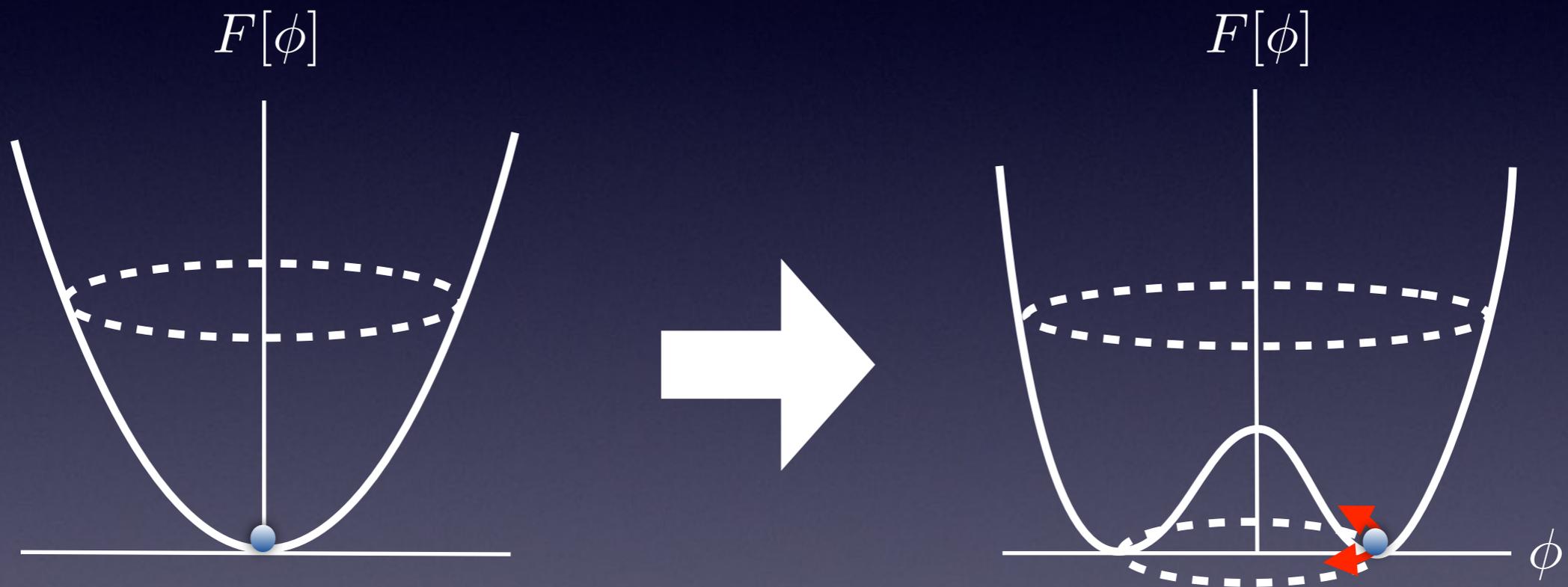


南部ゴールドストンの定理の 一般化



日高 義将

理化学研究所

南部ゴールドストンの定理

Nambu('60), Goldstone(61), Nambu Jona-Lasinio('61),
Goldstone, Salam, Weinberg('62).

ローレンツ対称性がある場合
大域的連続対称性の自発的破れ



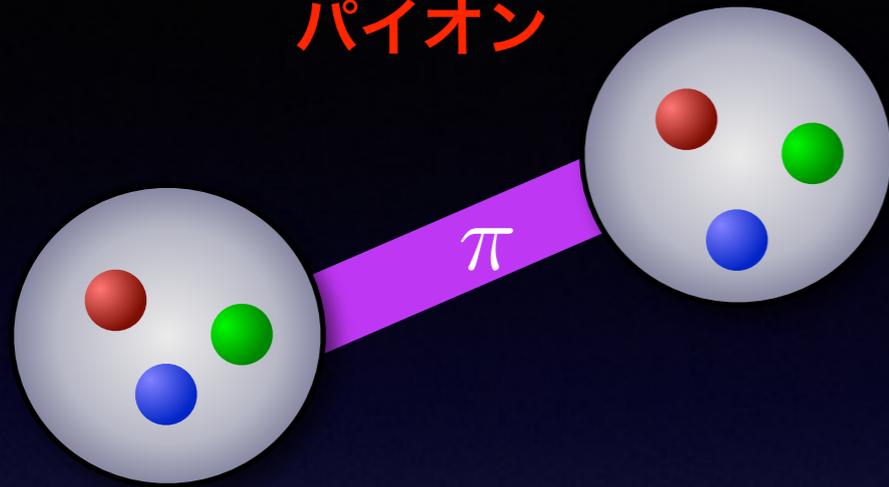
$$N_{NG} = N_{BS}$$

NGモードの数 破れた対称性の数

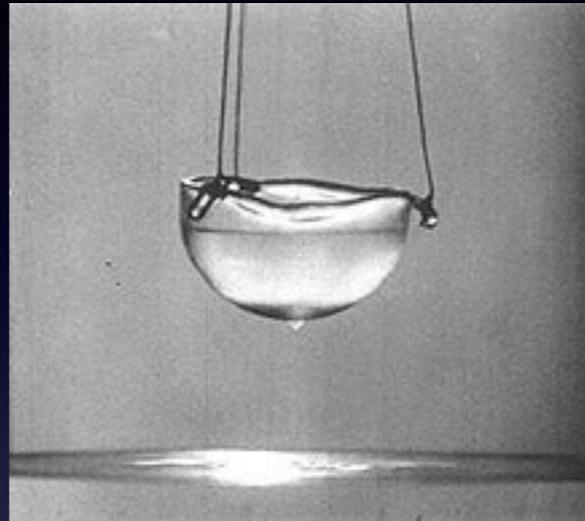
分散関係: $\omega = c|k|$

自然界のギョツプレスモード

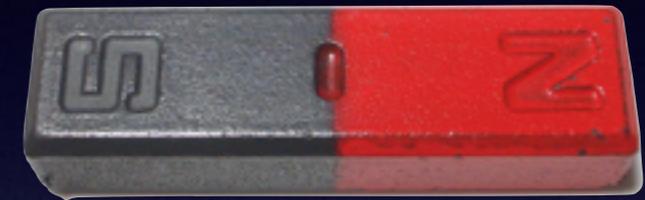
パイオン



超流動音波



スピン波



CC by-sa Aney

光子



CC by Zouavman Le Zouave

表面波

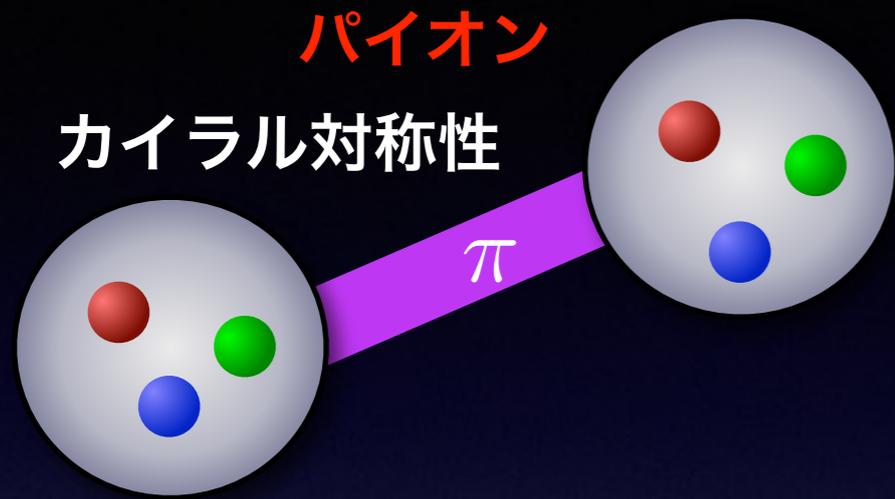


CC by-sa Roger McLassus

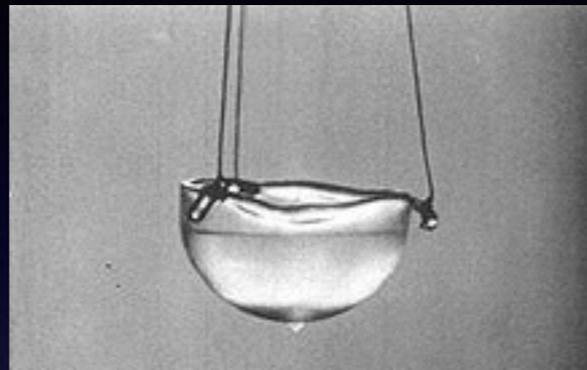
拡散モード



自然界のギャップレスモード



超流動音波
U(1)対称性



スピン波
スピン対称性



南部-Goldstoneモード

by-sa Aney

光子
U(1) 1-形式対称性



CC by Zouavman Le Zouave

表面波
並進対称性

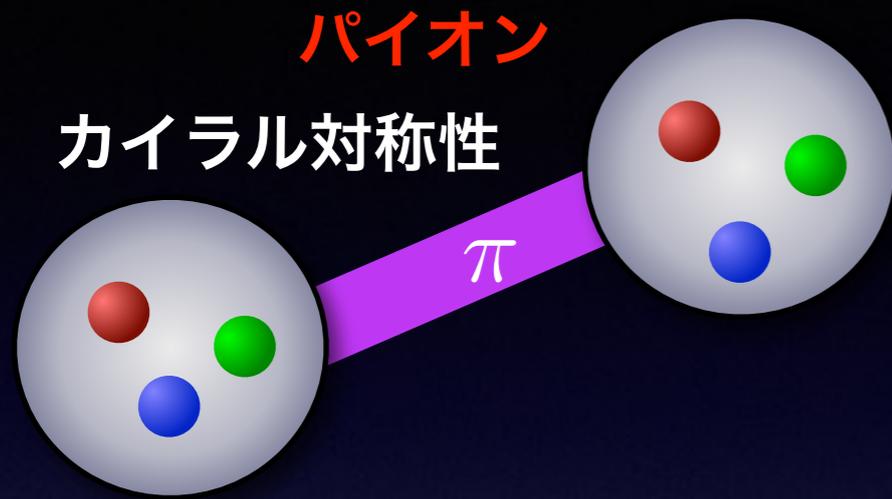


CC by-sa Roger McLassus

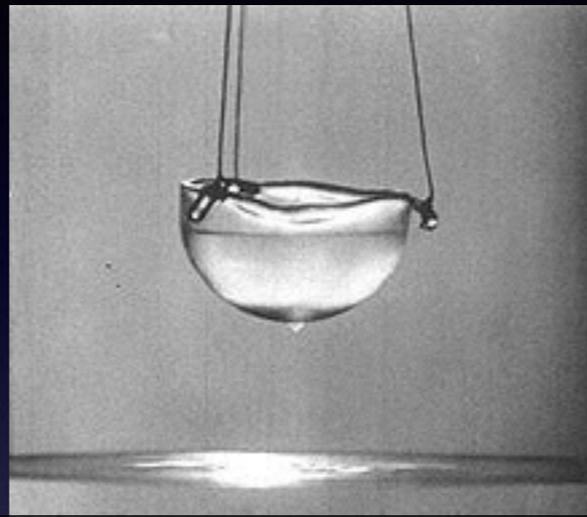
拡散モード
回転対称性



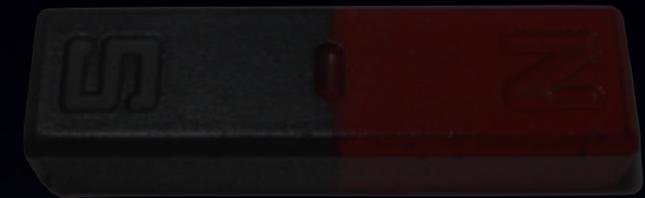
自然界のギャップレスモード



超流動音波
U(1)対称性



スピン波
スピン対称性



CC by-sa Aney

NG定理をそのまま適用可能_ト

U(1) 1-形式対称性



CC by Zouavman Le Zouave

並進対称性



CC by-sa Roger McLassus

回転対称性



自然界のギャップレスモード

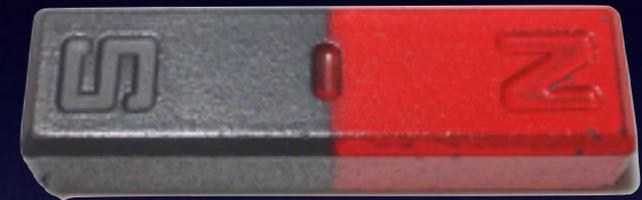
NG定理の拡張が必要



超流動音波



スピン波
スピン対称性



光子

U(1) 1-形式対称性



表面波

並進対称性



拡散モード

回転対称性

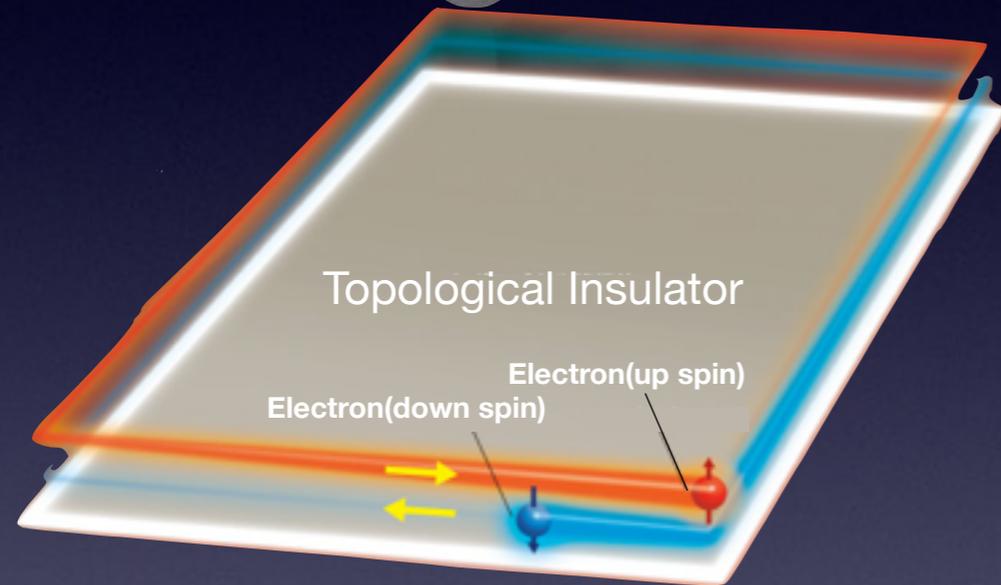


その他のギャップレスモード



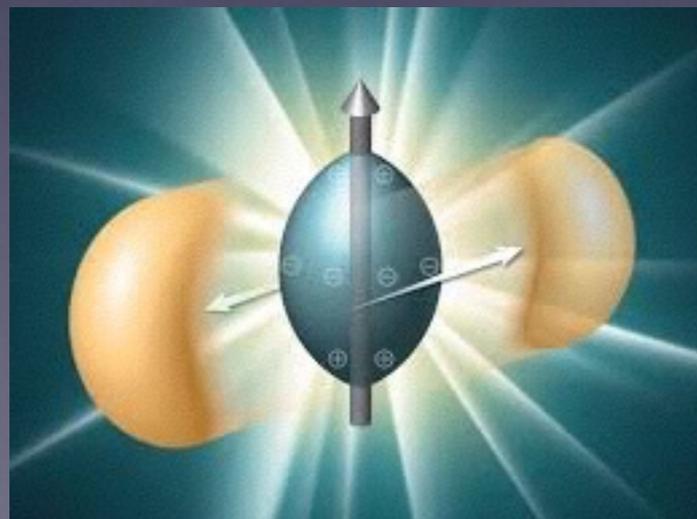
空気中の音波

ガリレイ対称性



トポロジカル絶縁体の
エッジモード

トポロジーと離散対称性



カイラル磁気波

カイラル対称性と

アノマリー

連続対称性の自発的破れ

何がうれしいか？

理論の詳細によらず様々な事が言える。

低エネルギー一定理

例) Goldberger-Treiman relation

$$g_{\pi NN} = 2m_N g_A / f_\pi$$



異なるvertexの結合定数の関係

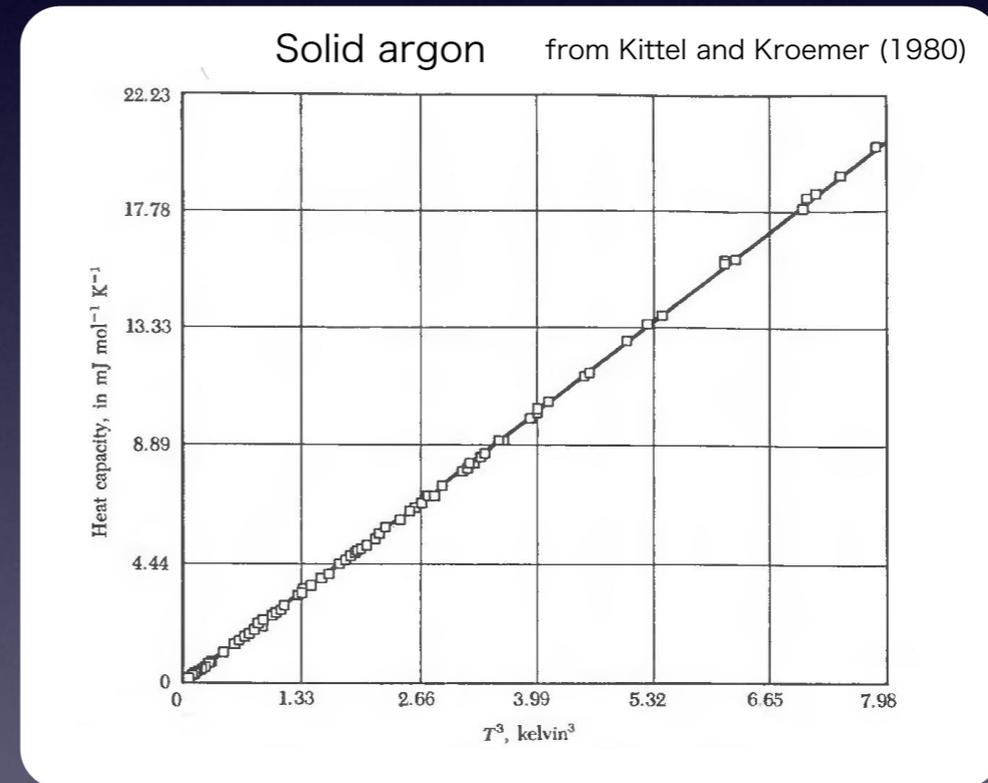
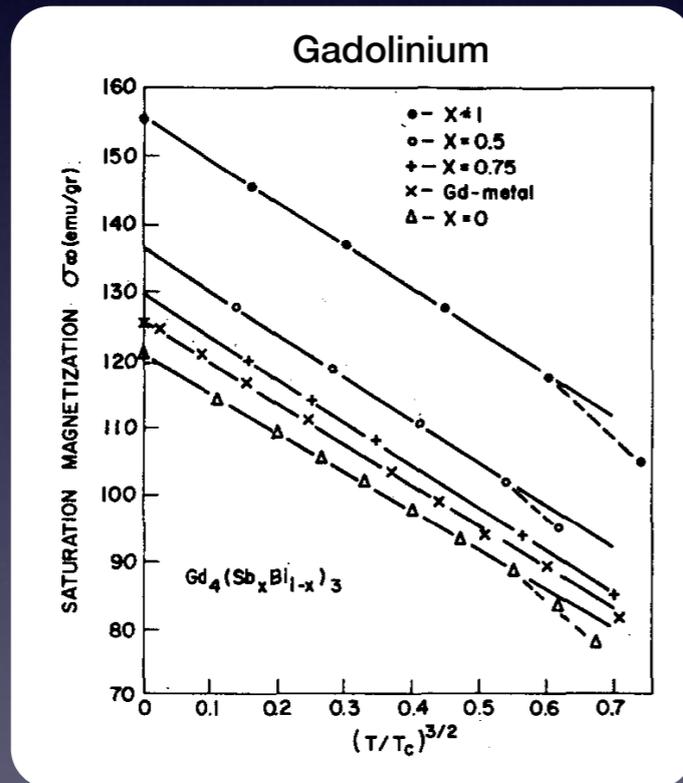
自発的対称性の破れ

何がうれしいか？

理論の詳細によらず様々な事が言える。

分散関係, 低エネルギー定理など

Bloch $T^{3/2}$ 則, デバイ T^3 則, ...



Holtzberg, McGuire, M'ethfessel, Suits, J. Appl. Phys. 35,1033 (1964)

マグノン: $\omega \sim k^2$

フォノン: $\omega \sim k$

自発的対称性の破れ

“自発的” 破れ:

$$\langle [Q_a, \phi_i(\mathbf{x})] \rangle \equiv \text{tr} \rho [Q_a, \phi_i(\mathbf{x})] \neq 0$$

真空: $\rho = |\Omega\rangle\langle\Omega|$

物質中: $\rho = \frac{\exp(-\beta(H - \mu N))}{\text{tr} \exp(-\beta(H - \mu N))}$

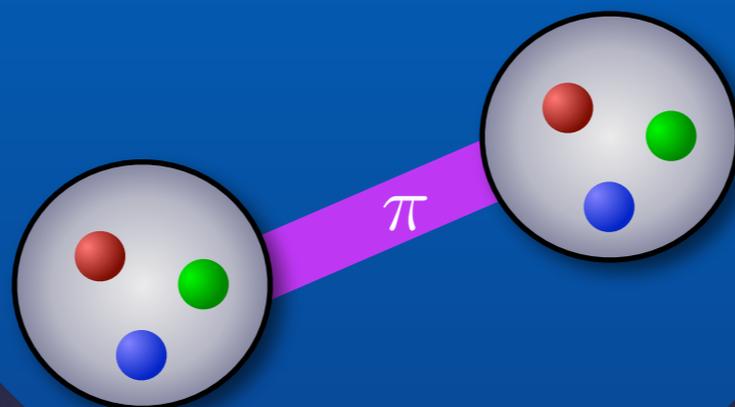
もし電荷が well-defined なら $[iQ_a, \rho] = 0$

$$\begin{aligned} \langle [iQ_a, \phi_i(\mathbf{x})] \rangle &= \text{tr} \rho [iQ_a, \phi_i(\mathbf{x})] \\ &= \text{tr} [\rho, iQ_a] \phi_i(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned}$$

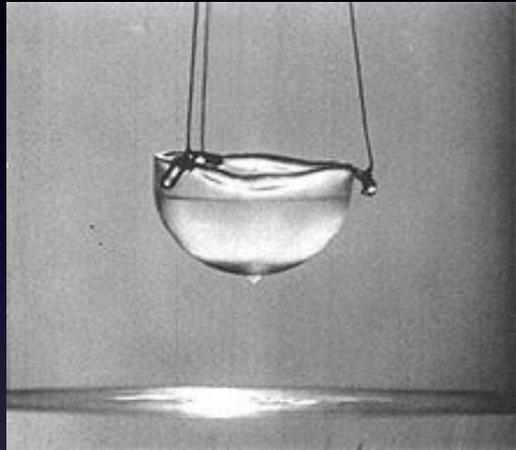
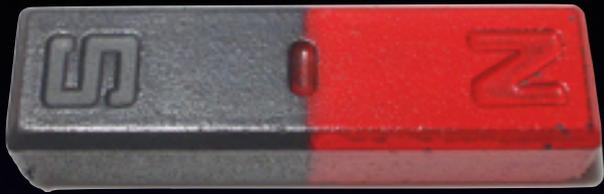
巡回性

自発的対称性の破れ \Rightarrow 電荷が ill-defined.

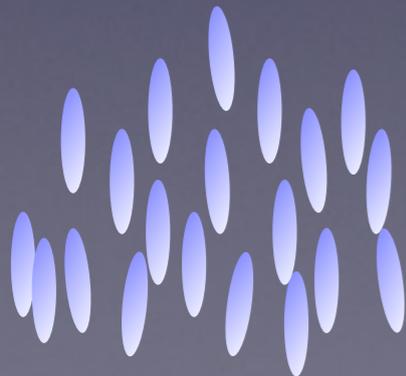
南部理論



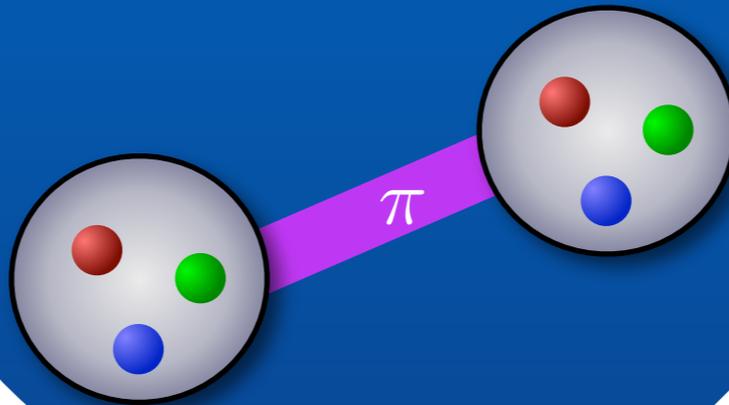
非相対論系



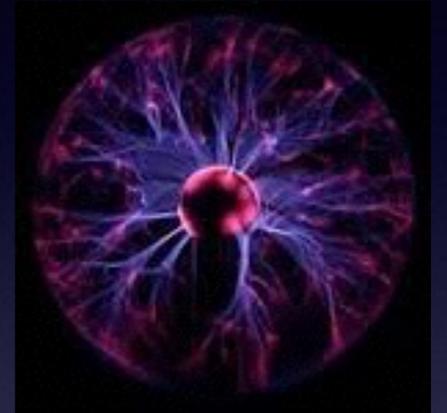
時空対称性



南部理論



長距離力がある系



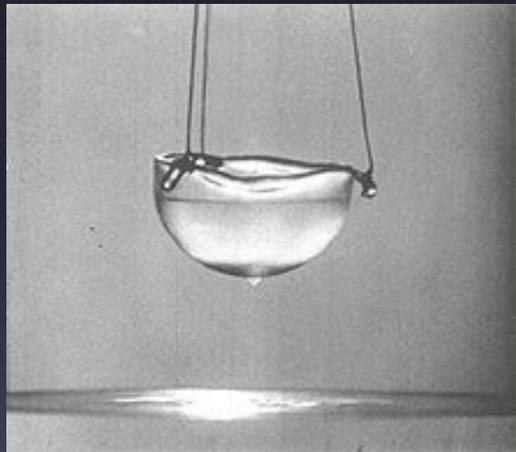
開放系



広がりを持った物体



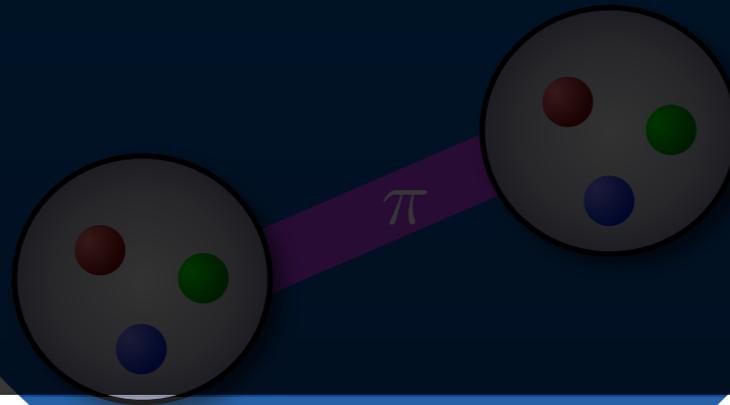
非相対論系



長距離力がある系



南部理論



時空対称性



開放系



広がりを持った物体

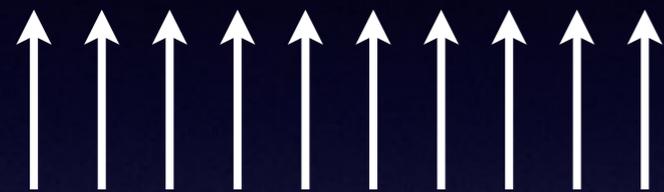


非相對論系

“NG定理”の例外

$N_{BS} \neq N_{NG}$ で $\omega \neq k$ が存在

マグノン



スピン回転 $SO(3) \rightarrow SO(2)$

$$N_{BS} = \dim(G/H) = 2 \quad N_{NG} = 1$$

分散: $\omega \propto k^2$

K中間子凝縮したCFL相のNGモード

Miransky, Shovkovy ('02) Schafer, Son, Stephanov, Toublan, and Verbaarschot ('01)

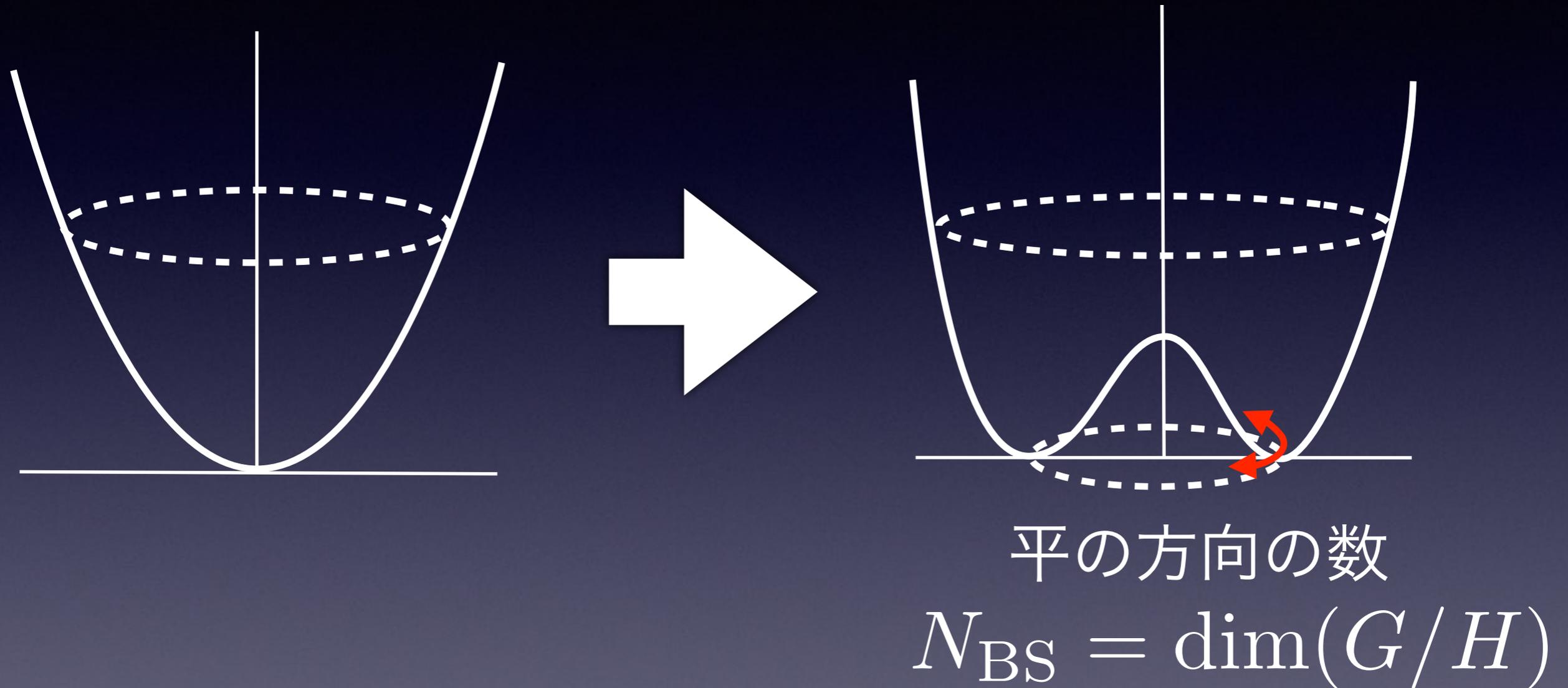
$$SU(2)_I \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{em}$$

$$N_{BS} = 3, \quad N_{NG} = 2$$

分散: $\omega \propto k$ と $\omega \propto k^2$

内部対称性の自発的破れ

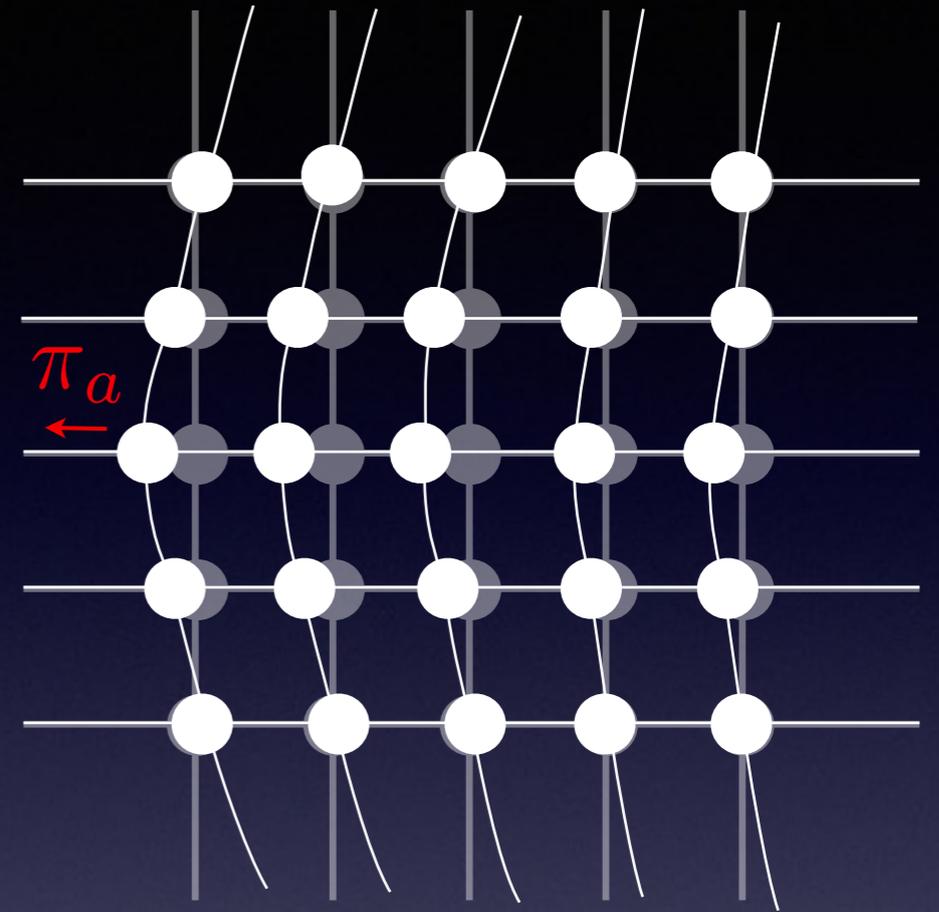
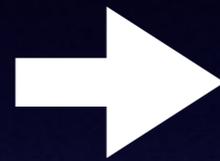
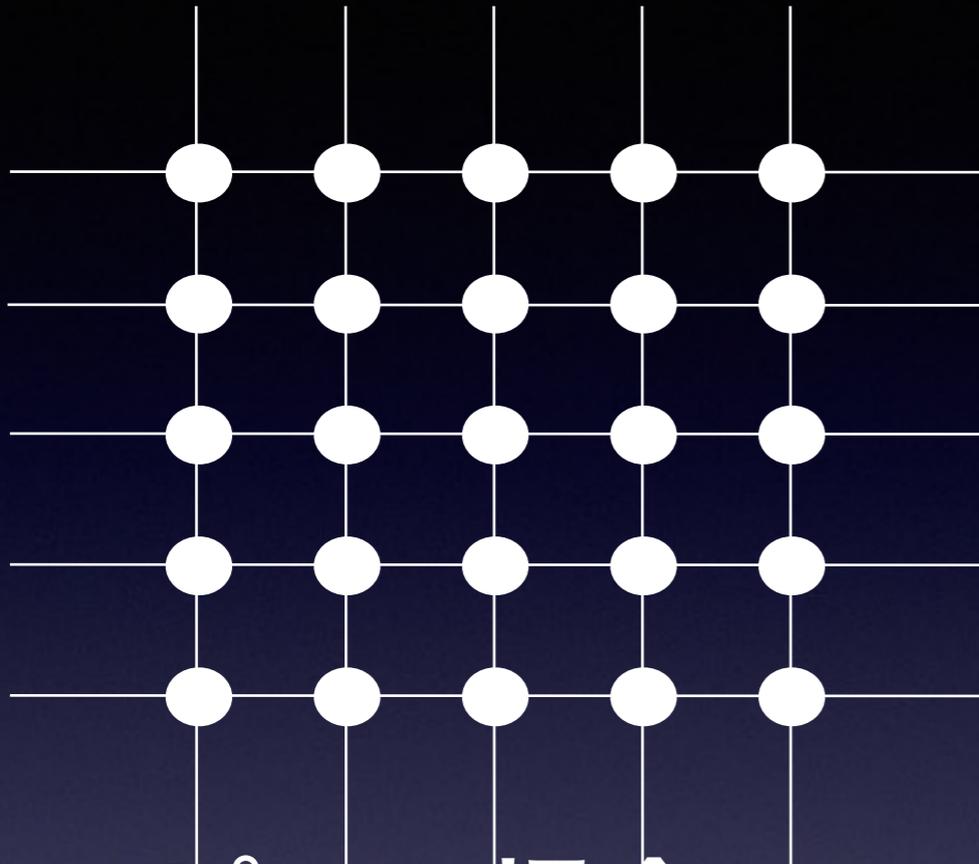
対称性の群 $G \Rightarrow H$



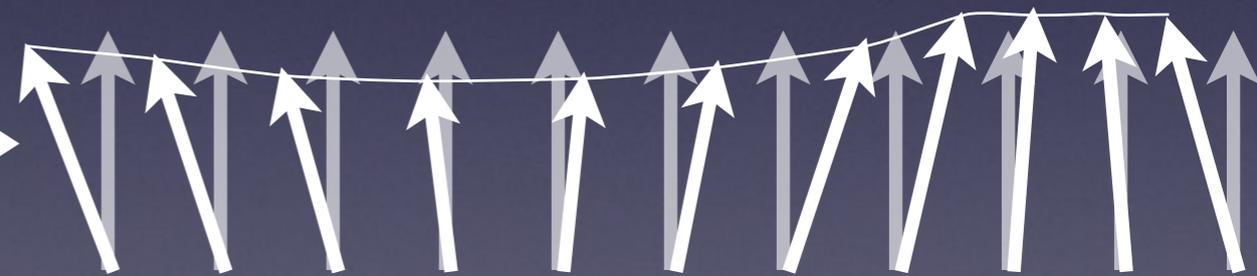
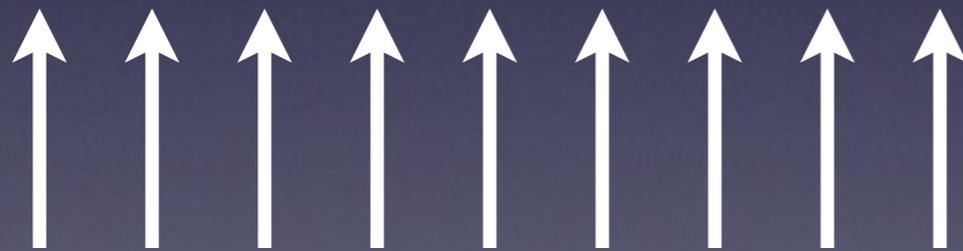
非相対論系でもこの関係は成り立つ。

弾性

固体の場合



スピンの場合



自由エネルギー: $F = \frac{1}{2} (\partial_i \pi^a)^2 + \dots$

独立な弾性変数の数 = N_{BS}

これらは、**静的な振る舞い**

動的な振る舞いは非自明。

一般化

Nielsen - Chadha ('76)

$$N_{\text{type-I}} + 2N_{\text{type-II}} \geq N_{\text{BS}}$$

Type-I: $\omega \propto k^{2n+1}$ **Type-II:** $\omega \propto k^{2n}$

Schafer, Son, Stephanov, Toublan, and Verbaarschot

$$\langle [iQ_a, Q_b] \rangle = 0 \quad \longrightarrow \quad N_{\text{NG}} = N_{\text{BS}} \quad (\text{'01})$$

Nambu ('04)

$$\langle [iQ_a, Q_b] \rangle \neq 0 \quad \longrightarrow \quad (Q_a, Q_b) \text{ canonical conjugate}$$

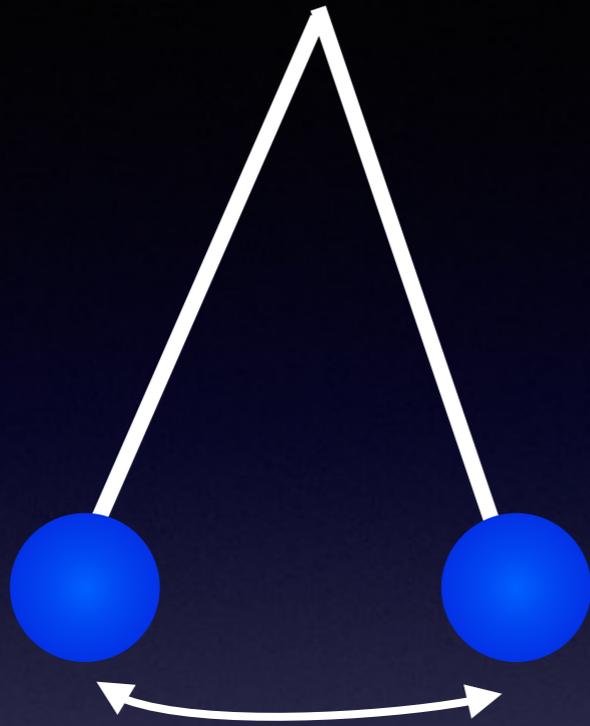
Watanabe - Brauner ('11)

$$N_{\text{BS}} - N_{\text{NG}} \leq \frac{1}{2} \text{rank} \langle [iQ_a, Q_b] \rangle$$

NGモードの分類

Watanabe, Murayama ('12), YH ('12)

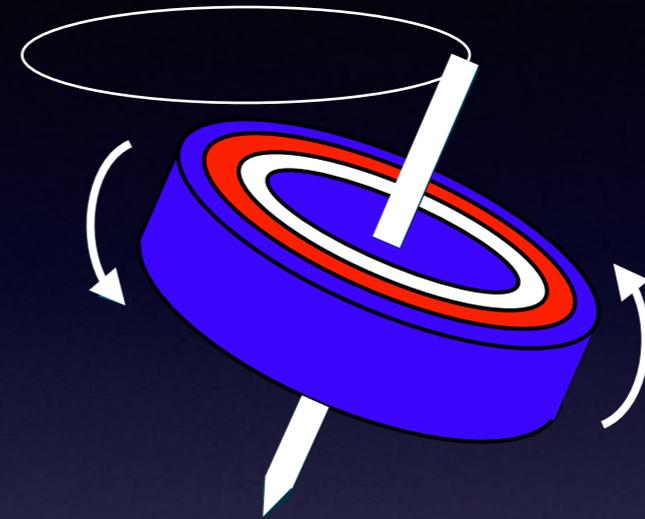
cf. Takahashi, Nitta ('14), Beekman ('14)



Type-A
調和振動

$$N_A = N_{BS} - \text{rank}\langle [iQ_a, Q_b] \rangle$$

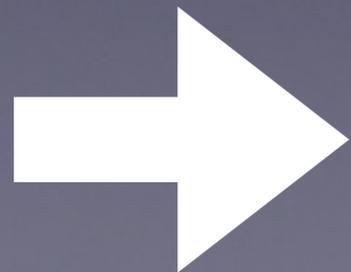
Ex.) 超流動音波



Type-B
歳差運動

$$N_B = \frac{1}{2} \text{rank}\langle [iQ_a, Q_b] \rangle$$

Ex.) マグノン

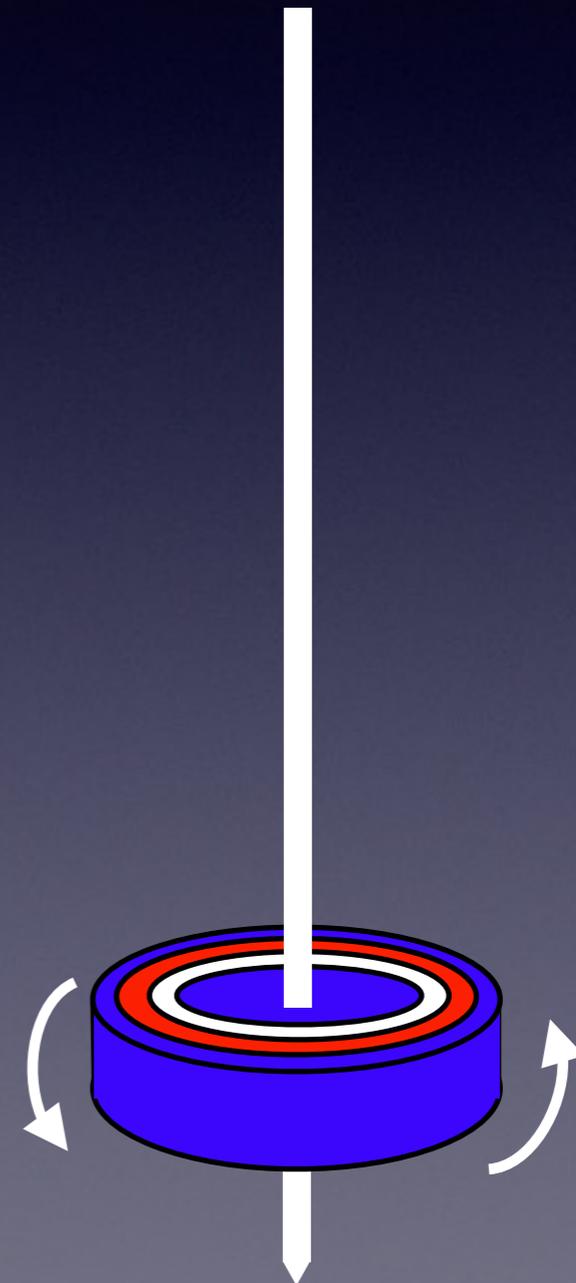


$$N_{NG} = N_{BS} - \frac{1}{2} \langle i[Q_a, Q_b] \rangle$$

Type-A, Type-Bの古典模型

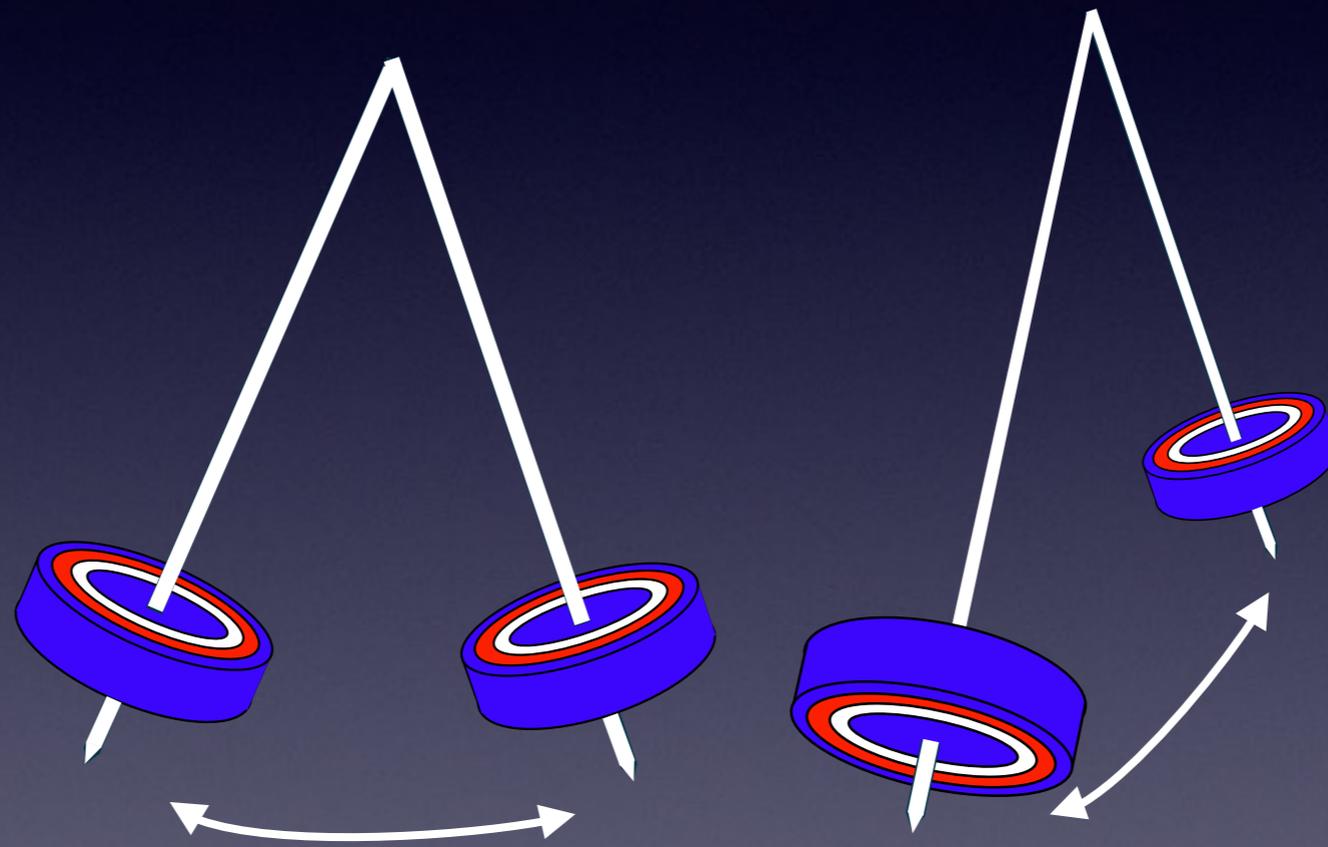
コマが付いた振り子

- 回転対称性は重力による陽な破れ
- z 軸の周りの回転は対称性がある
- x, y 軸に沿った対称性は破れている
- 破れた対称性の数は2つ



Type-A, Type-Bの古典模型

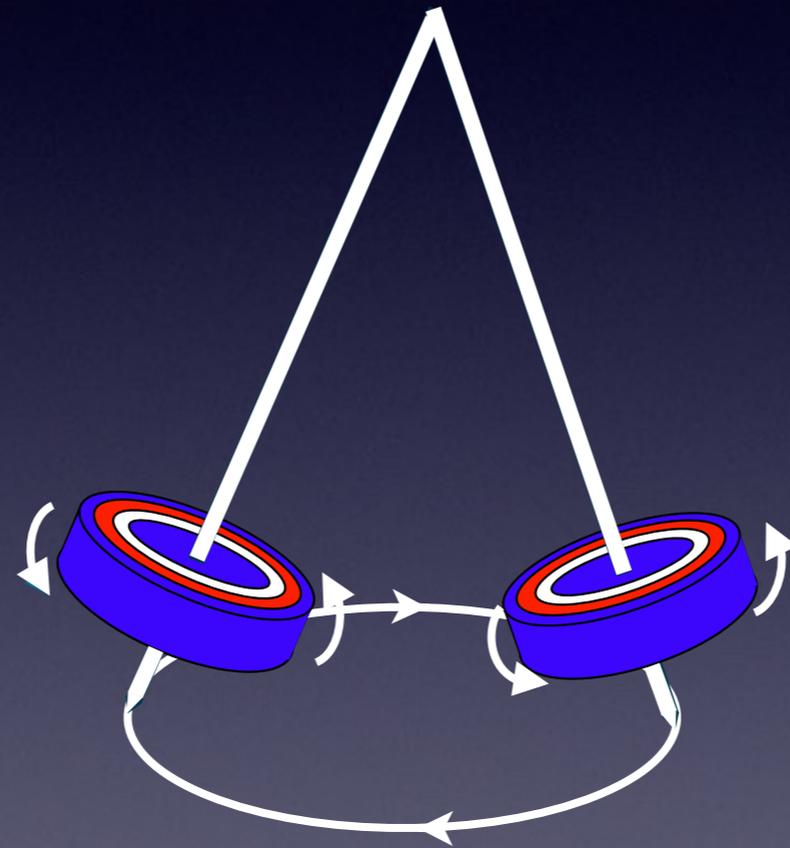
コマが回っていない時



独立な2つの振り子の運動

Type-A, Type-Bの古典模型

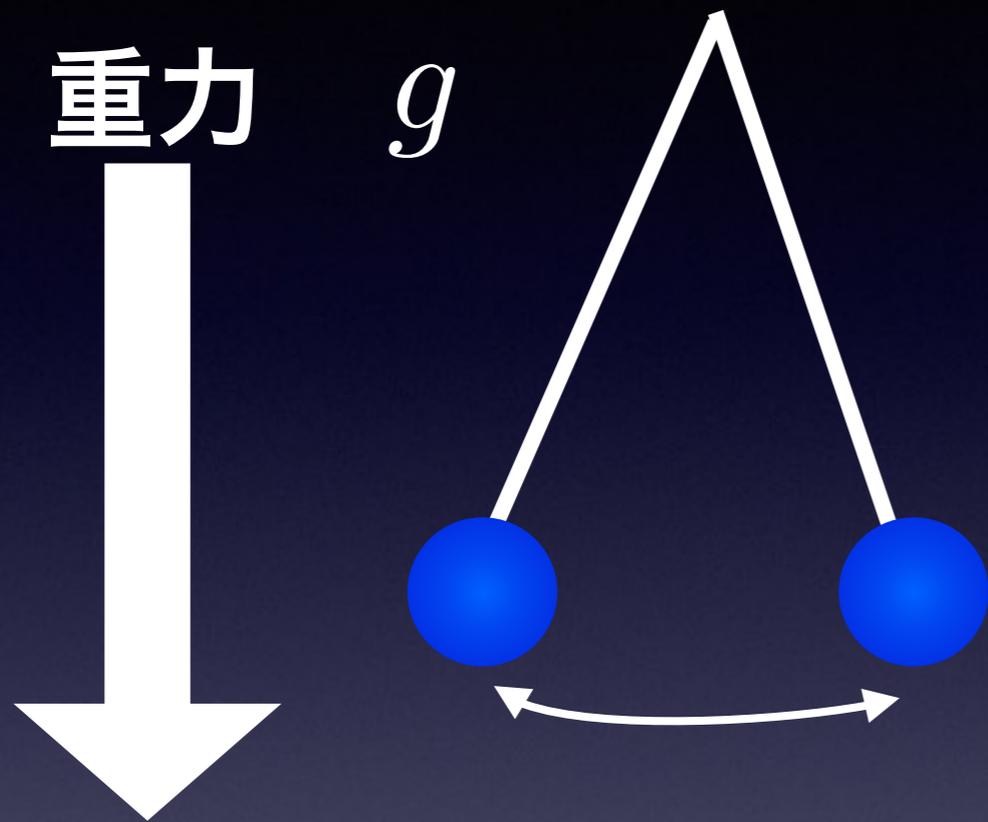
もしコマが回っていると



1方向の歳差運動

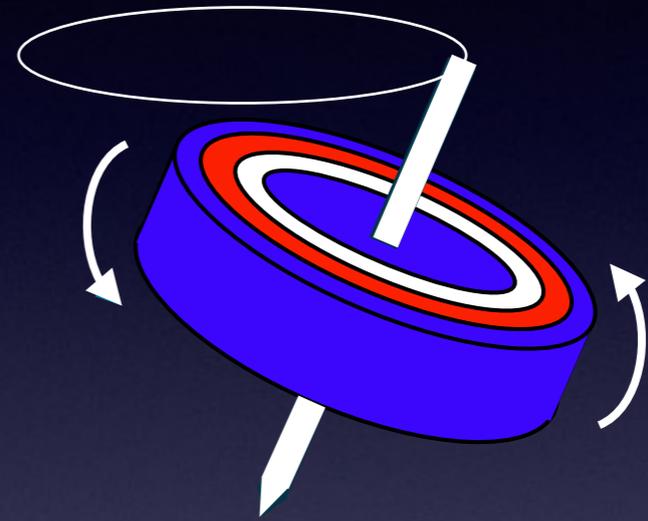
この時, $\{L_x, L_y\}_P = L_z \neq 0$

分散關係



Type-A

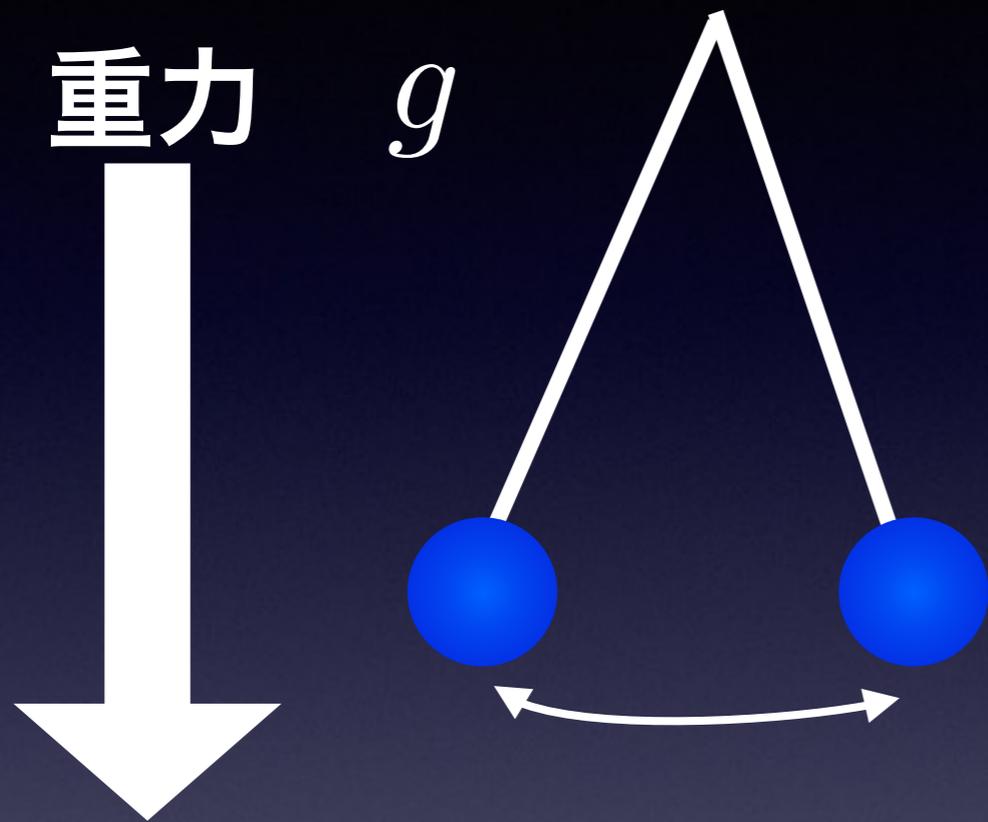
$$\omega \sim \sqrt{g}$$



Type-B

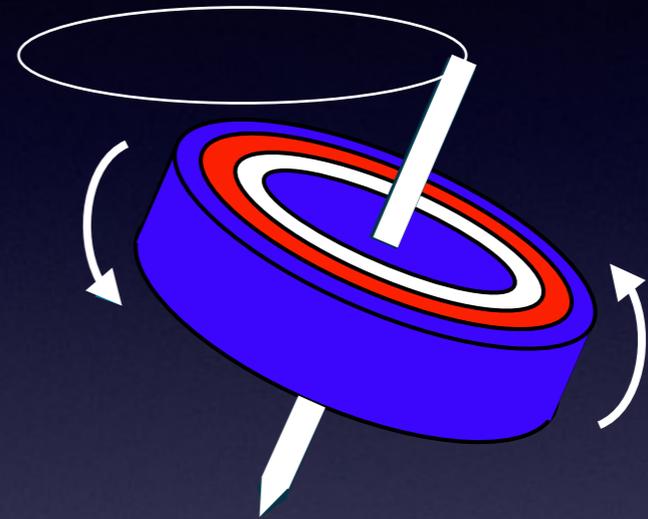
$$\omega \sim g$$

分散関係



Type-A

$$\omega \sim \sqrt{g} \sim \sqrt{k^2}$$



Type-B

$$\omega \sim g \sim k^2$$

有効ラグランジアンの方法

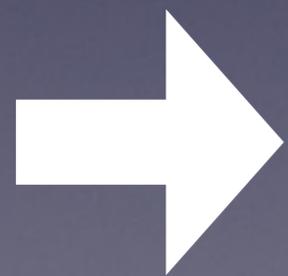
Leutwyler('94) Watanabe, Murayama ('12)

可能な項を書き下す.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho_{ab} \pi^a \dot{\pi}^b + \frac{\bar{g}_{ab}}{2} \dot{\pi}^a \dot{\pi}^b - \frac{g_{ab}}{2} \partial_i \pi^a \partial_i \pi^b + \text{higher orders}$$

ローレンツ対称性がない場合

時間の一階微分があっても良い.



$$\rho_{ab} \propto -i \langle [Q_a, j_b^0(x)] \rangle$$

Watanabe, Murayama ('12)

Type-B NGの例

	N_{BS}	$N_{\text{type-A}}$	$N_{\text{type-B}}$	$\frac{1}{2}\text{rank}\langle [Q_a, Q_b] \rangle$	$N_{\text{type-A}} + 2N_{\text{type-B}}$
強磁性体中の マグノン $\text{SO}(3) \rightarrow \text{SO}(2)$	2	0	1	1	2
K中間子凝縮 したCFL相のNG モード $\text{SU}(2) \times \text{SU}(1)_Y \rightarrow \text{U}(1)_{\text{em}}$	3	1	1	1	3
Spinor BEC $\text{SO}(3) \times \text{U}(1) \rightarrow \text{U}(1)$	3	1	1	1	3
非相対論的 有限質量の CP^1 模型 $\text{U}(1) \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$	2	0	1	1	2

$$N_{\text{type-A}} + 2N_{\text{type-B}} = N_{\text{BS}} \quad N_{\text{BS}} - N_{\text{NG}} = \frac{1}{2}\text{rank}\langle [Q_a, Q_b] \rangle$$

有限温度

Hayata, YH ('14)

熱浴粒子との散乱で幅を持つ

Type-A: $\omega = ak - ibk^2$

Type-B: $\omega = a'k^2 - ib'k^4$

これは電荷の拡散と同様

(or 低エネルギー一定理)

$$\partial_t j^0 = -k^2 \Gamma_k j^0 + \dots$$

有限温度

Hayata, YH ('14)

熱浴粒子との散乱で幅を持つ

Type-A: $\omega = ak - ibk^2$

Type-B: $\omega = a'k^2 - ib'k^4$

これは電荷の拡散と同様

(or 低エネルギー一定理)

$$\partial_t j^0 = -k^2 \Gamma_k j^0 + \dots$$

Type-B: $\Gamma_k \sim \sigma/\chi \sim k^2$

広がりを持った物体の 対称性への拡張

一般化された大域的対称性

Gaiotto et al. ('15)

電荷を持った物体

点 • i.e., 0-形式

高次形式対称性

物体:

線

1-形式



面

2-形式



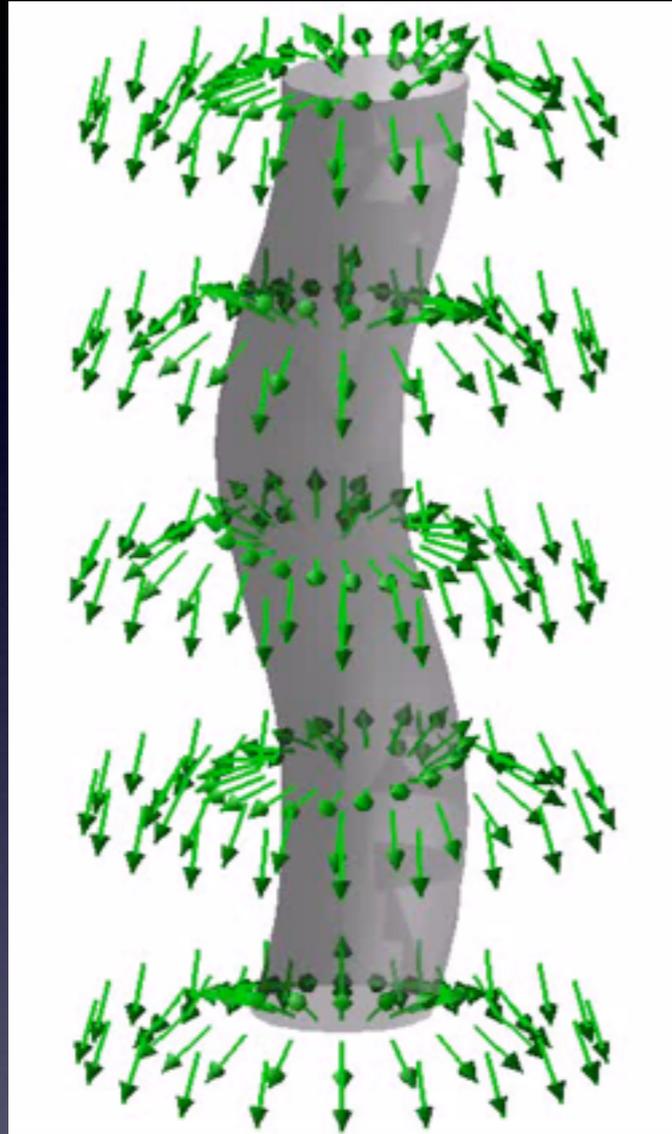
p-次元物体

p-形式



トポロジカルソリトン

非相対論的 CP1 模型



Type-B Kelvinon

$$[P_x, P_y] \propto N$$

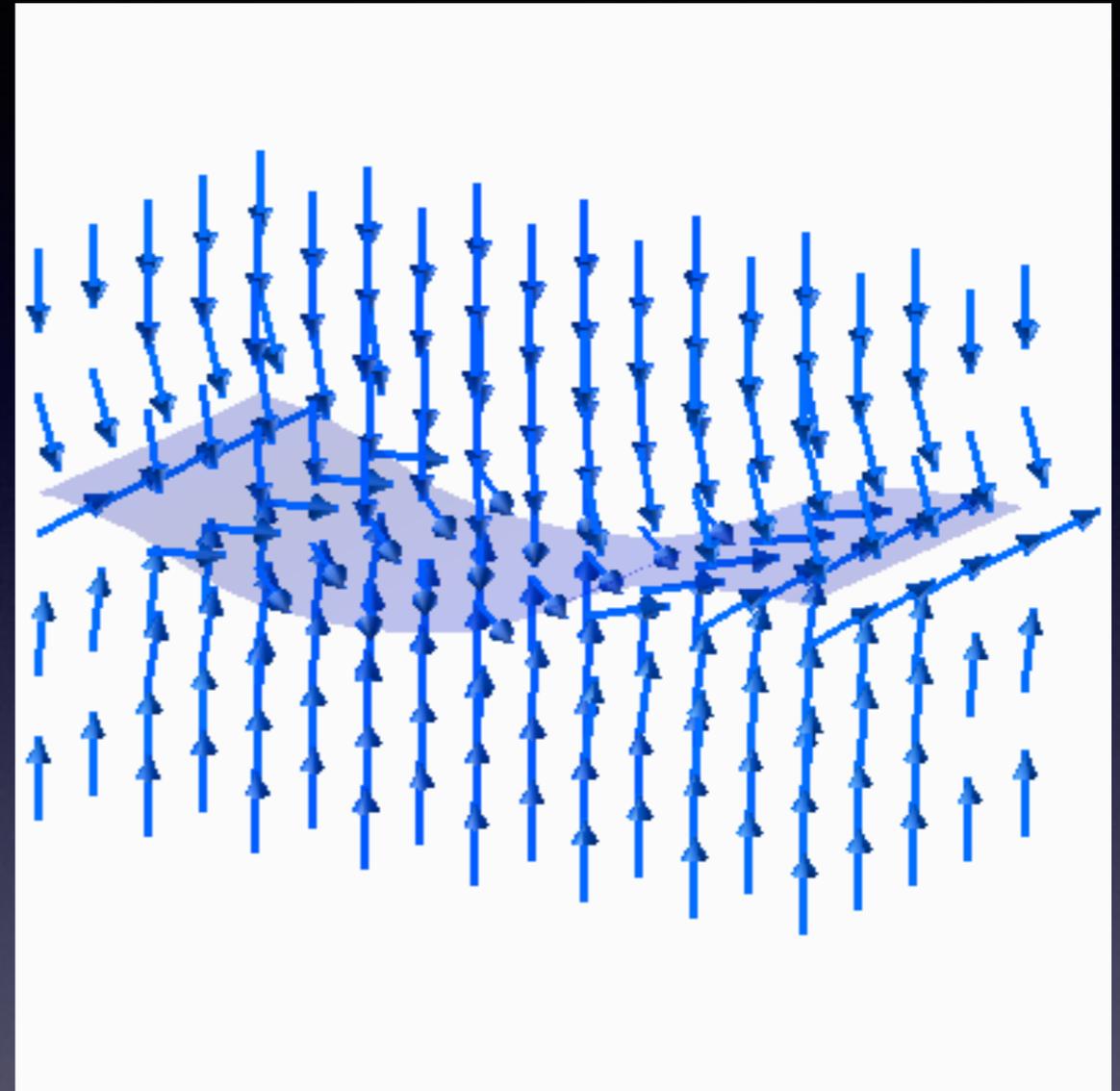
x trans.

y trans.

1-form symmetry

Kobayashi, Nitta, 1403.4031

c.f. Watanabe, Murayama 1401.8139



Type-B Ripplon-Magnon

$$[P_z, Q] \propto N$$

z trans.

U(1)

2-form symmetry

Kobayashi, Nitta, 1402.6826

NGモードとしての光子

cf. Ferrari, Picasso ('71), Hata ('82), Kugo, Terao, Uehara ('85) Gaiotto et al. ('15)

電荷を持った物体

Wilson ('t Hooft) ループ

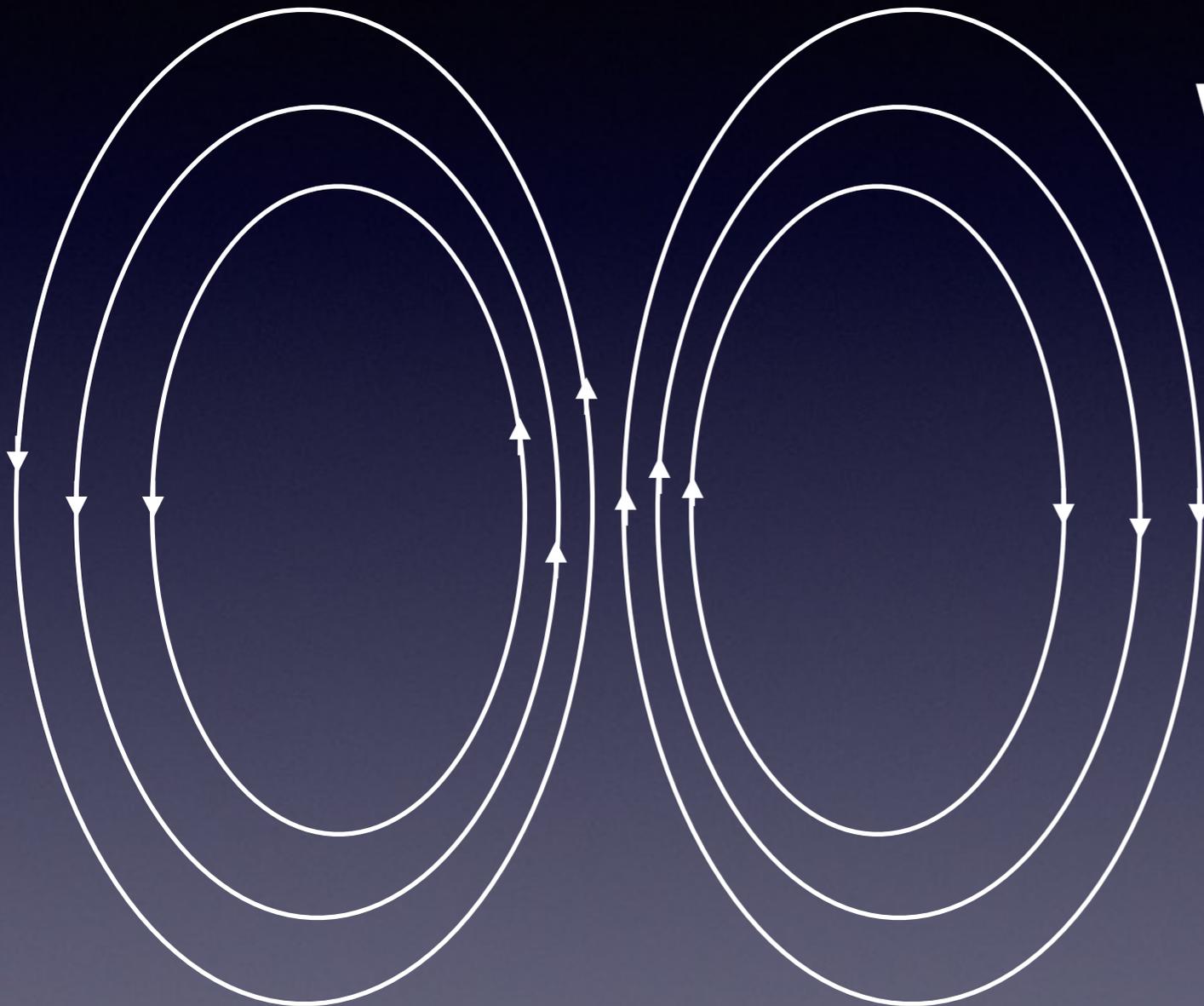
$$W = \exp \left[i \oint A_\mu dx^\mu \right]$$

$$H = \exp \left[i \oint \tilde{A}_\mu dx^\mu \right]$$

電荷: 電束, 磁束

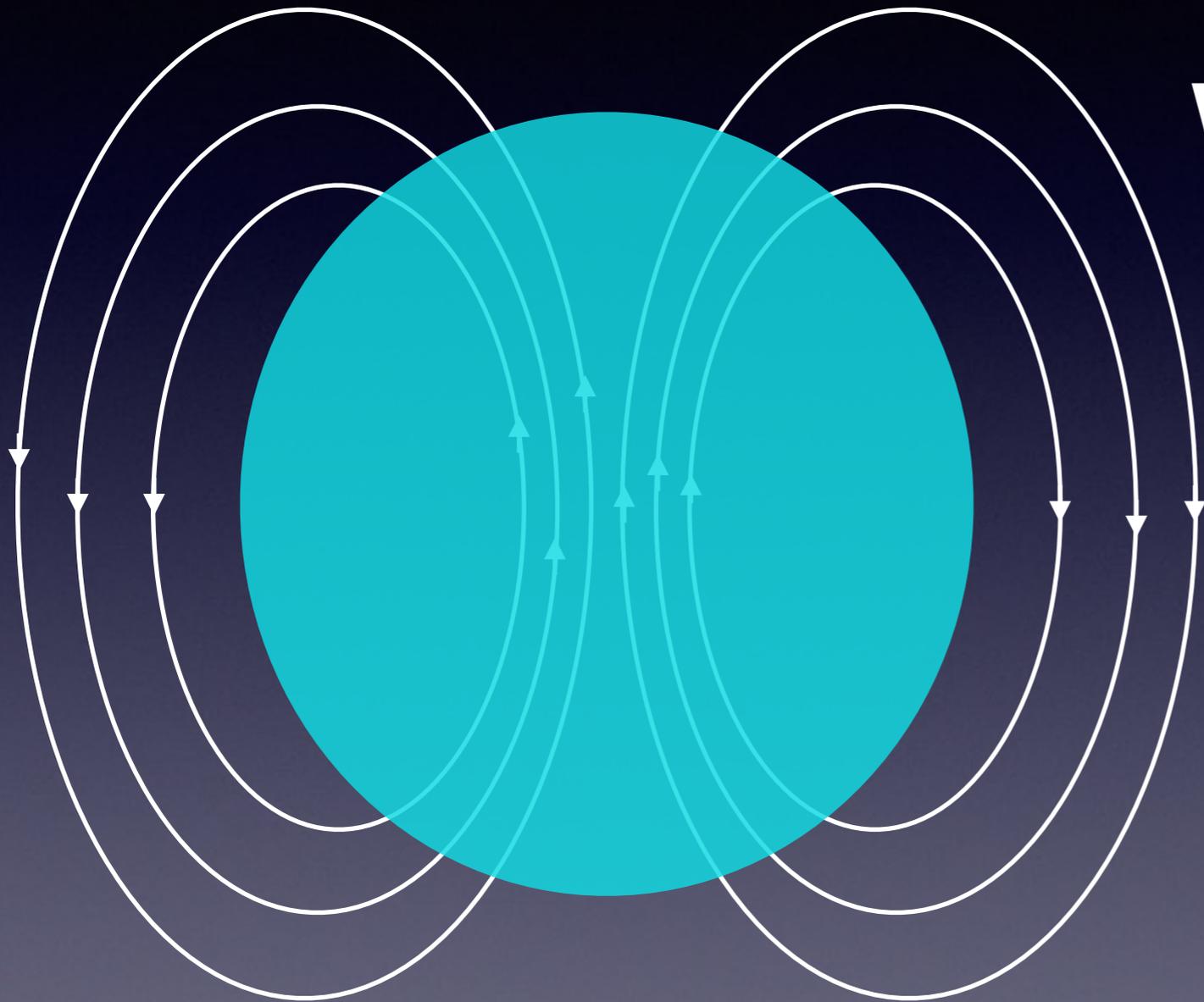
$$Q_e = \int dS \cdot \mathbf{E} \quad \frac{dQ_e}{dt} = 0$$

$$Q_m = \int dS \cdot \mathbf{B} \quad \frac{dQ_m}{dt} = 0$$



NGモードとしての光子

cf. Ferrari, Picasso ('71), Hata ('82), Kugo, Terao, Uehara ('85) Gaiotto et al. ('15)



電荷を持った物体

Wilson ('t Hooft) ループ

$$W = \exp \left[i \oint A_\mu dx^\mu \right]$$

$$H = \exp \left[i \oint \tilde{A}_\mu dx^\mu \right]$$

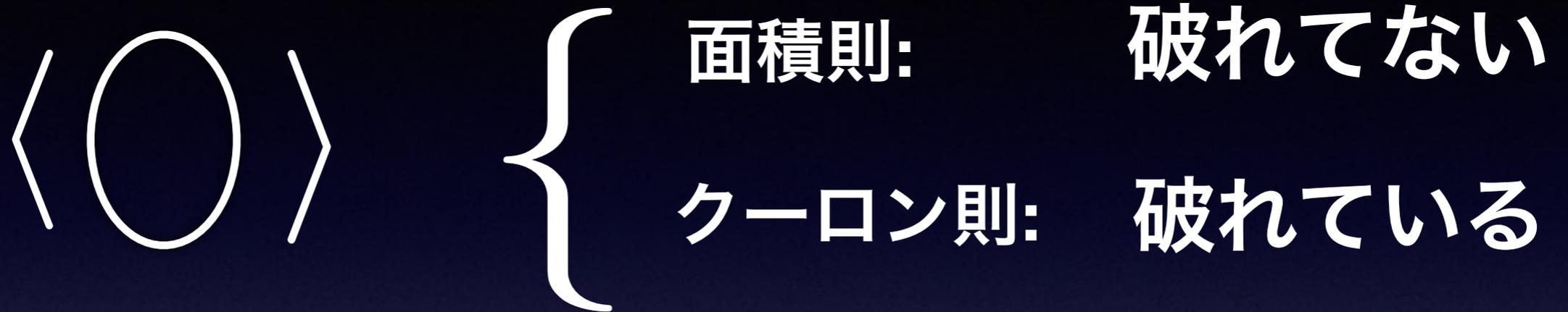
電荷: 電束, 磁束

$$Q_e = \int dS \cdot \mathbf{E} \quad \frac{dQ_e}{dt} = 0$$

$$Q_m = \int dS \cdot \mathbf{B} \quad \frac{dQ_m}{dt} = 0$$

NGモードとしての光子

ループの期待値



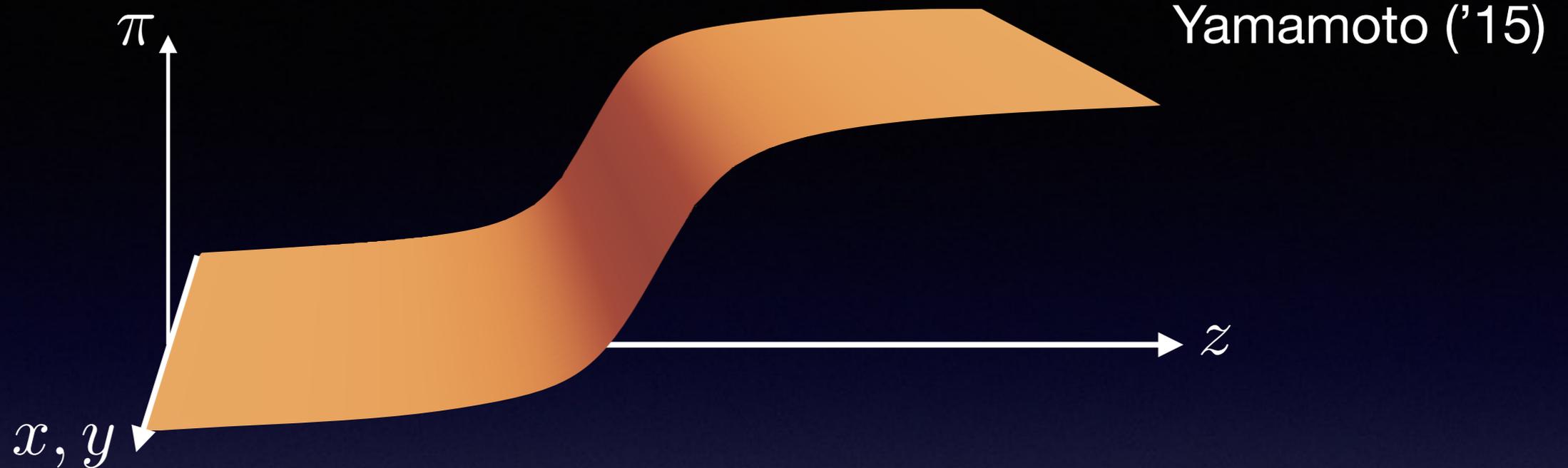
光子=NGモード

6つの破れた生成子: E^i, B^i

しかしそれらは独立ではない

$$[E^i(\mathbf{x}), B^j(\mathbf{y})] = \epsilon^{ijk} \partial_k \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \longrightarrow \text{2つの光子}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

非相対論的な光子



光子とドメインウォールと相互作用する系を考える

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \left(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 \right) + C \int d^4x \pi \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$$

もし $\partial_z \pi = \text{const}$ \Rightarrow $\omega_k \sim k^2$ 1つの光子

$$\langle [Q_e(M_{xz}), Q_e(M_{yz})] \rangle \sim \int dz \partial_z \pi \quad \text{タイプ-B}$$

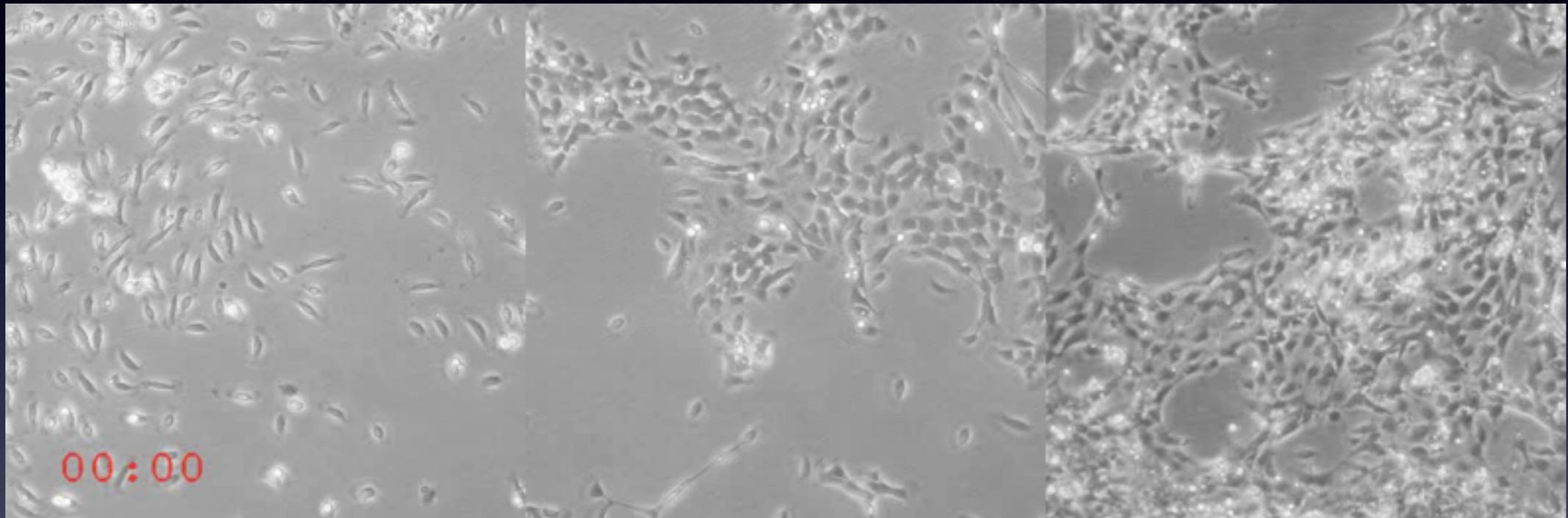
開放系



CC BY-SA 2.0



非ハミルトン系での自発的対称性の破れの例 魚の上皮にいる細胞



B. Szabo, et al., Phys. Rev. E 74, 061908 (2006)

Model of active matter: Vicsek model, Active hydrodynamics,

T. Vicsek, et al., PRL (1995). J. Toner, and Y. Tu, PRL (1995).

例) アクティブ流体のNGモード

J. Toner, and Y. Tu, PRE (1998)

鳥の数保存則: $\partial\rho + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0$

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \alpha \mathbf{v} - \beta v^2 \mathbf{v} - \nabla P + D_L \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + D_l (\mathbf{v} \cdot \nabla)^2 \mathbf{v} + f$$

非保存項 ノイズ



定常解:

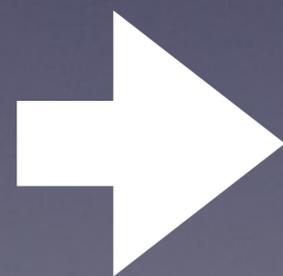
$$v^2 = \alpha/\beta \equiv v_0^2$$

対称性の破れ:

$$O(3) \rightarrow O(2)$$

ゆらぎ:

$$\mathbf{v} = (v_0 + \delta v_x, \delta v_y, \delta v_z)$$



$$\omega = ck \quad \omega = i\Gamma k^2 \quad \text{NGモード}$$

伝播モード

散逸モード

散逸系は普通の意味での作用が作れない

どのように対称性の破れを
議論すればよいか？

例) ブラウン運動の対称性

ランジュバン方程式

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{u}(t)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{u}(t) = -\gamma \mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\xi}(t)$$

$$\langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle = 2\delta_{ij} \gamma T \delta(t - t')$$



角運動量

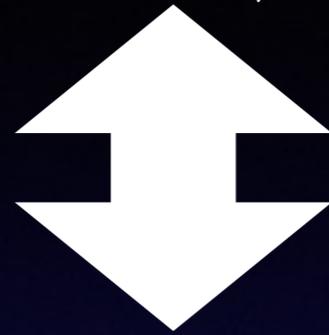
$$\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{u}$$

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{L}(t) \rangle = -\gamma \langle \mathbf{x} \times \mathbf{u}(t) \rangle \neq 0$$

保存しない

ランジュバン方程式

$$\frac{d}{dt}u(t) = -\gamma u(t) + \xi(t)$$



経路積分 (or Fokker-Planck 方程式)

Martin-Siggia-Rose formalism

$$Z = \int \mathcal{D}\chi \mathcal{D}u e^{iS_{\text{MSR}}[\chi, u]}$$

$$iS_{\text{MSR}} = \int dt \left[i\chi_i \left(\frac{d}{dt}u_i + u_i \right) - \frac{\chi_i^2}{2} \right]$$

O(3) 対称性

$$\chi_i \rightarrow R_{ij}\chi_j \quad u_i \rightarrow R_{ij}u_j \quad \text{with } R_{ij}R_{kj} = \delta_{jk}$$

対称性の自発的破れ

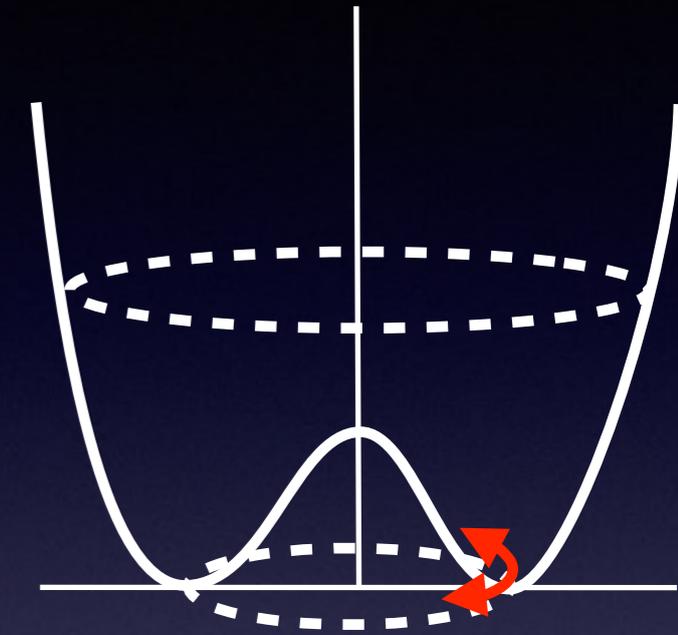
Minami, YH ('15)

$V(\phi)$

例1) $SU(2) \times U(1)$ 模型 Type-A

Langevin 方程式

$$(\partial_0^2 + \gamma \partial_0 - \nabla^2) \phi_a = -\frac{\partial V}{\partial \phi_a} + \xi_a$$



線形解析

$$(\partial_0^2 + \gamma \partial_0 - \nabla^2) \pi_a = 0 \text{ タイプ-A NGモード}$$

$$\rightarrow -\omega^2 - i\gamma\omega + k^2 = 0$$

$$\rightarrow \omega = \frac{-i}{2} \pm \frac{i}{2} \sqrt{\gamma^2 - 4k^2} \sim -\frac{i}{\gamma} k^2, -i\gamma + \frac{i}{\gamma} k^2$$

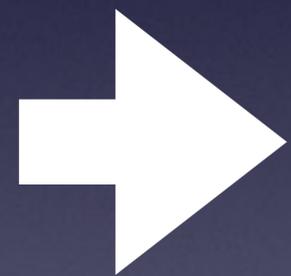
散逸モード

対称性の自発的破れ

Minami, YH ('15)

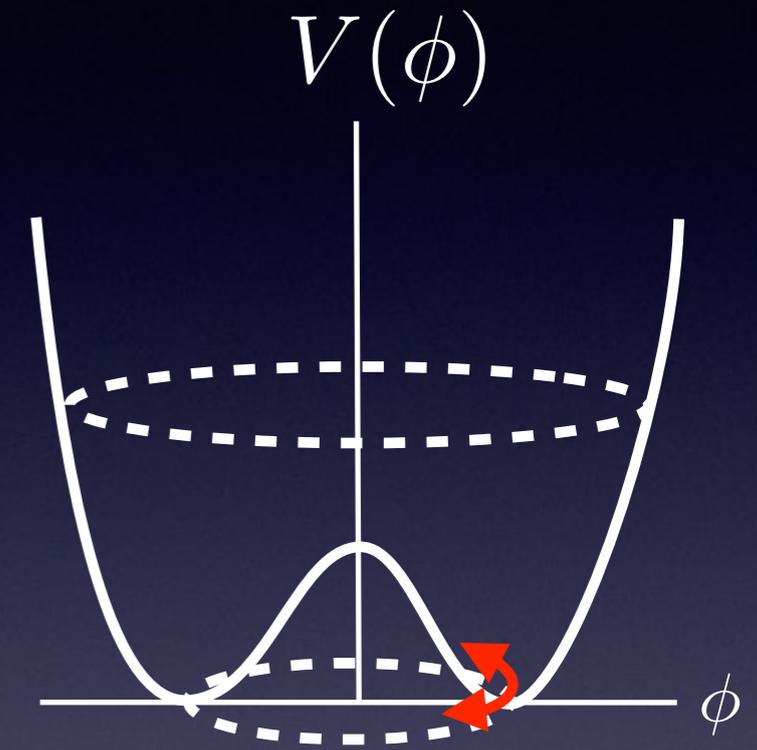
例2) $SU(2) \times U(1)$ 模型 Type-B with 化学ポテンシャル

$$\begin{pmatrix} -\partial_0^2 - \gamma\partial_0 + \nabla^2 & 2\mu\partial_0 \\ -2\mu\partial_0 & -\partial_0^2 - \gamma\partial_0 + \nabla^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix} = 0,$$



$$\omega = \frac{k^2}{4\mu^2 + \gamma^2} (\pm 2\mu - i\gamma)$$

2乗分散





MSRでの自発的破れ

模型解析:

2種類の散逸モード

Type-A モード

Type-Bモード

散逸的 $\omega = -ik^2\Gamma$

$\omega = ak^2 - ik^2\Gamma'$

量子開放系

cf. for review, Sieberer, Buchhold, Diehl, 1512.00637

Schwinger-Keldysh 経路積分



$$Z = \int \mathcal{D}\phi_1 \mathcal{D}\phi_2 \exp \left[iS[\phi_1] - iS[\phi_2] + iS[\phi_1, \phi_2] \right]_{\text{complex}}$$

Q_1, Q_2 : Symmetry generators:

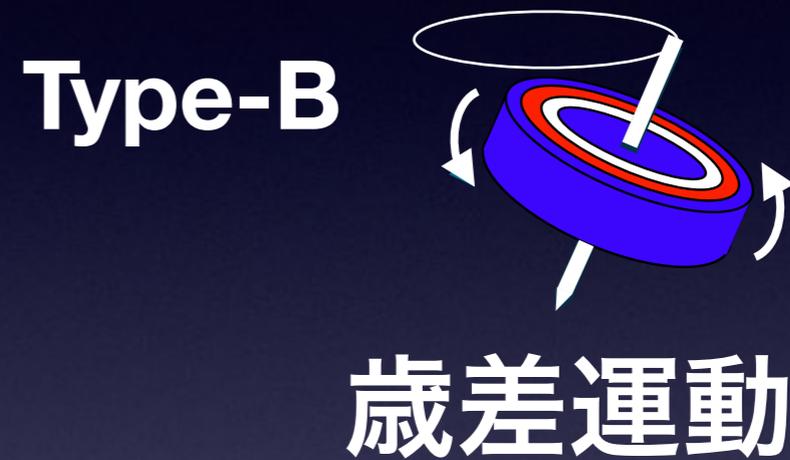
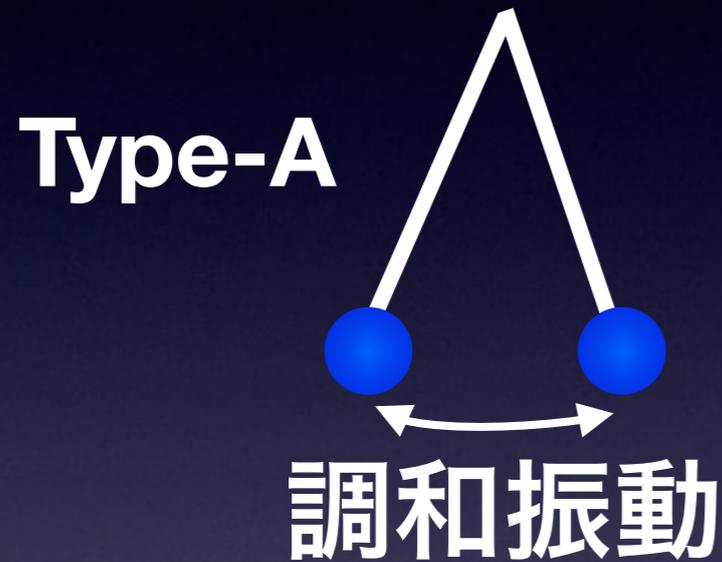
$S[\phi_1], S[\phi_2]$ は不変.

$S_{12}[\phi_1, \phi_2]$ は $Q_A = \frac{Q_1 - Q_2}{2}$ の元で不変

$Q_R = \frac{Q_1 + Q_2}{2}$ の元では不変ではない

まとめ

NGモードは2種類の分類できる
内部対称性の場合



$$N_A = N_{BS} - \text{rank}\langle [iQ_a, Q_b] \rangle$$

$$\omega = ak - ibk^2$$

$$N_B = \frac{1}{2} \text{rank}\langle [iQ_a, Q_b] \rangle$$

$$\omega = a'k^2 - ib'k^4$$

広がりをもった物体への拡張
トポロジカルソリトン
高次形式対称性の自発的破れ

まとめ

開放系でも自発的対称性の破れの
概念は適用可能

分散関係の予想

Minami, YH ('15)

タイプ	分散		保存量	例	証明
	Re	Im			
A	k	k^2	Q_A, Q_R	超流動など	OK
	0	k^2	Q_A	鳥の群れ	
B $\langle [Q_A, Q_R] \rangle \neq 0$	k^2	k^4	Q_A, Q_R	強磁性体	OK
	k^2	k^2	Q_A	?	

非相対論系での超対称性の破れ

Yu, Yang Phys. Rev. Lett. 100 090404 (2008), 105 150605 (2010)

Shi, Yu, Sun, Phys. Rev. A 81, 011604 (2010)

Lai and K. Yang Phys. Rev. A 91, 063620 (2015)

Blaizot, Hidaka, Satow, Phys. Rev. A 92, 063629 (2015)

Sannomiya, Katsura, Nakayama 1606.03947

非相対論系でのゲージ対称性の破れ

Gusynin, Miransky, Shovkovy, Phys. Lett. 581B, 82 (2004),

Mod. Phys. Lett. A 19, 1341 (2004)

Watanabe and Murayama Phys. Rev. D90, 121703 (2014)

Hama, Hatsuda, Uchino, Phys. Rev. D 83, 125009 (2011)

他のギャツプレスモード

有限の感受率

$$\chi = \int d^d x \left(\langle j_a^0(\mathbf{x}) j_a^0(\mathbf{0}) \rangle - \langle j_a^0(\mathbf{0}) \rangle^2 \right) > 0$$

非自明な交換関係

$$\langle [j_a^0(\mathbf{x}), j_b^0(\mathbf{y})] \rangle = c_{ab}(\nabla) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

➡ ギャツプレスモード

Ex1) カイラル磁気波

Kharzeev, Yee ('10)

カイラルアノマリー $\partial_\mu j_A^\mu = CE^i B^i$

$[j_V^0(\boldsymbol{x}), j_A^0(\boldsymbol{y})] = CB^k \partial_k \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$ は

Ex1) カイラル磁気波

Kharzeev, Yee ('10)

カイラルアノマリー $\partial_\mu j_A^\mu = C E^i B^i$

$[j_V^0(\mathbf{x}), j_A^0(\mathbf{y})] = C B^k \partial_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ は

$B^i \neq 0 \Rightarrow$ カイラル磁気波
 $\omega = v^i k_i \quad v^i = \frac{C B^i}{\sqrt{\chi_V \chi_A}}$

cf. Tomonaga-Luttinger liquidにおける電荷密度波

Ex2) 空気中の音波

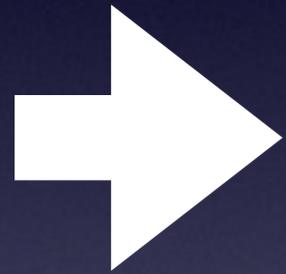
$$-\langle [iT^{0i}(\boldsymbol{x}), T^{00}(\boldsymbol{y})] \rangle = h\partial_i\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$$

$$h = \langle T^{00} + T^{ii} \rangle \text{ エンタルピー}$$

Ex2) 空気中の音波

$$-\langle [iT^{0i}(\boldsymbol{x}), T^{00}(\boldsymbol{y})] \rangle = h\partial_i\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$$

$$h = \langle T^{00} + T^{ii} \rangle \text{ エンタルピー}$$



空気中の音波

$$\omega = vk \quad v^2 = \frac{h^2}{\chi_{T^{00}} \chi_{T^{0i}}} = \frac{\partial P}{\partial T^{00}}$$