$



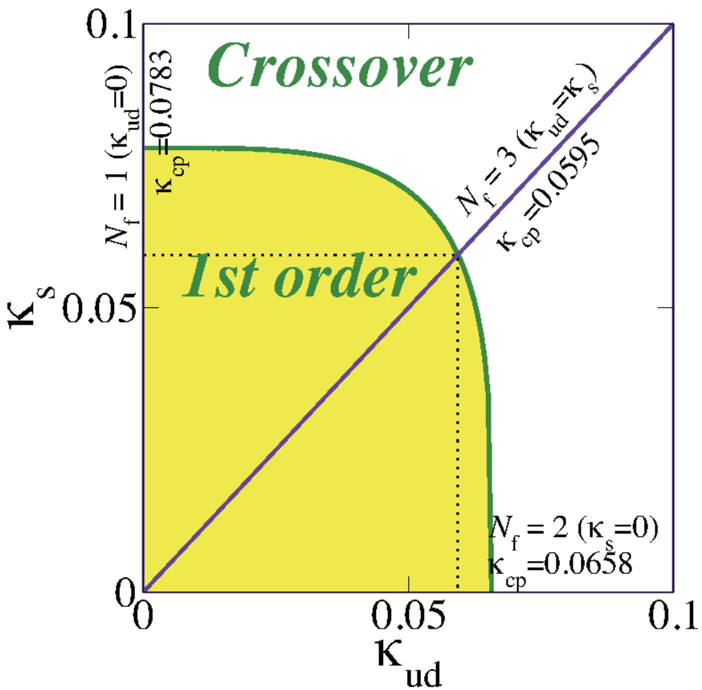
- Polyakov loop susceptibilityで決めた βpc での値

クォークが重い領域での
（２＋１）フレーバーQCDの臨界面

WHOT-QCD, Collab., Phys. Rev. D84, 054502 (2011); Phys. Rev. D89, 034507 (2014)

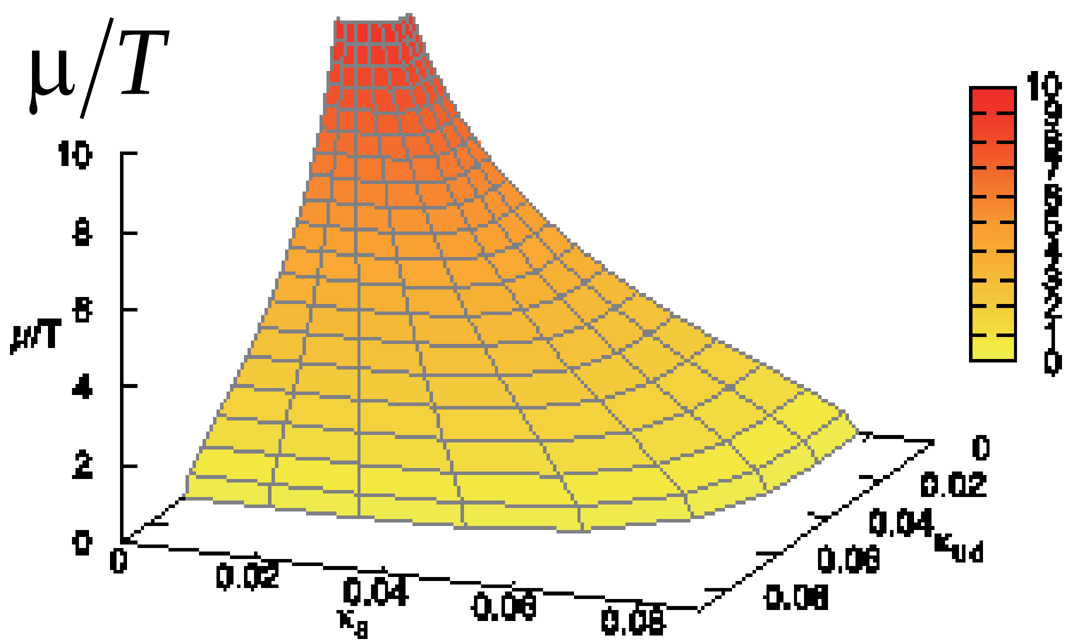


ゼロ密度での１次相転移領域



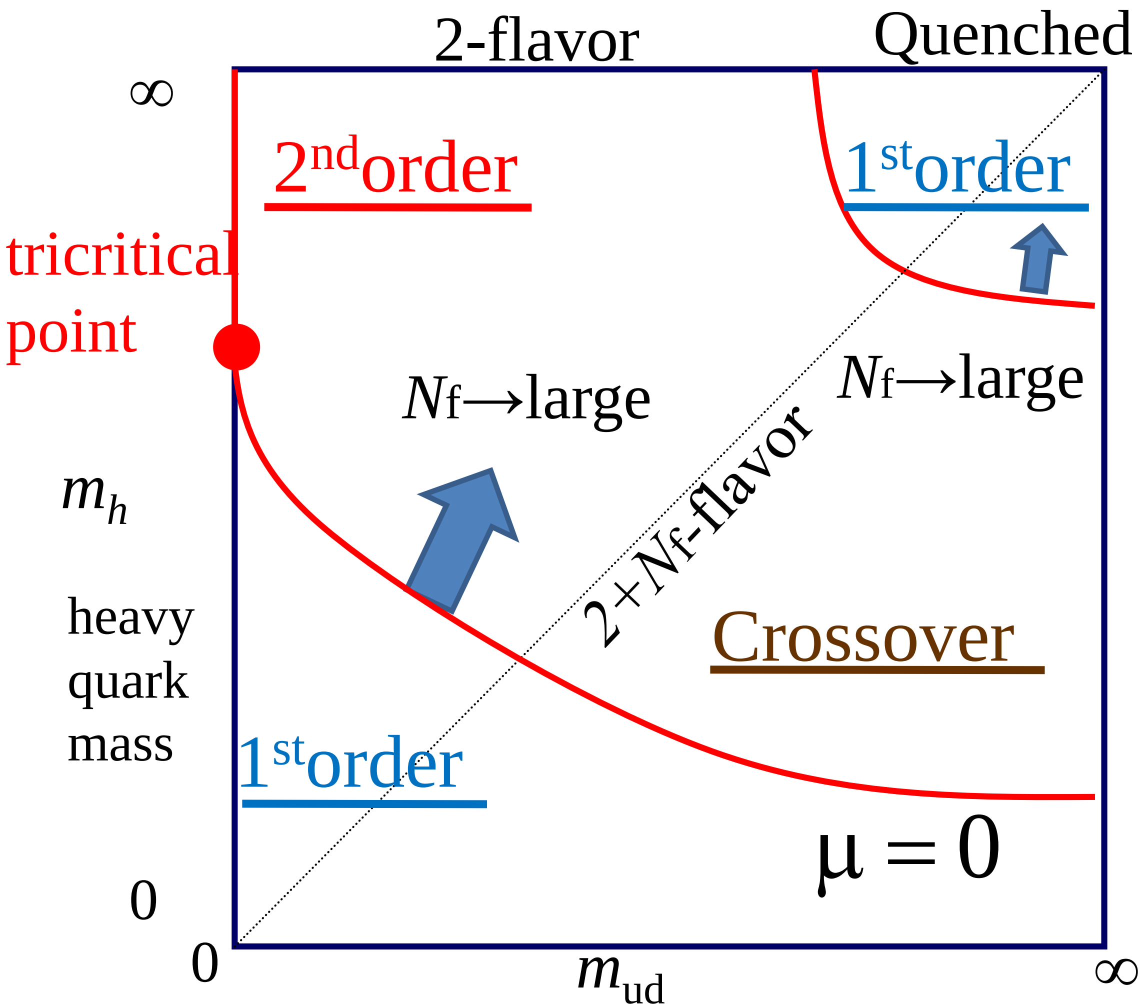
κ〜１/（クォーク質量）

有限密度での臨界面



(2+Nf)-flavor QCDの予想される相構造

Ejiri, Yamada, Phys. Rev. Lett. 110,172001 (2013)



N_f-フレーバーが重い場合、N_fが増加するにしたがって、臨界質量は大きくなる。

計算が簡単になる。

三重臨界スケーリング則は(2+1)-flavor QCDと同じ。

$$m_{ud}^c \sim (m_E - m_h)^{5/2}$$

$$m_{ud}^c \sim \mu^5$$

Tricritical point: m_E

2+1-flavor QCDを理解するための絶好の練習台

多フレーバーQCDによるテクニカラー模型の構築

- QCDのカイラル対称性の破れ

  → 有限温度電弱相転移
- 南部・ゴールドストン（NG）・ボゾン
  - ゲージボゾンに吸われる3つ必要。
  - 他のNGボゾンは観測されていない。
  - ２つのテクニ・フェルミオンは質量0、他のフェルミオンは重い。
  - <u>(2+1)-flavor QCD とよく似ている。</u>
- 電弱バリオジェネシス
  - 強い1次相転移が必要。 (標準模型では1次相転移にならない。)
  - (2+1)-flavor QCD の類推:

    フェルミオンが重くなると1次相転移でなくなる。
- <u>(2+many)-flavor QCD で1次相転移の終点を求めることが重要。</u>

2+N_f-flavor QCDの有限密度での臨界点

Ejiri, Yamada, Phys. Rev. Lett. 110,172001 (2013)

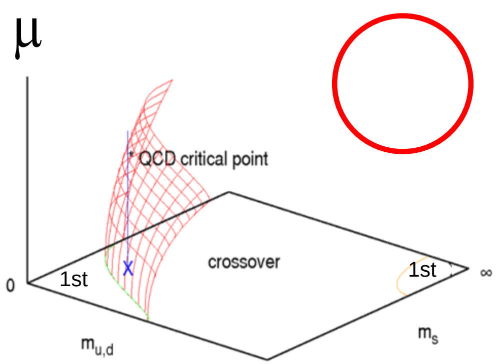
$$h = 2N_{\mathrm{f}}\left(2\kappa_{\mathrm{h}}\right)^{N_t}$$

Wilson quarks

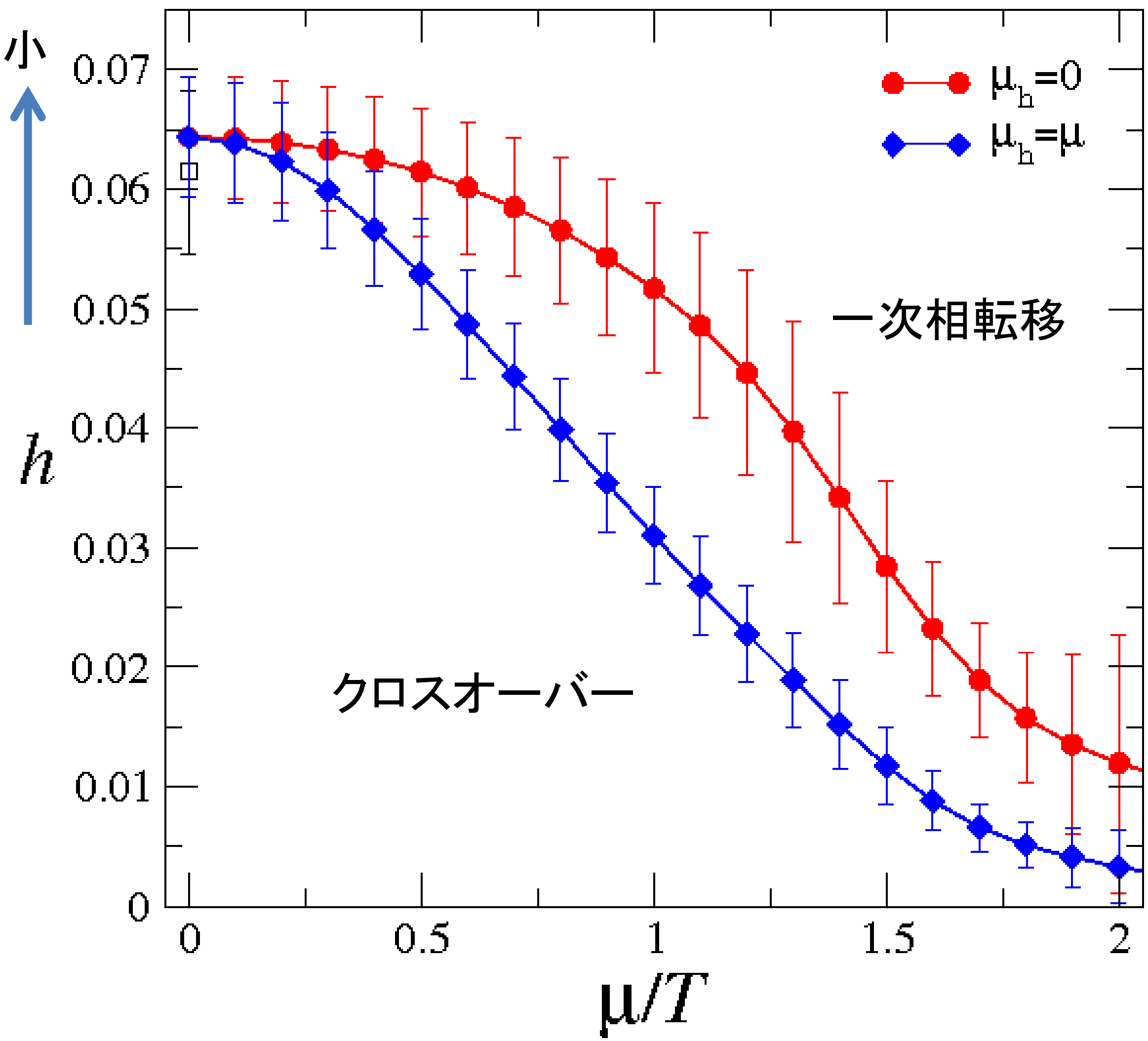
$$h = N_{\mathrm{f}} \Big/ \left(4\left(2m_{\mathrm{h}}\right)^{N_t}\right)$$

staggered quarks

- 密度が上がると、一次相転移の領域が大きくなる。



質量：小



Nf=2 p4-staggared, $m_\pi/m_\rho \approx 0.7$

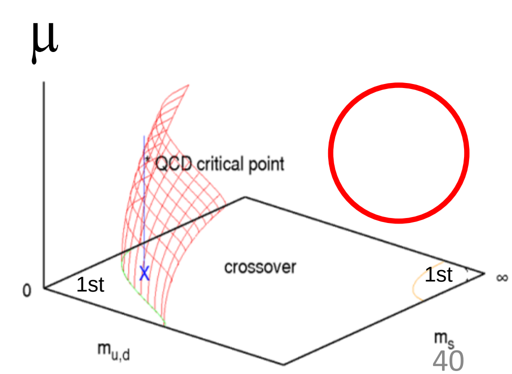
data: Beilefeld-Swansea Collab., PRD71,054508(2005)

4-flavor QCDの臨界質量

Jin, Kuramashi, Nakamura, Takeda, Ukawa, Phys. Rev. D88 (2013), 094508

- 4-flavor QCDでは臨界質量が大きい。
- μ=0でクロスオーバー、一次相転移の2つの質量で reweighting 法を用いて、有限μの計算を行う。（低密度では符号問題が小さい。）
- μ=0でクロスオーバーの質量の有限μの相転移が一次相転移に変わった。

➡ 一次相転移の領域はμが大きくなると広がる。



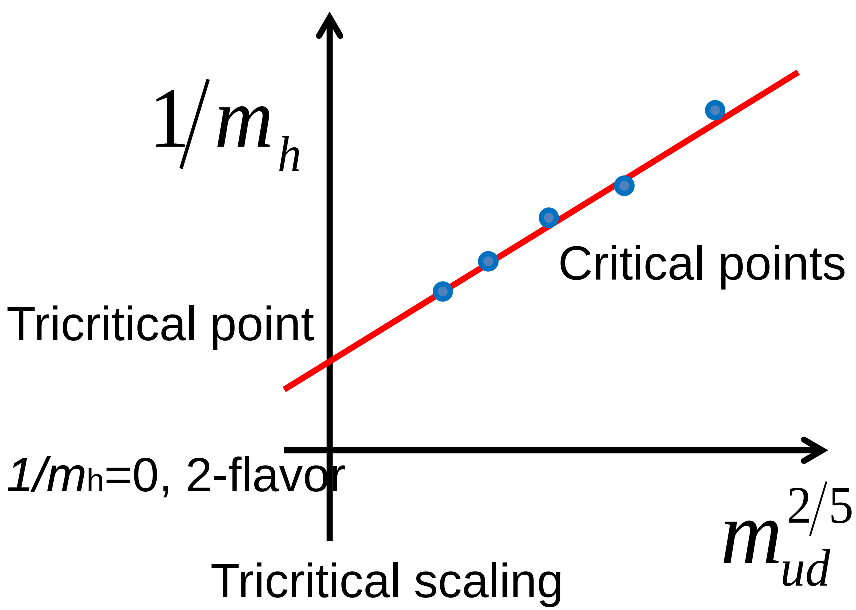
(2+many)-flavor QCDの臨界線

Ejiri, Yamada, in preparation

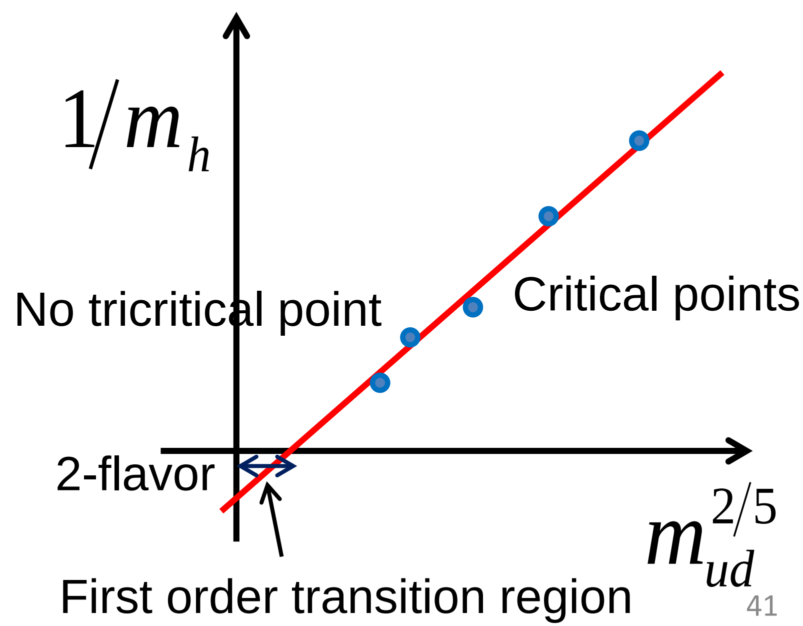
2-flavor QCD simulations + reweighting

臨界点の軽いクォーク質量依存性

- 三重臨界点スケーリング則？
- 2-flavor QCD に一次相転移領域があるか？



or

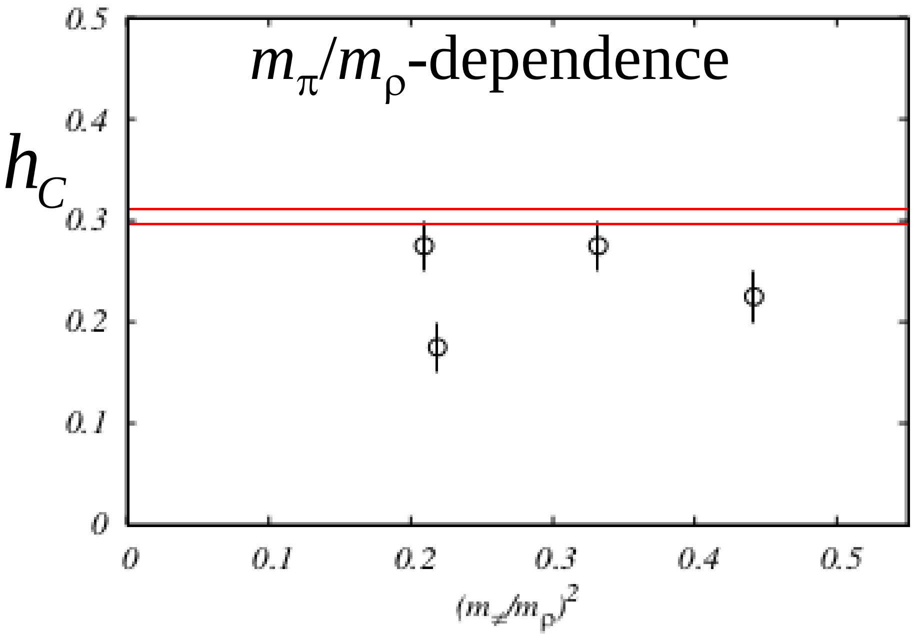


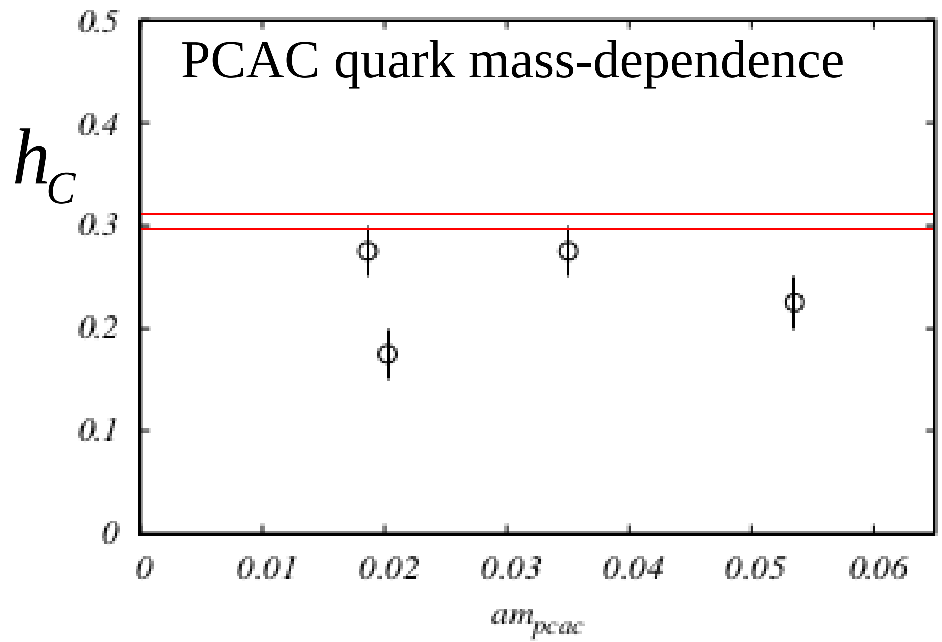
臨界点の軽いクォーク質量依存性 (preliminary)

Simulations :

Iwasaki gauge action + N_f=2 clover -Wilson fermion action,

κ=0.145, 0.475, 0.150, 0.1505, m_π/m_ρ = 0.6647, 0.5761, 0.4677, 0.4575, 16^3x4 lattice.





$$h = 2N_f \left(2\kappa_h\right)^{N_t}$$

赤線: $m_l=\infty$ 極限での臨界点

- 臨界点: 我々の調べた質量の領域では軽いクォークの質量依存性は非常に小さい。
- 2-flavor QCD に一次相転移領域があることを示唆しない。

高温高密度格子QCDの現状と展望

- 低密度での計算では、実験と比較できるレベルまで進んできた。
  - 相転移温度、状態方程式、保存カレントの揺らぎ
- 有限密度の臨界点探しの実験が進んでいるが格子QCD計算はまだまだ。
  - 相転移の性質の質量依存性など、周辺から攻略を試みているが、攻め切れていない状況。
    - 現実の質量点での有限密度の臨界点？
  - QCDの理論の結果があいまいなまま実験・現象論からの要請が膨らむ。
- 高密度で直接シミュレションを行うアイデアはいろいろ提案されていて、実用可能かどうか、確認の段階。