磁場を有する余剰次元理論の次元脱構築

龍田佳幸　　(DESY)

with　富谷昭夫　　(華中師範大)

based on arXiv:1703.05263

標準理論と世代数

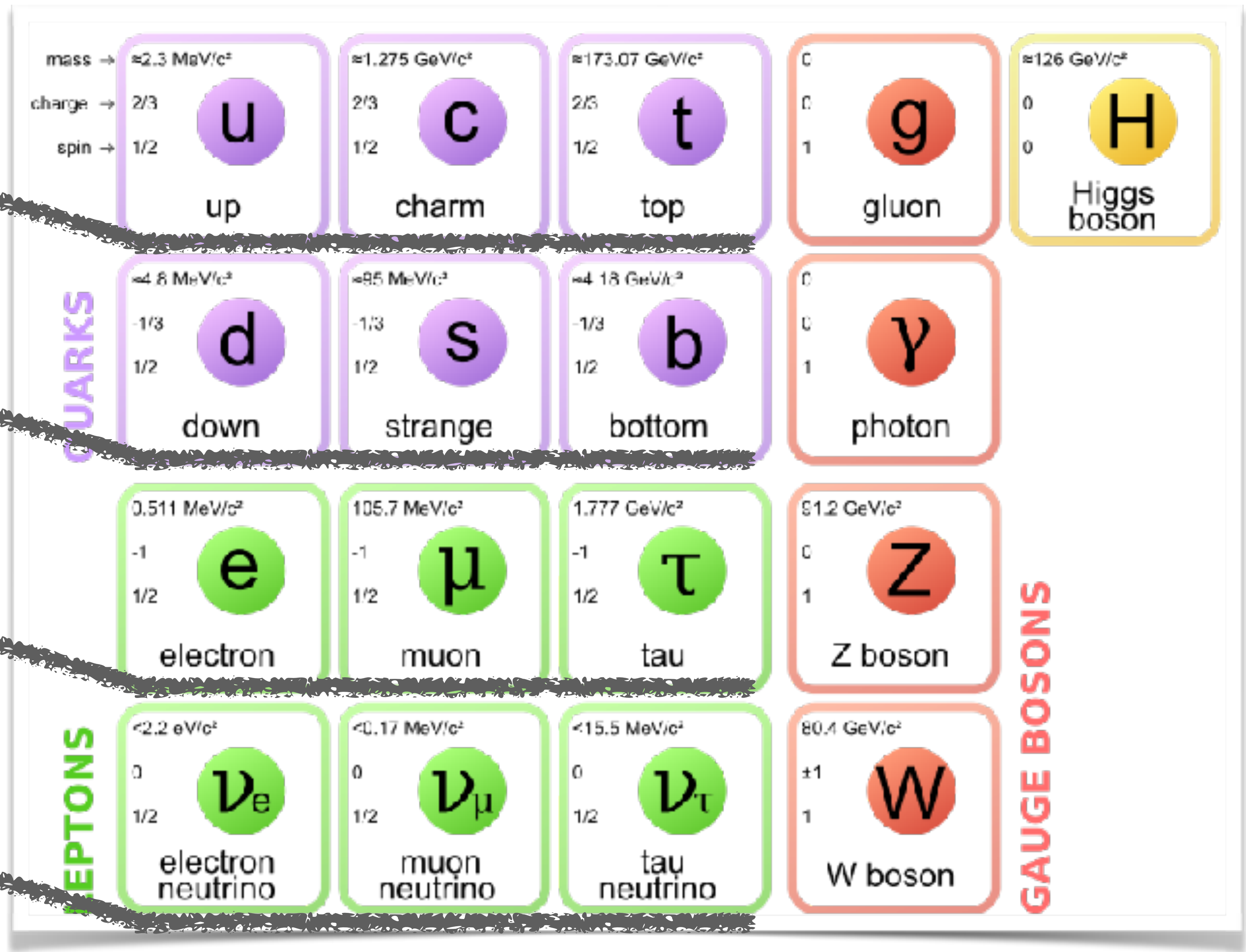
- クォーク・レプトンは世代構造がある
  - 表現は同一．Higgs粒子との(湯川)結合定数の大きさが違う

これとか

これとか

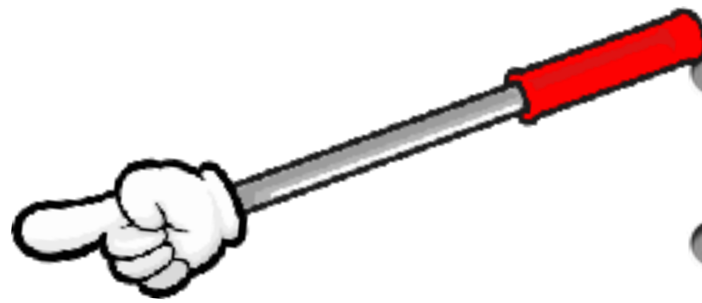
これとか

これも



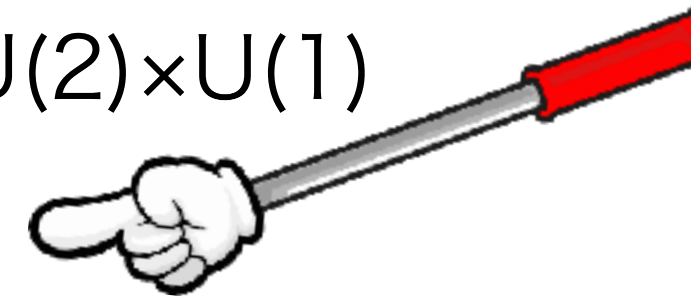
新物理と標準理論の物理

- 標準理論を**超えた**物理
  - 超対称性
  - 余剰次元
  - 暗黒物質
  - 暗黒エネルギー
  - インフレーション
  - 超弦理論



主なトピック

- 標準理論の**背後の**物理
  - SU(3)×SU(2)×U(1)
  - 3世代構造
  - クォークのフレーバー構造
  - レプトンのフレーバー構造
  - Higgs機構



imitation of [Svetitsky's talk @ Lattice 2017]

(個人的な意見では)標準理論自体を理解しつつ,

標準理論を超えた物理をやりたい

目次

- イントロ
- 余剰次元模型の基礎知識
- トーラスコンパクト化と磁場
- 次元脱構築
- 「トーラス＋磁場」の脱構築
- まとめと展望

目次

- イントロ
- 余剰次元模型の基礎知識
- トーラスコンパクト化と磁場
- 次元脱構築
- 「トーラス＋磁場」の脱構築
- まとめと展望

Kaluza-Klein展開と波動関数

- 高次元場を，余剰次元方向の運動量の完全系で展開
- 余剰次元空間がコンパクト空間なら運動量は離散化される
- 例えば，円弧(S¹)の場合：

c.f., [Dawson, Mohapatra '08]

$$S_{5D} = \int d^4x \int dy \Big[\left(\partial^M \Phi\right) \left(\partial_M \Phi\right) - M^2 \Phi\Phi \Big]$$

4D+1D

周期境界条件： $\Phi(y = 2\pi R) = \Phi(y)$

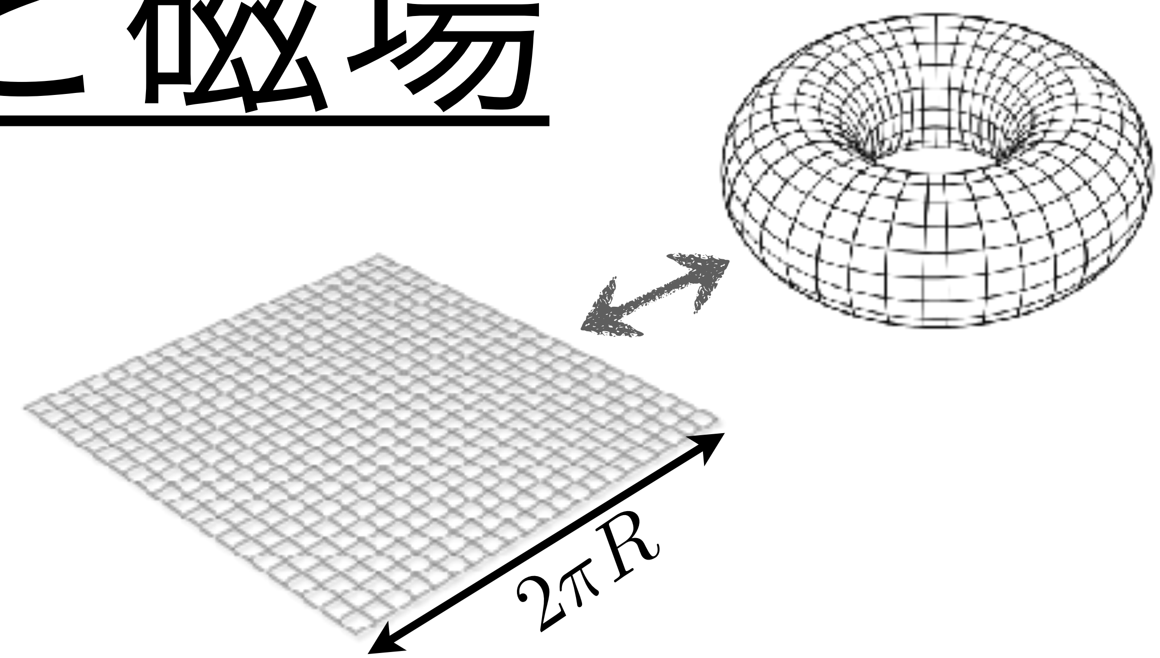
$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \phi^{(n)}(x) e^{iny/R}$$

$$\downarrow$$

$$S_{4D} = \int d^4x \sum_n \Big[\left(\partial_\mu \phi^{(n)}\right) \left(\partial^\mu \phi^{(n)}\right) - \left(M^2 + \frac{n^2}{R^2}\right) \phi^{(n)} \phi^{(n)} \Big]$$

質量＋運動量を持った4Dの場だけで記述できている

トーラスと磁場



- トーラス＝2D平面＋周期境界条件

  トーラスの座標：y_5, y_6

  複素座標：$z \equiv (y_5 + iy_6)/(2\pi R)$

- ゲージ場の強さのうちの余剰次元成分の期待値：$\langle F \rangle = \langle F_{56}^{(b)} \rangle \neq 0$

  $$A^{(b)}(z) = \frac{b}{2}\mathrm{Im}\,(\bar{z}dz)$$

  - 5次元ではこのような成分はない
  - string theoryで言うflux compactification
  - **Dirac's charge quantization：** *[Bachas '95; Cremades, Ibanez, Marcheano '04]*

$$\frac{qb}{2\pi} = m \in \mathbb{Z}$$

> 0

磁場の"総量"：$\displaystyle\int_{T^2} \langle F \rangle = b$

U(1) 電荷：　q

ゼロモード方程式

[Cremades, Ibanez, Marchesano '04]

- KK展開したmassless mode(s)が満たす式

$$\Psi(x^\mu, z) = \sum_n \chi_n(x^\mu) \otimes \psi_n(z)$$

$$\Phi(x^\mu, z) = \sum_n \varphi_n(x^\mu) \otimes \phi_n(z)$$

$n = 0, 1, 2, ...$

※コンパクトスケール＝1の単位を採用： $2\pi R = 1$

- ワイルスピノル場

$$i\not{D}\psi_n = m_n \psi_n$$

with $D = 2\partial/\partial\bar{z} + \pi m z$

フラックスからの寄与

余剰次元座標での微分

- スカラー場も同様

$$\Delta\phi_n = m_n \phi_n$$

with $\Delta = \{D^\dagger, D\}/2$

ゼロモード解とその縮退

[Cremades, Ibanez, Marchesano '04]

- 解は楕円関数で与えられる：

$\psi_{-,0}$ ：規格化可能な解なし

where,
$$\psi_0 = (\psi_{+,0},\ \psi_{-,0})^T$$

$$\psi^j_{+,0}(z) = \mathcal{N} e^{\pi i m z \mathrm{Im}\, z}\, \vartheta \begin{bmatrix} j/m \\ 0 \end{bmatrix} (mz, mi)$$

j=0, 1, 2, ⋯, m-1

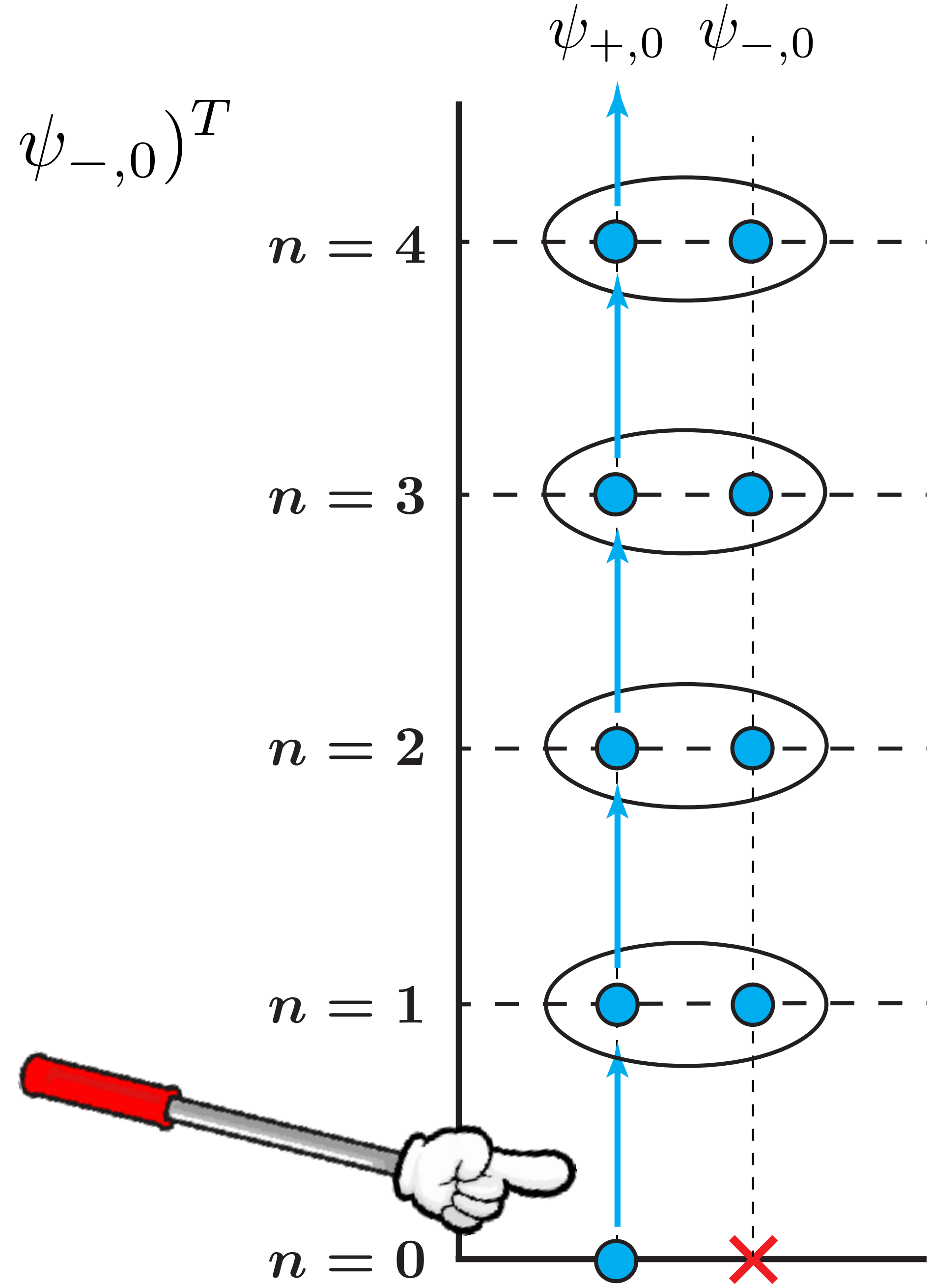
ヤコビのテータ関数：

$$\vartheta \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} (\nu, \tau) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} e^{\pi i (\alpha+\ell)^2 \tau + 2\pi i (\alpha+\ell)(\nu+\beta)}$$

α, β ：実変数　　　ν, τ ：複素変数

4Dで同じ表現の場が複数個に縮退

→ 世代数



● ：m個の各モード

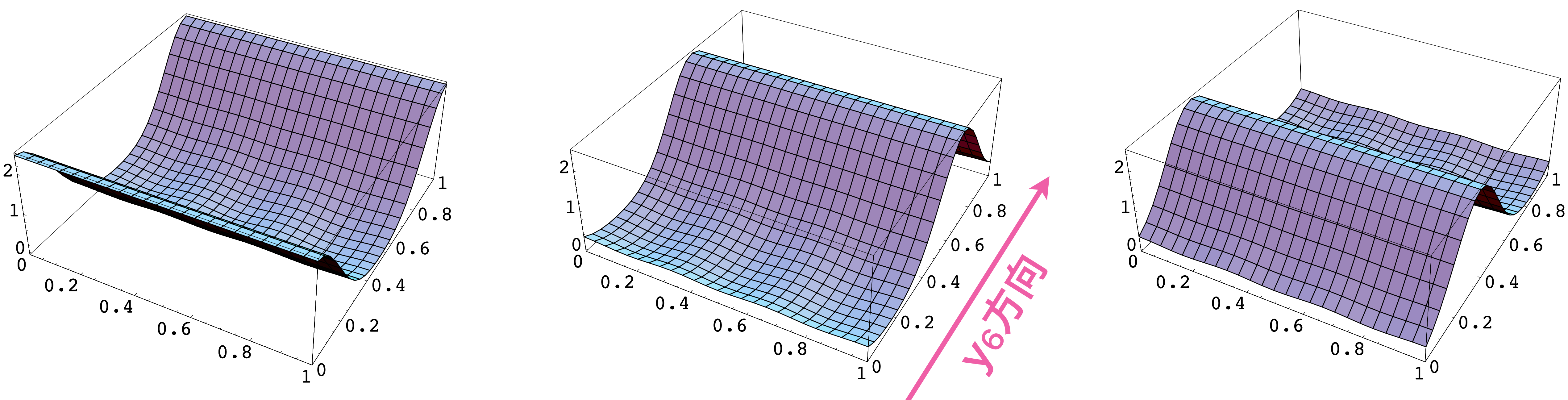
pic from [Abe et al. '14]

波動関数の局在

[Cremades, Ibanez, Marchesano '04]

- 確率密度：$\left|\psi^j_{+,0}(z)\right|^2$ をプロットしてみる
- 波動関数のガウシアン的局在：

$$\psi^j_{+,0} \sim e^{-(y_6-j)^2}$$



j=0　　j=1　　j=2

y6方向への局在性は，低エネルギー有効理論で，
結合定数などの物理量に影響

この機構を使った現象論

- 3世代模型 *[Abe, Choi, Kobayashi, Ohki ’08; Abe, Fujimoto, Kobayashi, Nishiwaki, Miura, Sakamoto, YT ’15; …]*
- 離散フレーバー対称性 *[Abe, Choi, Kobayashi, Ohki ’08; Abe, Kobayashi, Ohki, Sumita, YT ’14; …]*
- MSSM-like models *[Abe, Kobayashi, Oikawa, Sumita ’14; Abe, Kobayashi, Sumita, YT ’14; …]*
- 動的超対称性の破れ *[Abe, Kobayashi, Sumita ’16; Higaki, YT ’16]*
- Type I seesaw *[Buchmuller, Schweizer ’17; Ishida, Nishiwaki, YT ’17 & in preparation]*
- SUSY SO(10) + split SUSY *[Buchmuller, Dierigl, Ruehle, Schweizer ’15]*
- SUSY SO(10) + flavor mixings *[Buchmuller, Schweizer ’17]*
- モジュライ固定 *[Braun, Hebecker, Trapletti ’07; Buchmuller, Dierigl, Ruehle, Schweizer ’16; …]*

目次

UV completion

- 余剰次元模型は不幸にも「non-renormalizable」
- 何がしかの理論の有効理論として考えるべき

(私の知る限りでは) **UV completionとしては2つの可能性が濃厚**

- 超弦理論へ埋め込む　　*See a good textbook, [Ibanez, Uranga '12]*

利点：openstring sectorとして単純に埋め込める．e.g., magnetized D-branes

難点：超弦理論がやはり難しい

- 次元脱構築により**4D理論の寄せ集め**として理解する

利点：4Dの知識だけで理解可能．格子理論の知識も使える．一般の系にも応用可能

難点：場合によっては計算コストはそこそこ必要

今回はこちら

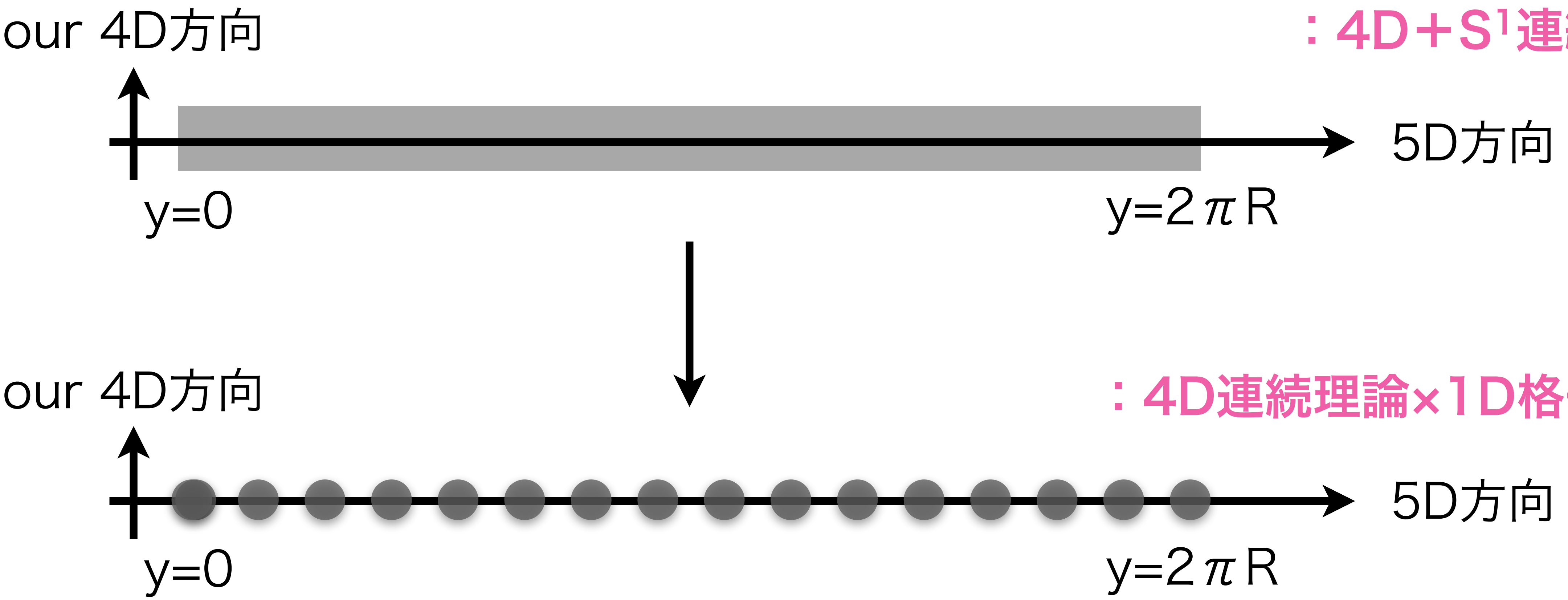
次元脱構築

according to Wikipedia

- 脱構築＝ 形而上学の仕組みを解体し，その可能性の要素を抽出して再構築を試みる哲学的思考の方法．(=deconstruction)
- 余剰次元空間を格子化する： *[Arkani-Hamed, Cohen, Georgi ’01]*

：4D＋S^1連続理論

：4D連続理論×1D格子理論



複数個の繰り込み可能な4D理論だけで有効的に5D理論を実現

5D S^1 ：Arkani-Hamed, Cohen, Georgi ’01

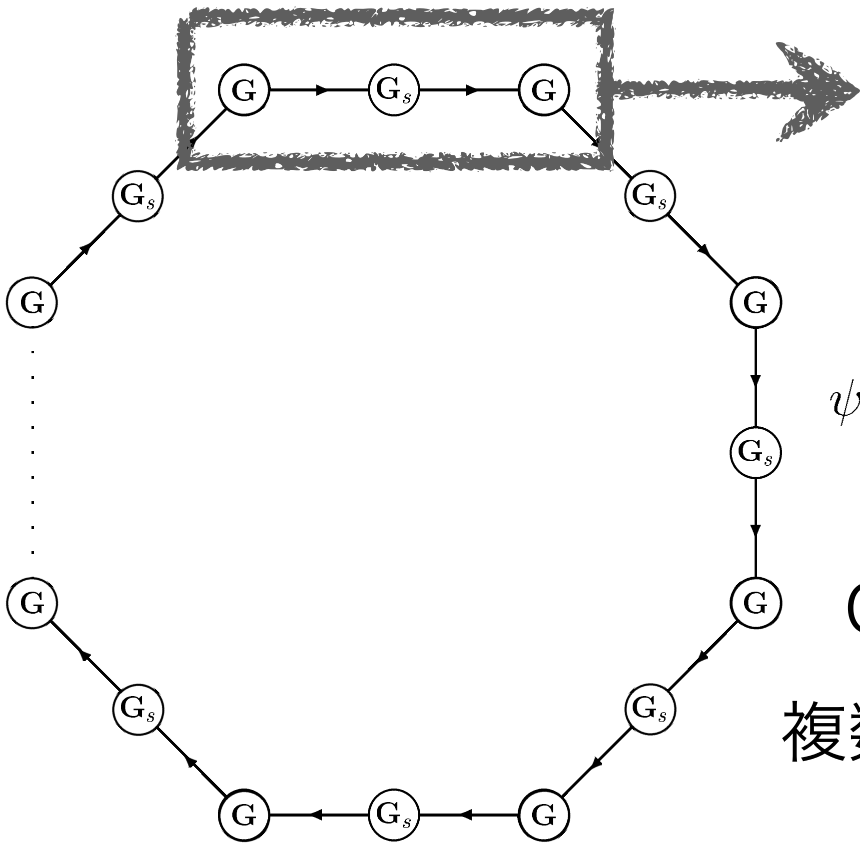
5D QED ：Hill, Leibovich ’02

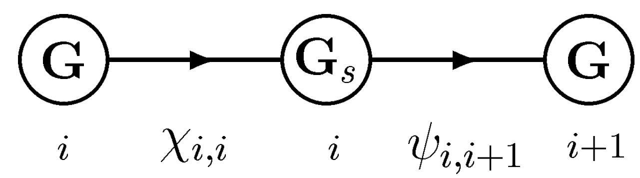
5D RS ：Abe, Kobayashi, Maru, Yoshioka ’03

6D T^2 with flux ：our work

次元脱構築　(続き)

- 複数個のweak gauge groups G，strong gauge groups Gs を繋げる：



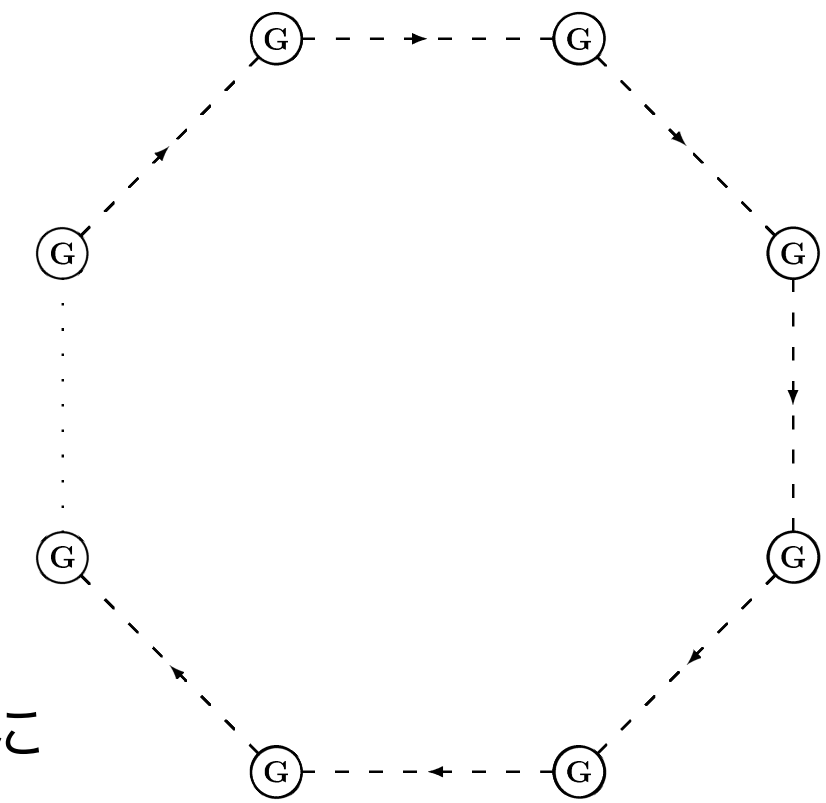


$\chi_{i,i}$ transforming as $(m, \bar{n}, 1)$
$\psi_{i,i+1}$ transforming as $(1, n, \bar{m})$

Gsがカイラル凝縮して，

複数個の非線形シグマ模型に

$\propto f_s^3$



- ゲージ結合定数と，凝縮期待値を調整する：$a = 1/(gf_s)$，$R = Na$

- ゲージ場の質量行列を対角化すると，$m_k \simeq 2\pi|k|/R$

KKスペクトラム(近似的に)再現できている

目次

- イントロ
- 余剰次元模型の基礎知識
- トーラスコンパクト化と磁場
- 次元脱構築
- 「トーラス＋磁場」の脱構築
- まとめと展望

ドメインウォール(DW)・フェルミオン

- 定式化の前に，Nielsen-Ninomiyaの定理の復習：　*[Nielsen, Ninomiya '81]*

1) 格子上の並進対称性
2) カイラル対称性
3) エルミート性
4) スピナー場の双一次形式
5) 相互作用の局所性

の全てが満たされるとき，

フェルミオン・ダブラーが生じる

d次元空間のとき，2^d-1個の不要モード

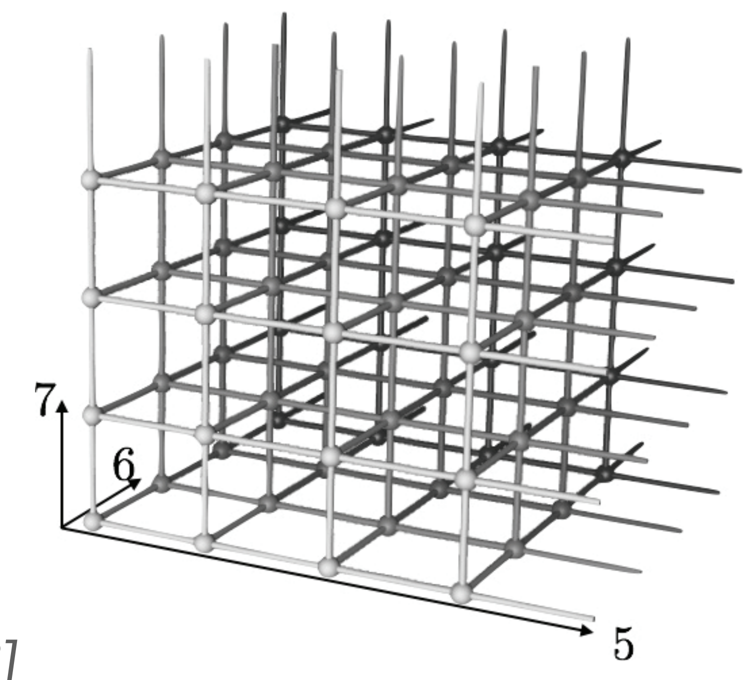
- 余剰次元空間への磁場はtopological indexを稼ぐ ← 指数定理に適用可
- ダブラーを避ける為，**DWフェルミオン**を用いる *[Kaplan '09]*

→ DW用の格子数が大きいときOVフェルミオンへ

- DWフェルミオン用の1次元空間を加え，境界条件とその方向のバルク質量によりダブラーを重くする

定式化

- トーラス用の2次元の格子(y5, y6)に加え，DW用の1次元格子(y7)を考える： $\bar{y} = (y_5, y_6, y_7)$



$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_{\bar{y}} \bar{\eta}_{\bar{y}} i \left[\sum_{M=5,6,7} \Gamma_M \left(Q_M(\bar{y})\eta_{\bar{y}+\hat{M}} - Q_M^\dagger(\bar{y}-\hat{M})\eta_{\bar{y}-\hat{M}} \right) \right] - M_0 \sum_{\bar{y}} \bar{\eta}_{\bar{y}}\eta_{\bar{y}}$$
$$- \frac{1}{2}\sum_{\bar{y}} \bar{\eta}_{\bar{y}} \left[\sum_{M=5,6,7} \left(Q_M(\bar{y})\eta_{\bar{y}+\hat{M}} + Q_M^\dagger(\bar{y}-\hat{M})\eta_{\bar{y}-\hat{M}} - 2\bar{\eta}_{\bar{y}}\eta_{\bar{y}} \right) \right],$$

$$Q_5(y_5, y_6) = \begin{cases} 1 & (y_5 \neq 1) \\ \exp[-iby_6] & (y_5 = 1) \end{cases}$$
$$Q_6(y_5, y_6) = \exp[iby_5],$$

same as those in [Al-Hashimi, Wiese '08]

背景磁場に対応するリンク関数を仮定

- 解きたいエネルギー固有値方程式：

$$H_{\mathrm{DW}}\psi_n^{(D)}(y) = \lambda_n \psi_n^{(D)}(y)$$

$$\propto \ \mathrm{sgn}_{\mathrm{rat}}(H_M) = \frac{1-(T(H_M))^{N_7}}{1+(T(H_M))^{N_7}}$$

with

$$T(H_M) = \frac{1-H_M}{1+H_M}$$

$$H_M = \Gamma_7 \frac{2D_W}{2+D_W}$$

Wilson-Dirac op.
：共変微分の部分から

KKスペクトラムの脱構築

- KKスペクトラム＝固有値

$$H_{\mathrm{DW}}\psi_n^{(D)}(y) = \lambda_n \psi_n^{(D)}(y)$$

これ

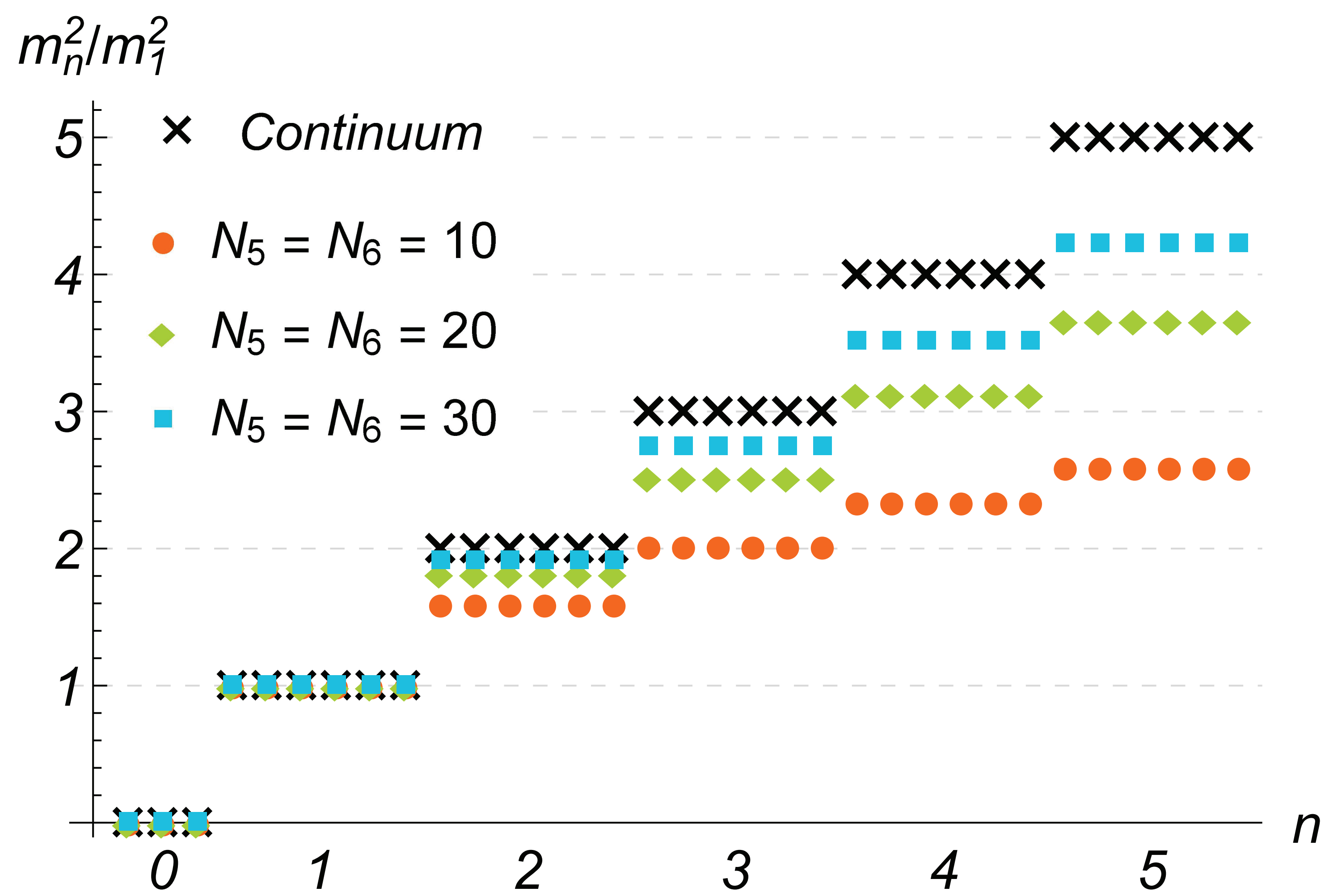
HDWは数値的に求める

- パラメータなど

7D方向(DW用)の格子数：N_7=16

T^2の格子数：N_5, N_6=10, 20, 30

m=3：ゼロモード×3＝3世代



エネルギー準位

KKスペクトラムのうち，軽いモードは誤差も少なく再現

ゼロモードの脱構築

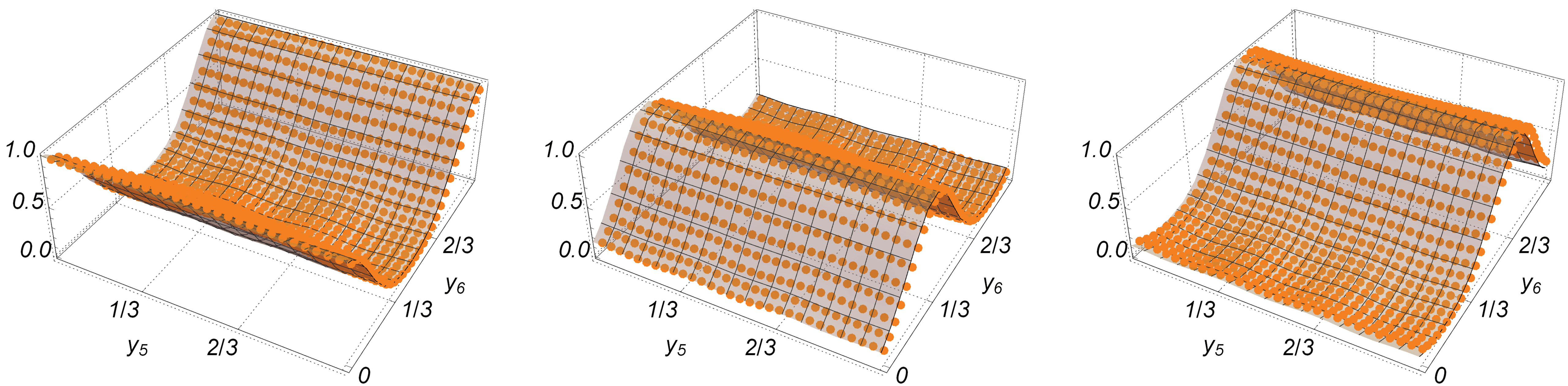
- ゼロモード波動関数＝ゼロ固有値の固有ベクトル

$$H_{\rm DW}\psi_n^{(D)}(y) = \lambda_n \psi_n^{(D)}(y) \qquad \textbf{for} \quad \lambda_0 = 0$$

これ　　これ

HDWは数値的に求める

グレーの局面：連続理論のゼロモード



ゼロモード波動関数の概形も再現

目次

- イントロ
- 余剰次元模型の基礎知識
- トーラスコンパクト化と磁場
- 次元脱構築
- 「トーラス＋磁場」の脱構築
- まとめと展望

まとめ

- 「トーラス＋フラックス」という枠組みは，カイラルフェルミオンと，その世代数という重要な構造を作れる

- 現象論＆宇宙論模型も次々と構築されている

- 次元脱構築手法を「トーラス＋フラックス」の系に適用

- ドメインウォールフェルミオンを用いた，4D連続理論＋3D格子で脱構築可能

今後の展望

- 4D有効理論における3点結合定数＝湯川結合定数：

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Yukawa}} \propto \int_{T^2} d^2z\, \Psi(x^\mu, z)\bar{\Psi}(x^\mu, z)\Phi(x^\mu, z)$$

：6D連続理論

$$= \underline{\left(\int_{T^2} d^2z\, \psi^i_{+,0}(z)\left(\psi^j_{+,0}(z)\right)^\dagger \phi^k_0(z)\right)} \times \chi^i_0(x^\mu)\bar{\chi}^j_0(x^\mu)\varphi^k_0(x^\mu)$$

次元縮減後，4D有効理論の湯川結合定数に

$$y^{(D)}_{ijk} = \sum_y \psi^{(D),i}(y)\left(\psi^{(D),j}(y)\right)^\dagger \phi^{(D),k}(y)$$

：脱構築版

連続理論と脱構築版のズレを見積もって，
カットオフ(＝格子スケール)への制限を求める