

一般化ドメインウォールフェルミオンによる 高温QCDにおけるU(1)アノマリーの解析

富谷 昭夫(大阪大学)
akio@het.phys.sci.osaka-u.ac.jp

Guido Cossu, 深谷 英則, 橋本 省二, 野秋 淳一
for JLQCD collaboration

研究目的:

有限温度で $U(1)_A$ アノマリーはなくなるのか？

QCD ($N_f=2$, $m_{ud}=0$) におけるカイラル対称性の破れ

$T = 0$

$$\frac{SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_V \times U(1)_A}{\text{自発的破れ} \quad \text{アノマリー}}$$

$\longrightarrow SU(2)_V \times U(1)_V$ 残る対称性

QCD ($N_f=2$, $m_{ud}=0$) におけるカイラル対称性の破れ

$T = 0$

$$\frac{SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_V \times U(1)_A}{\text{自発的破れ} \quad \text{アノマリー}}$$

$$\longrightarrow SU(2)_V \times U(1)_V \quad \text{残る対称性}$$

$T > T_c$

$$SU(2)_V \longrightarrow SU(2)_L \times SU(2)_R \quad \text{回復}$$

$$U(1)_A \longrightarrow ??$$

道具: 格子QCD

観測量: ディラックスペクトル

アノマリーとは対称性を壊す量子効果

0質量クォーク2個のQCD

: $U(2)_L \times U(2)_R$ カイラル対称性

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{q} \mathcal{D}q \exp \left[- \int d^4x \bar{q}(\not{D}) q \right] \quad q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

アノマリーとは対称性を壊す量子効果

0質量クォーク2個のQCD

: $U(2)_L \times U(2)_R$ カイラル対称性

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{q} \mathcal{D}q \exp \left[- \int d^4x \bar{q}(\not{D}) q \right] \quad q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} q \rightarrow q' = e^{i\gamma_5 \theta} q \\ \bar{q} \rightarrow \bar{q}' = \bar{q} e^{i\gamma_5 \theta} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \leftarrow U(1) \text{カイラル変換} \\ \gamma_5 \not{D} = - \not{D} \gamma_5 \end{array}$$

アノマリーとは対称性を壊す量子効果

0質量クォーク2個のQCD

: $U(2)_L \times U(2)_R$ カイラル対称性

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{q} \mathcal{D}q \exp \left[- \int d^4x \bar{q}(\not{D}) q \right] \quad q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} q \rightarrow q' = e^{i\gamma_5 \theta} q \\ \bar{q} \rightarrow \bar{q}' = \bar{q} e^{i\gamma_5 \theta} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \leftarrow U(1) \text{カイラル変換} \\ \gamma_5 \not{D} = - \not{D} \gamma_5 \end{array}$$

作用は不变、経路積分の測度が不变でない！

$U(1)_A$ アノマリー、カイラルアノマリー

アノマリーとは対称性を壊す量子効果

0質量クォーク2個のQCD

: $U(2)_L \times U(2)_R$ カイラル対称性

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{q} \mathcal{D}q \exp \left[- \int d^4x \bar{q}(\not{D}) q \right] \quad q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} q \rightarrow q' = e^{i\gamma_5 \theta} q \\ \bar{q} \rightarrow \bar{q}' = \bar{q} e^{i\gamma_5 \theta} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \leftarrow U(1) \text{カイラル変換} \\ \gamma_5 \not{D} = - \not{D} \gamma_5 \end{array}$$

作用は不变、経路積分の測度が不变でない！

$U(1)_A$ アノマリー、カイラルアノマリー

$$\mathcal{D}\bar{q} \mathcal{D}q = \mathcal{D}\bar{q}' \mathcal{D}q' e^\Gamma, \quad \Gamma \neq 0$$

QCD ($N_f=2$, $m_{ud}=0$) におけるカイラル対称性の破れ

$T = 0$

$$\frac{SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_V \times U(1)_A}{\text{自発的破れ} \quad \text{アノマリー}}$$

$$\longrightarrow SU(2)_V \times U(1)_V \quad \text{残る対称性}$$

明示的やぶれである

アノマリーが消えるとは？

$$U(1)_A \longrightarrow ??$$

観測量: ディラックスペクトル

U(1)_A回復の傍証

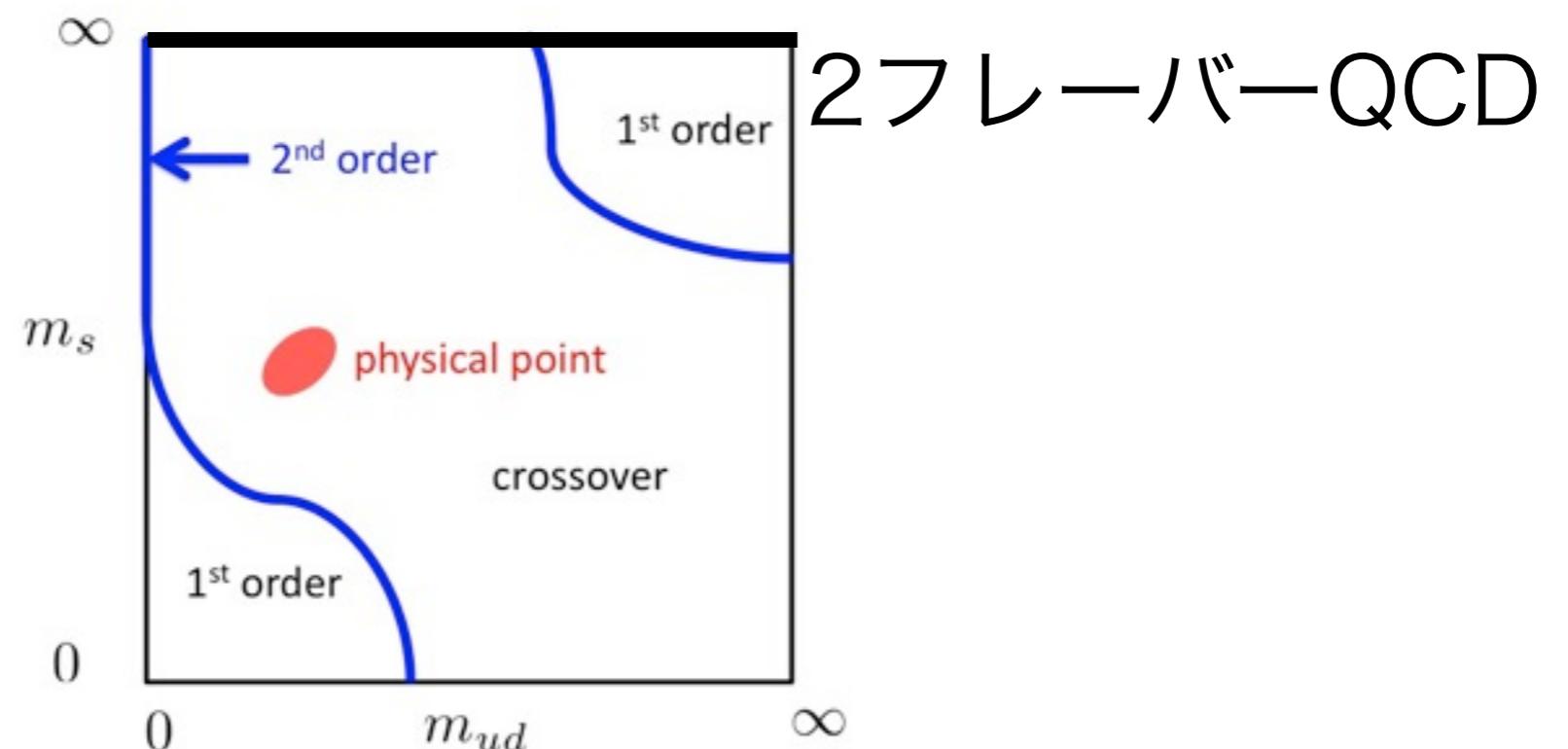
1. 温度Tの場の理論: 時空体積= $L^3 \times (1/T)$ の場の理論
 $T=\infty \longleftrightarrow$ 3次元場の理論(アノマリー存在しない)
無限温度では必ず回復する。
(有限温度で回復してもおかしくない?)
2. JLQCD(G.Cossu 2013,後述)
…SU(2)カイラル対称性の回復と同時にU(1)_Aも回復
 $T \sim T_c < \infty$ で回復する？

格子QCDでの主な先行研究

グループ	フェルミオン	体積(fm ³)	トポロジー変動	U(1) _A
JLQCD(2013)	オーバーラップ	2^3	固定	回復
Chiu et al (2013)	Optimized Domain-wall	3^3	変動	回復
Ohno et al (2011)	HISQ	4^3	変動	回復しない
LLNL/RBC (2013)	ドメインウォール	$2^3, 4^3$	変動	回復しない

果たしてどちらが本当なのか?
原因是、フェルミオン、体積？系統的理解が足りない！

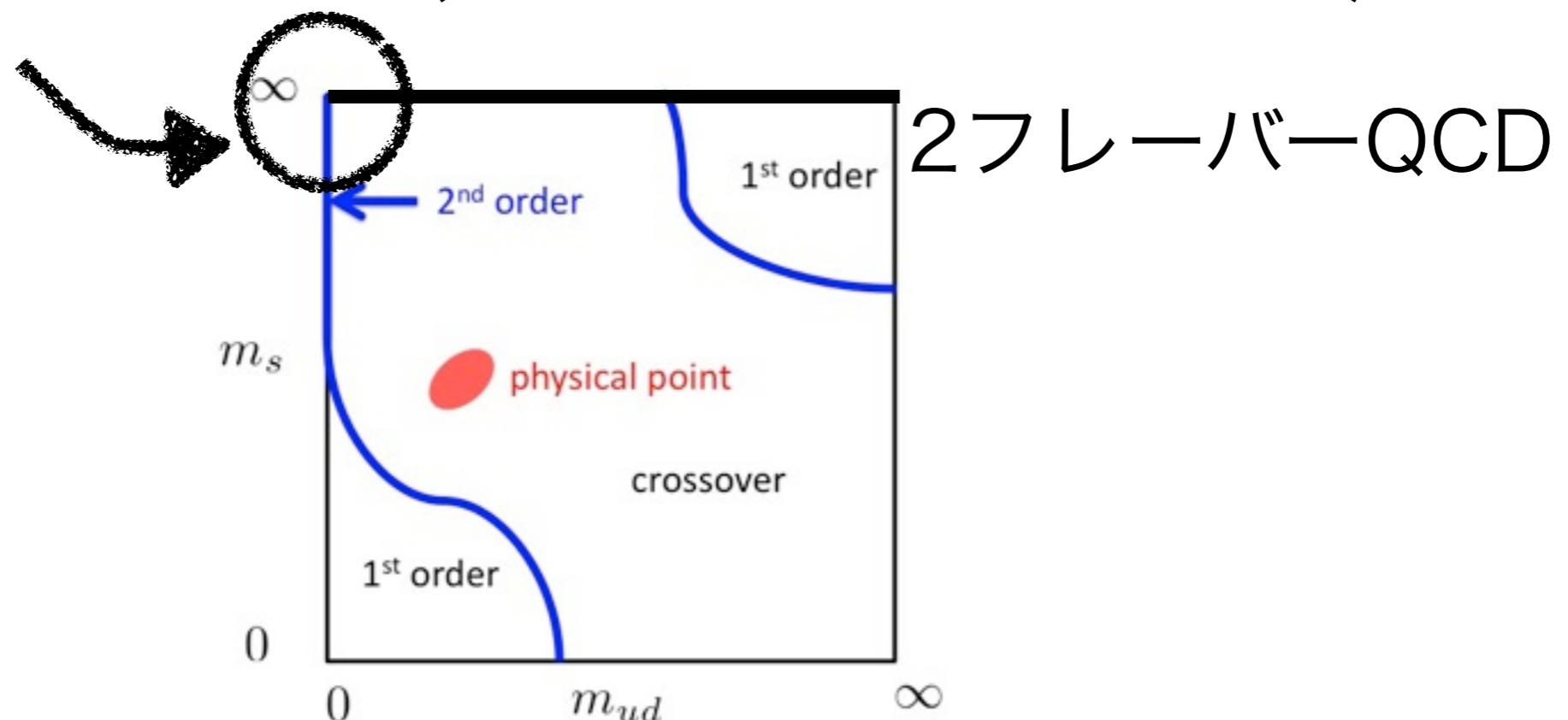
ところで
 $U(1)_A$ が回復すると？



ところで $U(1)_A$ が回復すると？

有限温度相転移の次数:

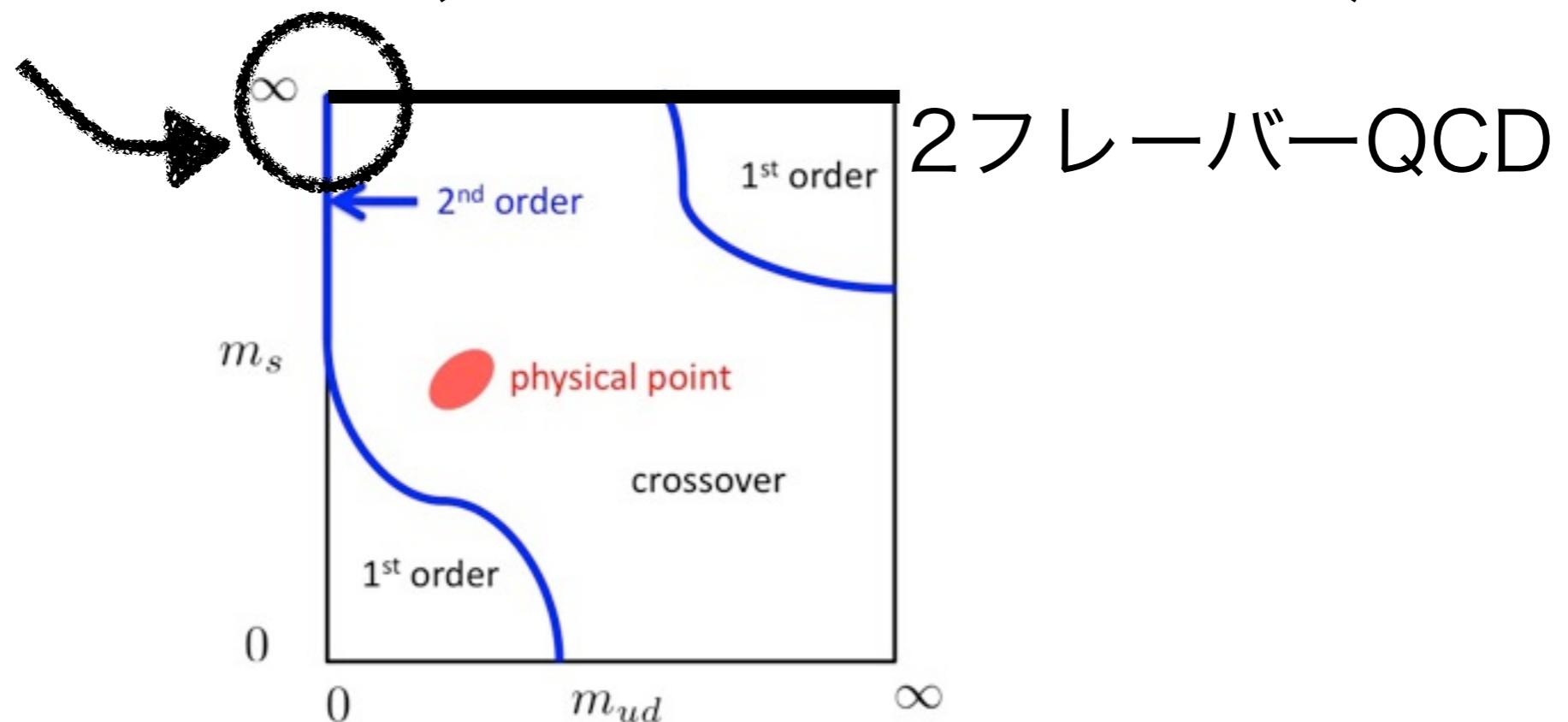
2次転移→1次転移?(Pisarski&Wilczek 1983)



ところで $U(1)_A$ が回復すると？

有限温度相転移の次数:

2次転移→1次転移?(Pisarski&Wilczek 1983)



- ※質量ゼロなので現実世界と
関係なし(現実はクロスオーバー)

もくじ

✓導入

- カイラル対称性、ディラックスペクトル
- 格子上のカイラル対称性と
ドメインウォールフェルミオン
- ドメインウォールフェルミオンでのディラックスペクトル
- ディラックスペクトルの比較
- まとめ

QCD ($N_f=2$, $m_{ud}=0$) のカイラル対称性

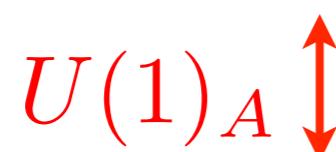
ラグランジアン

$$SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_V \times U(1)_A$$

$$\bar{q} = \begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{d} \end{pmatrix} \quad q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

$$\pi^a = \bar{q} \frac{\tau^a}{2} \gamma_5 q \xleftrightarrow{SU(2)_L \times SU(2)_R} \sigma = \bar{q} q$$

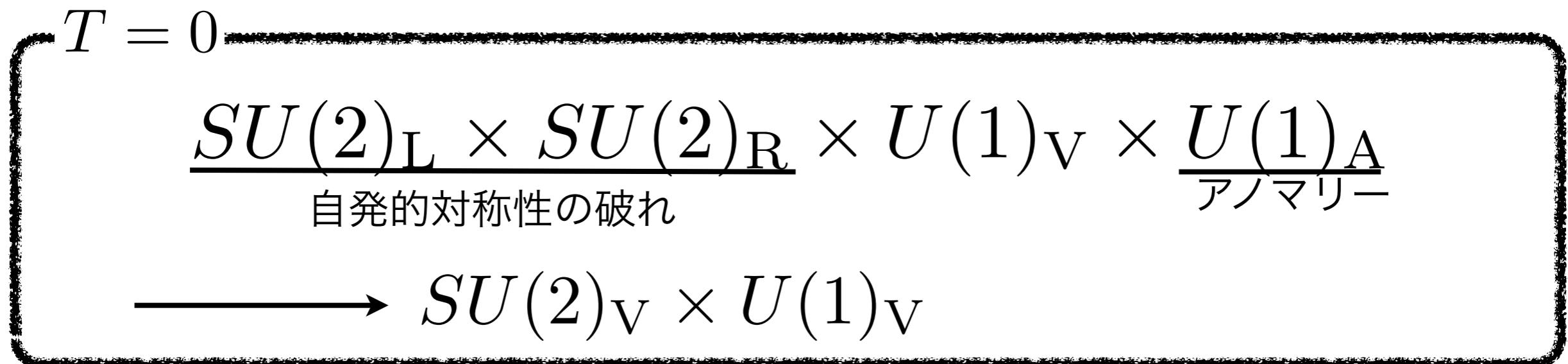
$U(1)_A$



$U(1)_A$

$$\delta^a = \bar{q} \frac{\tau^a}{2} q \xleftrightarrow{SU(2)_L \times SU(2)_R} \eta = \bar{q} \gamma_5 q$$

QCD ($N_f=2$, $m_{ud}=0$) のカイラル対称性



$$\pi^a = \bar{q} \frac{\tau^a}{2} \gamma_5 q \xleftrightarrow{\cancel{SU(2)_L \times SU(2)_R}} \sigma = \bar{q} q$$

$$\delta^a = \bar{q} \frac{\tau^a}{2} q \xleftrightarrow{\cancel{SU(2)_L \times SU(2)_R}} \eta = \bar{q} \gamma_5 q$$

$\uparrow \cancel{U(1)_A}$ $\downarrow \cancel{U(1)_A}$

$T=0$ では、すべて縮退しない。

QCD ($N_f=2$, $m_{ud}=0$) のカイラル対称性

$$T > T_c$$

$$SU(2)_V \longrightarrow SU(2)_L \times SU(2)_R \quad \text{回復}$$

$$U(1)_A \longrightarrow ??$$

$$\pi^a = \bar{q} \frac{\tau^a}{2} \gamma_5 q \xleftrightarrow{SU(2)_L \times SU(2)_R} \sigma = \bar{q} q$$

$$? \uparrow U(1)_A \downarrow \uparrow U(1)_A ?$$

$$\delta^a = \bar{q} \frac{\tau^a}{2} q \xleftrightarrow{SU(2)_L \times SU(2)_R} \eta = \bar{q} \gamma_5 q$$

$T > T_c$ では全部縮退?

ディラックスペクトル

=共変微分の固有値分布

$$(\gamma_5 \cancel{D}) \psi_j = \lambda_j \psi_j$$
$$= \gamma^\mu (\partial_\mu + A_\mu)$$

ディラックスペクトル

=共変微分の固有値分布

$$(\gamma_5 \cancel{D}) \psi_j = \lambda_j \psi_j$$
$$= \gamma^\mu (\partial_\mu + A_\mu)$$

ゲージ配位 $[A_\mu]$ を1つ選ぶ

→ディラック演算子(共変微分)が定まる

ディラックスペクトル

=共変微分の固有値分布

$$(\gamma_5 \cancel{D}) \psi_j = \lambda_j \psi_j$$
$$= \gamma^\mu (\partial_\mu + A_\mu)$$

ゲージ配位 $[A_\mu]$ を1つ選ぶ

→ディラック演算子(共変微分)が定まる

→固有値: $\lambda =$

ディラックスペクトル

=共変微分の固有値分布

$$(\gamma_5 \cancel{D}) \psi_j = \lambda_j \psi_j$$
$$= \gamma^\mu (\partial_\mu + A_\mu)$$

ゲージ配位 $[A_\mu]$ を1つ選ぶ

→ディラック演算子(共変微分)が定まる

→固有値: $\lambda = 0.01,$

ディラックスペクトル

=共変微分の固有値分布

$$(\gamma_5 \cancel{D}) \psi_j = \lambda_j \psi_j$$
$$= \gamma^\mu (\partial_\mu + A_\mu)$$

ゲージ配位 $[A_\mu]$ を1つ選ぶ

→ディラック演算子(共変微分)が定まる

→固有値: $\lambda = 0.01, 0.012, \dots$

ディラックスペクトル

=共変微分の固有値分布

$$(\gamma_5 \cancel{D}) \psi_j = \lambda_j \psi_j$$

$$= \gamma^\mu (\partial_\mu + A_\mu)$$

ゲージ配位[A_μ]を1つ選ぶ

→ディラック演算子(共変微分)が定まる

→固有値: $\lambda = 0.01, 0.012, \dots$



ディラックスペクトル

=共変微分の固有値分布

$$(\gamma_5 \cancel{D}) \psi_j = \lambda_j \psi_j$$

$$= \gamma^\mu (\partial_\mu + A_\mu)$$

ゲージ配位 $[A_\mu]$ を1つ選ぶ

→ディラック演算子(共変微分)が定まる

→固有値: $\lambda = 0.01, 0.012, \dots$



ディラックスペクトル

=共変微分の固有値分布

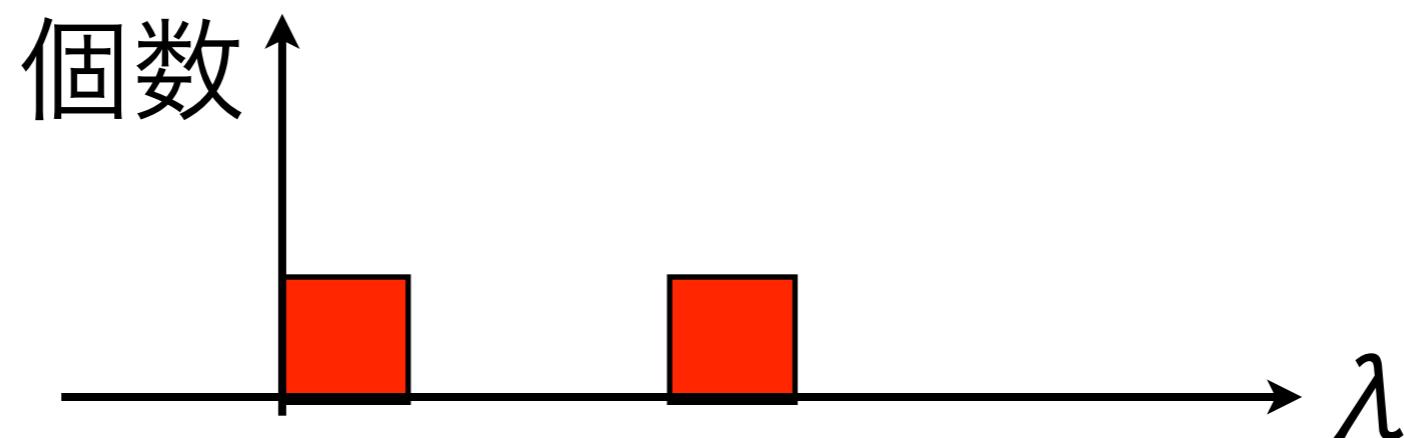
$$(\gamma_5 \cancel{D}) \psi_j = \lambda_j \psi_j$$

$$= \gamma^\mu (\partial_\mu + A_\mu)$$

ゲージ配位 [A_μ] を 1 つ選ぶ

→ ディラック演算子(共変微分)が定まる

→ 固有値: $\lambda = 0.01, 0.012, \dots$



ディラックスペクトル

=共変微分の固有値分布

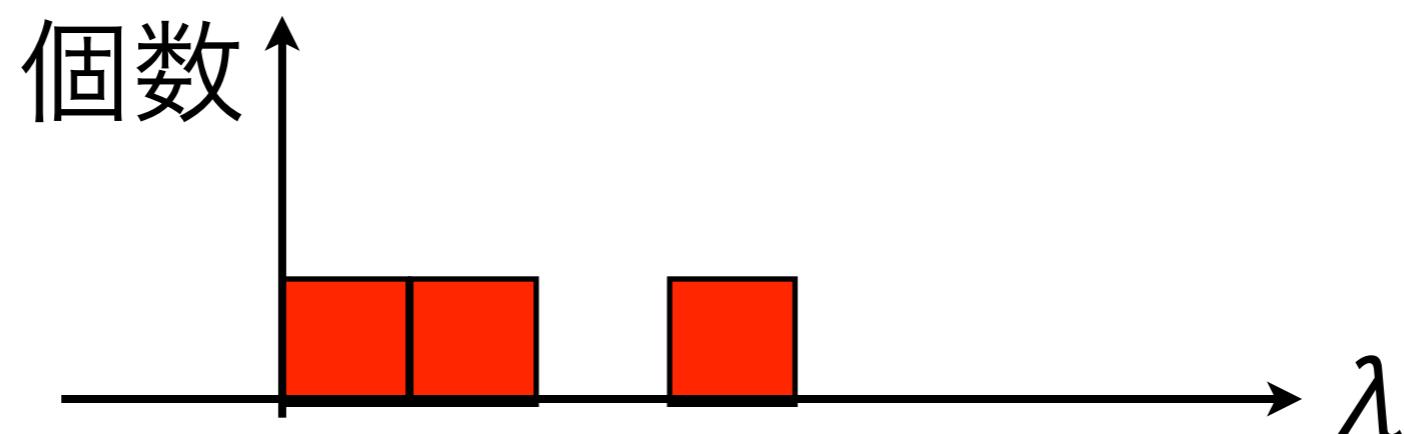
$$(\gamma_5 \cancel{D}) \psi_j = \lambda_j \psi_j$$

$$= \gamma^\mu (\partial_\mu + A_\mu)$$

ゲージ配位[A_μ]を1つ選ぶ

→ディラック演算子(共変微分)が定まる

→固有値: $\lambda = 0.01, 0.012, \dots$



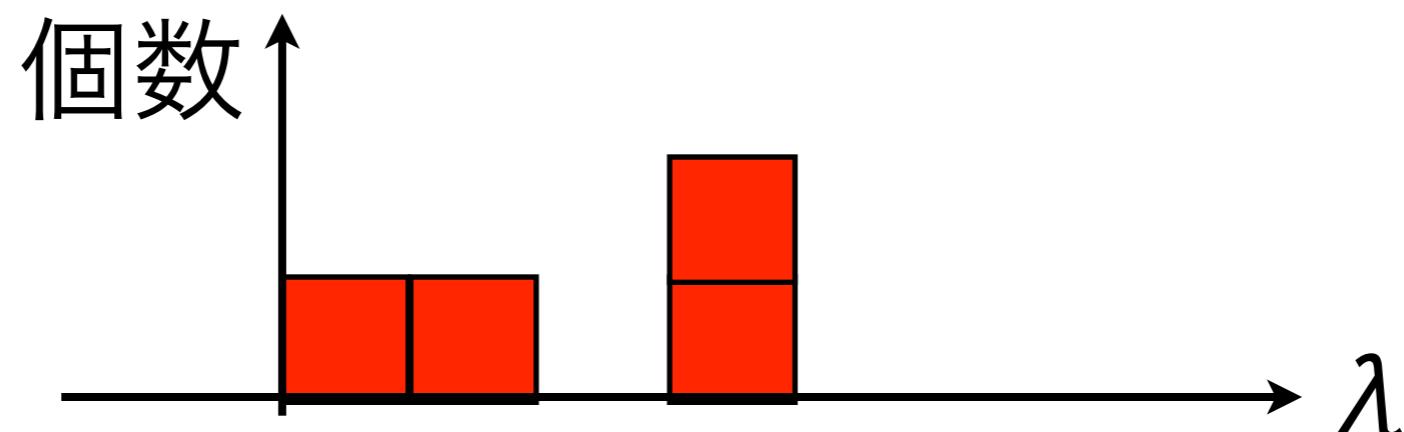
ディラックスペクトル

=共変微分の固有値分布

$$(\gamma_5 \cancel{D}) \psi_j = \lambda_j \psi_j$$

$$= \gamma^\mu (\partial_\mu + A_\mu)$$

- ゲージ配位 $[A_\mu]$ を1つ選ぶ
- ディラック演算子(共変微分)が定まる
- 固有値: $\lambda = 0.01, 0.012, \dots$



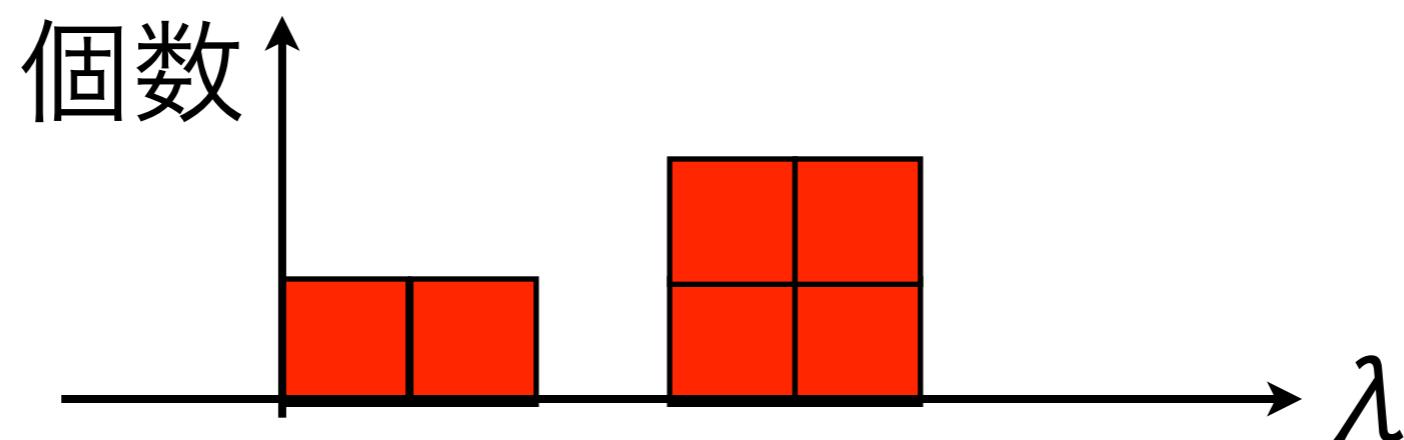
ディラックスペクトル

=共変微分の固有値分布

$$(\gamma_5 \cancel{D}) \psi_j = \lambda_j \psi_j$$

$$= \gamma^\mu (\partial_\mu + A_\mu)$$

- ゲージ配位 $[A_\mu]$ を1つ選ぶ
- ディラック演算子(共変微分)が定まる
- 固有値: $\lambda = 0.01, 0.012, \dots$



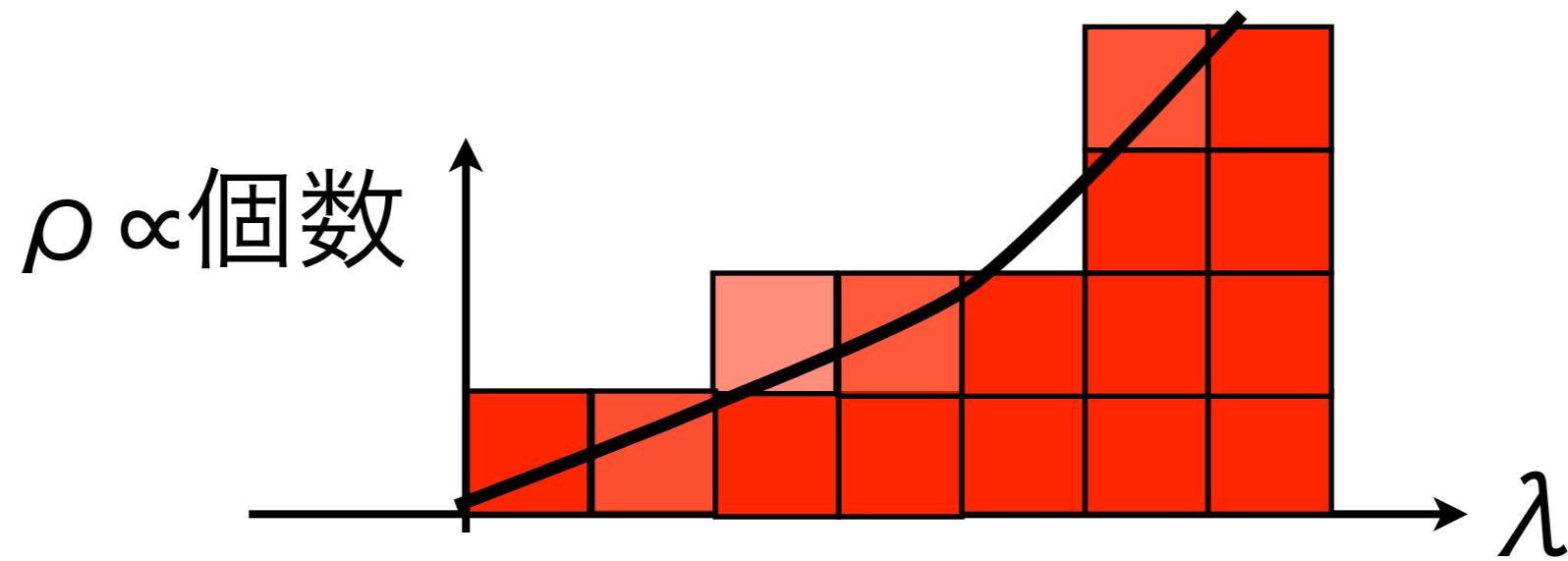
ディラックスペクトル

=共変微分の固有値分布

$$(\gamma_5 \cancel{D}) \psi_j = \lambda_j \psi_j$$

$$= \gamma^\mu (\partial_\mu + A_\mu)$$

たくさんのゲージ配位で平均(経路積分)



ディラックスペクトル

=共変微分の固有値分布

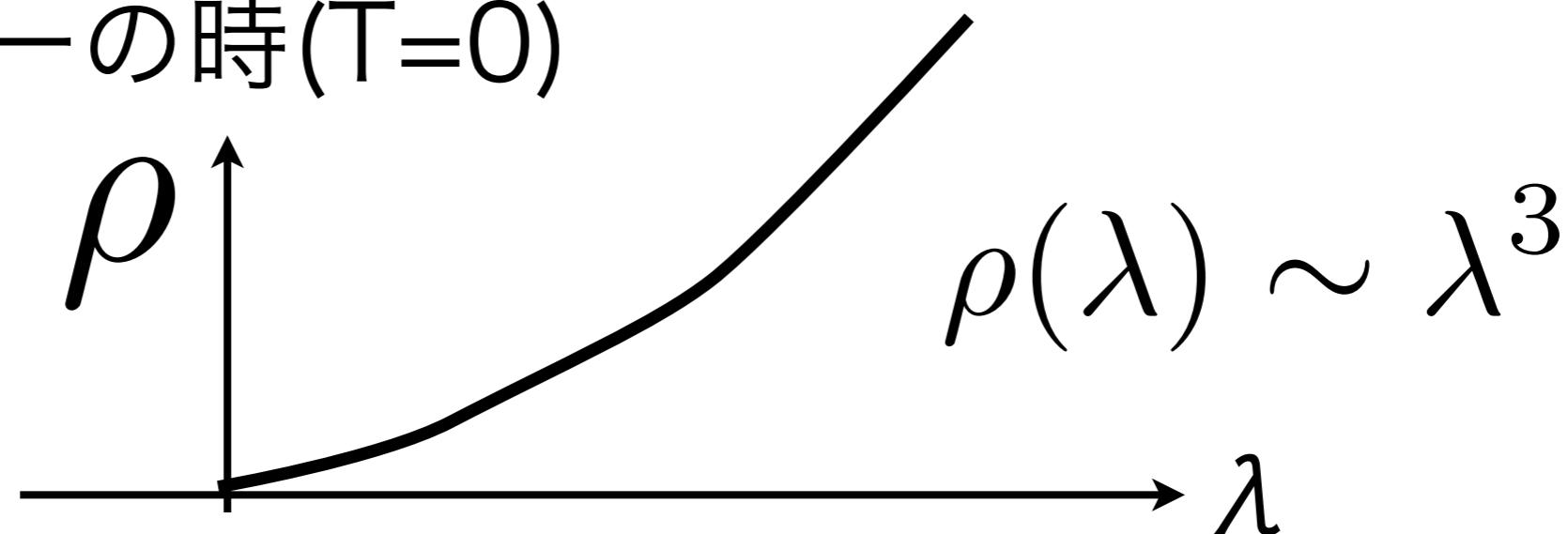
$$(\gamma_5 \cancel{D}) \psi_j = \lambda_j \psi_j$$

$$= \gamma^\mu (\partial_\mu + A_\mu)$$

$\rho(\lambda)$ ： λ の分布

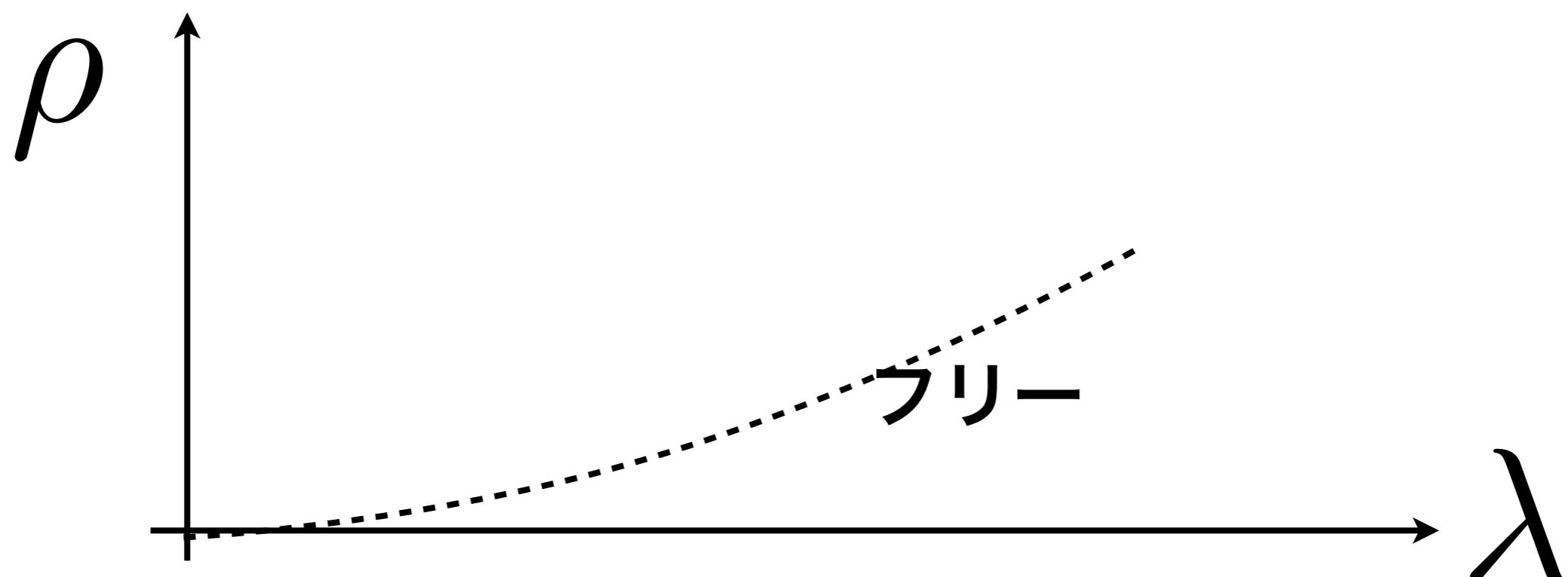
→ゲージ場存在下でのクォークの性質がわかる

例フリーの時($T=0$)



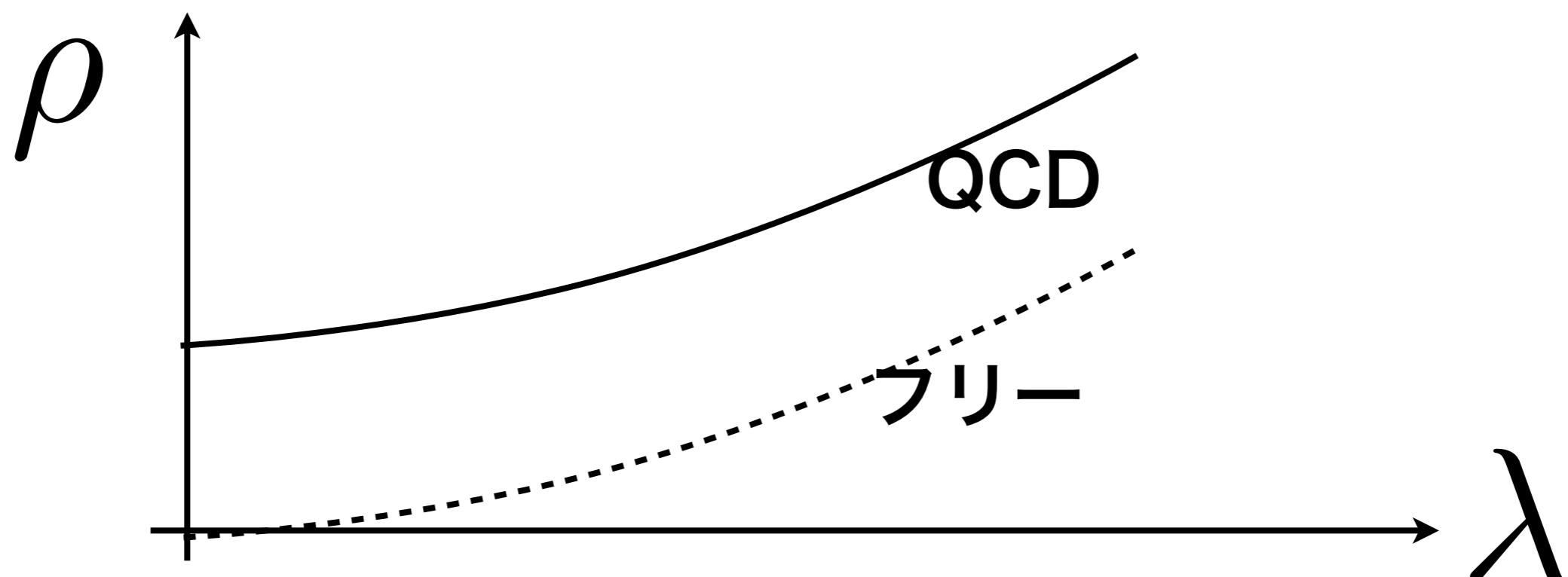
ディラックスペクトル(0温度)

例 カイラル対称性が破れる時(QCD)



ディラックスペクトル(0温度)

例 カイラル対称性が破れる時(QCD)

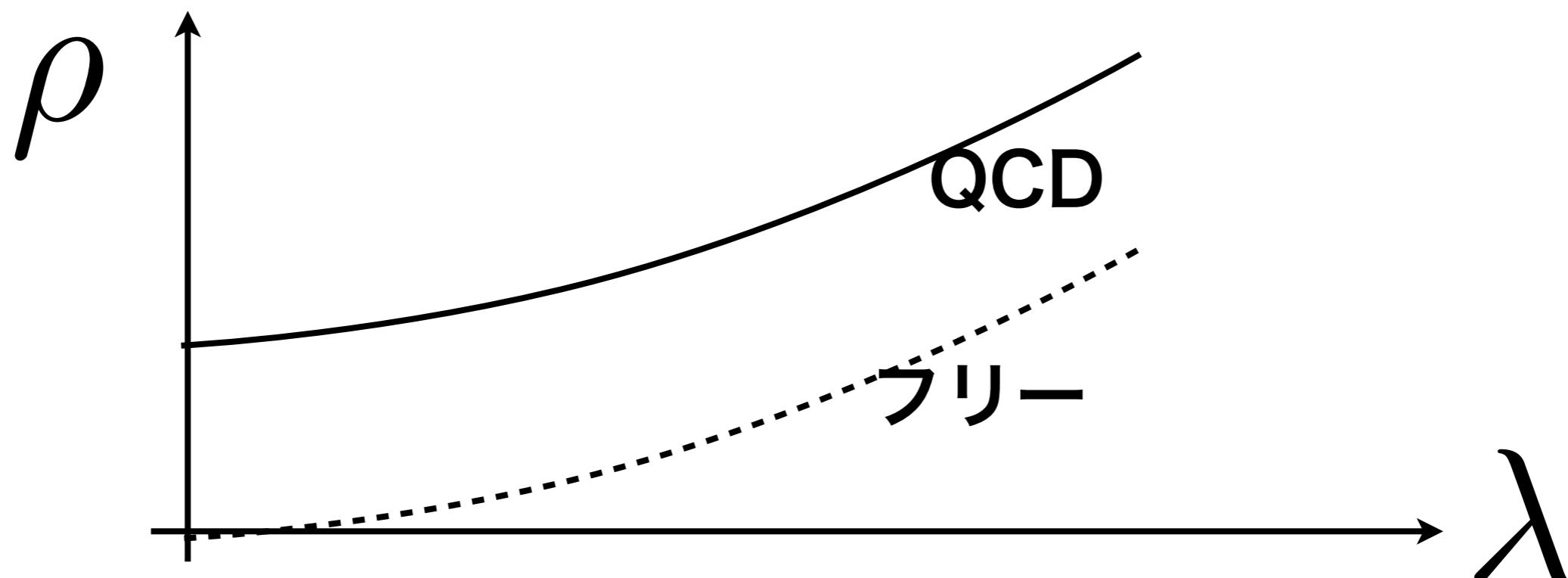


ディラックスペクトル(0温度)

例 カイラル対称性が破れる時(QCD)

$$\lim_{m \rightarrow 0} \lim_{V \rightarrow \infty} \langle \bar{q}q \rangle \propto \rho(0)$$

Banks-Casher関係式

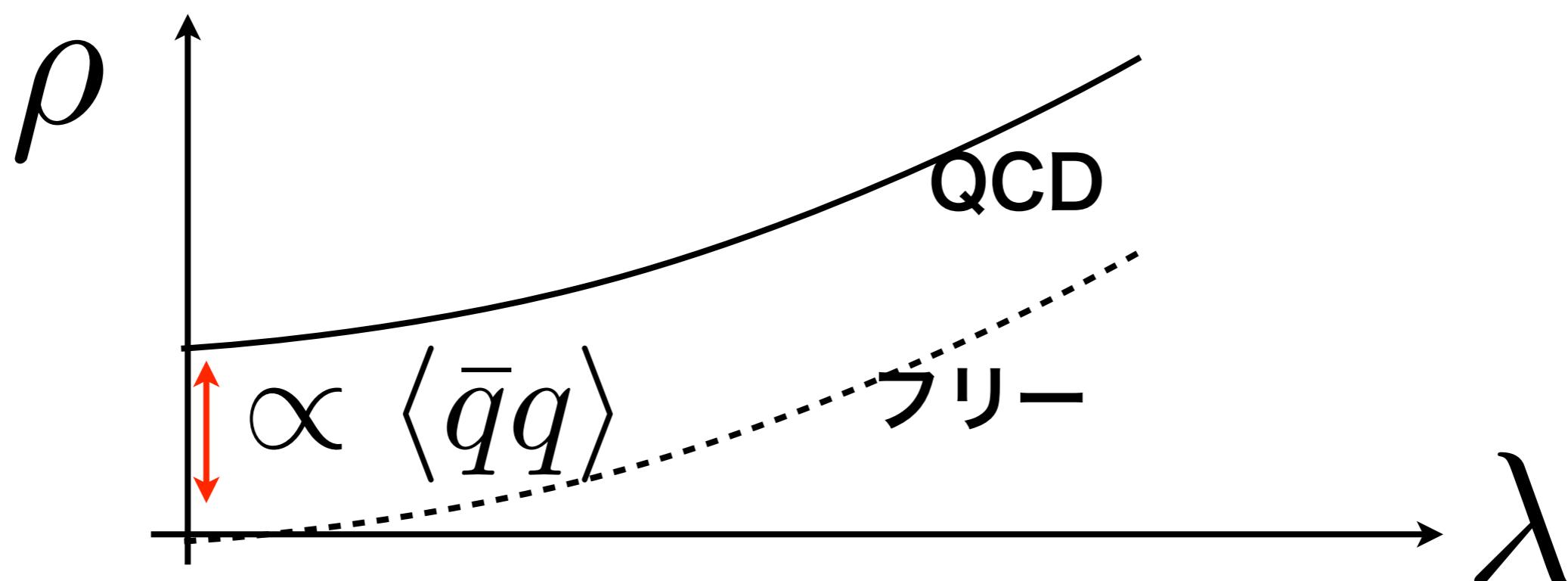


ディラックスペクトル(0温度)

例 カイラル対称性が破れる時(QCD)

$$\lim_{m \rightarrow 0} \lim_{V \rightarrow \infty} \langle \bar{q}q \rangle \propto \rho(0)$$

Banks-Casher関係式

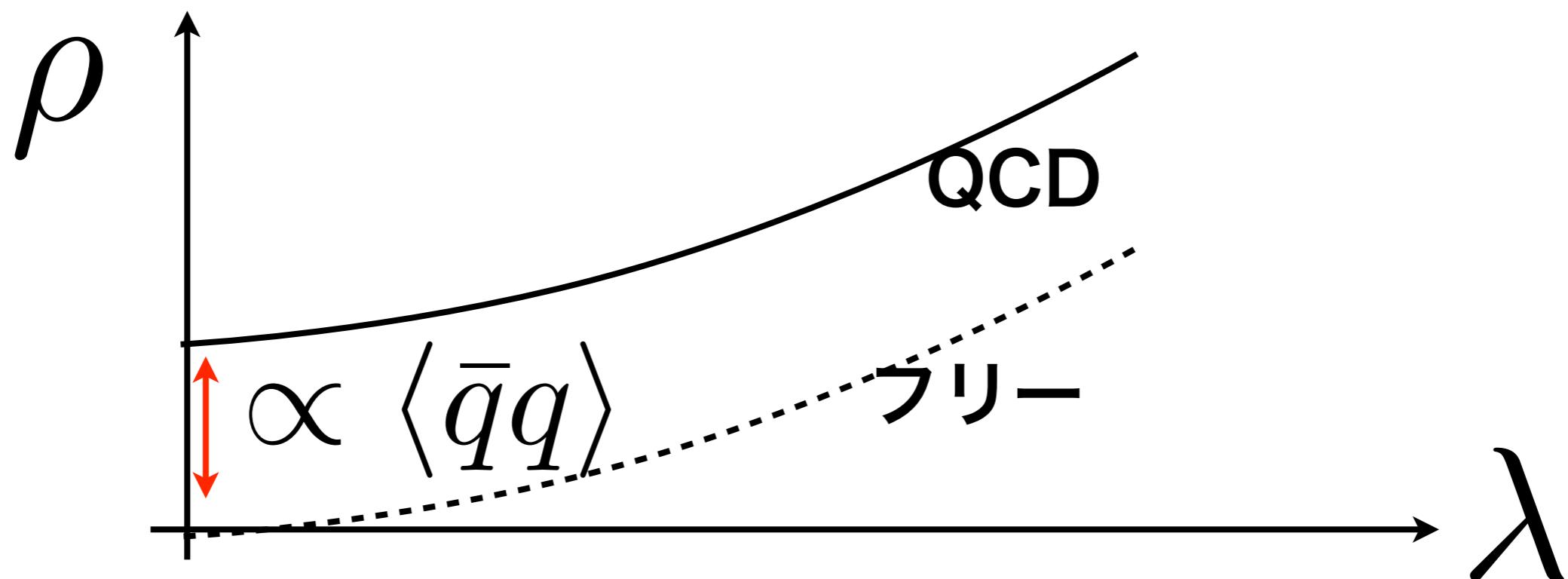


ディラックスペクトル(0温度)

例 カイラル対称性が破れる時(QCD)

$$\lim_{m \rightarrow 0} \lim_{V \rightarrow \infty} \langle \bar{q}q \rangle \propto \rho(0)$$

Banks-Casher関係式



λが小さいところが重要！

ディラックスペクトルと対称性

$SU(2)_L \times SU(2)_R$

Banks-Casher 関係式

$$|\rho(0)| = \frac{\langle \bar{q}q \rangle}{\pi}$$

$U(1)_A$

Atiyah-Singer 指数定理

$$n_+ - n_- = \nu$$

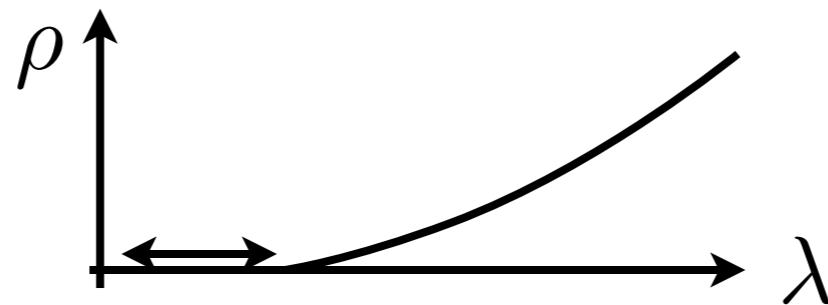
n_{\pm} : カイラル0モードの数

両方の対称性にとって

λが小さいところが重要

Cohen(1996)の議論

カイラルゼロモードが無視でき、
ディラックスペクトルにギャップが有る場合、



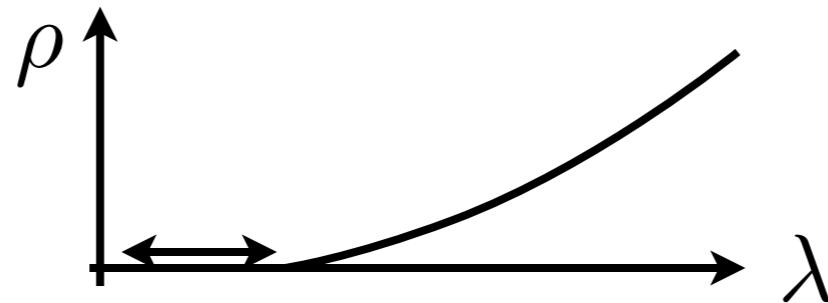
$U(1)_A$ の破れ

$$\int d^4x [\langle \pi(x)\pi(0) \rangle - \langle \delta(x)\delta(0) \rangle] = \int_0^\infty d\lambda \frac{4m^2 \rho(\lambda)}{(m^2 + \lambda^2)^2} = 0$$

関連研究:青木-深谷-谷口 (2012)
反論:石川-岩崎-中山-吉江 (2014)など

Cohen(1996)の議論

カイラルゼロモードが無視でき、
ディラックスペクトルにギャップが有る場合、



$U(1)_A$ の破れ

$$\int d^4x [\langle \pi(x)\pi(0) \rangle - \langle \delta(x)\delta(0) \rangle] = \int_0^\infty d\lambda \frac{4m^2 \rho(\lambda)}{(m^2 + \lambda^2)^2} = 0$$

関連研究:青木-深谷-谷口 (2012)
反論:石川-岩崎-中山-吉江 (2014)など

λが小さいところが重要！

格子上のカイラル対称性 =Ginsparg-Wilson関係式

格子上のカイラル対称性 =Ginsparg-Wilson関係式

$S = \int d^4x \bar{\psi} D\psi$ がカイラル変換で不变 \Leftrightarrow

連續理論 : $D\gamma_5 + \gamma_5 D = 0$

格子上のカイラル対称性 =Ginsparg-Wilson関係式

$S = \int d^4x \bar{\psi} D\psi$ がカイラル変換で不变 \Leftrightarrow

連續理論：

$$D\gamma_5 + \gamma_5 D = 0$$



格子理論： $D\gamma_5 + \gamma_5 D = 2aD\gamma_5 D$

Ginsparg-Wilson関係式

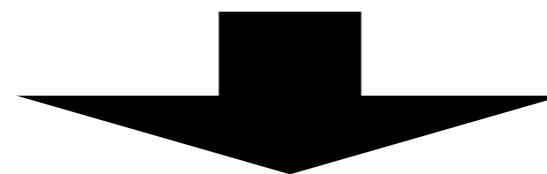
a ：格子間隔

格子上のカイラル対称性 =Ginsparg-Wilson関係式

$S = \int d^4x \bar{\psi} D\psi$ がカイラル変換で不变 \Leftrightarrow

連續理論：

$$D\gamma_5 + \gamma_5 D = 0$$



格子理論： $D\gamma_5 + \gamma_5 D = 2aD\gamma_5 D$

Ginsparg-Wilson関係式

a ：格子間隔

*この様に表現しないと困難が起こる。

Ginsparg-Wilson関係式を満たすフェルミオン
=オーバーラップフェルミオン

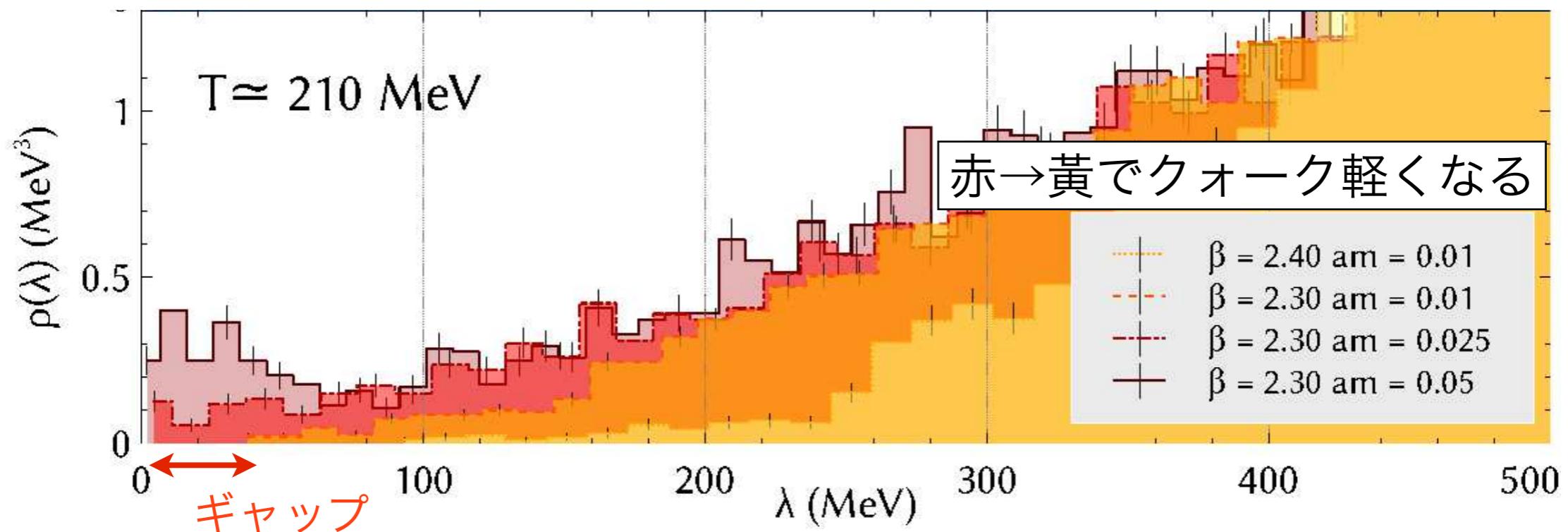
$$D\gamma_5 + \gamma_5 D = 2aD\gamma_5 D$$

$$D_N(m) = \frac{1+m}{2} + \frac{1-m}{2} \gamma_5 \text{sgn}(H_K)$$

○厳密なカイラル対称性

×符号関数の評価が大変、大きい体積での数値計算できない

JLQCD(2013)による前の結果



オーバーラップフェルミオン(カイラル対称性が厳密なフェルミオン)

体積: $L=2\text{fm}$ (小さい)、トポロジー固定

有限温度シミュレーション

→ $U(1)$ が回復すると結論

有限体積効果を見てるんじゃない?

(トポロジーも固定して、厳密な結果なのか?)

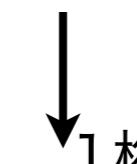
→フェルミオンを変えてトライ。

ドメインウォールフェルミオン =オーバーラップの有理式近似

オーバーラップ(厳密なカイラル対称性,JLQCD2013で使用):

$$D_N(m) = \frac{1+m}{2} + \frac{1-m}{2} \gamma_5 \text{sgn}(H_K)$$

8桁精度のカイラル対称性

ドメインウォールフェルミオン (RBC/LLNL先行研究)  1桁精度のカイラル対称性

$$D^4 = \frac{1+m}{2} + \frac{1-m}{2} \gamma_5 \frac{T^{-L_s} - 1}{T^{-L_s} + 1}$$

- 符号関数を有理関数近似することで
カイラル対称性をコントロール
($L_s \rightarrow \infty$ でオーバーラップ)

- ✗わずかにGinsparg-Wilson関係式を満たさない

メビウスドメインウォールフェルミオン =より良いオーバーラップの有理式近似

オーバーラップ(厳密なカイラル対称性,JLQCD2013で使用):

$$D_N(m) = \frac{1+m}{2} + \frac{1-m}{2} \gamma_5 \text{sgn}(H_K)$$

8桁精度のカイラル対称性

ドメインウォールフェルミオン (RBC/LLNL先行研究)

1桁精度のカイラル対称性

$$\frac{T^{-L_s} - 1}{T^{-L_s} + 1}$$

メビウスドメインウォールフェルミオン =より良いオーバーラップの有理式近似

オーバーラップ(厳密なカイラル対称性,JLQCD2013で使用):

$$D_N(m) = \frac{1+m}{2} + \frac{1-m}{2} \gamma_5 \text{sgn}(H_K)$$

ドメインウォールフェルミオン (RBC/LLNL先行研究)

1桁精度のカイラル対称性

$$\frac{T^{-L_s} - 1}{T^{-L_s} + 1}$$

メビウスドメインウォールフェルミオン

(本研究で使用)

3桁精度のカイラル対称性

Edwards-Heller (2000)

8桁精度のカイラル対称性

$$\frac{\prod_s^{L_s} T_s^{-1}(b, c) - 1}{\prod_s^{L_s} T_s^{-1}(b, c) + 1}$$

→新しいパラメータを導入→オーバーラップに近い
(まだ、Ginsparg-Wilson関係式は破れている)

前のJLQCD

本研究

オーバーラップ

(改良型)ドメインウォール

小さい体積($L=2\text{fm}$)

→ 大きい体積($L=2\text{fm}, 4\text{fm}$)

トポロジー固定

→ 色々なトポロジー

カイラル対称性:厳密

→ 非改良より良い

$U(1)$ 回復

???

先行研究

グループ	フェルミオン	体積(fm ³)	スペクトルギャップ	U(1) _A
JLQCD(2013)	オーバーラップ (トポロジー固定)	2 ³	あり	回復
Chiu et al (2013)	Optimized Domain-wall	3 ³	あり? $\rho \sim \lambda^3 + \dots$	回復
Ohno et al (2011)	HISQ	4 ³	なし	回復しない
LLNL/RBC (2013)	ドメインウォール	2 ³ , 4 ³	なし	回復しない

果たしてどちらが本当なのか？

原因是、フェルミオン、体積？ 系統的理解が足りない！
特にオーバーラップ/ドメインウォールの違いを理解したい

Lattice set up

Gauge action:tree level **Symanzik**

Fermion :Möbius DW($b=2$, $c=1$, Scaled Shamir + Tanh)
 w/ **Stout** smearing(3)
 code :lrolro++(G. Cossu et al.)
 Resource :BG/Q(KEK)

$L^3 \times L_t$	β	m_{ud} (MeV)	L_s	m_{res} (MeV)	Temp.(MeV)	Note
$16^3 \times 8$	4.07	30	12	2.5	180	488 Conf. every 50 Trj.
$16^3 \times 8$	4.07	3.0	24	1.4	180	319 Conf. every 20 Trj.
$16^3 \times 8$	4.10	32	12	1.2	200	480 Conf. every 50 Trj.
$16^3 \times 8$	4.10	3.2	24	0.8	200	538 Conf. every 50 Trj.
$32^3 \times 8$	4.10	32	12	1.7	200	175 Conf. every 20 Trj.
$32^3 \times 8$	4.10	16	24	1.7	200	294 Conf. every 20 Trj.
$32^3 \times 8$	4.10	3.2	24	-	200	88 Conf. every 10 Trj.

より良いカイラル対称性の配位も生成中…

3.Domain-wall Dirac spectrum

観測量:

(ドメインウォール)ディラックスペクトル

$$H_m \psi_i = \lambda_i^m \psi_i$$

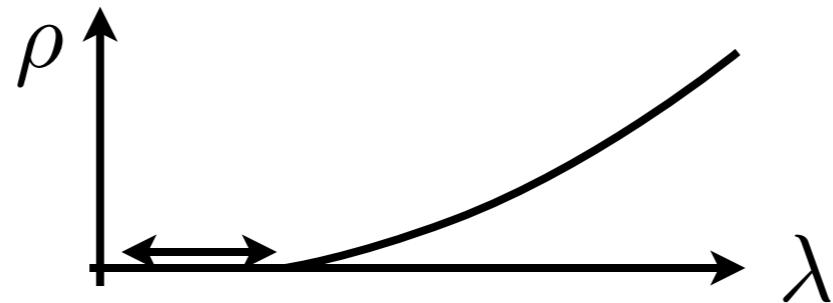
$$H_m = \gamma_5 [(1 - m_{ud}) D^4 + m_{ud}]$$

↑エルミート・ディラック演算子

質量ありのシミュレーション
→質量0のスペクトルを作った

Cohen(1996)の議論(再掲)

カイラルゼロモードが無視でき、
ディラックスペクトルにギャップがある場合、



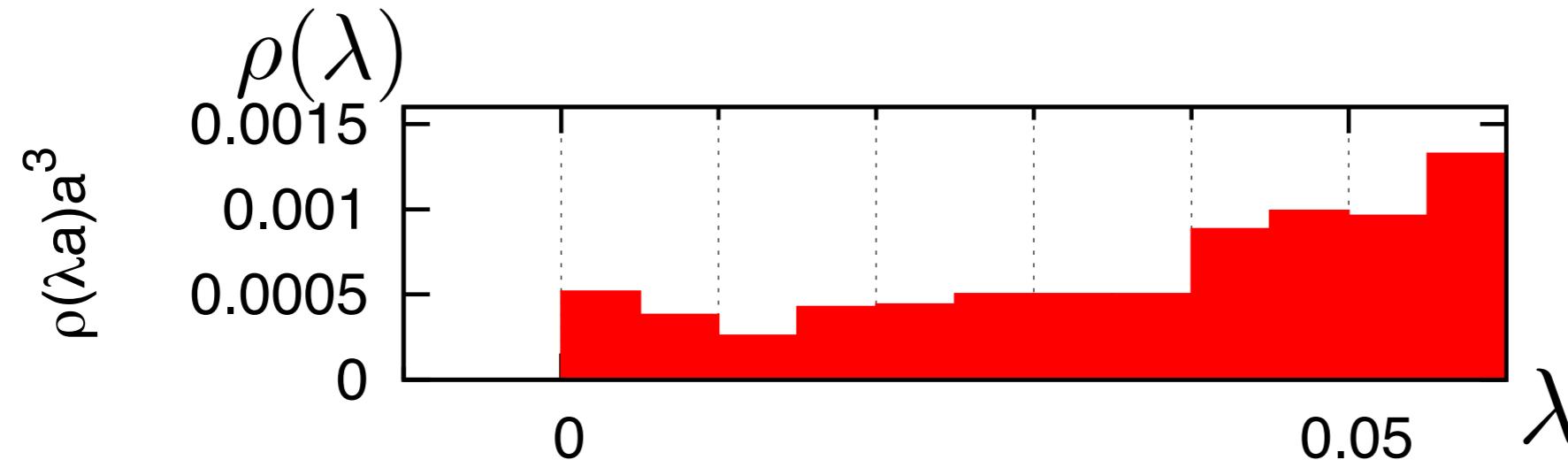
$\text{U}(1)_A$ の破れ

$$\int d^4x [\langle \pi(x)\pi(0) \rangle - \langle \delta(x)\delta(0) \rangle] = \int_0^\infty d\lambda \frac{4m^2 \rho(\lambda)}{(m^2 + \lambda^2)^2} = 0$$

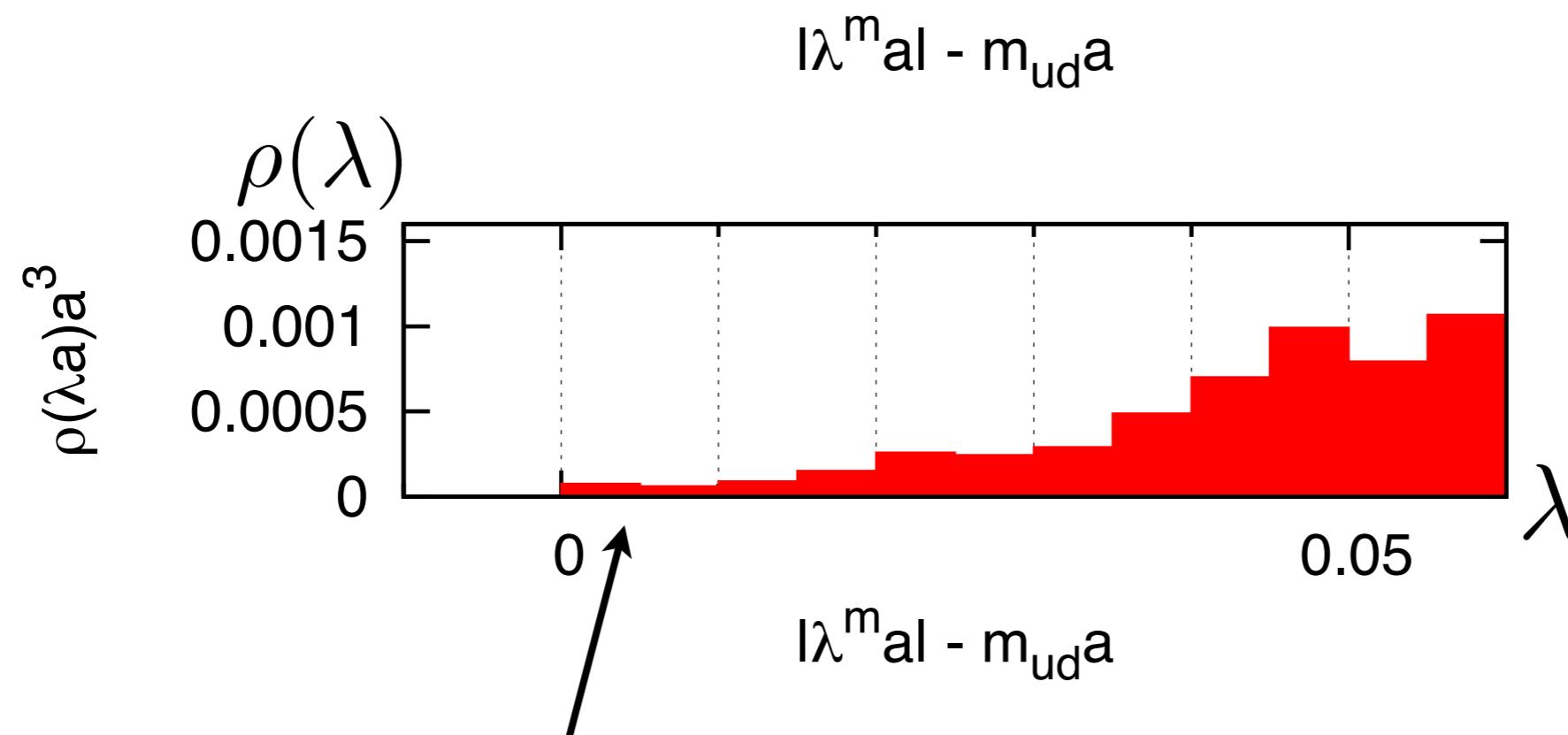
関連研究:青木-深谷-谷口 (2012)
 反論:石川-岩崎-中山-吉江 (2014)など

ギャップが見つかるか？

T=200MeV>Tc L=4fm 大きい体積



$m_{ud}=32\text{MeV}$
($m_{res}=1.7\text{MeV}$)



$m_{ud}=3.2\text{MeV}$

軽いクォークでもギャップが見えない → $U_A(1)$ は破れている？

3.Histogram for DW

$L=4\text{fm}$, $T=200 \text{ MeV}$ $m_{ud}=3.2\text{MeV}$ ではギャップなし?

$U(1)_A$ は破れて見える

先行研究(LLNL/RBC 2013)と同じ結論...

オーバーラップ(JLQCD)と何がちがうのか?

考えられる原因

前JLQCDは有限サイズ効果を見ていた説

トポロジー固定してたのが悪かった説

DWのGinsparg-Wilson 関係式の破れ?

4. Ginsparg-Wilson 関係式の破れ

各固有モード毎のGinsparg-Wilson 関係式の破れ

$$S = \int d^4x \bar{\psi} D\psi \quad \text{がカイラル変換で不变} \Leftrightarrow$$

格子理論 : $D\gamma_5 + \gamma_5 D = 2aD\gamma_5 D$

D の固有関数 ↓

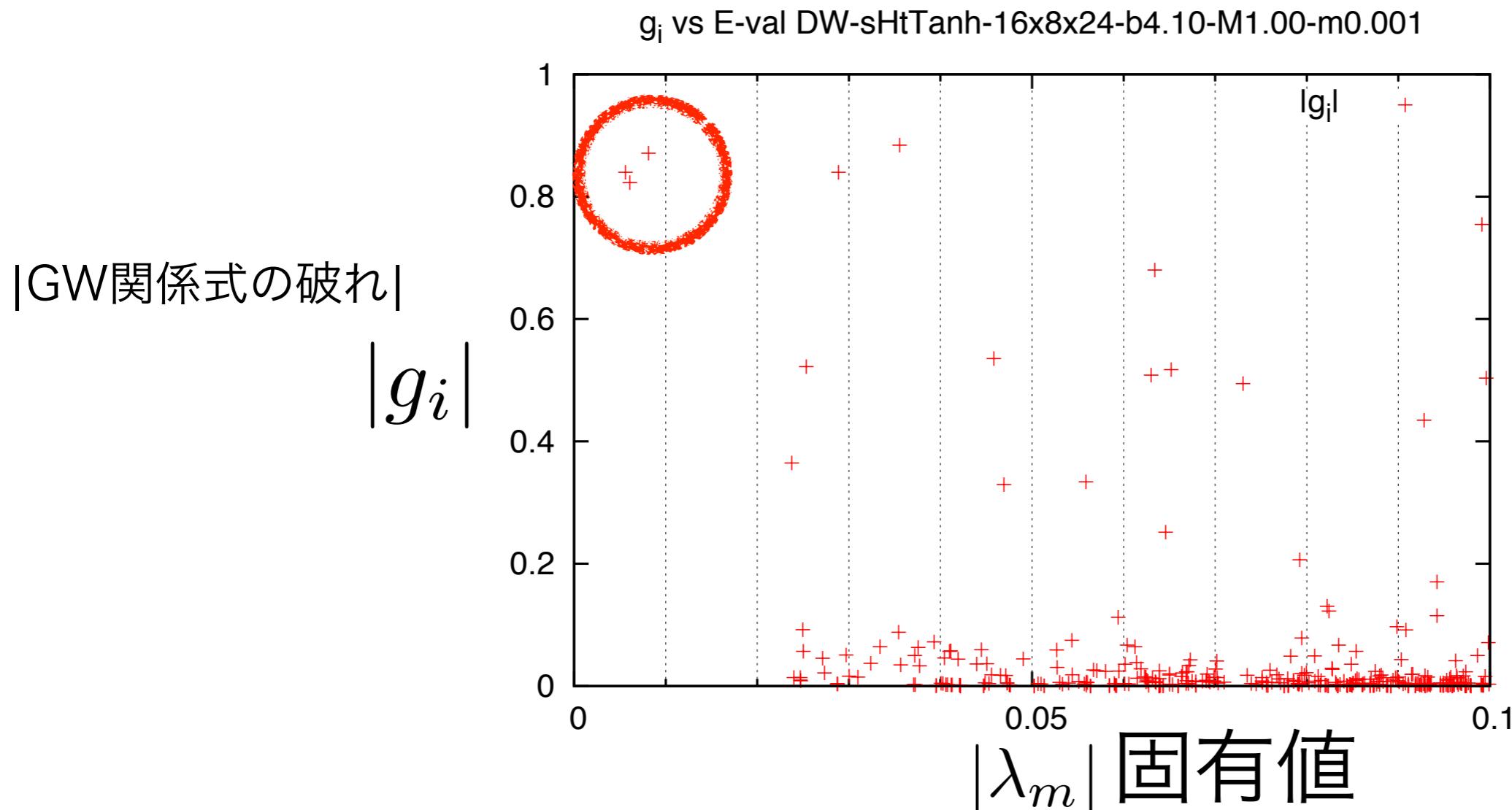
$$g_i \propto \psi_i^\dagger \gamma_5 [D\gamma_5 + \gamma_5 D - 2aD\gamma_5 D] \psi_i$$

g_i : カイラル対称性のあるフェルミオンなら 0

ドメインウォールフェルミオンではどうなるのか？

ドメインウォールフェルミオンの カイラル対称性の破れに効く低いモード: **Ginsparg Wilson**関係式がすごく破れている

カイラル対称性を改善したドメインウォールでも大きく破れている！



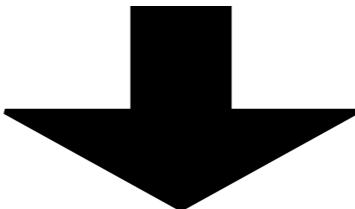
※ $\lambda \sim 0$ の周りがカイラル対称性に重要
ドメインウォールフェルミオンのスペクトルの信頼性?

分った事

改良したドメインウォールフェルミオンでも
Gisparg-Wilson 関係式が破れている

分った事

改良したドメインウォールフェルミオンでも
Gisparg-Wilson 関係式が破れている



何とかしてオーバーラップフェルミオン
に差し替えられないか?

(経路積分にあるディラック演算子
固有値を与えるディラック演算子(プローブ)

5.(Reweighted) Overlap Dirac spectrum

経路積分にある

フェルミオンの差し替え=Re-weighting法

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{O} \rangle_{\text{Overlap}} &= \int \mathcal{D}\bar{q} \mathcal{D}q \mathcal{D}A_\mu \mathcal{O} e^{-S_{\text{gauge}}} e^{-\bar{q}[D_{\text{OV}}]q} \\
 &= \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{O} e^{-S_{\text{gauge}}} \text{Det}[D_{\text{OV}}^2] \\
 &= \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{O} e^{-S_{\text{gauge}}} \text{Det}[D_{\text{OV}}^2] \frac{\text{Det}[D_{\text{DW}}^2]}{\text{Det}[D_{\text{DW}}^2]} \\
 &= \int \mathcal{D}\bar{q} \mathcal{D}q \mathcal{D}A_\mu \mathcal{O} R e^{-S_{\text{gauge}}} e^{-\bar{q}[D_{\text{DW}}]q} \\
 &= \langle \mathcal{O} R \rangle_{\text{Domain Wall}}
 \end{aligned}$$

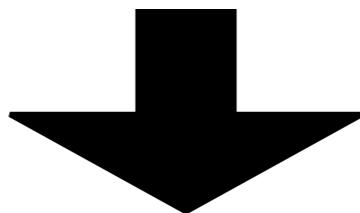
$$R = \frac{\text{Det}[D_{\text{OV}}^2]}{\text{Det}[D_{\text{DW}}^2]}$$

Rをかけて平均を取ればオーバーラップに差し替えられる

Reweighting to OV

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{\text{ov}} = \left\langle \mathcal{O} \frac{\det D_{\text{ov}}^2(m_{ud})}{\det D_{\text{DW}}^2(m_{ud})} \frac{\det D_{\text{DW}}^2(1/2a)}{\underline{\det D_{\text{ov}}^2(1/2a)}} \right\rangle_{\text{DW}}$$

Reweightingを安定化



ドメインウォール配位で
3つの固有値分布を比較できる

$\langle \rho(\lambda_{\text{DW}}) \rangle_{\text{DW}}$	ドメインウォール配位 ドメインウォール固有値
$\langle \rho(\lambda_{\text{ov}}) \rangle_{\text{DW}}$	ドメインウォール配位 オーバーラップ固有値
$\langle \rho(\lambda_{\text{ov}}) \rangle_{\text{ov}}$ Reweighted	オーバーラップ配位 オーバーラップ固有値

※ドメインウォール配位=中間状態にドメインウォールフェルミオンのループ
ドメインウォール固有値=プローブがドメインウォールフェルミオン

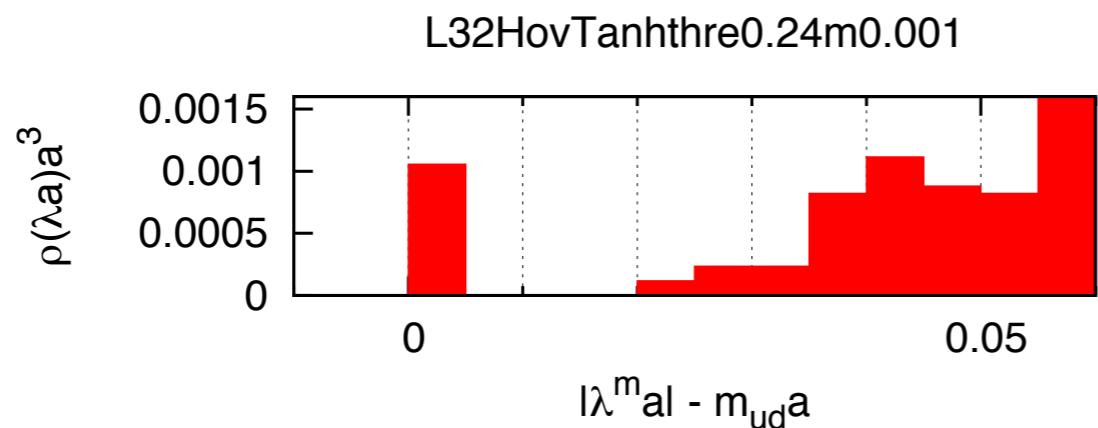
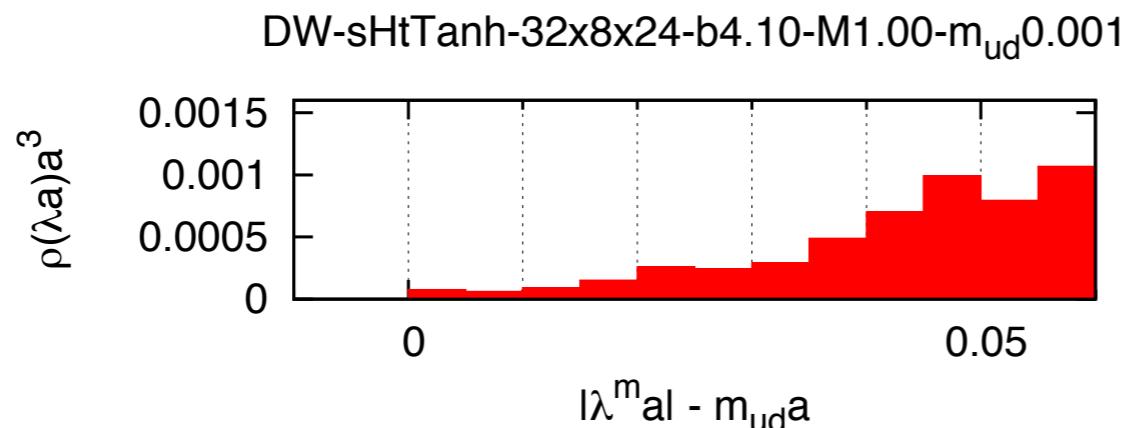
$T=200\text{MeV}$, $m_{ud}=3.2\text{MeV}$

$L=4\text{fm}$

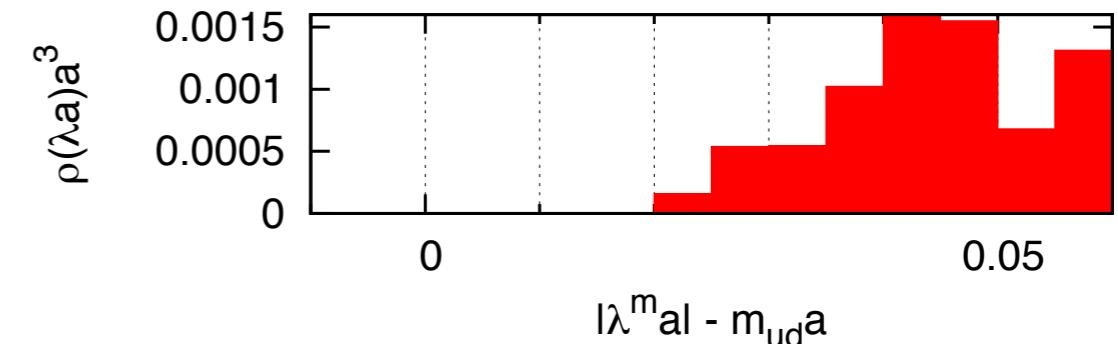
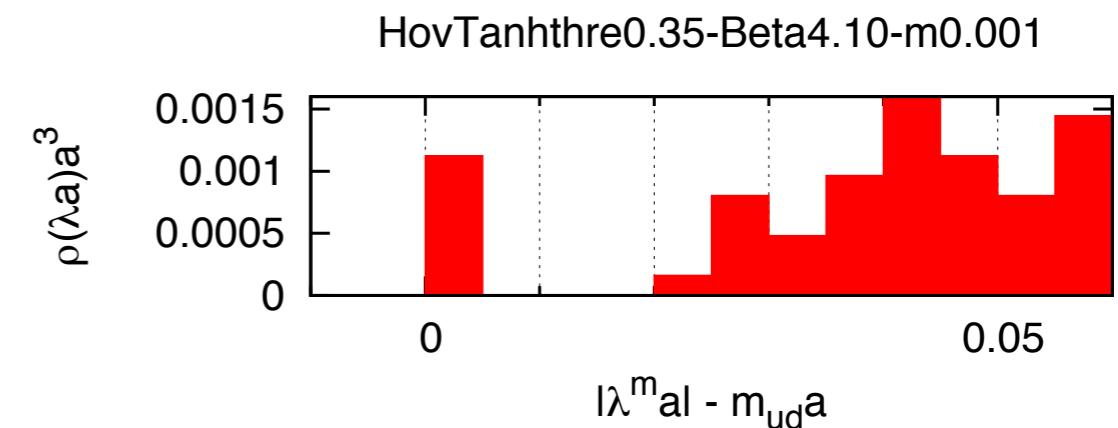
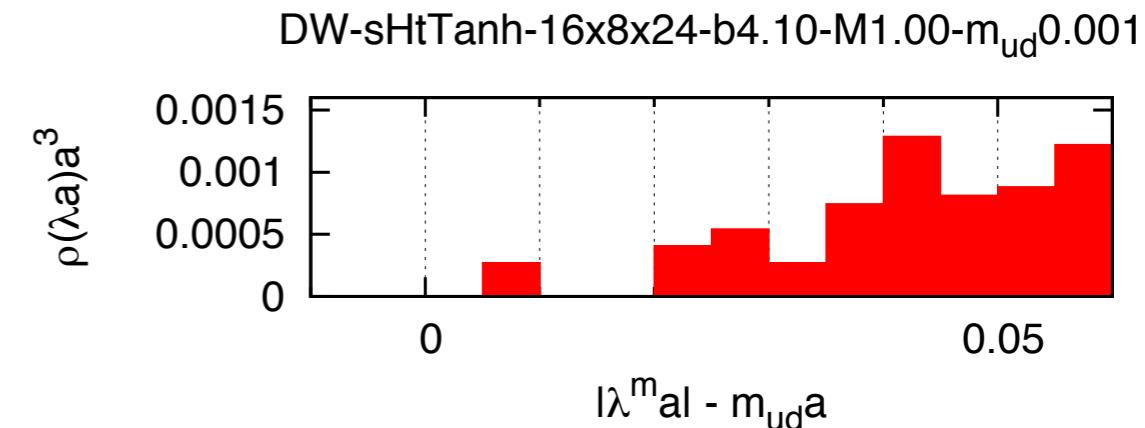
$L=2\text{fm}$

DW配位
DW固有値
(オリジナル)

OV配位
OV固有値
(差し替え後)



Reweighting not available



※ドメインウォール配位=中間状態にドメインウォールフェルミオンのループ
ドメインウォール固有値=プローブがドメインウォールフェルミオン

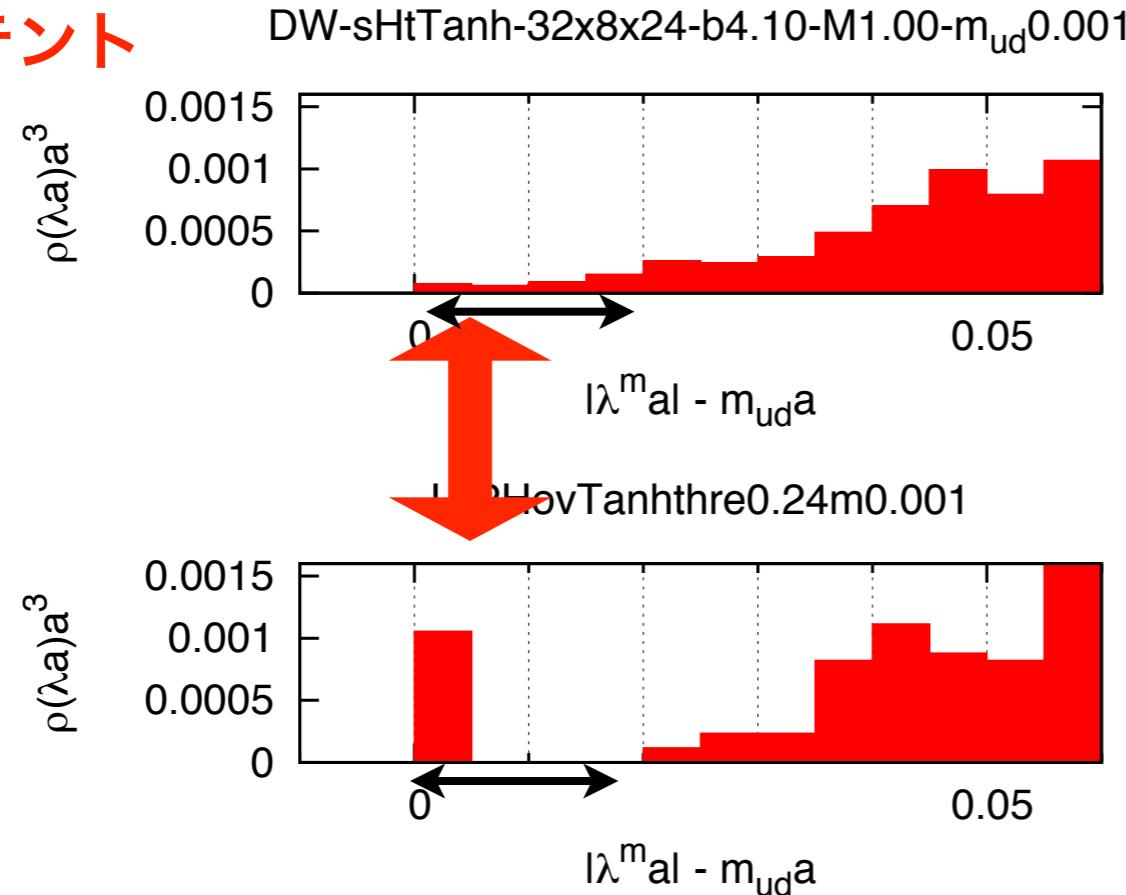
T=200MeV, $m_{ud}=3.2\text{MeV}$

L=4fm

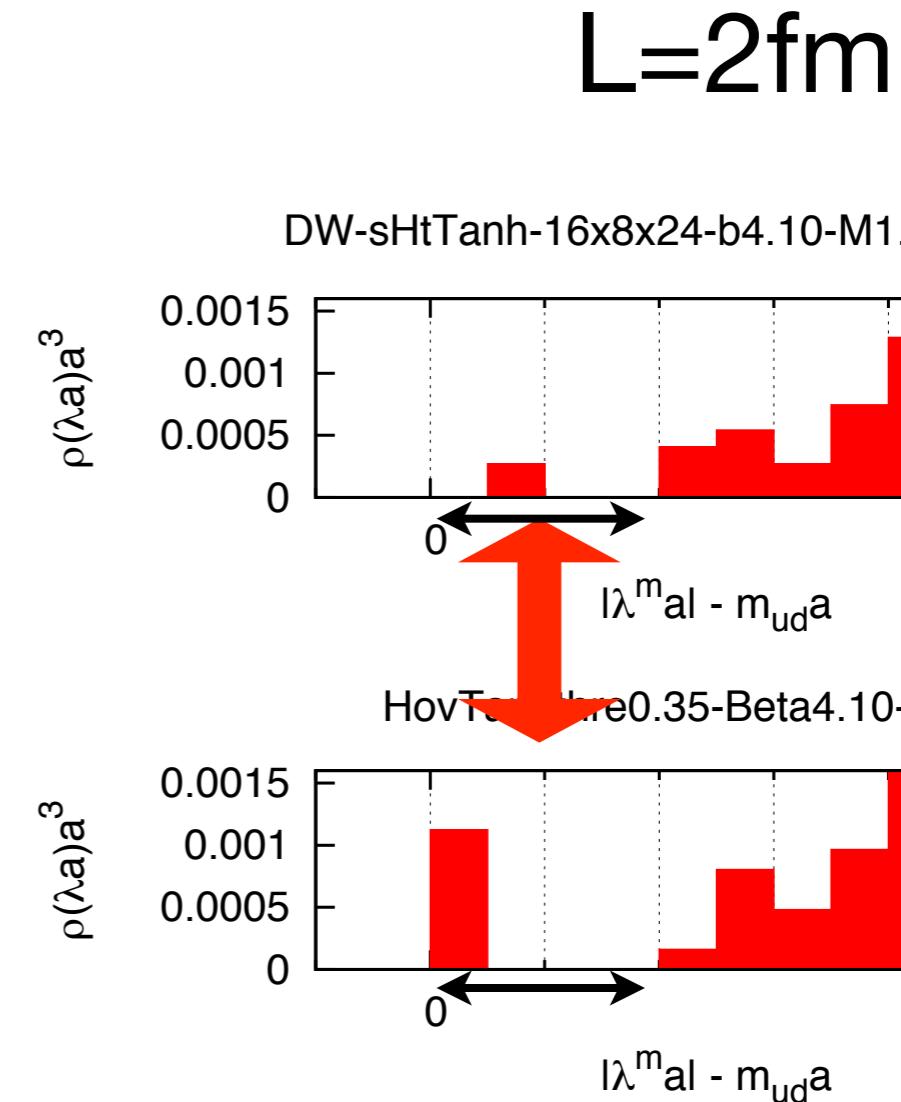
**LLNL/RBC 2013
とコンシスティント**

DW配位

**DW固有値
(オリジナル)**



**DW配位
OV固有値**



**1.同じゲージ配位でも、
ドメインウォールの固有値分布と
オーバーラップの固有値分布が異なる！**

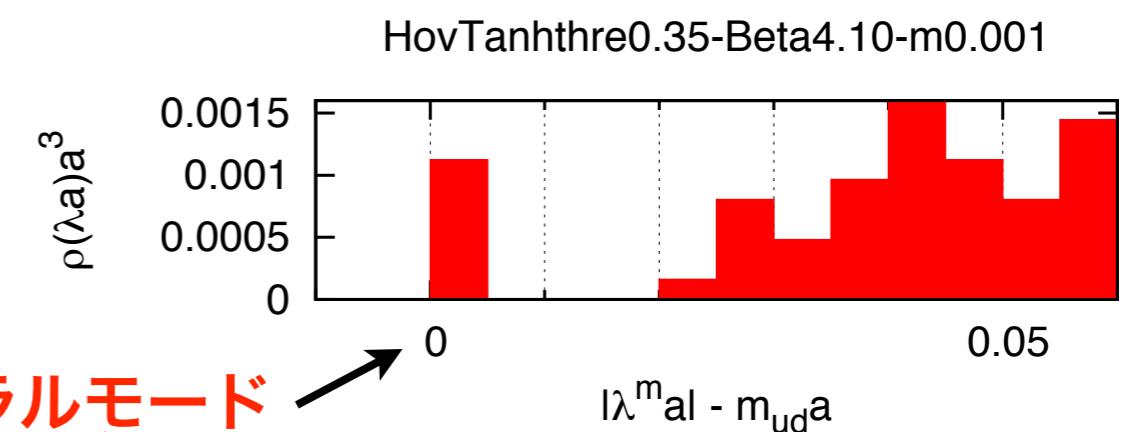
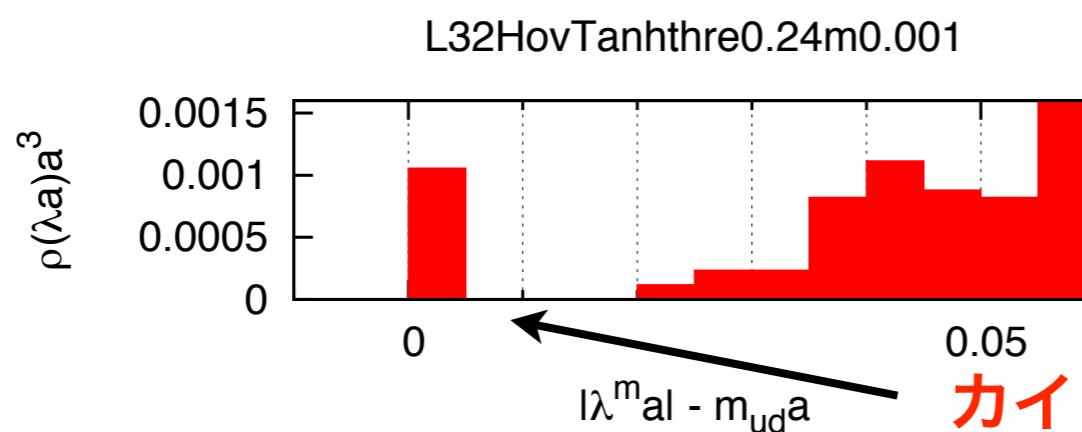
※ドメインウォール配位=中間状態にドメインウォールフェルミオンのループ
ドメインウォール固有値=プローブがドメインウォールフェルミオン

$T=200\text{MeV}$, $m_{ud}=3.2\text{MeV}$

$L=4\text{fm}$

$L=2\text{fm}$

DW配位
OV固有値



カイラルモード
安定したギャップ

2. $\lambda=0$ にピーク

(カイラルゼロモード; 体積無限で測度ゼロ)

3. 体積によらないギャップ構造

(ギャップは有限体積効果ではない?)

$T=200\text{MeV}$, $m_{ud}=3.2\text{MeV}$

$L=2\text{fm}$

DW配位

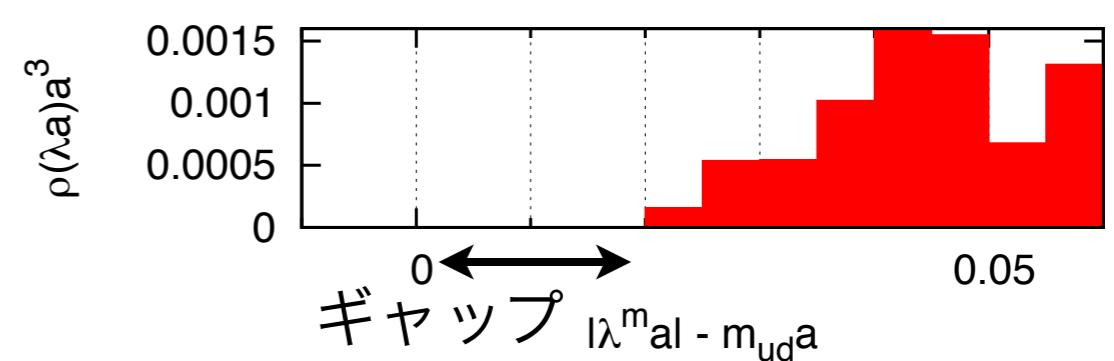
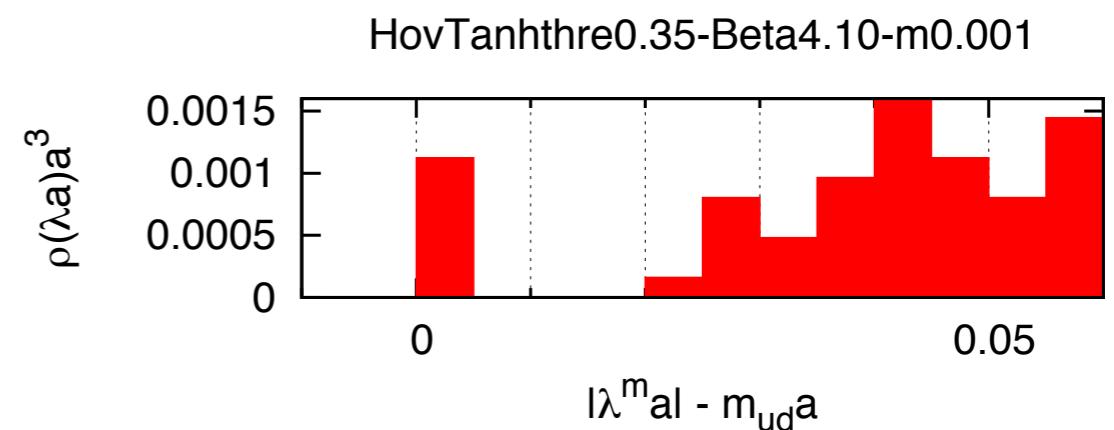
OV固有値

OV配位

OV固有値

(差し替え後)

差し替えるとギャップが出現



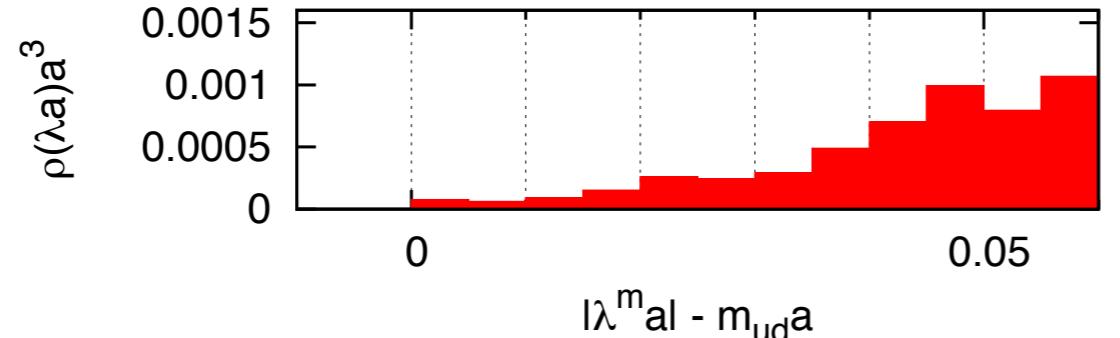
JLQCD 2013とコンシスティント

$T=200\text{MeV}$, $m_{ud}=3.2\text{MeV}$

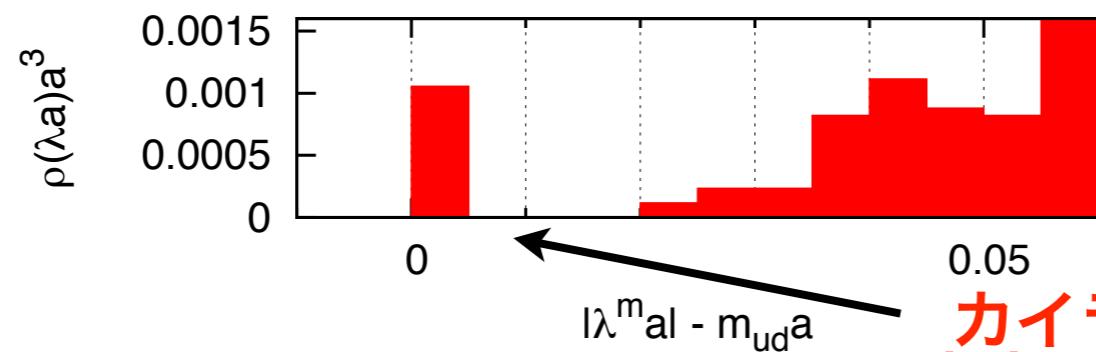
$L=4\text{fm}$

LLNL/RBC 2013
とコンシスティント

DW配位
DW固有値
(オリジナル)



DW配位
OV固有値



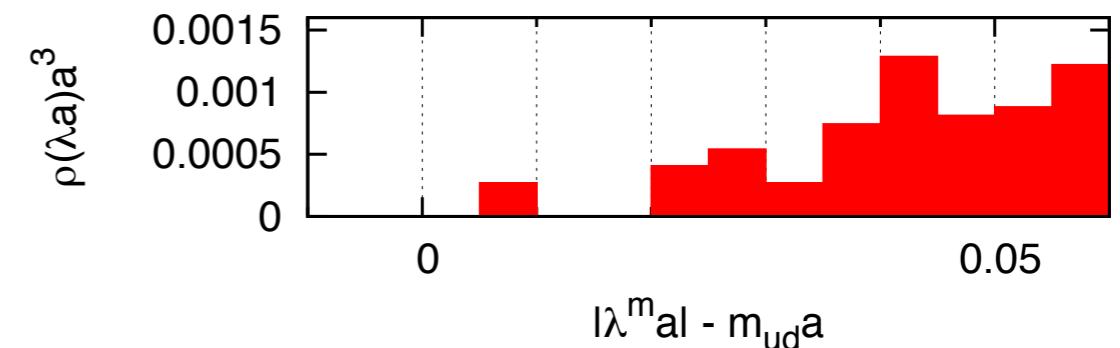
OV配位
OV固有値
(差し替え後)

Reweighting not available

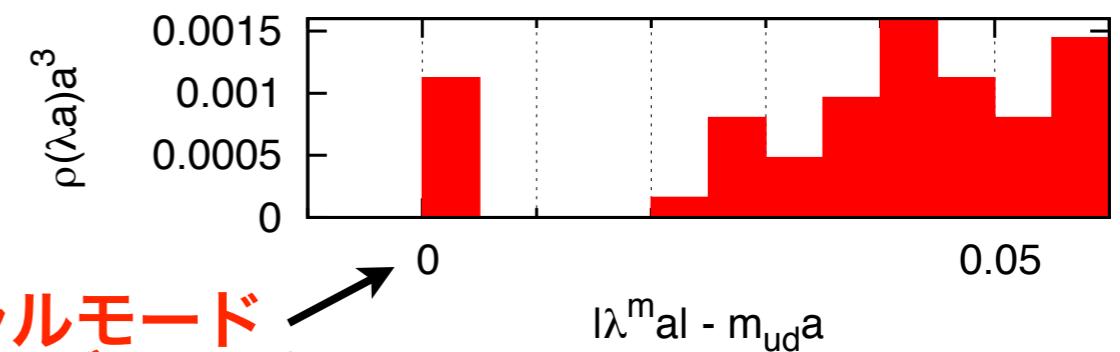
差し替えるとギャップが出現

$L=2\text{fm}$

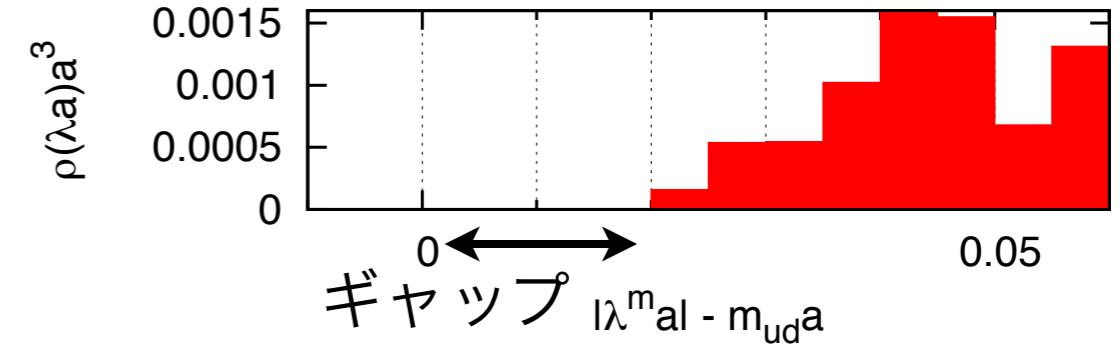
DW-sHtTanh-16x8x24-b4.10-M1.00-m_{ud}0.001



HovTanhthre0.35-Beta4.10-m0.001



HovTanhthre0.35-Beta4.10-m0.001



JLQCD 2013とコンシスティント

カイラルモード
安定したギャップ

$T=200\text{MeV}$, $m_{ud}=3.2\text{MeV}$ (軽い)

観測	
<ul style="list-style-type: none"> ドメインウォールフェルミオン: カイラル対称性に関連する低いモードで Ginsparg-Wilson関係式の強い破れ 	<ul style="list-style-type: none"> (改良型)ドメインウォールとオーバーラップでヒストグラムが異なる
<ul style="list-style-type: none"> オーバーラップ(ドメインウォール配位)では、孤立した0モード+ギャップ構造 	<ul style="list-style-type: none"> カイラル0モードは、体積無限大で 測度0
<ul style="list-style-type: none"> ギャップ構造が体積によらない オーバーラップ(ドメインウォール配位) 	<ul style="list-style-type: none"> ギャップ構造 $\rightarrow U(1)_A$回復?
	<ul style="list-style-type: none"> $L=4\text{fm}$でオーバーラップ(or 更に対称性を良くした ドメインウォール)で有限体積効果をチェック!

6. Summary

まとめ

グループ	フェルミオン	体積(fm ³)	スペクトルギャップ	U(1) _A
JLQCD(2013)	オーバーラップ (トポロジー固定)	2^3	あり	回復
Chiu et al (2013)	Optimized Domain-wall	3^3	あり	回復
Ohno et al (2011)	HISQ	4^3	なし	回復しない
LLNL/RBC (2013)	ドメインウォール	$2^3, 4^3$	なし	回復しない

本研究	(改良) ドメインウォール	$2^3, 4^3$	なし	カイラル対称性 が良ければ回復? (有限体積効果の 評価が不十分)
	(Reweighted,Pq) オーバーラップ	$2^3, (4^3)$	あり	

低モード:Gisparg-Wilson関係式×