

ラグランジアンがない  
(かもしれない)  
場の量子論について

米倉和也, Kavli IPMU

# Introduction

---

「普通」の場の理論やnew physics modelの調べ方：

1. ラグランジアンを書き下す。
2. その理論の性質を調べる (perturbation, lattice, etc.)。

このトークでは、そもそもラグランジアンから出発することが出来ない（かもしれない）ような理論についてお話しします。

# Contents

---

1. Introduction

2. Motivation

3. Basics of non-Lagrangian theory

4. Simple example: magnetic monopole

5. Higher dimensions and non-Lagrangian theories

6. Summary

# Motivation (for pheno people)

---

初期の場の理論：QED

= U(1) abelian gauge theory + electron

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\psi}D\psi$$

電子と光子を記述するのに大成功。

# Motivation (for pheno people)

---

しかしながら、大量のハドロン粒子が  
みつかってしまった！

E.g., Regge trajectory

$$\text{mass}^2 = \alpha'^{-1} J + \text{const.}$$

$$J = 1, 2, 3, \dots$$

- こんなのを説明するのは場の理論では無理？
- ストリングの理論？
- .....

# Motivation (for pheno people)

---

Non-abelian gauge theoryの発見：

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a)^2 + i\bar{\psi}D\psi$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

Asymptotic freedomの発見：

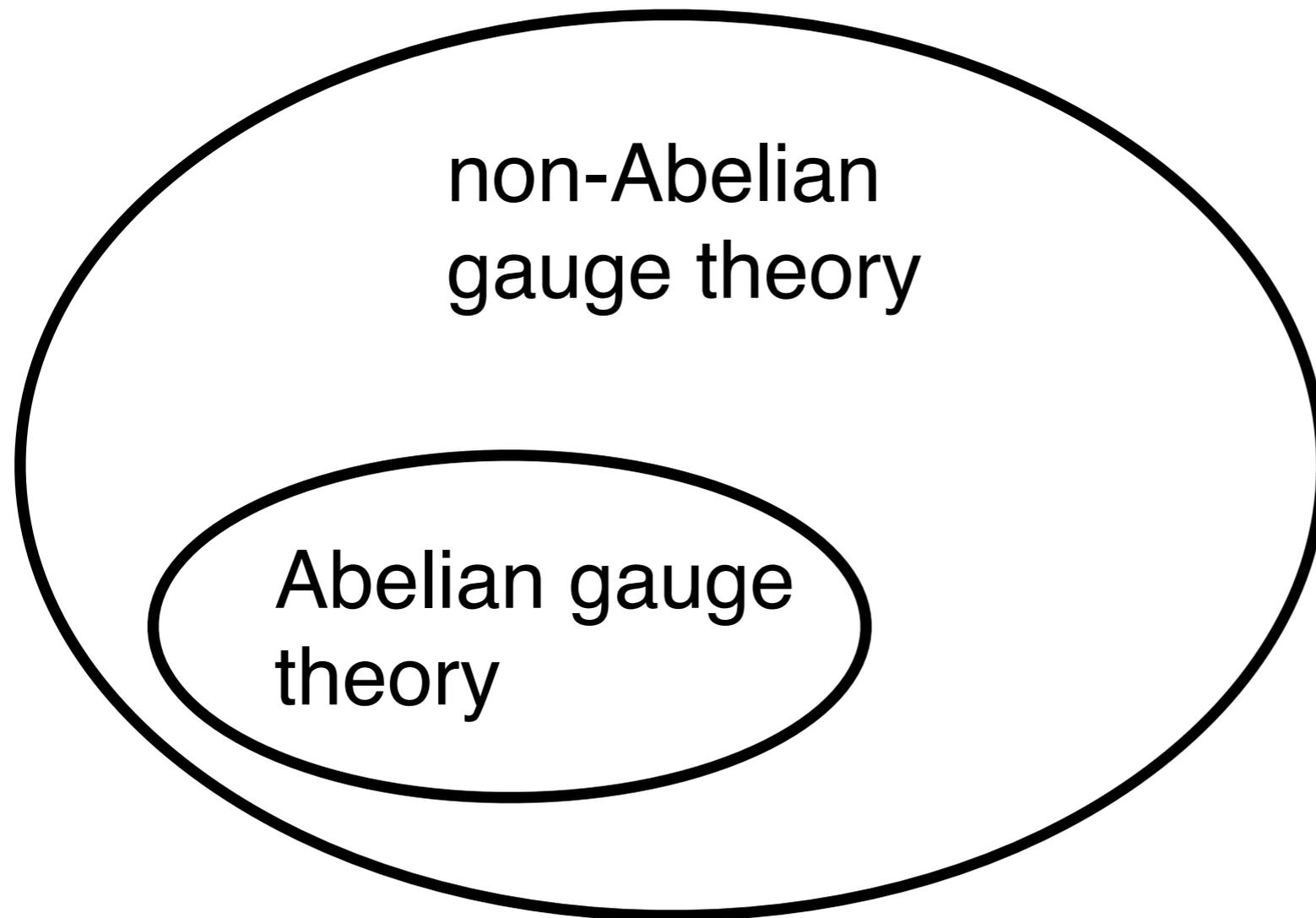
$$\beta = \mu \frac{\partial g}{\partial \mu} < 0$$

理論的難しさはあるものの、とりあえずハドロンの物理が場の理論で記述できそうであることがわかった。

# Motivation (for pheno people)

---

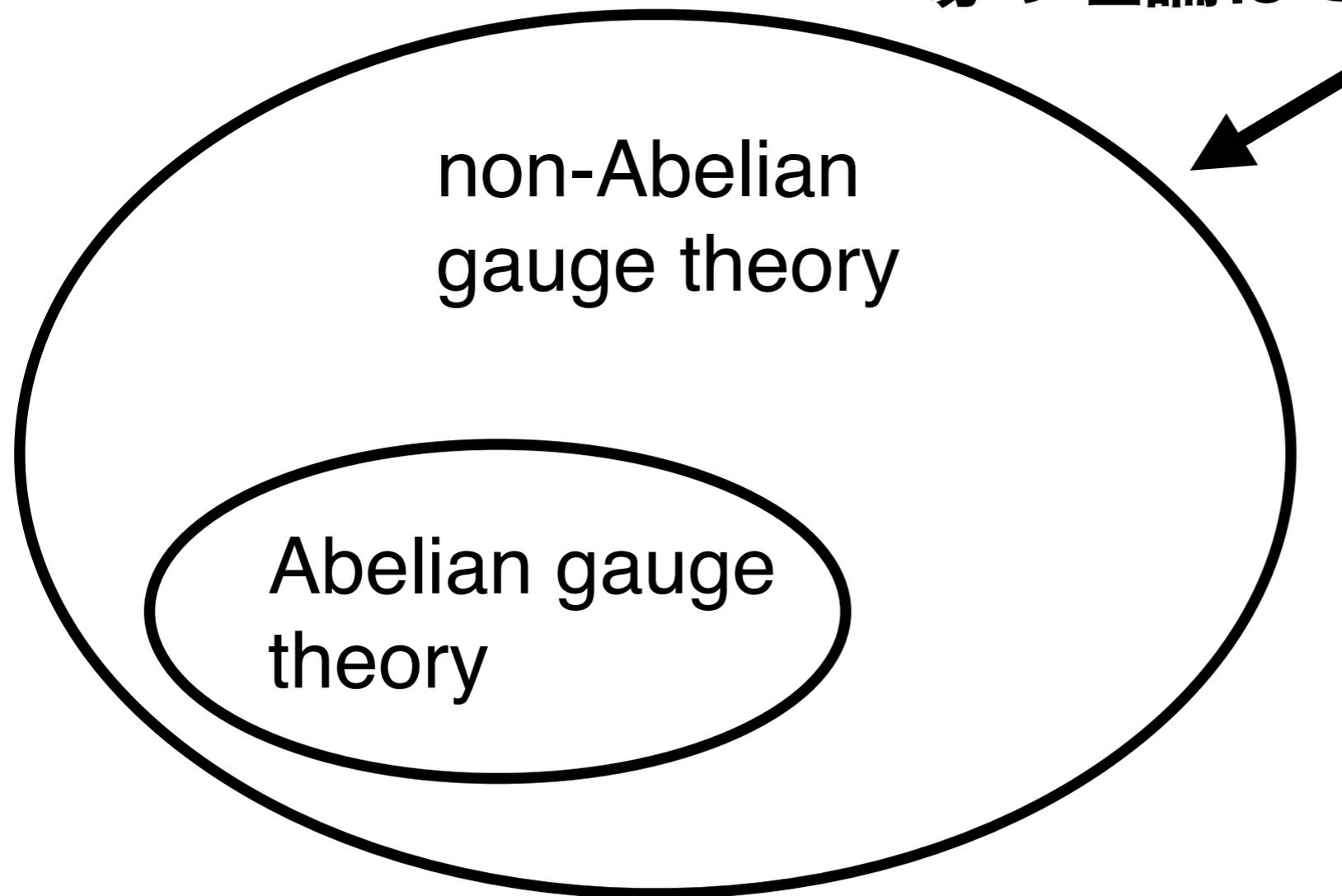
non-Abelian gauge theoryが、強い相互作用などなどを説明するのに不可欠だった。



# Motivation (for pheno people)

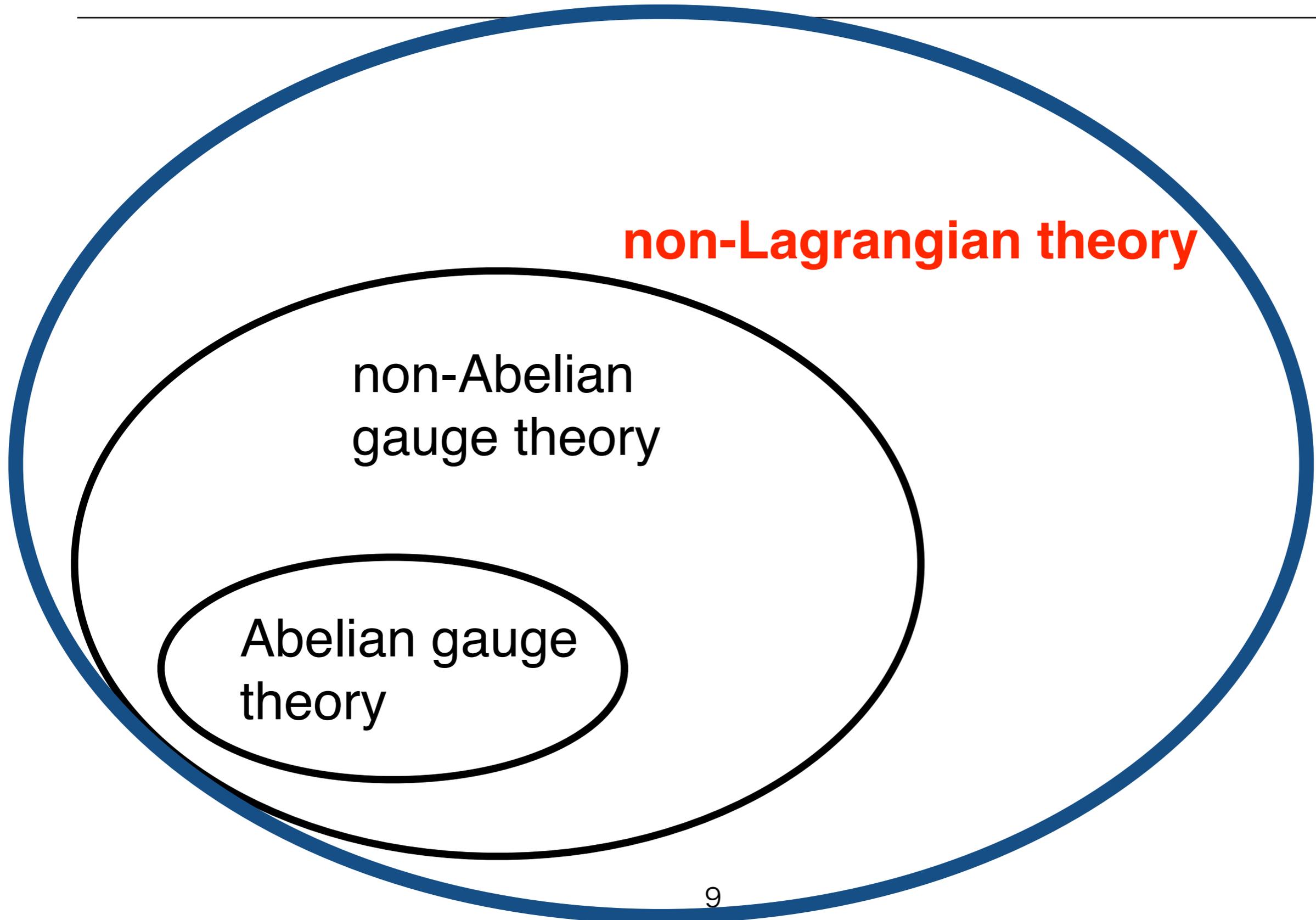
---

場の理論はこれで全てか？



# Motivation (for pheno people)

---



# Motivation (for pheno people)

---

場の理論は必ずしもラグランジアンで書ける必要はない！  
(あとでこの点についてコメントします。)

いろんな高エネルギーのnew physics  
(dark matter, inflation, etc.)がラグランジアンで書けると  
断言できますか？

# Motivation (for pheno people)

---

non-Lagrangian theory:  
**new physics?????**

non-Abelian  
gauge theory:  
**Standard Model**

Abelian gauge  
theory : **QED**

# Motivation (for pheno people)

---

Imaginable Question:

「じゃあ具体的にラグランジアンのない理論が  
どう現象論に役立つのですか？」

My answer:

もうちょっと長い目で見ていただけると助かります。

以下言い訳をします。

# Motivation (for pheno people)

---

YangとMillsがnon-abelian gauge theoryを発見した

当初の状況：

Pauli: 「そのvector bosonの質量は？」

Yang: 「.....」

Yang-Millsのゲージ場は、ナローブにはmasslessであるが、実験的に見つかったmassless粒子（またはlong range force）は光子と重力だけ。

 Yang-Mills理論は「棄却」される。

# Motivation (for pheno people)

---

実際は、massless vector bosonは出てこない！

- Spontaneous symmetry breaking → ノーベル賞
- Asymptotic freedom → ノーベル賞

**教訓：**ある理論が役に立つかどうかはその理論の性質を十分よく知らないとわからない。なので長い目で見た理論研究が必要。

ノーベル賞を取るにはnon-Lagrangian理論をやるう！？

# Contents

---

1. Introduction

2. Motivation

3. Basics of non-Lagrangian theory

4. Simple example: magnetic monopole

5. Higher dimensions and non-Lagrangian theories

6. Summary

# What is quantum field theory?

---

ラグランジアンがないとき場の理論の定義とは  
そもそも何か？

# What is quantum field theory?

---

少なくともflat Minkowski空間では、次の性質を満たすもの（いわゆるWightman公理系）：

- 量子力学である（特に正定値ヒルベルト空間）
- Poincare対称性がある（特にHamiltonianもある）
- local operator  $O_i(x)$  の集合があって、

$$[O_i(x), O_j(y)]_{\mp} = 0 \quad \text{if } x - y = \text{space like}$$

- .....

詳細は重要でないので省略します。

# What is quantum field theory?

---

Wightman公理系は、ラグランジアンがない理論などというものを考えるはるか以前に与えられたが、すでにnon-Lagrangianの概念を内包している：

Wightman公理系では、

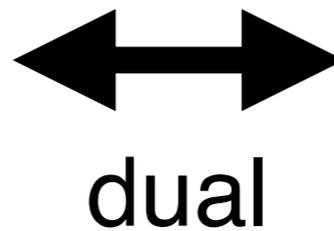
- ラグランジアンという概念は定義されていない。
- そもそも基本的な場(elementary fields)という概念は定義されていない。
- ゆえにlocal operatorが、elementaryかcompositeかという違いも定義されていない。

# What is quantum field theory?

示唆的な例：Supersymmetric QCDでの双対性

$SU(N_c)$ ゲージ理論

$N_f$  flavors of “quarks”



$SU(N_f - N_c)$  ゲージ理論

$N_f$  flavors of “quarks”

+  $N_f^2$  singlets

- 異なるラグランジアンを持った理論が双対である。  
しかも一方のelementary fieldがもう一方のcompositeであったりする。
- このことからラグランジアンやelementary fieldという概念は場の理論で本質的概念でないことが示唆される。

# What is quantum field theory?

---

結局、ある場の理論を考えた時、ラグランジアンは

- 0 個 → non-Lagrangian
- 1 個 → いわゆる「普通」
- 2 個、3 個、.....、無限個 → duality

いずれにしても、ラグランジアンは場の理論の  
1 つの構成方法・計算方法ではあるけれども、  
本質的概念ではない。

# Remark 1

---

Elementary fieldの存在を仮定しないので、  
正準量子化などというものもない。

“elementary field”が仮にあったとしても正準量子化は  
かなり微妙。例えば：

$$[\phi(t, \vec{x}), \dot{\phi}(t, \vec{y})] = \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

これは一体どのくりこみスケールでの話？？？

$$\phi_\mu = Z(\mu/\Lambda_{\text{cut}})\phi_0$$

Wightman公理系では

$$[\phi(x), \dot{\phi}(y)] = 0 \quad (x - y = \text{spacelike})$$

# Remark 2

---

広い意味での運動方程式はある。

例：理論が大域的対称性を持っているとき、  
conserved current

$$J^\mu$$

は、operatorとしての運動方程式

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

をみます。

# Practical construction

---

今までの話は原理的な話だが、実際はWightman公理系などをいちいち考えることはなく、次のように考える。

non-Lagrangian理論の実際的な作り方：

1. **ストリング理論**でなんらかのconfigurationを考える。
2. 重力がdecoupleするような極限をうまくとる。
3. 残った理論は重力を含まない相対論的量子力学なので、きっと場の理論だろう。
4. その理論のラグランジアンでの記述を「知らなければ」、non-Lagrangian理論。

# Remark

---

non-Lagrangianと呼んでいるものは、あくまで我々が現在ラグランジアンによる記述を知らない、ということであって、将来的に誰かがラグランジアンを発見する可能性はあります。

このトークのメッセージとしては、場の理論が存在するためには、必ずしもラグランジアンがなければならないわけでは無いということです。

# Contents

---

1. Introduction

2. Motivation

3. Basics of non-Lagrangian theory

4. Simple example: magnetic monopole

5. Higher dimensions and non-Lagrangian theories

6. Summary

# Example: monopole

---

Diracのmagnetic monopoleの理論

U(1) Maxwell理論にmagnetic chargeを持った粒子を入れてみる。

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j_e^\mu$$

$$\partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = j_m^\mu \quad \leftarrow \text{magnetic current}$$

ここで、

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$$

# Example: monopole

---

U(1)ゲージ場 + 電子のラグランジアンは簡単にかける。

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\psi}D\psi$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

しかし、モノポールと、ゲージ場  $A_\mu$  の

カップリングが書けない！

(そもそも  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  なら  $\partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$  )

Diracのmagnetic monopoleの理論はnon-Lagrangian!

本当に場の理論として存在するのか？

# Example: monopole

---

ストリング理論でelectron + monopoleの理論が作れる！



- D3 brane 一枚にはU(1)ゲージ場が住んでいる。
- D3 braneをD7 braneに近づけるとU(1)のelectronが  
でる。

# Example: monopole

---

ストリング理論でelectron + monopoleの理論が作れる！

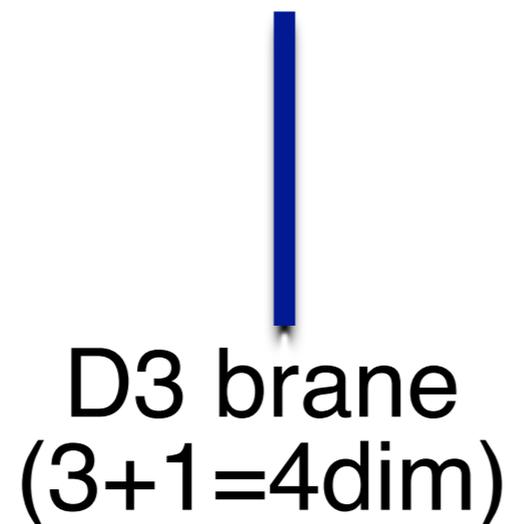


D3 brane  
(3+1=4dim)

# Example: monopole

---

ストリング理論でelectron + monopoleの理論が作れる！

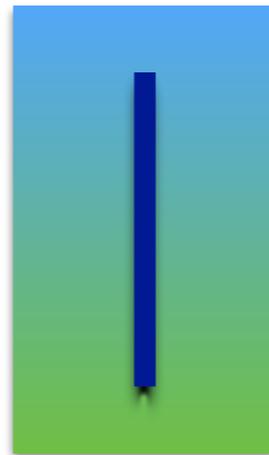


- D3 brane 一枚にはU(1)ゲージ場が住んでいる。
- D3 braneをExotic 7 braneに近づけるとelectronとmonopoleが両方出る。

# Example: monopole

---

ストリング理論でelectron + monopoleの理論が作れる！



D3 brane + Exotic 7 brane  
(3+1=4dim)

D3 braneとexotic 7 braneを重ねると、**electron**と**monopole**が両方**massless**な不思議な理論が得られる

Diracの理論は実在した！

# Remark

---

- よく知られているように、 $SU(2)$ ゲージ理論を考えてそれが $U(1)$ に破れるようにしておくとモノポールは作れる。
- 先ほど紹介したストリング理論で作れるものの幾つかは、そのような $SU(2) \rightarrow U(1)$ を用いた構成法がある。  
(しかしmonopoleをmasslessにするのはとても非自明。)
- しかし、すべての理論が（今の所）そのようなnon-abelianゲージ理論による構成を持つわけではない。

# Contents

---

1. Introduction

2. Motivation

3. Basics of non-Lagrangian theory

4. Simple example: magnetic monopole

5. Higher dimensions and non-Lagrangian theories

6. Summary

# M5 brane

---

**M-theory:** 究極理論の候補

**M5 brane:** M-theoryにおける非常に重要な物体の一つ

M5 braneは $5+1=6$ 次元の物体で、M5 braneをN枚重ねた上にはsuperconformalな場の理論が住んでいると信じられている。

しかしM5 brane場に住んでる場の理論のラグランジアンは誰も知らない：**M5 braneはnon-Lagrangian理論**

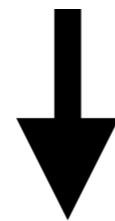
そもそも高次元ではくりこみ可能なラグランジアンが（ほぼ）無いことに注意。

# M5 brane

---

- 高次元でnon-Lagrangian理論があると、4次元でnon-Lagrangian理論が大量生成できる。

M5 brane (6次元) がN枚重なっている



**2次元コンパクト化**

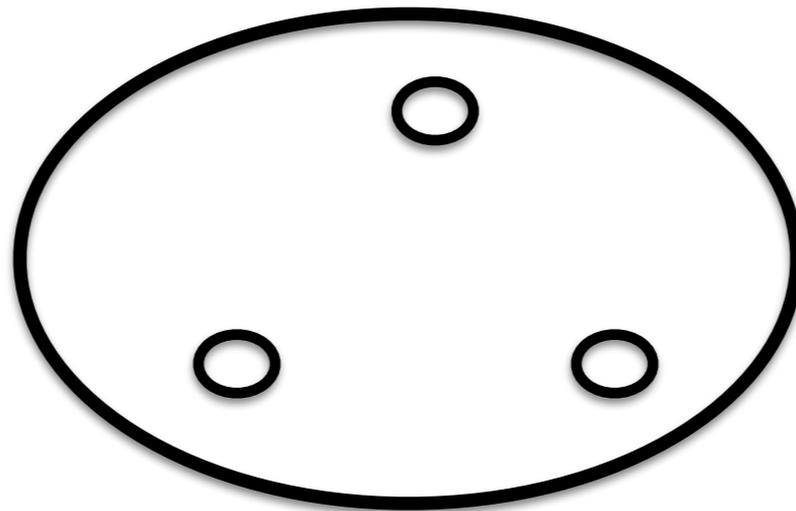
(常にではないが、典型的に) 4次元non-Lagrangian理論

- コンパクト化の仕方はたくさん (ある意味無限に) あるので、4次元でnon-Lagrangian理論がたくさん得られる。

# Example

---

例：  $T_N$  理論： = M5 brane N枚を穴3つの球面にコンパクト化したもの。



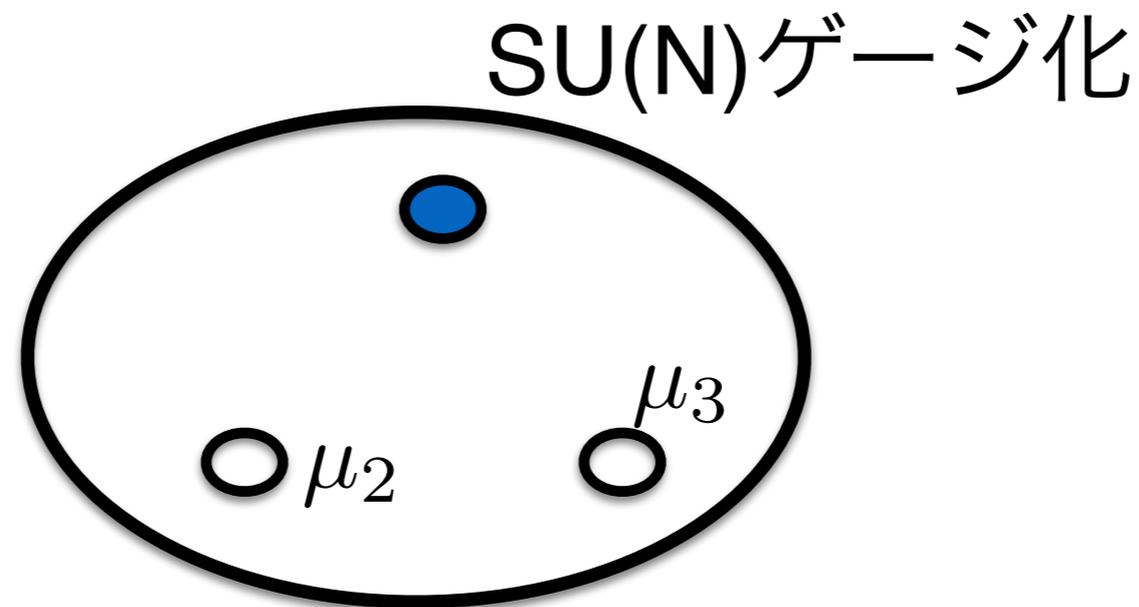
- それぞれの穴はSU(N)対称性を持つ。
- それぞれの穴はオペレータ  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  をもつ。  
オペレータは次の運動方程式をみたす：

$$\text{tr}\mu_1^k = \text{tr}\mu_2^k = \text{tr}\mu_3^k \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

# Example

---

どれか一個の穴を  $\mathcal{N} = 1$   $SU(N)$ ゲージ群と結合すると  
どうなるか？



Holomorphy & Symmetry (SUSY QCDと全く同じ論理)  
で、次が示せる：

$$\text{tr} \mu_2^N = \text{tr} \mu_3^N + \Lambda^{2N} \quad (\Lambda : \text{dynamical scale})$$

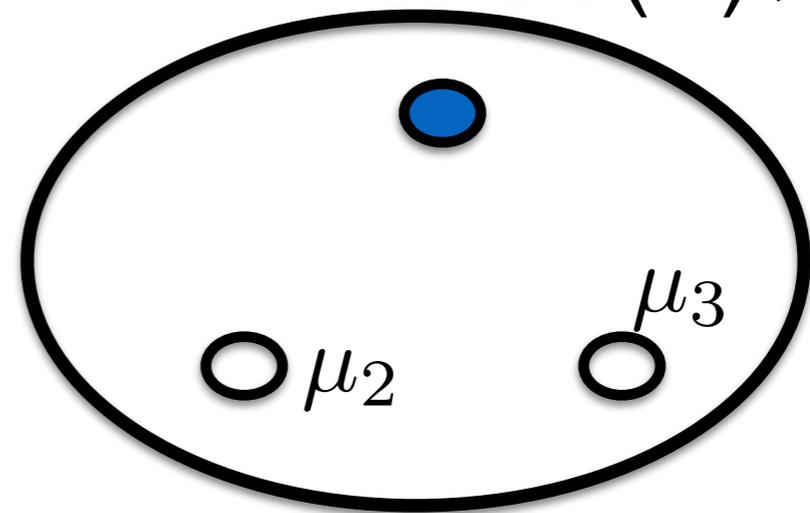
Deformed moduli space

# Example

Singlet field  $S_2, S_3$  と Superpotential を余分に足す：

SU(N)ゲージ化

$$W_{\text{tree}} = \text{tr}(\mu_2 S_2) + \text{tr}(\mu_3 S_3)$$



$\text{tr}\mu_2^N = \text{tr}\mu_3^N + \Lambda^{2N}$  と  $W_{\text{tree}}$  の F-term 方程式が矛盾

➔ Dynamical SUSY breaking!

[Maruyoshi, Tachikawa, Yan, KY]

これは井沢—柳田—Intriligator-Thomas 模型の拡張

# Comment on extra dimensions

---

# Comment on extra dimensions

---

現象論モデルで余剰次元モデルは一つの分野になっています。

ナイーブな質問：

たとえばUniversal extra dimensionなどでは高次元で

$SU(3) \times SU(2) \times U(1) \times \dots$ を考えるが、それって

繰り込みできませんよね？そんな理論、本当に

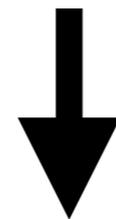
UV-completeできるんですか？

# Comment on extra dimensions

---

5次元non-Lagrangian理論

**5d non-Lagrangian**



mass deformation

**5d gauge theory**

- 少なくとも5次元では、IRでゲージ理論にRG flowするようなnon-Lagrangian理論がある！
- つまり（一部の）5次元ゲージ理論はnon-LagrangianでUV-completeされる。

# Contents

---

1. Introduction

2. Motivation

3. Basics of non-Lagrangian theory

4. Simple example: magnetic monopole

5. Higher dimensions and non-Lagrangian theories

6. Summary

# Summary

---

- ラグランジアンがなくても場の理論はある。
- ストリング、M理論などのいろいろなconfigurationを考えると作れる。
- 現象論への応用はまだまだ長い目で見てほしいが、現状でもDynamical SUSY breaking modelくらいは作れた。

# Summary

---

non-Lagrangian theory:  
**new physics?????**

non-Abelian  
gauge theory:  
**Standard Model**

Abelian gauge  
theory : **QED**

# Future dream

---

過去において、実験がなくても解析力学は発展できた。

古典力学 → 解析力学 → 量子力学

今も、標準模型を超える物理が実験で出なくても場の理論そのものは発展できるはず。

Lagrangian field theory → new formulation of QFT? (non-Lagrangian?) → ??????

**Thank you very much!**