

# 電子の磁気モーメントに おける非摂動QEDの効果

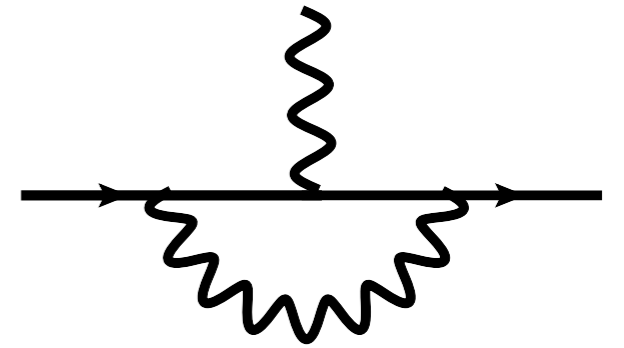
東京大学 素粒子論研究室 (浜口研)

三嶋 剛

基研研究会 素粒子物理学の進展2014

2014/7/30

# 標準模型における電子の 異常磁気モーメント $(g-2) a_e$

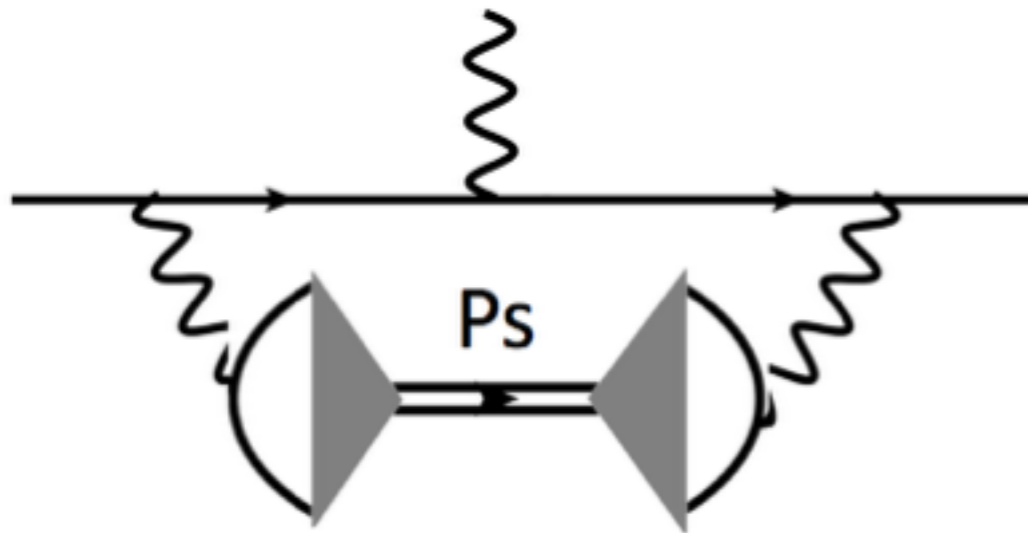


非摂動  
QED

	値 ( $\times 10^{14}$ )	不確かさ ( $\times 10^{14}$ )
摂動的 QED	115 965 218 007	77
<u>QED 束縛状態</u>	9.0	2
<u>Coulomb 散乱</u>	-4.5	2
Hadronic	167.8	1.4
Electroweak	2.973	0.052
標準模型 $a_e^{\text{SM}}$	115 965 218 182	77
測定値 $a_e^{\text{exp}}$	115 965 218 073	28
$a_e^{\text{SM}} - a_e^{\text{exp}}$	109	82
将来の見通し		7

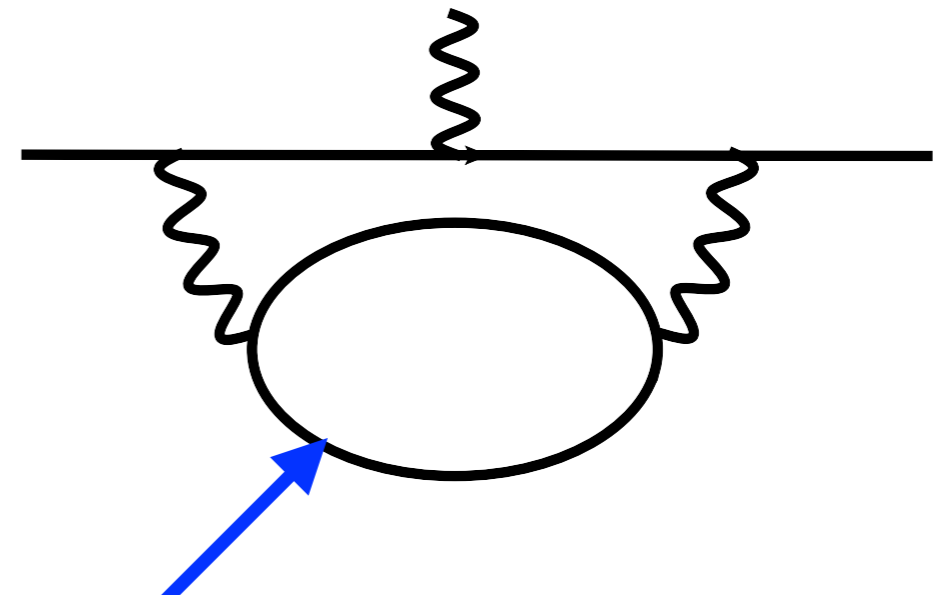
# 非摂動QEDの寄与

## 束縛状態の寄与



ポジトロニウムのような束縛状態が仮想粒子として量子効果に現れる

## Coulomb散乱の寄与



仮想的な電子・陽電子対の間に働くCoulomb力によって自由場の波動関数ではなくなる

※簡潔化のため、ここではCoulomb散乱の寄与のうち「非摂動的な部分」のことをこう呼ぶことにします

# 本研究に至るまでの背景

- GM [1311.7109] QED束縛状態の効果を計算
- Fael, Passera [1402.1575v1] 細かい間違いを指摘
- Melnikov, Vainshtein, Voloshin [1402.5690v1]  
非摂動Coulomb散乱の寄与を指摘し、厳密な相殺を主張
- Eides [1402.5860] QEDに非摂動効果は存在しないことを主張
- Hayakawa [1403.0416] 束縛状態は存在しないことを主張
- Melnikov, *et al.* [1402.5690v2]  
非摂動Coulomb散乱の寄与の計算間違いを修正 結論は変わらず
- Fael, *et al.* [1402.1575v2]  
束縛状態とCoulomb散乱の寄与の和は摂動的QEDに含まれると主張

<u>QED 束縛状態</u>	9.0
<u>Coulomb 散乱</u>	-4.5

# 非摂動QEDの現状（？）

- Eides : 非摂動効果は存在しない
- Hayakawa : 束縛状態は存在しない
- Fael, *et al.*, Melnikov, *et al.* : 単純な計算結果には同意  
束縛状態とCoulomb散乱の和は摂動に含まれる

QED 束縛状態	9.0
Coulomb 散乱	-4.5

$$\underline{\Delta a_e(\text{Bound State})} = a_e^{\text{non-pert.}}$$

$$\underline{\Delta a_e(\text{Coulomb})} = -a_e^{\text{non-pert.}} + a_e^{\text{pert.}} = -\frac{1}{2}\Delta a_e(\text{Bound State})$$

どれも摂動的QEDだけで充分だという主張

# このトークのメッセージ

- 初期の計算 (GM '13, Melnikov, *et al.* '14) にあった問題点・疑問点を新しい計算によって解決し、摂動QEDの5ループ計算だけでは取り込めない $\alpha^5$ の効果があることを明らかにした

	通常の摂動計算	<u>束縛状態の効果</u>	<u>非摂動 Coulomb 散乱の効果</u>
1ループ	○		
2ループ	○		
3ループ	○		
4ループ	○		
5ループ	○		
6ループ			○
7ループ			○
⋮	⋮	⋮	⋮
非常に大きい有限のループ			○
⋮	⋮	⋮	⋮
無限ループ		○	○

Melnicov, *et al.* '14の計算では摂動展開との対応が分からなかった

# アウトライン

- ・ 背景、異常磁気モーメント ( $g-2$ ) の現状

- ・ QED束縛状態 の効果 (GM '13)

- ・ Coulomb散乱 の効果 (Melnikov, *et al.* '14)

当時のままの  
記述で紹介

- ・ (上記の) 初期の計算における問題点・疑問点

- ・ 新しい系統的な計算

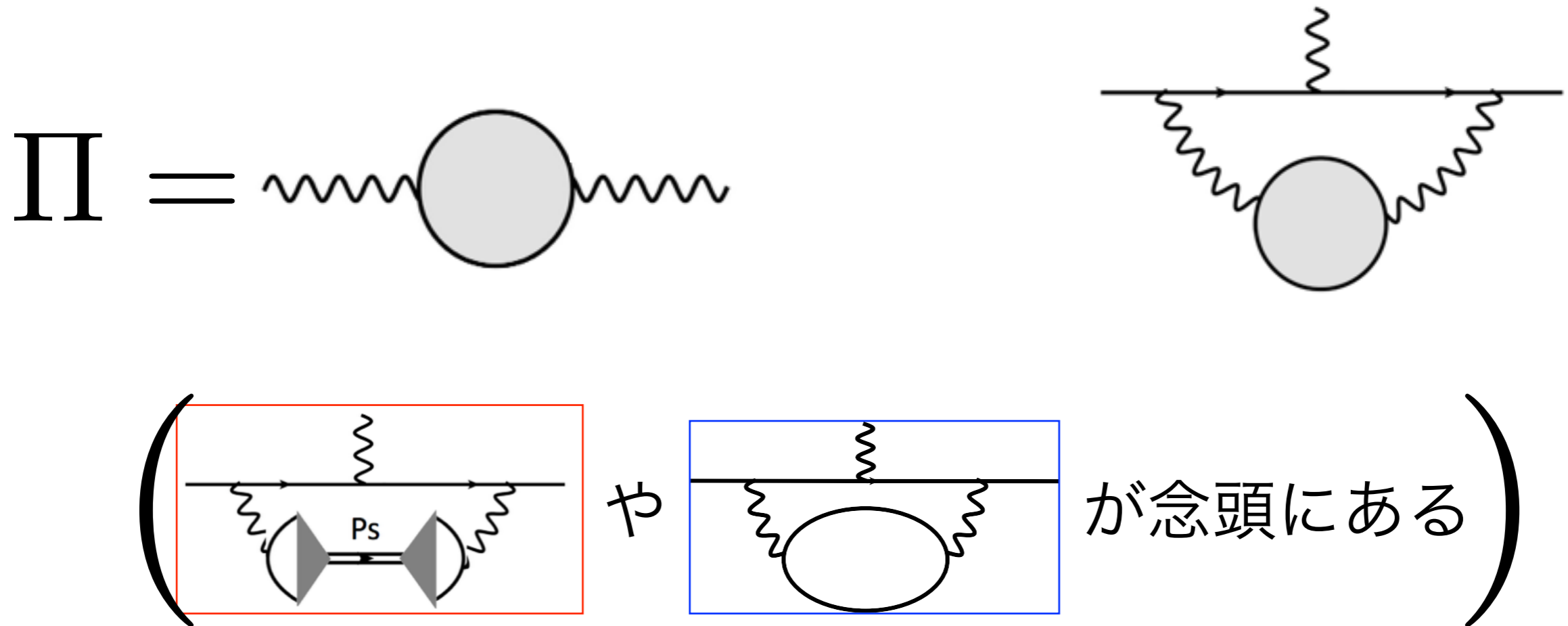
不安定粒子の状態ケットを仮定せず、束縛状態の質量殻外でも有効で、摂動展開との対応が分かる計算を行った

電子と光子だけのQEDを考えます

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$



# 真空分極 $\Pi$ による補正を考える



分散関係式を利用してg-2を $\text{Im}\Pi$ で表す

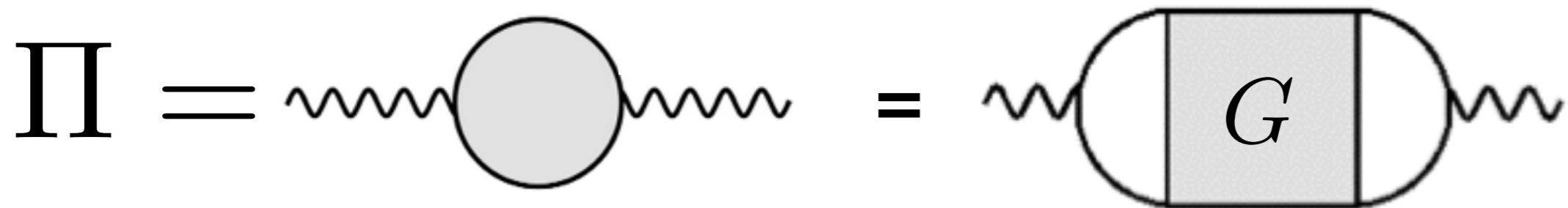
$$\Delta a_e = -\frac{\alpha}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{\text{Im}\Pi(s)}{s} \int_0^1 \frac{z(1-z)^2 m_e^2 dz}{zs + (1-z)^2 m_e^2}$$

# 真空分極 $\Pi$ は四点Green関数に帰着

$$\Pi(q^2) = \frac{-i}{3q^2} \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T j^\mu(x) j_\mu(0) | 0 \rangle$$

電磁カレント  $j^\mu = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$

四点Green関数  $G = \langle 0 | T \psi\bar{\psi}\bar{\psi}\psi | 0 \rangle$



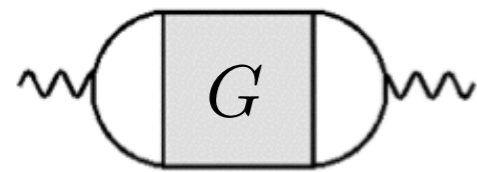
# Ladderダイアグラムの無限和が 束縛状態の効果とCoulomb散乱の効果 をとらえている

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram with } G^L \text{ in a shaded box} &= \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \dots \\
 &= \text{Diagram 1} + \text{Diagram 4}
 \end{aligned}$$

四点Green関数  $\text{Diagram with } G$  のうち、Ladder  
ダイアグラムだけを取り入れたものを  $\text{Diagram with } G^L$   
と定義し直した

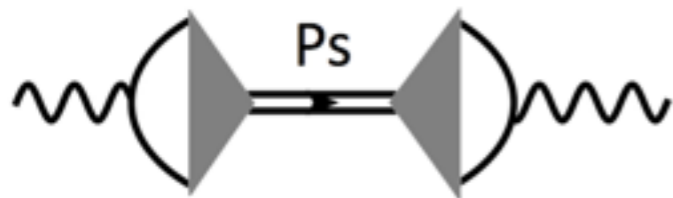
# 状態ケットの完全系を挟む (光学定理)

この計算は1973年には登場している(Barbieri, Christillin, Remiddi)



$$\Pi(q^2) = \frac{-i}{3q^2} \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T j^\mu(x) j_\mu(0) | 0 \rangle$$

## 束縛状態の寄与



$$\text{Im}\Pi \ni \frac{\pi}{3q^2} \sum_n \langle 0 | j^\mu | n \rangle \langle n | j_\mu | 0 \rangle \delta(E - E_n)$$

束縛状態

## Coulomb散乱の寄与

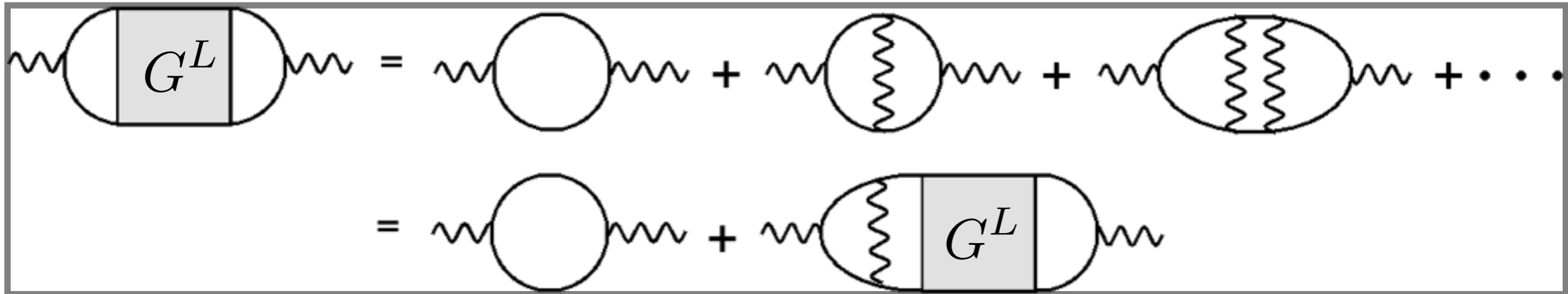


$$\frac{\pi}{3q^2} \sum_s \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \langle 0 | j^\mu | \mathbf{k}, s \rangle \langle \mathbf{k}, s | j_\mu | 0 \rangle \delta(E - \sqrt{4m^2 + \mathbf{k}^2})$$

Coulomb散乱状態

行列要素  $\langle 0 | j^\mu | n \rangle$  や  $\langle 0 | j^\mu | \mathbf{k}, s \rangle$  が分かればよい

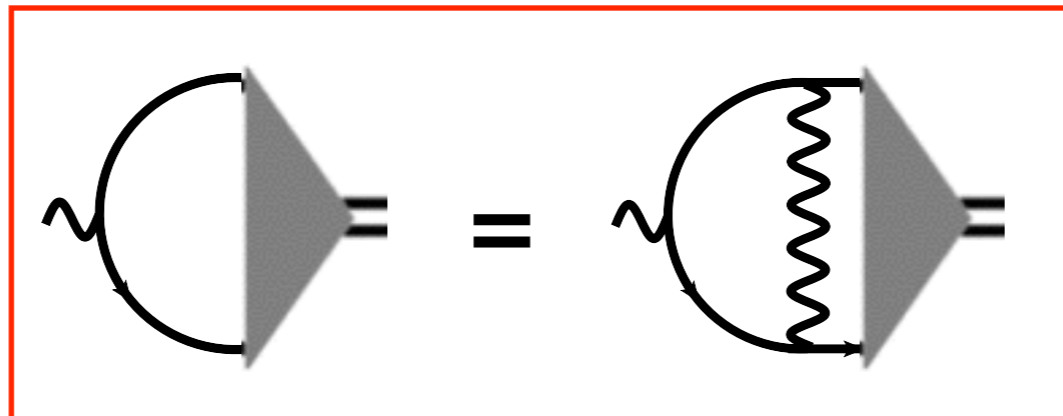
# 斉次なBethe-Salpeter eq.が得られる



に  $\text{blob}(G^L) \sim \text{blob}(\text{Ps})$  を代入

$\text{Im}\Pi \ni \frac{\pi}{3q^2} \sum |\langle 0 | j^\mu | n \rangle|^2 \delta(E - E_n)$  を思い出すと、  
初項は束縛状態の質量付近で虚部を持たないので消える

$\langle 0 | j^\mu | n \rangle$



簡単に解ける

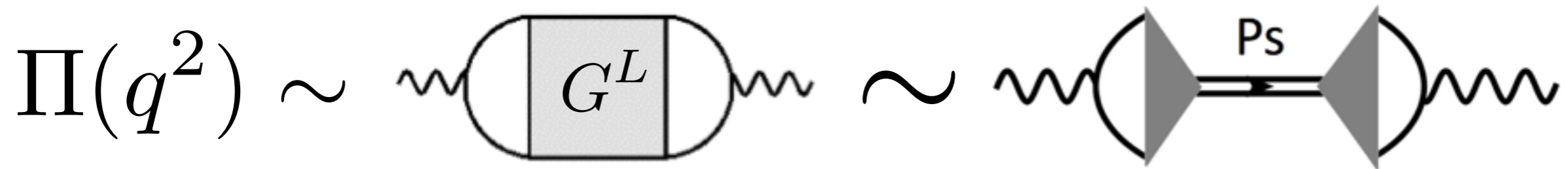
# 真空分極 $\Pi$ に対する束縛状態の寄与

$$\Pi(q^2) \sim \frac{Z_n q^2}{q^2 - M_n^2 + iM_n \Gamma_n}$$

$M_n$  ポジトロニウムの質量

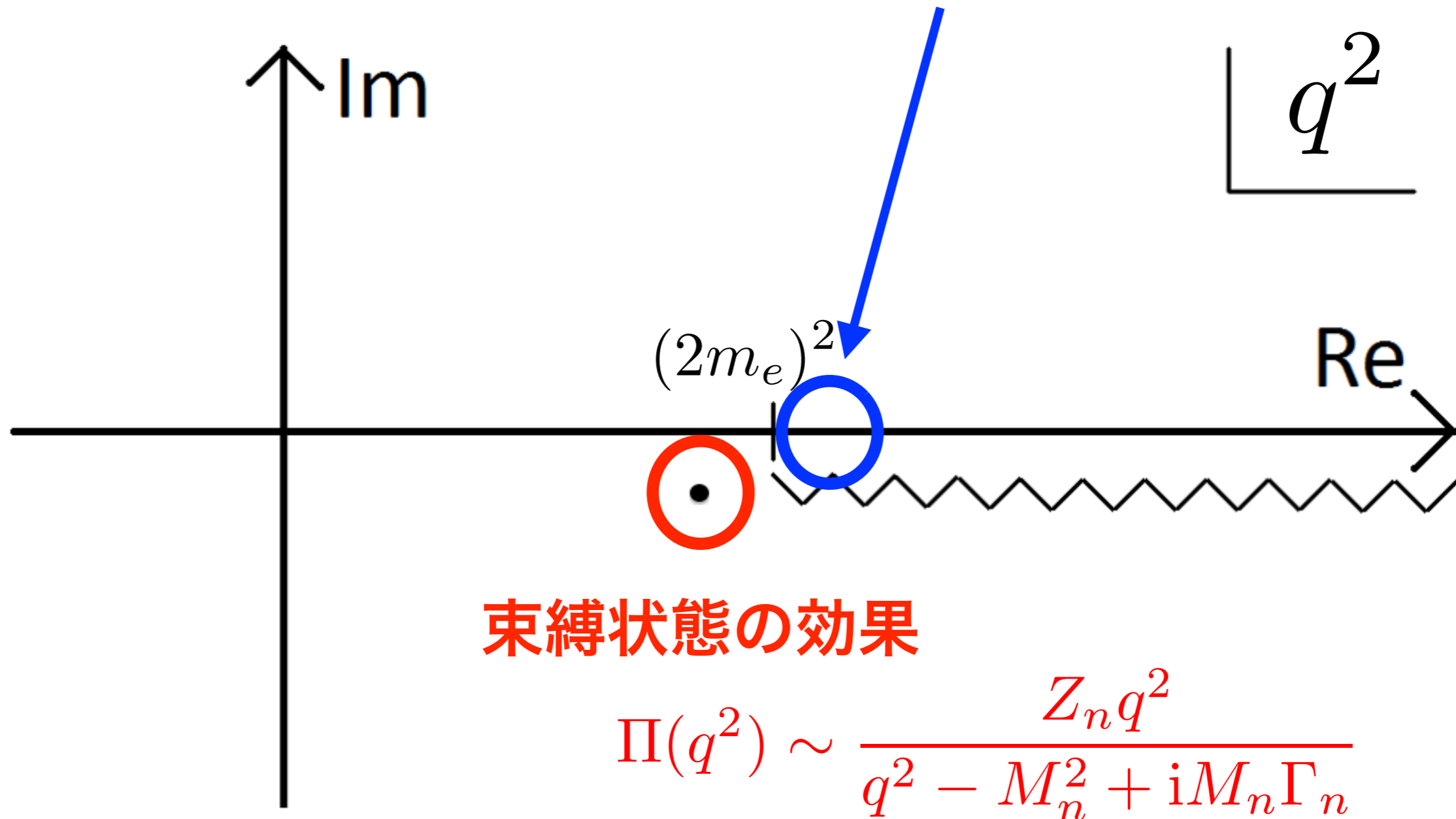
$\Gamma_n$  ポジトロニウムの崩壊幅

$Z_n$  混合因子  $Z_n = \frac{\alpha^4}{4n^3}$

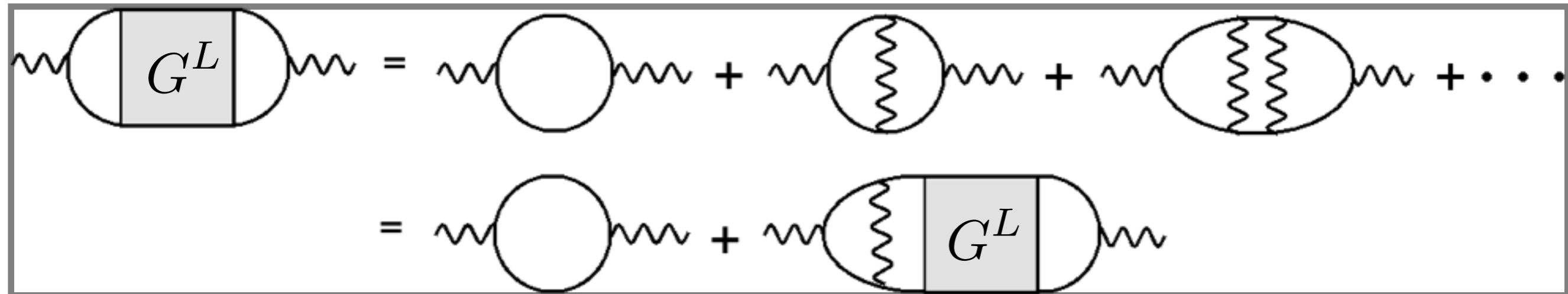


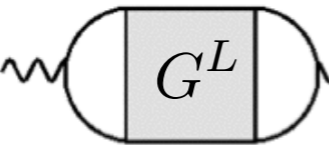

# Coulomb散乱の効果

しきい値付近での $\text{Im}\Pi$ の効果



# 非斉次なSchrodinger eq.が得られる



に  $\sim$    $\sim$   を代入  
Coulomb

Fourier変換で座標空間に持って行くと

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\lambda_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} + \lambda_2 \right) \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

となり、解は知られている Hostler '64



閾値付近での $\text{Im}\Pi$ はSommerfeld因子で表せる

$$\text{Im}\Pi(s) \simeq - \frac{\pi\alpha^2/2}{1 - e^{-\pi\alpha/\beta}} \Big|_{\beta = \sqrt{1 - 4m^2/s}}$$

$$\Delta a_e = -\frac{\alpha}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{\text{Im}\Pi(s)}{s} \int_0^1 \frac{z(1-z)^2 m_e^2 dz}{zs + (1-z)^2 m_e^2} \quad \text{に代入して計算}$$

$a_e$ を計算する際の処方箋 (cut-off依存性を無くしたい etc)

$$\text{Im}\Pi(s) \simeq -\frac{\pi\alpha^2}{2} \left( \frac{1}{1 - e^{-\pi\alpha/\beta}} - \frac{\beta}{\pi\alpha} - \frac{1}{2} - \frac{\pi\alpha}{12\beta} \right) \Big|_{\beta = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}}}$$

$\beta d\beta$  をかけて  $\beta \rightarrow \infty$  で収束しない寄与は引いておく

括弧の中は  $\beta \rightarrow 0$  で特異的な寄与  $\rightarrow$  非摂動効果

# 結果

$$\Delta a_e = -\frac{\alpha}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{\text{Im}\Pi(s)}{s} \int_0^1 \frac{z(1-z)^2 m_e^2 dz}{zs + (1-z)^2 m_e^2} \quad \text{に代入して計算}$$

---

## 束縛状態の寄与




The diagram shows two fermion lines (represented by wavy lines) connected by a propagator. The propagator is a double line with a central arrow pointing to the right, labeled 'Ps'. The fermion lines are also wavy and extend to the left and right of the propagator.

$$\Delta a_e(\text{Bound State}) = \frac{\alpha^5}{4\pi} \zeta(3) \left( 8 \ln 2 - \frac{11}{2} \right)$$

---

## Coulomb散乱の寄与



The diagram shows a fermion line (represented by a wavy line) entering from the left and exiting to the right. The line is enclosed in a closed loop that is roughly rectangular with rounded corners, representing a Coulomb scattering process.

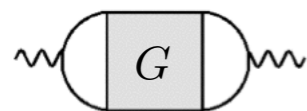
$$\Delta a_e(\text{Coulomb}) = -\frac{\alpha^5}{8\pi} \zeta(3) \left( 8 \ln 2 - \frac{11}{2} \right)$$

# 初期の計算の疑問点(1)

- 不安定な束縛状態の「状態ケット」とは何か？

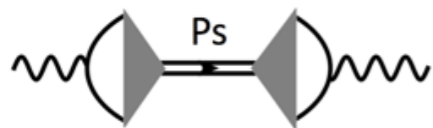
## 状態ケットの完全系を挟む (光学定理)

この計算は1973年には登場している(Barbieri, Christillin, Remiddi)



$$\Pi(q^2) = \frac{-i}{3q^2} \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T j^\mu(x) j_\mu(0) | 0 \rangle$$

### 束縛状態の寄与



$$\text{Im}\Pi \ni \frac{\pi}{3q^2} \sum_n \langle 0 | j^\mu | n \rangle \langle n | j_\mu | 0 \rangle \delta(E - E_n)$$

束縛状態

### Coulomb散乱の寄与



$$\frac{\pi}{3q^2} \sum_s \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \langle 0 | j^\mu | \mathbf{k}, s \rangle \langle \mathbf{k}, s | j_\mu | 0 \rangle \delta(E - \sqrt{4m^2 + \mathbf{k}^2})$$

Coulomb散乱状態

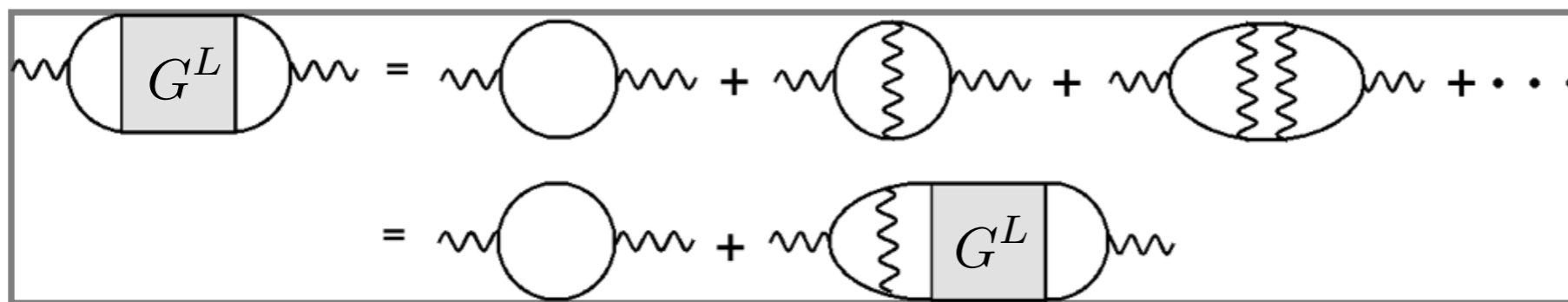
行列要素  $\langle 0 | j^\mu | n \rangle$  や  $\langle 0 | j^\mu | \mathbf{k}, s \rangle$  が分かればよい

「状態ケット」  
の概念を経由せ  
ず基本的な相関  
関数だけで議論  
を閉じさせたい

# 初期の計算の疑問点(2)

- 束縛状態の質量殻外の正しさが保証されていない

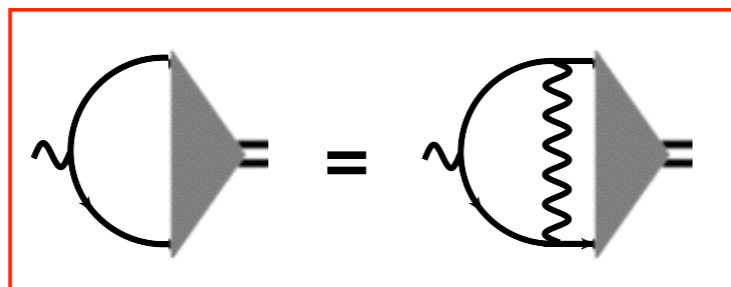
斉次なBethe-Salpeter eq.が得られる



に  $\sim$   $\sim$  を代入

$\text{Im}\Pi \ni \frac{\pi}{3q^2} \sum |\langle 0|j^\mu|n\rangle|^2 \delta(E - E_n)$  を思い出すと、  
初項は束縛状態の質量付近で虚部を持たないので消える

$\langle 0|j^\mu|n\rangle$



簡単に解ける

質量殻外  
での正当  
性を明示  
したい

# 初期の計算の疑問点(3)

- Sommerfeld因子と摂動的寄与との関係が不明  
この基準の妥当性も不明

閾値付近でのImΠはSommerfeld因子で表せる

$$\text{Im}\Pi(s) \simeq - \frac{\pi\alpha^2/2}{1 - e^{-\pi\alpha/\beta}} \Big|_{\beta=\sqrt{1-4m^2/s}}$$

$a_e$ を計算する際の処方箋 (cut-off依存性を無くしたい etc)

$$\text{Im}\Pi(s) \simeq -\frac{\pi\alpha^2}{2} \left( \frac{1}{1 - e^{-\pi\alpha/\beta}} - \underbrace{\frac{\beta}{\pi\alpha} - \frac{1}{2} - \frac{\pi\alpha}{12\beta}}_{\beta d\beta} \right) \Big|_{\beta=\sqrt{1-\frac{4m^2}{s}}}$$

$\beta d\beta$ をかけて  $\beta \rightarrow \infty$ で収束しない寄与は引いておく

括弧の中は  $\beta \rightarrow 0$ で特異的な寄与 → 非摂動効果

<u>OED 束縛状態</u>	9.0
<u>Coulomb 散乱</u>	-4.5

各ループ次数  
の寄与との重  
なりを明らか  
にしたい

# 今までは既知の手法に帰着させていた

Ladderダイアグラムの無限和  
(非斉次Bethe-Salpeter eq.)

$$\begin{aligned} \text{Ladder Diagram} &= \text{Bubble} + \text{Bubble with wavy line} + \text{Bubble with double wavy line} + \dots \\ &= \text{Bubble} + \text{Bubble with wavy line and } G^L \end{aligned}$$

$$\Pi(q^2)$$

状態ケットをはさんで特異点付近での  
斉次Bethe-Salpeter eq.に書き換える  
座標空間のSchrodinger eq.に書き換える

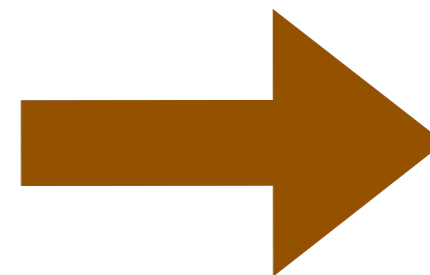
束縛状態の波動関数  
Sommerfeld因子

先ほどまでの疑問点(1)~(3)は  
この書き換えのせいで生じていた

# 直接 非斉次Bethe-Salpeter eq.を解く

Ladderダイアグラムの無限和  
(非斉次Bethe-Salpeter eq.)

$$\begin{aligned} \text{wavy line} \text{---} \boxed{G^L} \text{---} \text{wavy line} &= \text{wavy line} \text{---} \text{circle} \text{---} \text{wavy line} + \text{wavy line} \text{---} \text{circle with wavy line} \text{---} \text{wavy line} + \text{wavy line} \text{---} \text{circle with two wavy lines} \text{---} \text{wavy line} + \dots \\ &= \text{wavy line} \text{---} \text{circle} \text{---} \text{wavy line} + \text{wavy line} \text{---} \text{circle with wavy line} \text{---} \boxed{G^L} \text{---} \text{wavy line} \end{aligned}$$



$$\boxed{\Pi(q^2)}$$

~~束縛状態の波動関数~~  
~~Sommerfeld因子~~

計算の各段階で摂動的手法との  
対応をつけることができる

# 直接 非斉次Bethe-Salpeter eq.を解く

Ladderダイアグラムの無限和  
(非斉次Bethe-Salpeter eq.)

$$\begin{aligned} \text{Diagram with } G^L &= \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \dots \\ &= \text{Diagram 1} + \text{Diagram 4} \end{aligned}$$

$$\Pi(q^2)$$

$$G^L(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \frac{(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')}{E - \mathbf{p}^2/m + i0^+} - \frac{\alpha/2\pi^2}{E - \mathbf{p}^2/m + i0^+} \int_{-\lambda}^{\lambda} d^3\mathbf{p}'' \frac{G^L(\mathbf{p}'', \mathbf{p}')}{(\mathbf{p} - \mathbf{p}'')^2 - i0^+}$$

$$\Pi(q^2) = -\frac{e^2}{3q^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\bar{v}_{\mathbf{p}_1} \gamma^\mu u_{\mathbf{p}_2} \bar{u}_{\mathbf{k}_2} \gamma_\mu v_{\mathbf{k}_1}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1} 2E_{\mathbf{p}_2} 2E_{\mathbf{k}_1} 2E_{\mathbf{k}_2}}} G^L(\mathbf{p}, \mathbf{k})$$



# 非斉次Bethe-Salpeter eq.の厳密解を得た

$$\text{Diagrammatic equation: } \text{wavy line} \rightarrow \text{shaded oval } G^L \leftarrow \text{wavy line} = \text{wavy line} \rightarrow \text{circle} \leftarrow \text{wavy line} + \text{wavy line} \rightarrow \text{shaded oval } G^L \leftarrow \text{wavy line}$$

Chebyshev多項式や球面調和関数の組み合わせ

$$G^L(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = -\frac{8mp_0^3(2\pi)^3}{(p_0^2 + p^2)^2(p_0^2 + p'^2)^2} \sum_{n,l,m} \frac{Z_{n,l}^m(\Omega) Z_{n,l}^{m*}(\Omega')}{1 - \nu/n - i0^+}$$

このトークの中では未定義のパラメータや関数を用いているので

上の厳密解の表式は意味を成していませんが、メッセージは摂動展開との対応が明らかかつLadderダイアグラムの無限和の性質を取り込んだ解が得られたということです。

$$\Pi(q^2) = -\frac{e^2}{3q^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\bar{v}_{\mathbf{p}_1} \gamma^\mu u_{\mathbf{p}_2} \bar{u}_{\mathbf{k}_2} \gamma_\mu v_{\mathbf{k}_1}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1} 2E_{\mathbf{p}_2} 2E_{\mathbf{k}_1} 2E_{\mathbf{k}_2}}} G^L(\mathbf{p}, \mathbf{k})$$

# 摂動的寄与と非摂動的寄与の関係

	通常の摂動計算	<u>束縛状態の効果</u>	<u>非摂動 Coulomb 散乱の効果</u>
1 ループ	○		
2 ループ	○		
3 ループ	○		
4 ループ	○		
5 ループ	○		
6 ループ			○
7 ループ			○
⋮	⋮	⋮	⋮
非常に大きい有限のループ			○
⋮	⋮	⋮	⋮
無限ループ		○	○

# 結果は初期の計算と一致

$$\Delta a_e(\text{Bound State}) = \frac{\alpha^5}{4\pi} \zeta(3) \left( 8 \ln 2 - \frac{11}{2} \right)$$

$$\Delta a_e(\text{Coulomb}) = -\frac{\alpha^5}{8\pi} \zeta(3) \left( 8 \ln 2 - \frac{11}{2} \right)$$

	値 ( $\times 10^{14}$ )	不確かさ ( $\times 10^{14}$ )
摂動的 QED	115 965 218 007	77
<u>QED 束縛状態</u>	9.0	2
<u>Coulomb 散乱</u>	-4.5	2
Hadronic	167.8	1.4
Electroweak	2.973	0.052
標準模型 $a_e^{\text{SM}}$	115 965 218 182	77
測定値 $a_e^{\text{exp}}$	115 965 218 073	28
$a_e^{\text{SM}} - a_e^{\text{exp}}$	109	82
将来の見通し		7

# まとめ

- ・ 初期の計算 (GM '13, Melnikov, et al. '14) にあった疑問点 (束縛状態の状態ケット・質量殻外・摂動展開との対応) を、非斉次Bethe-Salpeter eq.を解くことで解決した
- ・ 摂動QEDの5ループ計算だけでは取り込めない  $\alpha^5$  の効果があることが分かった

