

Determination of the strong coupling constant from lattice QCD

@基研研究会 素粒子物理学の進展 2017
大野木哲也(大阪大学)

2017年8月2日

話の目標

1. Lattice による α_s の結果
2. 現在の精度は何できまっているか？
3. 将来的にどの精度までいくか？

最近のFlavor Lattice Averaging Group Report にもとづいて話します。

Eur. Phys. J. C (2014) 74:2890
DOI 10.1140/epjc/s10052-014-2890-7

THE EUROPEAN
PHYSICAL JOURNAL C

Review

Review of lattice results concerning low-energy particle physics

FLAG Working Group

S. Aoki¹, Y. Aoki^{2,3}, C. Bernard⁴, T. Blum^{3,5}, G. Colangelo^{6,a}, M. Della Morte^{7,8}, S. Dürr^{9,10}, A. X. El-Khadra¹¹, H. Fukaya¹², R. Horsley¹³, A. Jüttner¹⁴, T. Kaneko¹⁵, J. Laiho^{16,28}, L. Lellouch^{17,18}, H. Leutwyler⁶, V. Lubitz^{19,20}, E. Lunghi²¹, S. Necco⁶, T. Onogi¹², C. Pena²², C. T. Sachrajda¹⁴, S. R. Sharpe²³, S. Simula²⁰, R. Sommer²⁴, R. S. Van de Water²⁵, A. Vladikas²⁶, U. Wenger⁶, H. Wittig²⁷

FLAG report: S. Aoki et al.,
Eur. Phys. J. C77(2017) no2. 112

Flavor Lattice Averaging Group (FLAG)

Lattice の物理量に対して、様々なcollaborationからの結果を総括し、「平均値」を与えるLattice研究者コミュニティーのワーキンググループ

Our aim is to provide an answer to the frequently posed question “What is currently the best lattice value for a particular quantity?” in a way that is readily accessible to nonlattice-experts.

FLAG members

Advisory Board : [S. Aoki](#), C. Bernard, M. Golterman, H. Leutwyler, C. Sachrajda
Editorial Board: G. Colangelo, A. Jüttner, S. Hashimoto, S. Sharpe A. Vladikas, U. Wenger

Working Groups

- Quark masses: L. Lellouch, T. Blum, V. Lubicz
- V_{us} , V_{ud} : S. Simula, P. Boyle, [T. Kaneko](#)
- Low Energy Constant: S. Dürr, [H. Fukaya](#), U.M. Hellter
- BK : H. Wittig, P. Dimopoulos, R. Mawhinney
- f_B , f_D , BB: M. Della Morte, [Y.Aoki](#), D. Lin
- B, D semileptonic decays: E. Lunghi, D. Becirevic, S. Gottlieb, C. Pena
- α_s : [R. Sommer](#), [R. Horsley](#), [T. O.](#)

目次

1. なぜ α_s が重要か?
2. 格子QCDの基礎
3. どうやって $\alpha^{\overline{\text{MS}}}(\mu)$ を決定するか?
 - a. 自然な方法とWindow問題
 - b. Window問題を解決するには?
 - i. 自然な方法における改良
 - ii. 有限体積スキームとステップスケールリング
 - iii. Wilson ループ
4. 数値結果
5. まとめ

1. なぜ α_s が重要か？

PDG value $\alpha^{\overline{\text{MS}}} = 0.1181 \pm 0.0011$

(PDG 2016 rev.: Bethke, Dissertori, Salam)

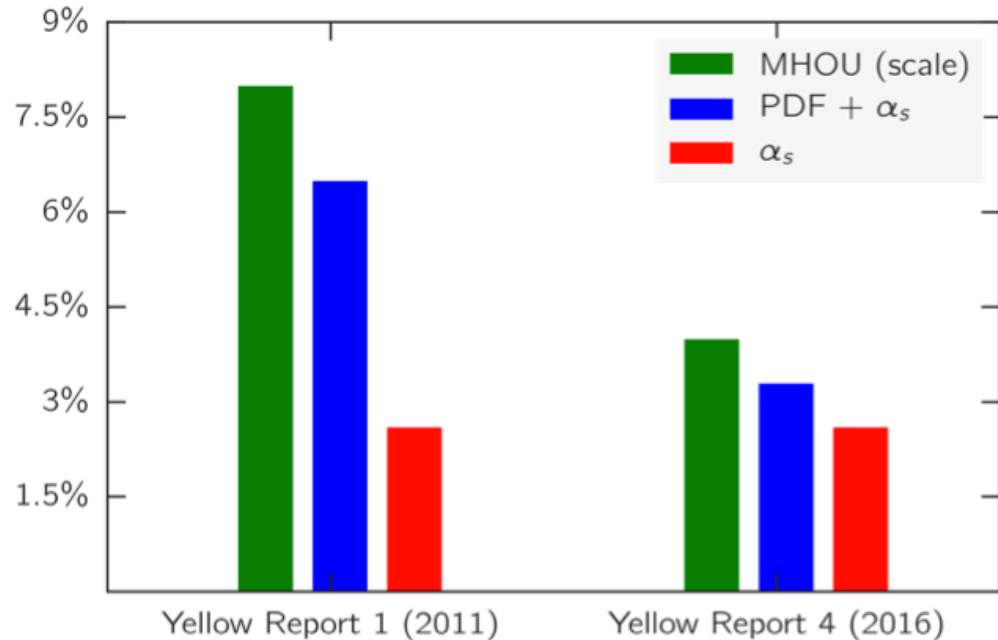
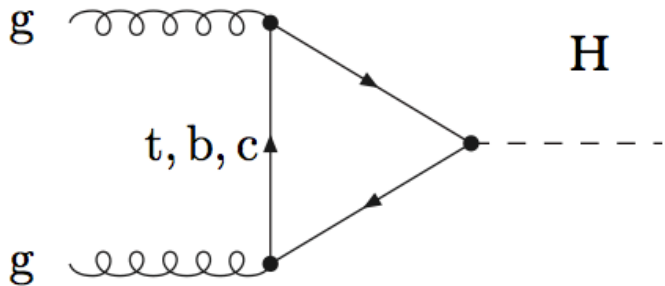
1% レベルの精度に到達している。

以下の現象論の研究においては、より高い精度が求められる。

1. LHCにおけるヒッグスの物理
2. LHCにおけるトップクォークの物理
3. 標準模型の繰り込み群の振る舞い

LHCにおけるヒッグスの物理

% UNCERTAINTIES ON TOTAL CROSS-SECTION

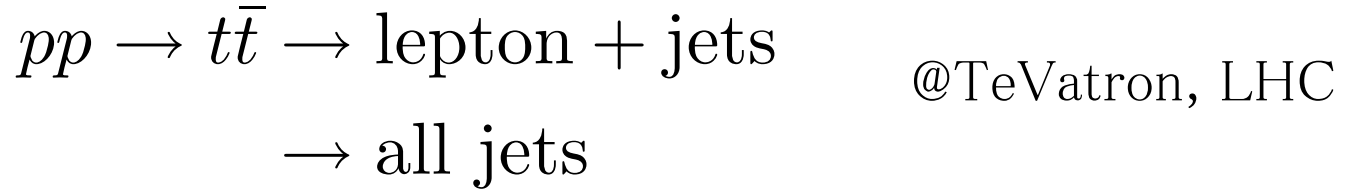


Slide from plenary talk
by S. Forte @ Lattice 2017

素過程の断面積が $\mathcal{O}(\alpha^2)$ なら、2-3% の不定性が生じる。
標準模型からのずれを検証するには α の精度の向上が必要

$$\sigma = c_1 (\alpha + \Delta\alpha)^2 + \dots = c_1 \alpha^2 \left(1 + 2 \frac{\Delta\alpha}{\alpha} \right) + \dots$$

トッブクォークの物理



トッブクォーク 生成断面積 \rightarrow トッブクォーク質量

$$m_t^{\text{pole}} = 173.34 \pm 0.27 \pm 0.71 \text{ GeV}$$

PDF と α が
主な系統誤差

ヒッグスの物理と同様の構造

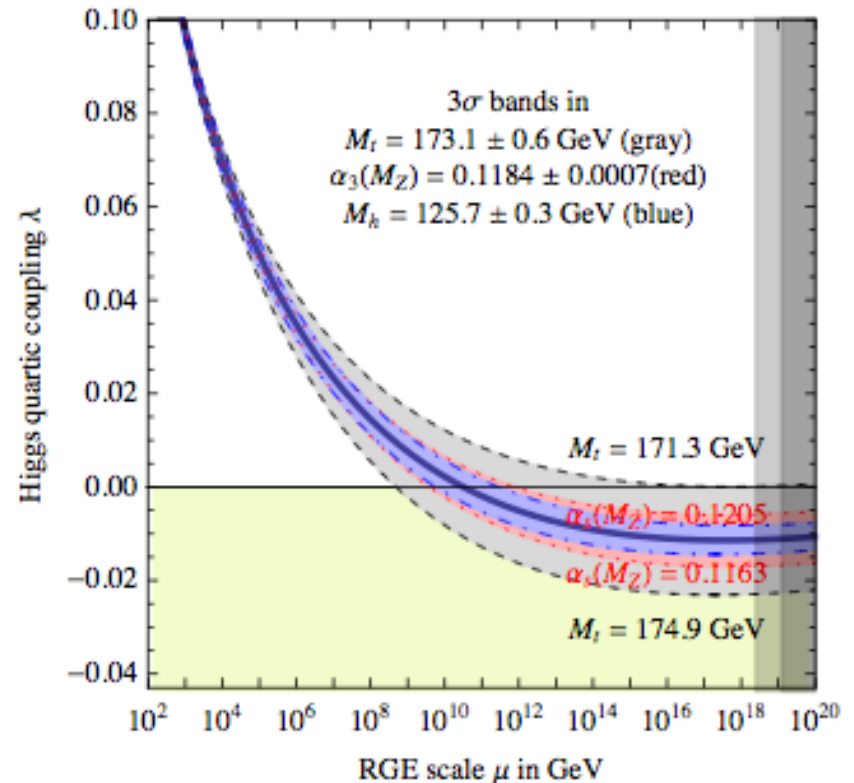
PDF, α , m_t , \dots

コライダー実験での様々な
過程の断面積の情報

α_s の精密な値が不定性を小さくする。

繰り込み群による標準模型の 高エネルギーでの振る舞い

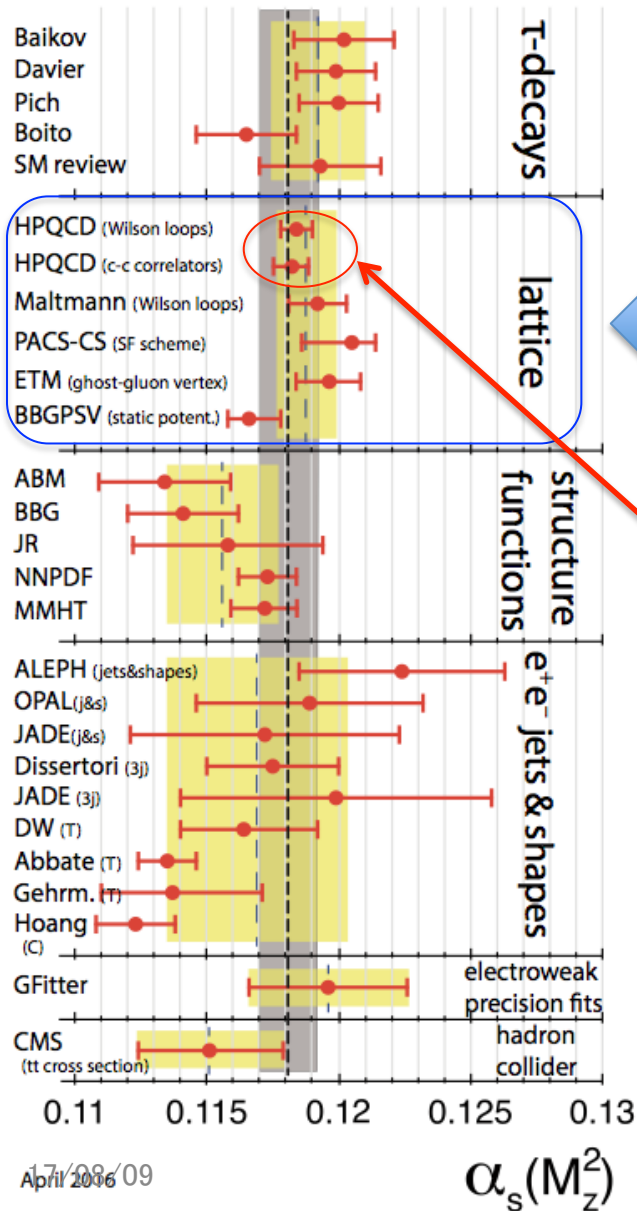
ヒッグス4点結合 λ の
繰り込み群の振る舞い



真空の安定性は m_t, α の値に敏感
→ 精密決定の必要性

α_s の決定の現状

Particle Data Group 2016



Lattice の結果

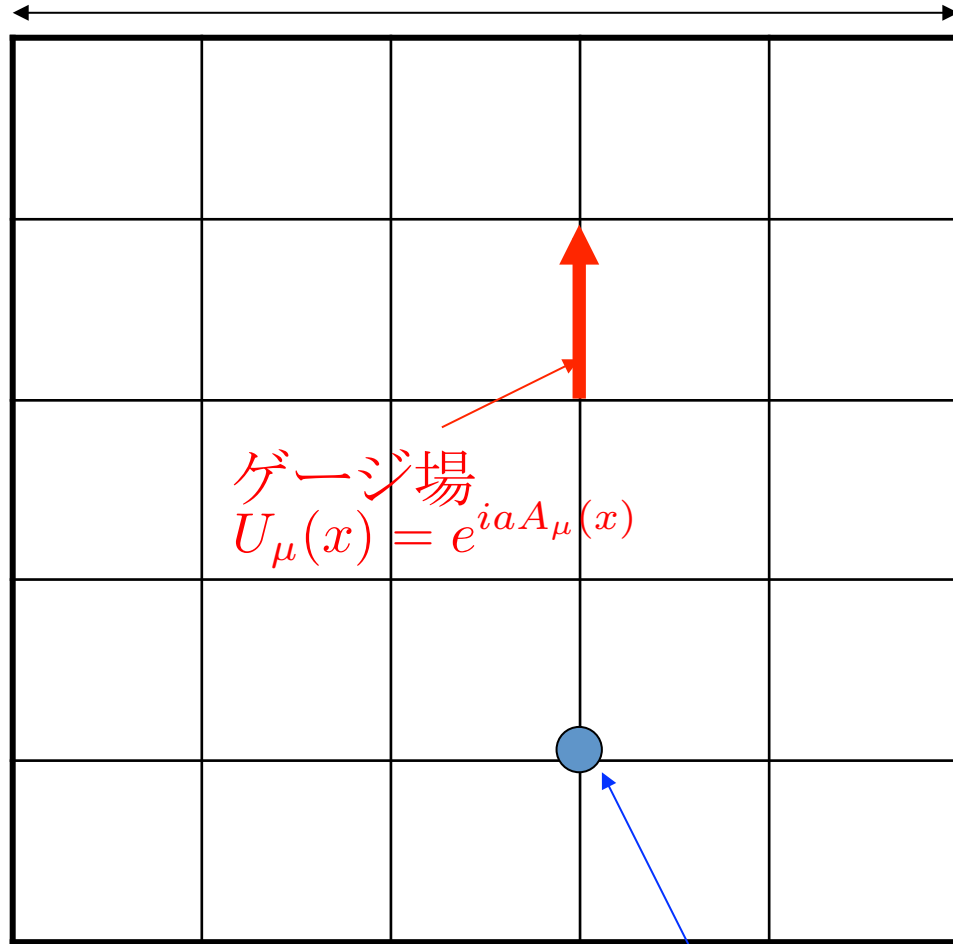
もっとも精密な決定

どれだけ信頼できる?
改良の余地は?

良く見るとこの2つだけ精度がめちゃくちゃ良い。
実は α_s はほとんどこれだけで決まりかねない。
しかも全く同じグループ → 「危うい？」状況

2. 格子QCDの基礎

$$L = Na = 3 \sim 10 \text{ fm}$$



格子間隔
 $a = 0.05 \sim 0.2 \text{ fm}$

クォーク場 $\psi_\alpha^a(x)$

格子QCDのパラメータ
裸の結合定数 : $g_0(a)$
裸のクォーク質量 : \hat{m}_0

L^4 : ボックスサイズ
 N^4 : 格子サイズ
 a : 格子間隔

インプット

核子質量 : m_N
 π 中間子質量 : m_π



原理的にはいかなる物理量
もインプットになりうる

アウトプット:

あらゆる物理量 (格子単位)
(ハドロン質量、形状因子)

- 格子シミュレーションで格子単位での核子質量とパイオン質量が裸のパラメータの数値的な関数として求められる。

$$am_N = \mathcal{M}_N(g_0, \hat{m}_0), \quad am_\pi = \mathcal{M}_\pi(g_0, \hat{m}_0),$$


格子シミュレーションの結果


- $\frac{m_\pi}{m_N}$ をインプットとして \hat{m}_0 が g_0 の関数として決定できる。
- m_N をインプットとして a が g_0 の関数として決定できる

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{m_N^{\text{exp}}}{m_\pi^{\text{exp}}} = \frac{\mathcal{M}_N(g_0, \hat{m}_0(g_0))}{\mathcal{M}_\pi(g_0, \hat{m}_0(g_0))} \\ a(g_0) = \frac{1}{m_N^{\text{exp}}} \mathcal{M}_N(g_0, \hat{m}_0(g_0)) \end{array} \right.$$

理論の裸のパラメータの(非摂動的)繰り込み

QCDの物理量の予言

他のハドロン質量

$$m_H^{\text{prediction}} = \lim_{g_0 \rightarrow 0} \frac{1}{a(g_0)} \mathcal{M}_N(g_0, \hat{m}_0(g_0))$$

相関関数

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{O}(x) \mathcal{O}(0) \rangle^{\text{prediction}} \\ &= \lim_{g_0 \rightarrow 0} (a(g_0))^{-2d_{\mathcal{O}}} (Z_{\mathcal{O}}(g_0))^2 \langle \hat{\mathcal{O}}^{\text{lat}}(\hat{x}) \hat{\mathcal{O}}^{\text{lat}}(0) \rangle_{g_0, \hat{m}_0(g_0)}^{\text{lat}} \Big|_{\hat{x}=a(g_0)x} \end{aligned}$$

格子シミュレーションの結果

繰り込み因子 $Z_{\mathcal{O}}(g_0)$ が必要
いくつかの計算方法(ワード・高橋恒等式…)

もし相関関数の比が有用な場合
→ 繰り込み因子 $Z_{\mathcal{O}}(g_0)$ は不要

3. どうやって $\alpha^{\overline{MS}}(\mu)$ を決定するか?

a. Naïve method and window problem

1. A short distance quantity $\mathcal{Q}(\mu)$ from lattice QCD, which is finite (i.e. renormalized or divergence free).
(ex: static quark potential, Adler function) μ : some momentum scale

$$\mathcal{Q}(\mu) = \lim_{g_0 \rightarrow 0} \mathcal{Q}^{\text{lat}}(\hat{\mu}, g_0, \hat{m}(g_0)) \Big|_{\hat{\mu} = a(g_0)\mu}$$

2. Compute $\langle \mathcal{O} \rangle$ using perturbative QCD with $\alpha^{\overline{MS}}(\mu)$.
(2,3,4-loops depending on quantities)

$$\mathcal{Q}(\mu) = c_0 + c_1 \alpha^{\overline{MS}}(\mu) + c_2 \left(\alpha^{\overline{MS}}(\mu) \right)^2 + \dots$$

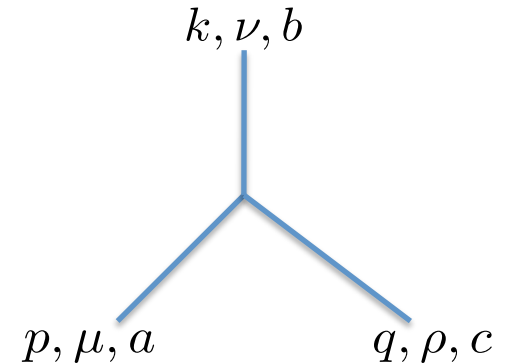
3. Require that these two are equal \rightarrow determination of $\alpha^{\overline{MS}}(\mu)$

Continuum quantity $\mathcal{Q}(\mu)$
Lattice simulation \leftrightarrow Continuum perturbation

Examples of $\mathcal{Q}(\mu)$

1. Tri-gluon coupling at some momentum point

$$\begin{aligned} & \left(\Gamma_R^{(3)} \right)_{\mu\nu\rho}^{abc} (p, k, q) \Big|_{p^2=q^2=\mu^2, k^2=0} \\ & \equiv \mathcal{Q}(\mu) \times \left(\Gamma_{\text{tree}}^{(3)} \right)_{\mu\nu\rho}^{abc} (p, k, q) \Big|_{p^2=q^2=\mu^2, k^2=0} \end{aligned}$$



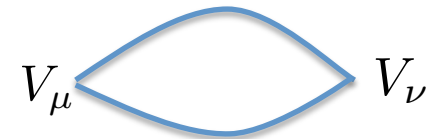
2. Force of static quark potential

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(\mu) &= r^2 \frac{\partial V_{Q\bar{Q}}}{\partial r} \Big|_{\mu=\frac{1}{r}}, \quad (V_{Q\bar{Q}} : \text{static potential}) \\ \text{c.f. } V_{Q\bar{Q}} &\sim -\frac{\alpha_V(\frac{1}{r})}{r} + \sigma r \end{aligned}$$

3. Adler function of vacuum polarization

$$\mathcal{Q}(\mu) = -q^2 \frac{d}{dq^2} \Pi(q^2) \Big|_{q^2=\mu^2}$$

$$\text{where } \int d^4x e^{iqx} \langle V_\mu(x) V_\nu(0) \rangle = (q^2 \delta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) \Pi(q^2)$$



注釈1

When $\mathcal{Q}(\mu)$ can be written as

$$\mathcal{Q}(\mu) = c_1 \alpha^{\text{MS}}(\mu) + c_2 (\alpha^{\text{MS}}(\mu))^2 + \dots$$

(i.e., $c_0 = 0$)

One can define a running coupling $\alpha_{\mathcal{Q}}(\mu)$
with the renormalization condition

$$\mathcal{Q}(\mu) = c_1 \alpha_{\mathcal{Q}}(\mu)$$

Previous examples

1. Momentum scheme : $\alpha_{\text{MOM}}(\mu)$
2. Static potential scheme : $\alpha_{\text{V}}(\mu)$

注釈2

Static クォークポテンシャルを用いて

$$Q\left(\frac{1}{r}\right) = r^2 \frac{d}{dr} V(r)$$

を定義する。この値が1となるスケールを r_1 と定義する

$$Q(1/r) \Big|_{r=r_1} = 1$$

大きな体積の3フレーバーシミュレーションでハドロン質量を
インプットにすると $r_1 = 0.3133(3)$ fm となる。

この量は短距離の物理量なので、2.5 fm程度の体積のシ
ミュレーションでも有限体積効果は無視でき、比較的小さな
体積のシミュレーションにおけるインプットに使える。

注釈4

Gradient Flow (GF)

- 裸の場 $A_\mu(x)$ を初期条件として、仮想的なパラメータ t に対する方程式を考える。 $\partial_s B_\mu(t, x) = D_\nu G_{\nu\mu}(t, x),$

$$G_{\mu\nu}(t, x) = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu + [B_\mu, B_\nu],$$

$$B_\mu(0, x) = A_\mu(x)$$

- Bで作られる任意の場は $t \neq 0$ で有限
- 有限体積スキームでの結合定数

$$g_{GF}^2(\mu) = \langle E(t) \rangle_L / \langle E(t) \rangle_L^{\text{tree}} \Big|_{\mu=1/(cL)}^{\sqrt{8t}=cL}$$

を定義できる。

$$E(t) = \frac{1}{4} (G_{\mu\nu}^a(t, x))^2$$

注釈

重いクォーク c, b のthresholdでのフレーバー数の変化にともなう結合定数のマッチング

$$\begin{aligned}\bar{g}_{N_f-1}^2(m_\star) &= \bar{g}_{N_f}^2(m_\star) \times [1 + t_2 \bar{g}_{N_f}^4(m_\star) + t_3 \bar{g}_{N_f}^6(m_\star) + \dots] \\ m_\star &= \bar{m}(m_\star) \\ t_2 &= \frac{1}{(4\pi^2)^2} \frac{11}{72} \\ t_3 &= \frac{1}{(4\pi^2)^3} \left[-\frac{82043}{27648} \zeta_3 + \frac{564731}{124416} - \frac{2633}{31104} (N_f - 1) \right]\end{aligned}$$

4ループ摂動公式

Chetyrkin, Kuhn, Sturn arXiv: hep-ph/0512060

Window problem

Naïve method seems so simple.

However, lattice setup has to satisfy 4 conditions.

1. $L \geq 3 \text{ fm}$ to kill finite size effect for the nucleon.
2. $N = L/a = 32, 48, 64$ for reasonable computational cost.
3. $q, \mu \ll a^{-1}$ to control the lattice artifact.
4. $q, \mu > 1 \sim 2 \text{ GeV}$ for pert. QCD to be valid.

$$1. \ \& \ 2. \ \rightarrow \ a^{-1} \leq 2 \sim 4 \text{ GeV}$$

$$\rightarrow 3. \ \& \ 4. \ \rightarrow \ 1 \sim 2 \text{ GeV} < q, \mu \ll 2 \sim 4 \text{ GeV}$$

Hard to find a window for q, μ

b. How to solve the window problem

- Stick to the naïve method
 - Finer lattice or improved lattice action
 - improvement in pert. theory,
- New method $m_N \rightarrow \text{output 1} \xrightarrow{\text{RG}} \text{output 2} \rightarrow \alpha^{\overline{\text{MS}}}(\mu)$
 - Finite box scheme
 - Nonperturbative running(=step scaling)
- Cutoff scale quantity without cutoff effect (!?)

i) Improvements in the naïve method

- Reduce the computational cost
 - Larger a^{-1}
- 短距離の物理量を中間のインプットに挟む
 - smaller box size → Larger a^{-1}
- Use improved action
 - Reduction of discretization error
- Improved perturbation theory
 - Better convergence

ii) Finite box scheme & step scaling

A finite physical quantity in finite box

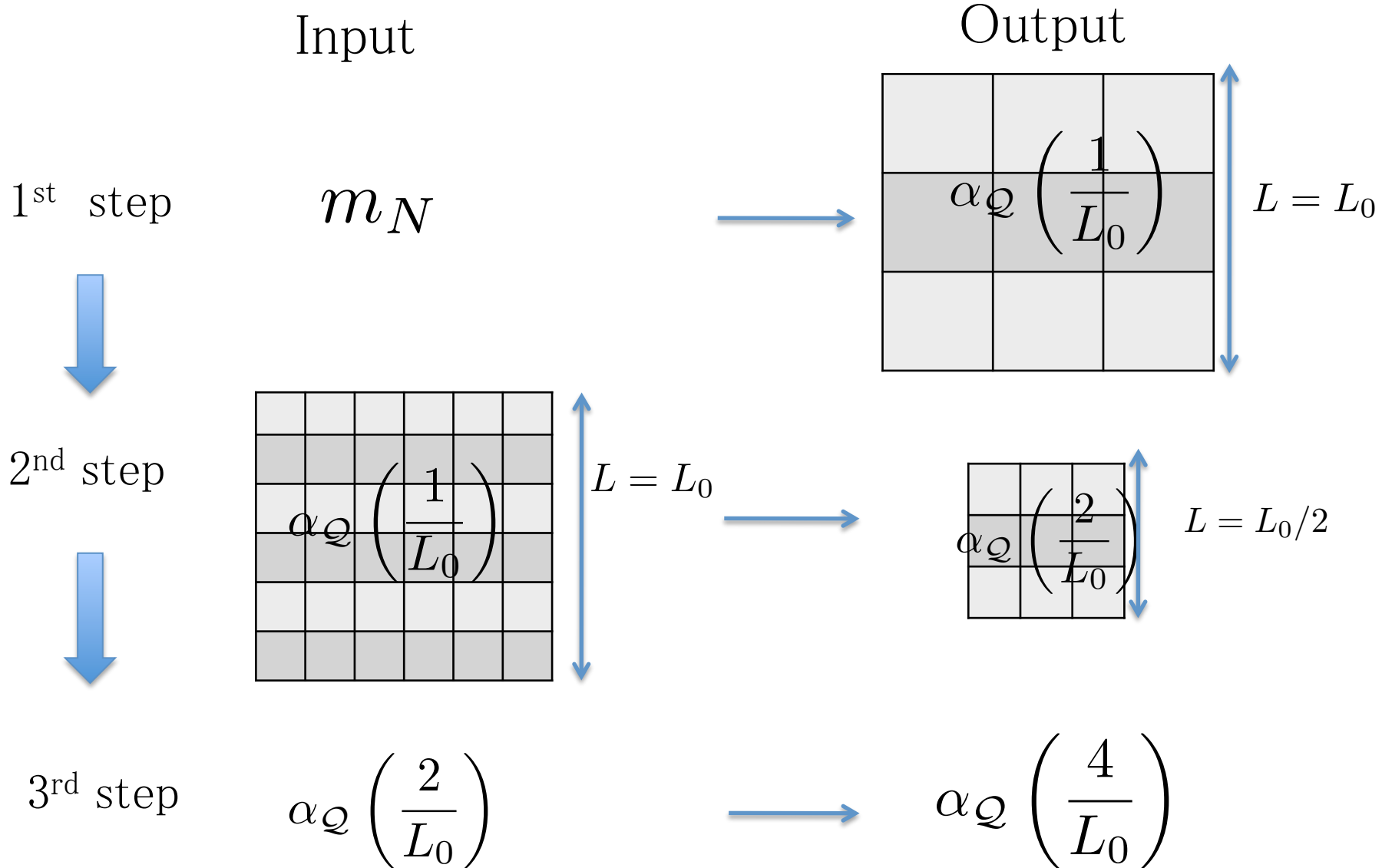
$Q(\mu)$, in finite box(L^4), where $\mu = \frac{1}{L}$

$$Q(\mu) = c_1 \alpha^{\text{MS}}(\mu) + c_2 (\alpha^{\text{MS}}(\mu))^2 + \dots$$

Let us define a renormalized coupling $\alpha_Q(\mu)$
(finite box scheme) for the coupling with
renormalization condition

$$Q(\mu) \equiv c_1 \alpha_Q(\mu)$$

Step scaling (=nonperturbative running)



Step scaling gives RG running of α_Q

$$\alpha_Q(\mu_0) \rightarrow \alpha_Q(2\mu_0) \rightarrow \cdots \rightarrow \alpha_Q(2^n \mu_0)$$

with reasonable computational cost at each step.

Taking sufficient n , perturbative expansion

$$\alpha_Q(2^n \mu_0) = c_1 \alpha^{\overline{\text{MS}}}(2^n \mu_0) + c_2 \left(\alpha^{\overline{\text{MS}}}(2^n \mu_0) \right)^2 + \cdots$$

becomes highly reliable.



Solution to the window problem

iii) Wilson loop

- Wilson loop を格子摂動論で展開

$$\langle W_{n,m} \rangle = 1 + c_1^{n,m} g_0^2 + c_2^{n,m} g_0^4 + \dots$$

- ポテンシャルスキーム結合を g_0^2 と結びつける。

$$g_V^2(\mu) = g_0^2 + b_1(a\mu)g_0^4 + \dots$$

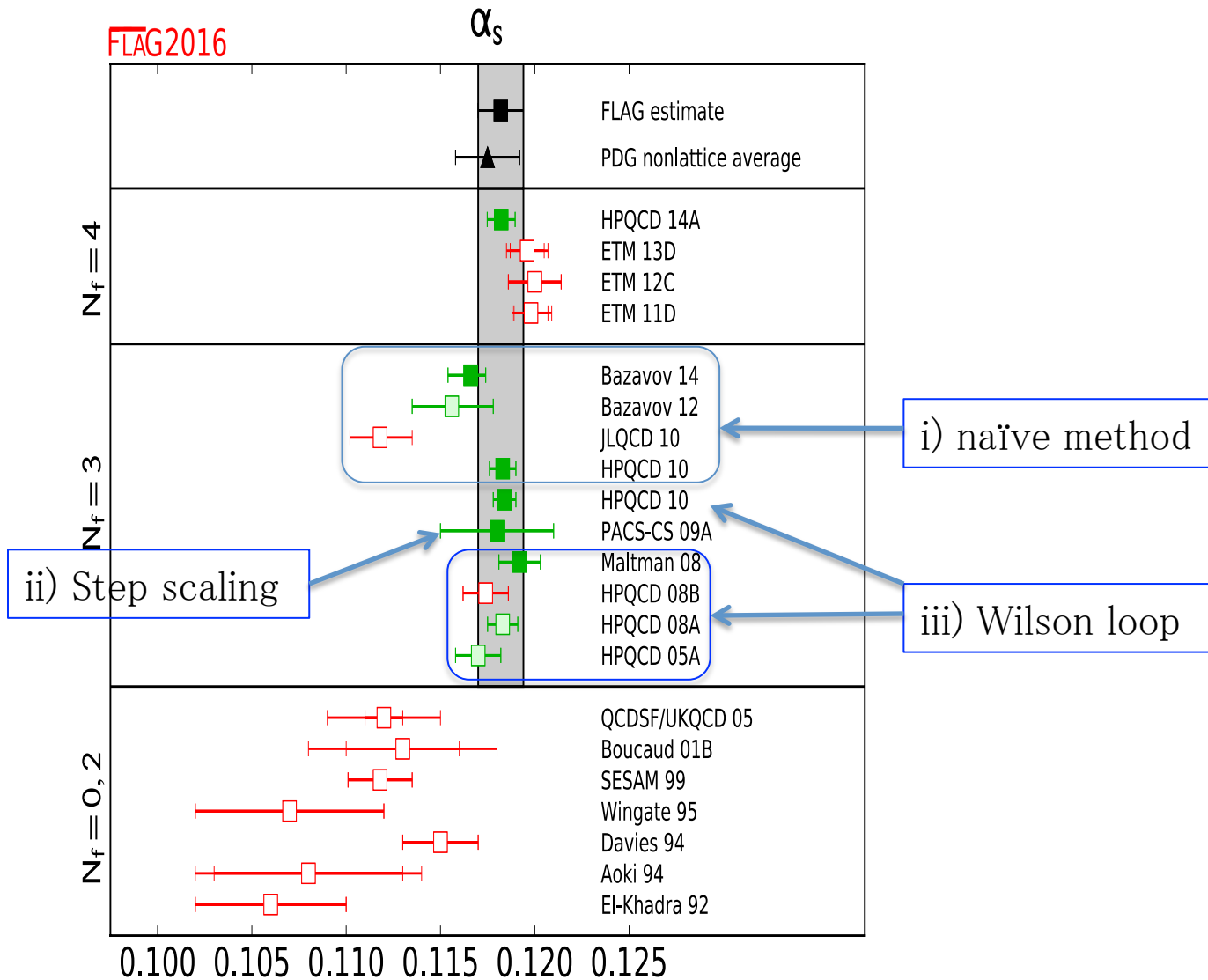
- Wilson loopsの比を $g_V^2(\mu_*)$, $\mu_* \propto \frac{1}{a}$ で書き直す

$$R_{n,m} \equiv \ln \left(\frac{\langle W_{n,m} \rangle}{(\langle W_{1,1} \rangle)^{nm}} \right) = d_1^{n,m} \alpha_V(\mu_*) + d_2^{n,m} \alpha_V(\mu_*)^2 + \dots$$

- Lattice シミュレーションで求めた比に摂動展開の表式を代入して $g_V^2(\mu_*)$ を逆解きする。

$$(R_{n,m})^{\text{MC}} = d_1^{n,m} g_V^2(\mu_*) + d_2^{n,m} g_V^4(\mu_*)$$

4. 数値計算の結果



i) 重いクォークの2点関数(HPQCD 2010, JLQCD 2017)

$$G(x_0) = a^3 \sum_{\vec{x}} \langle J^\dagger(x) J(0) \rangle \quad \text{where } J(x) = im_0 h \bar{h}(x) \gamma_5 h(x)$$

$$m_c \leq m_h \leq m_b$$

短距離の発散と2点関数のモーメント

$$G(x_0) \stackrel{x_0 \sim 0}{\sim} x_0^{-3} \quad G_n \equiv a \sum_t (t/a)^n G(t)$$

モーメント(の比)に対する連続理論での摂動公式

$$\tilde{R}_4 \equiv G_4/G_4^{(0)} = 1 + \sum_{n=1}^3 r_{4,n}(\mu/m_h^{\overline{\text{MS}}}(\mu)) \left(\alpha^{\overline{\text{MS}}}(\mu)\right)^n \quad \text{3-loop}$$

$$\tilde{R}_n \equiv \frac{G_n}{m_h^{\overline{\text{MS}}}(\mu)} = 1 + \sum_{k=1}^3 r_{n,k}(\mu/m_h^{\overline{\text{MS}}}(\mu)) \left(\alpha^{\overline{\text{MS}}}(\mu)\right)^k \quad (n = 6, 8, \dots)$$

Chetyrkin et al. 2006

比を格子で計算して、上の公式で α_s を逆解きする。

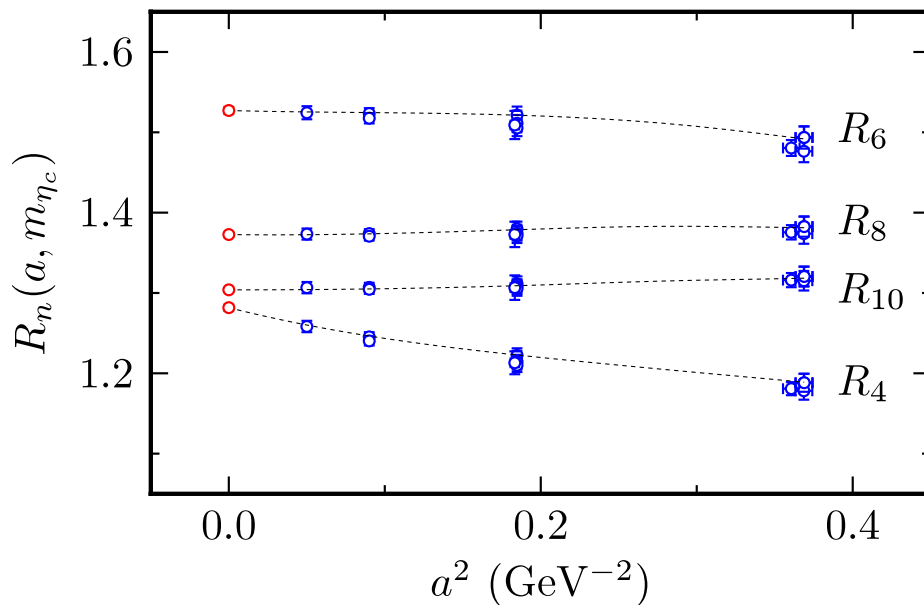
HPQCD 2010, 改良作用 4つの格子間隔で連続極限

$$a^{-1} = 1.7, 2.4, 3.4, 4.5 \text{ GeV}$$

$$L = 2.4 \sim 2.8 \text{ fm}$$

短距離スケールのインプット

$$\leftarrow r_1 = 0.3133 \text{ fm}$$



global fit of R_4, R_6, R_8, R_{10}

$$\alpha^{\overline{\text{MS}}}(\mu) = 0.1183 \pm 0.0007$$

統計誤差: 0.2%

系統誤差: 連続極限外挿 0.2%

摂動truncation (4-loop) 0.4%

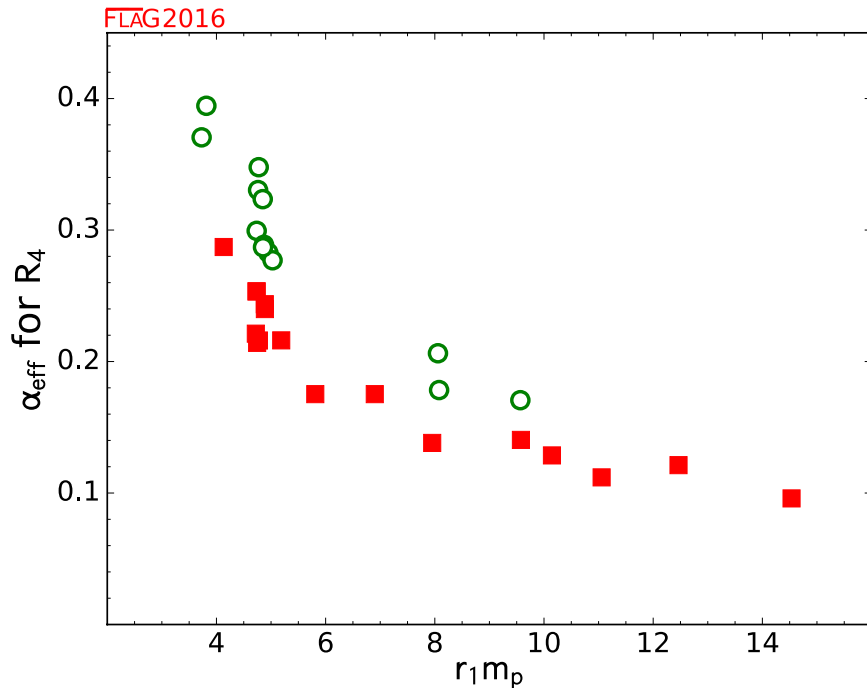
その他 0.2%

トータル: 0.6% エラー

WGによる評価

$$am_h = 0.2 \sim 0.85 \quad \mu = 2m_h(m_h) = 2 \sim 8 \text{ GeV}$$

- m_h 小 \rightarrow 繰り込み点 μ 小
 $\rightarrow \alpha^{\overline{\text{MS}}}(\mu)$ 大 \rightarrow 摂動の収束性が悪い
- m_h 大 \rightarrow 格子化誤差 am_h 大



シミュレーションを行った色々なパラメータでの重いクォーク質量と繰り込み点での結合定数 $\alpha_s(\mu)$

$1.5 < a\mu$: red

$1 < a\mu < 1.5$: green

Global fit に隠されているが、
実はWindow 問題は存在する

より新しい計算(JLQCD 2016) Domain-Wall フェルミオン作用

$$a^{-1} = 2.5, 3.6, 4.5 \text{ GeV} \quad L = 2.6 \sim 2.8 \text{ fm}$$

インプット: 短距離の物理量: $t_0^{1/2} = 0.1465 \text{ fm}$

摂動のtruncation誤差(missing 4-loop) がもつとも支配的:
→ 比の表式の右辺に現れる繰り込み点 μ を

$$\mu = 2 \sim 4 \text{ GeV}$$

と振ったときの最終結果の変化で評価

$$\alpha^{\overline{MS}}(M_Z) = 0.1177 \pm 0.0026 \quad 2\% \text{エラー}$$

ii) 小さいWilson loop

- Small Wilson loopの自動化された摂動計算(3次)

Q. Mason et al., Phys. Rev. Lett. 95,052002 (2005)

$$\langle W_{m,n} \rangle = 1 + c_1 g_0^2 + c_2 g_0^4 + c_3 g_0^6$$

- Static potential の2ループ計算

Y. Schroder, Phys. Lett. B 447, 321 (1999)

$$\alpha_V(\mu) = \alpha^{\overline{\text{MS}}}(\mu) + a_1 \alpha^{\overline{\text{MS}}}(\mu) + a_2 \left(\alpha^{\overline{\text{MS}}}(\mu) \right)^2$$

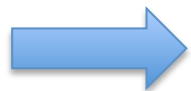
- Bare coupling とMSbar coupling の2ループ計算

Luscher and Weisz, Nucl. Phys. B452 (1995) 234

$$\alpha^{\overline{\text{MS}}}(\mu) = \alpha_0 + d_1(a\mu)\alpha_0^2 + d_2(a\mu)\alpha_0^3 \quad \alpha_0 = g_0^2/(4\pi)$$



$$\langle W_{n,m} \rangle = 1 + b_1 \alpha_V(d/a) + b_2 (\alpha_V(d/a))^2 + b_3 (\alpha_V(d/a))^3$$



$$R_{n,m} \equiv \ln \left(\frac{\langle W_{n,m} \rangle}{\langle W_{1,1} \rangle^{nm}} \right) = d_1^{n,m} \alpha_V(d/a) + d_2^{n,m} (\alpha_V(d/a))^2 + d_3^{n,m} (\alpha_V(d/a))^3$$

HPQCD 2010, C. McNeile et al. Phys. Rev. D 82, 034512 (2010)

$$a^{-1} = 1.7, 2.4, 3.4, 4.5 \text{ GeV} \quad \leftarrow \quad r_1 = 0.3133 \text{ fm}$$
$$L = 2.4 \sim 2.8 \text{ fm} \quad \text{短距離スケールのインプット}$$

- いろいろな格子間隔で $R_{n,m}$ を格子モンテカルロ計算で求め、上の式から $\alpha_V(d/a)$ を逆解きする
- その際、連続理論の4ループ繰り込み群を用いることで、異なる格子間隔のデータを同時フィットできる


$$\frac{d\alpha_V(\mu)}{d\ln(\mu^2)} = -\beta_0\alpha_V^2 - \beta_2\alpha_V^3 - \beta_3\alpha_V^4 - \beta_4\alpha_V^5$$

- 摂動のtruncation誤差を見積もるため10次式で展開し

$$R_{n,m} = d_1^{n,m} \alpha_V + d_2^{n,m} \alpha_V^2 + d_3^{n,m} \alpha_V^3 + \sum_{k=4}^{10} d_k^{n,m} \alpha_V^k$$


4次以上の未知係数をある統計分布に従う乱数としてフィット。

$$\alpha_V(7.5 \text{ GeV}, n_f = 3) = 0.2120 \pm 0.0028$$


$$\alpha^{\overline{MS}}(\mu) = 0.1183 \pm 0.0008$$

WGによる評価

- 乱数フィットの結果を見るとほとんどの場合 $\frac{|d_4^{m,n}|}{|d_1^{m,n}|} \sim 2$
→ 4次のtruncation 誤差 $\Delta\alpha_V = \left| \frac{d_4^{m,n}}{d_1^{m,n}} \right| \alpha_V^4$
- $\alpha_V \sim 0.2$ を用いると $\frac{\Delta\alpha_V}{\alpha_V} = \left| \frac{d_4^{n,m}}{d_1^{n,m}} \right| \alpha_V^3 \sim 1.6\%$


$$\frac{\Delta\alpha^{\overline{\text{MS}}}(M_Z)}{\alpha^{\overline{\text{MS}}}(M_Z)} \sim 1.2\%$$

個人的感想

Window 問題は本当に解消したのか？

Bare coupling と MSbarスキームの摂動マッチングが出来るには

$$1 \sim 2 \text{ GeV} < \mu \ll a^{-1}$$

なるスケールの存在が必要だが、明らかに一部の格子間隔はこれを満たしていない。

iii) 有限体積スキームとStep scaling

背景場 $A_\mu(k)$ のもとでの量子補正をとりこんだ有効作用

$$S_{\text{eff}} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} A_\mu^a(-k) A_\nu^a(k) \frac{1 + c_1(ak)g_0^2 + \dots}{2g_0^2} (k^2\delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu)$$

$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} A_\mu^a(-k) A_\nu^a(k) \frac{1}{2g_R^2(k)} (k^2\delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu)$$

$g_R^2(k)$ は繰り込まれた結合定数

この概念は非摂動的に拡張できる。

有限体積で背景色電場をもつ背景場配位 $A_i^a(t, \vec{x}) = C_i^a + E_i^a t$
 $L^3 \times T$ $C_i^a \propto L^{-1}, E_i^a \propto L^{-2}, T \propto L$

$$S_{\text{eff}} = \frac{1}{g_R^2 \left(\frac{1}{L}\right)^2} L^3 T (E_i^a)^2$$

古典的背景場の作用への寄与

繰り込まれた結合定数

注釈

- 格子QCDシミュレーションでは有効作用は直接計算できない
- 色電場にパラメータを入れて、有効作用をパラメータ微分したものは期待値として計算できる。

$$\frac{\partial}{\partial \eta} S_{\text{eff}}(E(\eta)) = \frac{1}{g_R^2(\frac{1}{L})} L^3 T \frac{\partial}{\partial \eta} (E_i^a(\eta))^2$$

↑
演算子の期待値として、
格子シミュレーション計算

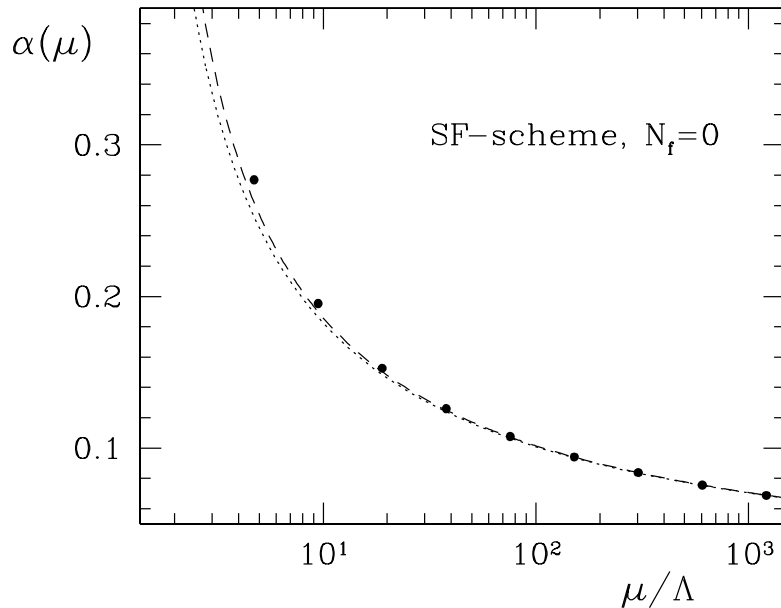
↑
古典的・解析的に計算

$g_R^2 \left(\frac{1}{L} \right)$ 両者の比較で求まる。
Schrodinger Functional (SF) スキーム

Luscher , Sommer, Weisz, Wolff 1994

注釈2

- SFスキーム結合定数は非摂動繰り込み計算のスタンダード
- $N_f=0,2$ はAlpha Collaborationによって徹底的に調べられた。



Capitani et al ALPHA Collab. 1998

格子QCDによる非摂動的 RGと
連続理論での2-3ループのRGの比較
高エネルギー側で非常によく一致

低エネルギー側で統計精度が多少悪い
のが欠点

ところが、一般的に格子QCD業界で、
細かい格子を用いた格子シミュレーションにおける
異なるインスタントセクターのサンプリングが不十分な問題
(Topology Freezing)が起こる事がわかった。

- Alpha Collaboration 改め CLS Collaborationは全力を挙げてこの問題の解決に取り組む
→ 結合定数の計算はストップ
- $N_f=2$ の計算は形式的には、摂動論的マッチング公式でストレンジクォークの効果を加えて $N_f=3$ の結果に翻訳できるが、乗り換えに摂動論は信用できない。
- $\alpha_{\text{MS}}^{(2)}(\mu)$ の素晴らしい結果はあるが、意味のある $\alpha_{\text{MS}}^{(5)}(M_Z)$ の結果が出ない状況が続く

無冠の帝王

SF スキーム 結合定数 PACS-CS collaboration 2009

S. Aoki et al. JHEP 0910, 053 (2009)

3-flavor QCD (Wilsonフェルミオン)

ステップスケーリング: 7ステップ(+より高いエネルギーデータ)

インプット用格子 L/a=8,12,16

アウトプット用格子 L/a=4,6,8 やや粗い格子

$g_{SF}^2(\mu) = 5.0 \sim 1.0$ の間をRG running (+ より高いエネルギーデータ)

2ループマッチング

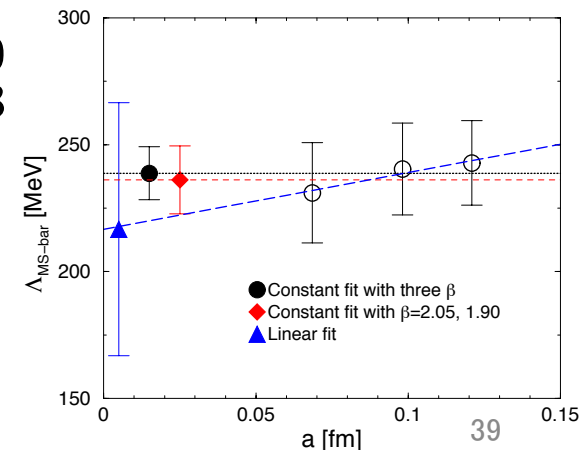
$$\alpha^{\overline{\text{MS}}}(\mu) = \alpha_{\text{SF}}(\mu) + c_1 \alpha_{\text{SF}}^2(\mu) + c_2 \alpha_{\text{SF}}^3(\mu)$$

$$\alpha^{\overline{\text{MS}}}(M_Z) = 0.12047 \pm 0.00081 \pm 0.00048 \begin{matrix} +0.00000 \\ -0.00173 \end{matrix}$$

統計誤差 Nf=3→5 連続極限

もし連続極限でLinear extrapolationのみをとると

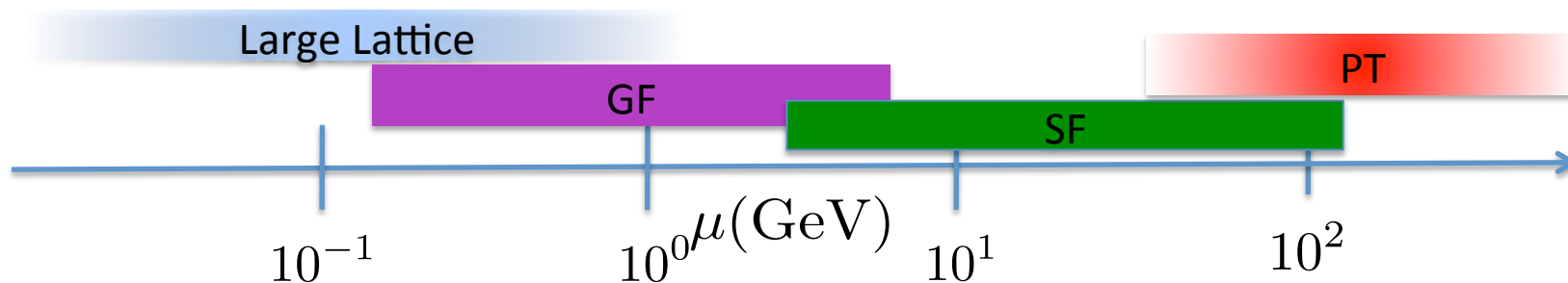
$$\alpha^{\overline{\text{MS}}}(M_Z) = 0.118 \pm 0.003$$



Lattice 2017での最新結果

ついに来た!

Bruno et al. (Alpha Collaboration) arXiv:1706.03821



1. インプット: ハドロンデータ → アウトプット: GFスキーム結合定数
2. ステップ・スケーリング (RG evolution) with GF
3. インプット: GFスキーム結合定数 → アウトプット: SFスキーム結合定数
4. ステップ・スケーリング (RG evolution) with SF
5. SFスキーム結合定数 → $\overline{\text{MS}}$ スキーム結合定数

- PACS-CSに比べLatticeサイズが大きい
→ 格子化誤差が小さい
- 低エネルギー側をGFスキームに置き替えた
→ 統計誤差が小さい

Everything Together



Final Result

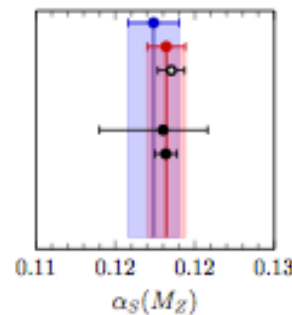
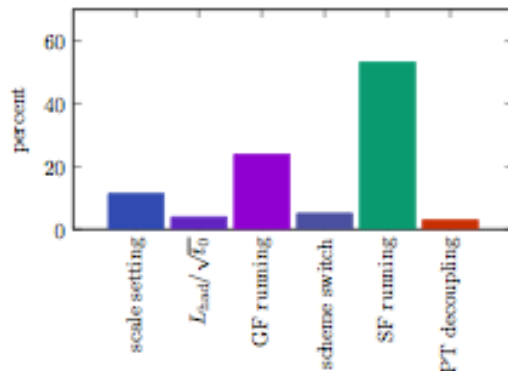
$$\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(3)} = 341(12) \text{ MeV}$$

$$\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(5)} = 215(10)(03) \text{ MeV} \quad \text{pert. decoupling}$$

$$\alpha_{\overline{\text{MS}}}(M_Z) = 0.1185(8)(3)$$

0.1174(16) PDG non-lattice

Contribution to relative error squared



PDG non-lattice
FLAG (2016)
this work

R. Hudspith @ lat17
A. Veernala @ lat17

5. まとめ

- 格子QCDによる強い相互作用の決定は概念的にはシンプルだがWindow問題がネック。
- Naïveな方法での改善がなされている。
- ステップ・スケーリング法は非常に有望で、最近とても良い精度が出た。
- 現在の精度はSFスキームの統計誤差が支配的 → 0.8%程度の誤差。将来摂動計算を完成し、すべてのエネルギースケールでGFスキームを用いれば、統計誤差は十分小さくできるだろう。
- 将来的には3フレーバー格子QCD計算からの結果を5フレーバーQCDにマッチングする際の摂動計算が精度のリミット → 0.5%程度(4フレーバー格子QCD計算に移行すればもう少し小さくなる)