カイラル輸送現象:
ニュートリノから
超新星爆発へ

山本 直希（慶應義塾大学）

「素粒子物理学の進展2017」2017年8月4日

内容

- カイラル輸送現象
- カイラル運動論
- 超新星爆発への応用
- カイラル乱流

輸送現象

輸送現象

- 古典的で身近な例:
  - Ohmの法則: $\boldsymbol{j}_e = \sigma \boldsymbol{E}$
  - Fourierの法則: $\boldsymbol{j}_Q = \kappa(-\boldsymbol{\nabla} T)$

色々な輸送現象

- 19世紀までに既に分かったもの

電流　1826 Ohm　1879 Hall　1821 Seebeck　1886 Nernst

$$\boldsymbol{j}_e = \sigma \boldsymbol{E} + R\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} + \alpha(-\boldsymbol{\nabla} T) + N(-\boldsymbol{\nabla} T) \times \boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{j}_Q = \beta \boldsymbol{E} + N\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} + \kappa(-\boldsymbol{\nabla} T) + L(-\boldsymbol{\nabla} T) \times \boldsymbol{B}$$

熱流　Peltier 1834　Ettingshausen 1886　Fourier 1807　Leduc-Righi 1887

- $\boldsymbol{E} \to -\boldsymbol{\nabla}\mu$ でもよい.

- これで全て？

$$\boldsymbol{j}_e \sim \boldsymbol{B}\,?$$

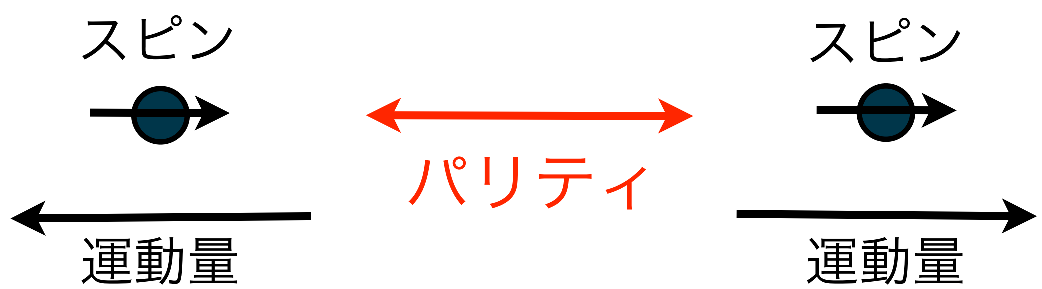
パリティ

$$\boldsymbol{j}_e = \kappa \boldsymbol{B}$$

- パリティ変換のもとで $-\boldsymbol{j}_e = \kappa \boldsymbol{B}$　（$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$）
- パリティに矛盾しない唯一の可能性： $\kappa = 0$
- 「普通の」金属では起きない

（注） $\boldsymbol{j}_e = \sigma \boldsymbol{E}$ ($\sigma \neq 0$) はパリティと矛盾しない

カイラリティ

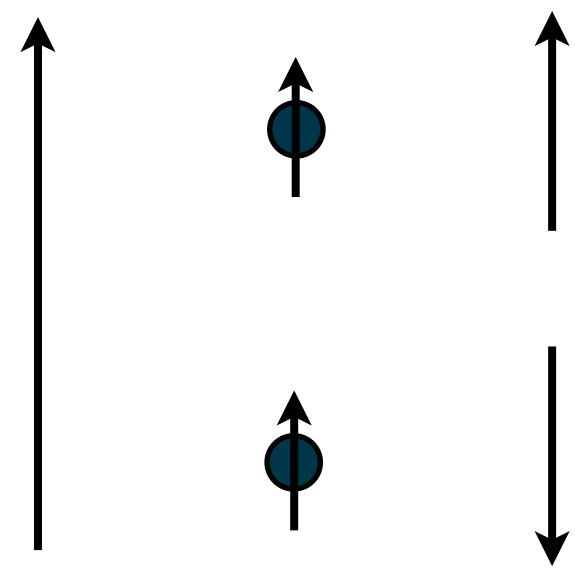


左巻き　　右巻き

$\boldsymbol{j}_e \sim (\mu_{\mathrm{R}} - \mu_{\mathrm{L}})\boldsymbol{B}$ はパリティと矛盾しない

Chiral magnetic effect

B スピン 運動量



右巻き $\boldsymbol{j}_{\mathrm{R}} = \dfrac{\mu_{\mathrm{R}}}{4\pi^2}\boldsymbol{B}$

左巻き $\boldsymbol{j}_{\mathrm{L}} = -\dfrac{\mu_{\mathrm{L}}}{4\pi^2}\boldsymbol{B}$

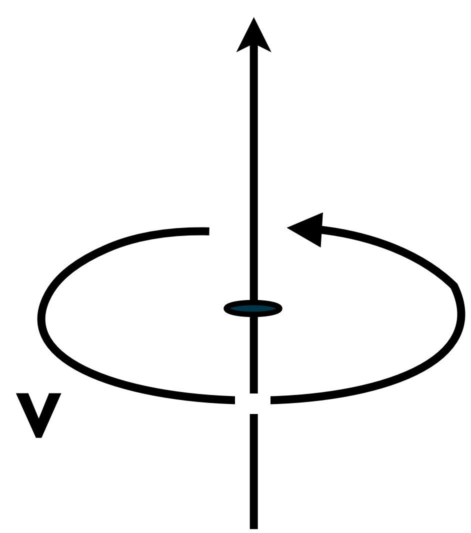
$$\boxed{\boldsymbol{j}_e = \frac{1}{4\pi^2}(\mu_{\mathrm{R}} - \mu_{\mathrm{L}})\boldsymbol{B}}$$

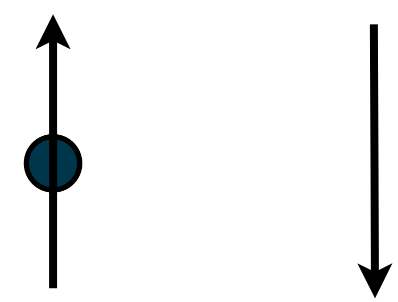
厳密な輸送係数：場の量子論における量子異常と密接に関係

Vilenkin (1980); Nielsen, Ninomiya (1983); Fukushima, Kharzeev, Warringa (2008), …

Chiral vortical effect

渦度 $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}$　　スピン　　運動量





$$\boldsymbol{j} = -\left(\frac{\mu^2}{8\pi^2} + \frac{T^2}{24}\right)\boldsymbol{\omega}$$

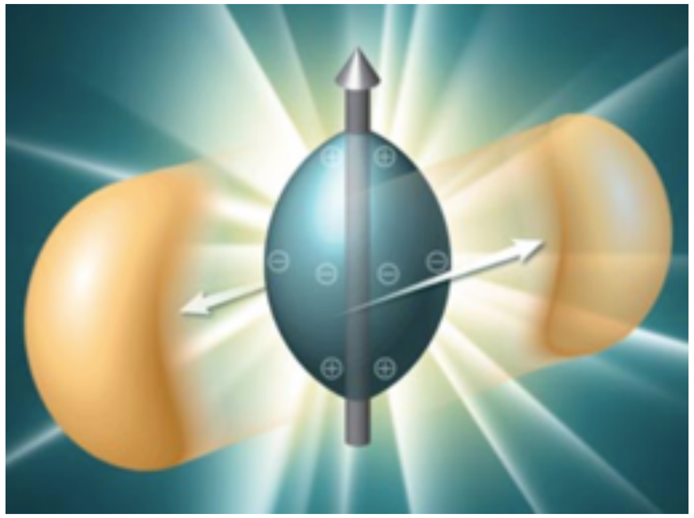
左巻きニュートリノ

従来の運動論（Boltzmann方程式）では記述できない

Vilenkin (1979); Erdmenger et al. (2009); Banerjee et al. (2011);
Son-Surowka (2009); Landsteiner et al. (2011)

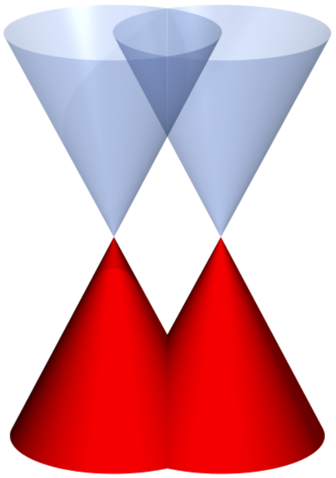
カイラル物質

- 初期宇宙における電弱プラズマ Joyce-Shaposhnikov (1997), …
- 重イオン衝突実験におけるQGP Kharzeev-Mclerran-Warringa (2008), …
- Weyl半金属 ("3D graphene") Nielsen-Ninomiya (1983), …
- 超新星におけるニュートリノ物質 NY (2016), …

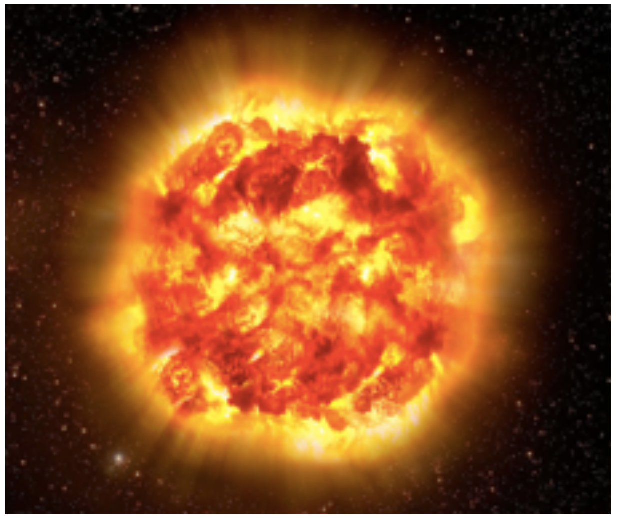


QGP

http://www0.bnl.gov/rhic/news2/



Weyl半金属



超新星爆発

超新星における
ニュートリノ物質

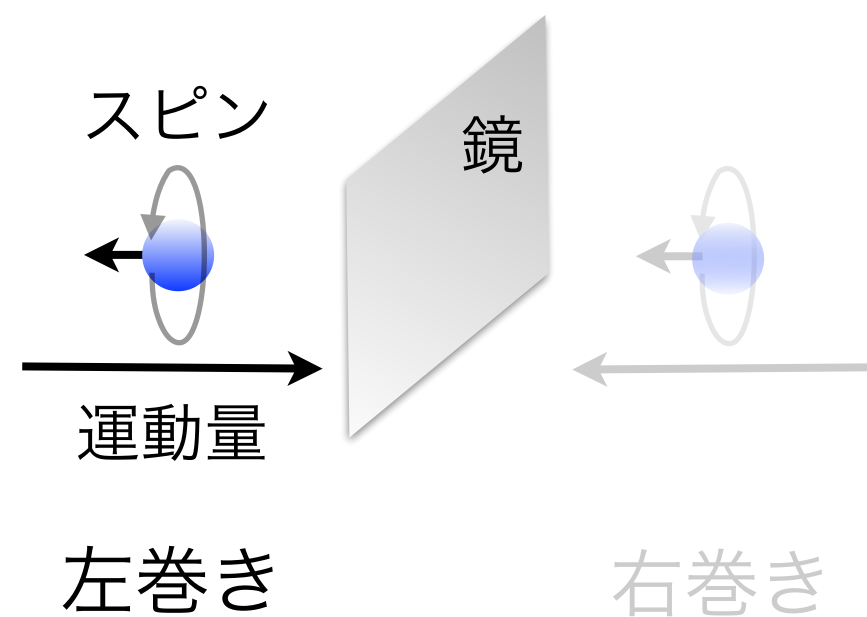
超新星爆発

- 宇宙で最も大きな爆発現象の１つ
- 大質量星の中性子星への転移 & 重元素の起源
- 重力エネルギーの大部分をニュートリノが持ち運ぶ
- 従来のニュートリノ輸送理論では３次元の超新星爆発が困難

宇宙物理学の未解決問題の１つ

http://www.riken.jp/pr/press/2009/20091211/

ニュートリノの基本的性質



ニュートリノは左巻き（パリティ対称性を破る）

ミクロからマクロへ

ミクロなパリティの破れ → マクロな流体力学的な振舞い

ミクロ　素粒子標準模型における ν のカイラリティ

↓

カイラル運動論 (Boltzmann方程式)

↓　Son-NY, PRL (2012); Stephanov-Yin, PRL (2012)

マクロ　超新星の進化 (宇宙最大のパリティの破れ)　NY, PRD (2016)

Supernova = Giant parity breaker

$$p + e^{\mathbf{L}} \rightarrow n + \underline{\nu_e^{\mathbf{L}}}$$

超新星のニュートリノ物質

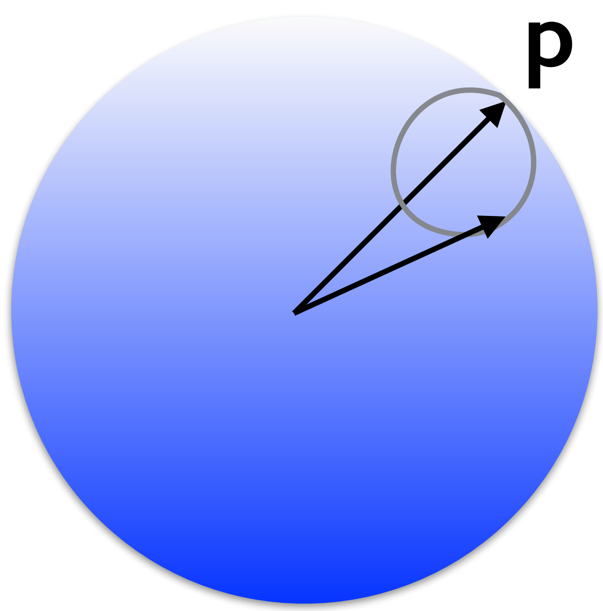
- ニュートリノ平均自由行程 ~ 中心コアで 1 cm (ρ_N ~10^{15} g/cm^3).
- ニュートリノ物質 = カイラル流体 (μ_ν ~200 MeV ≫ T~10 MeV)

= 3次元トポロジカル物質

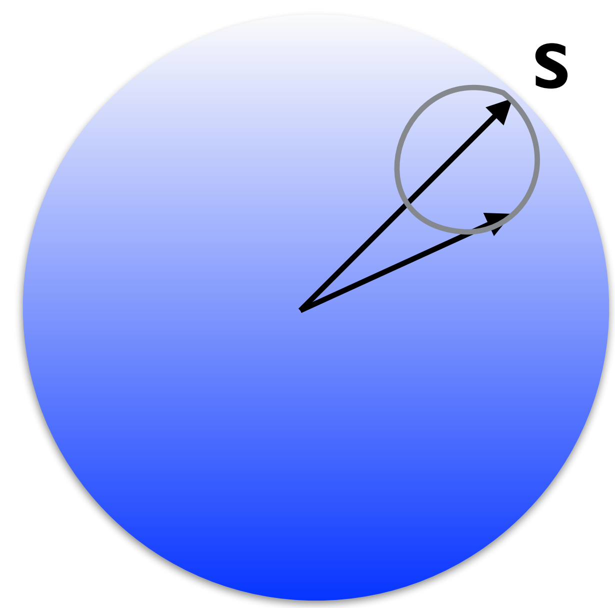
NY, PRD (2016) [arXiv:1511.00933]

カイラリティとトポロジー

右巻きフェルミオン



運動量空間

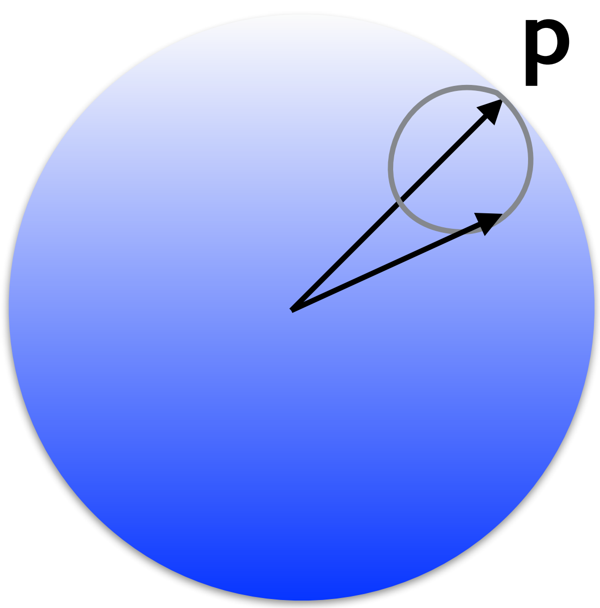


スピン空間

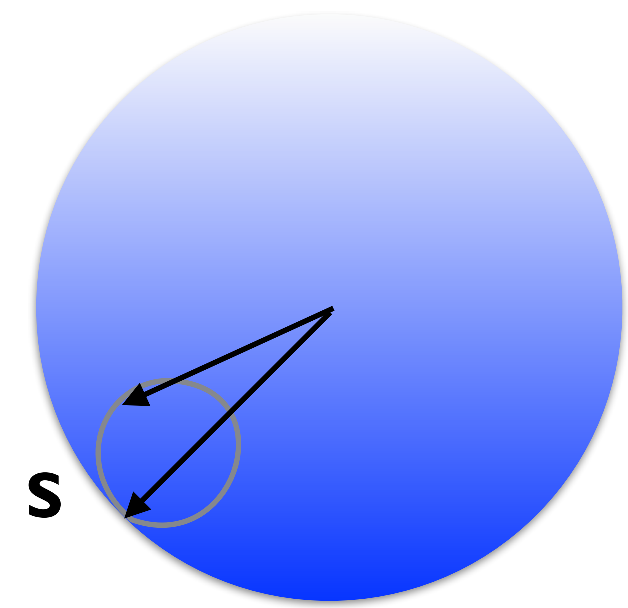
S^2 (運動量空間) から S^2 (スピン空間) へのmapping: 巻き数 +1

カイラリティとトポロジー

左巻きフェルミオン



運動量空間



スピン空間

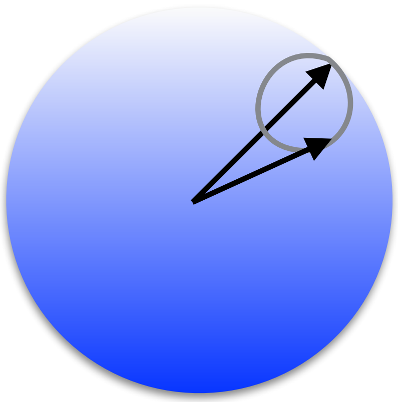
S^2 (運動量空間) から S^2 (スピン空間) へのmapping: 巻き数 −1

ニュートリノ物質 = 3次元トポロジカル物質

カイラル運動論

Son-NY, PRL (2012); Stephanov-Yin, PRL (2012)

トポロジーとBerry曲率



- $\pi_2(S^2)=\pm 1$ → $\boldsymbol{p}$=**0** でのモノポール
- モノポール“磁場” = Berry曲率 $\boldsymbol{\Omega_p} = \pm \dfrac{\boldsymbol{p}}{2|\boldsymbol{p}|^3}$
- $\boldsymbol{\Omega_p}$ は運動方程式・輸送理論を補正

トポロジーが非平衡ダイナミクスに影響

（カイラル運動論）

Berry曲率と運動方程式

運動方程式:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{p}}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{E} + \dot{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{B}$$

***x*-空間**でのLorentz力

Berry曲率と運動方程式

半古典的な運動方程式:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{p}} + \dot{\boldsymbol{p}} \times \boldsymbol{\Omega_p}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{E} + \dot{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{B}$$

***p*-空間**での“Lorentz力”

Sundaram-Niu, PRB (1999)

***x*-空間**でのLorentz力

Berry曲率と運動方程式

半古典的な運動方程式:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{p}} + \dot{\boldsymbol{p}} \times \boldsymbol{\Omega_p} = (1 + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{\Omega_p})^{-1}[\hat{\boldsymbol{p}} + \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{\Omega_p} + (\hat{\boldsymbol{p}} \cdot \boldsymbol{\Omega_p})\boldsymbol{B}]$$

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{E} + \dot{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{B} = (1 + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{\Omega_p})^{-1}[\boldsymbol{E} + \hat{\boldsymbol{p}} \times \boldsymbol{B} + (\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{\Omega_p}]$$

Boltzmann方程式:

$$\Rightarrow \quad \frac{dn_{\boldsymbol{p}}}{dt} = \frac{\partial n_{\boldsymbol{p}}}{\partial t} + \underline{\dot{\boldsymbol{x}}} \cdot \frac{\partial n_{\boldsymbol{p}}}{\partial \boldsymbol{x}} + \underline{\dot{\boldsymbol{p}}} \cdot \frac{\partial n_{\boldsymbol{p}}}{\partial \boldsymbol{p}} = c[n_{\boldsymbol{p}}]$$

カイラル運動論

$$(1 + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \frac{\partial n_{\boldsymbol{p}}}{\partial t} + [\boldsymbol{v} + \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{\Omega} + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \boldsymbol{B}] \cdot \frac{\partial n_{\boldsymbol{p}}}{\partial \boldsymbol{x}} + [\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} + (\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B}) \boldsymbol{\Omega}] \cdot \frac{\partial n_{\boldsymbol{p}}}{\partial \boldsymbol{p}} = c[n_{\boldsymbol{p}}]$$

Son-NY, PRL (2012); Stephanov-Yin, PRL (2012)

- 左巻き・右巻きを区別
- 量子異常やCMEを再現

ニュートリノ輸送

- カレント: $\boldsymbol{j} = \int_{\boldsymbol{p}} (\hat{\boldsymbol{p}} f - |\boldsymbol{p}| \boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{p}} \times \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} f)$

$$\boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{p}} = -\frac{\boldsymbol{p}}{2|\boldsymbol{p}|^3}$$:カイラリティの効果

- エネルギー運動量テンソル:

$$T^{ij} = \int_{\boldsymbol{p}} |\boldsymbol{p}| \left(\hat{p}^i \hat{p}^j f - \frac{1}{2} p^i \epsilon^{jk\ell} \Omega^k_{\boldsymbol{p}} \partial_\ell f - \frac{1}{2} p^j \epsilon^{ik\ell} \Omega^k_{\boldsymbol{p}} \partial_\ell f \right)$$

Son-NY, PRD (2013); Chen-Son-Stephanov, PRL (2015)

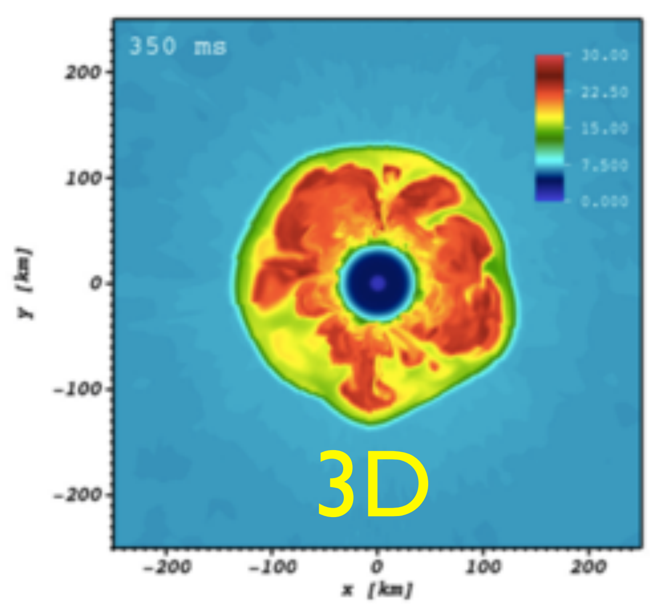
重力崩壊型 超新星
への応用

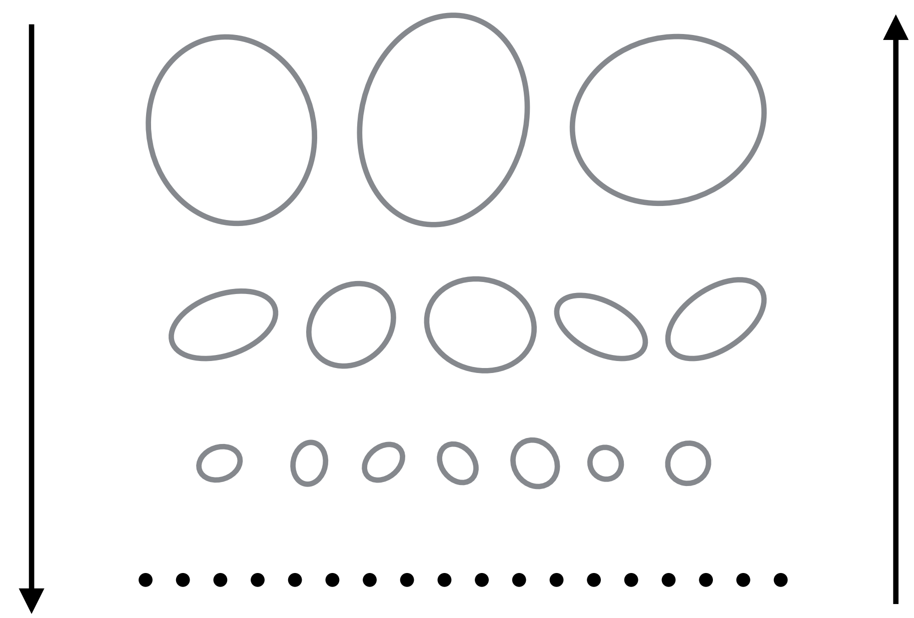
乱流カスケードと爆発

順カスケード

（3D 通常の物質）

爆発しにくい



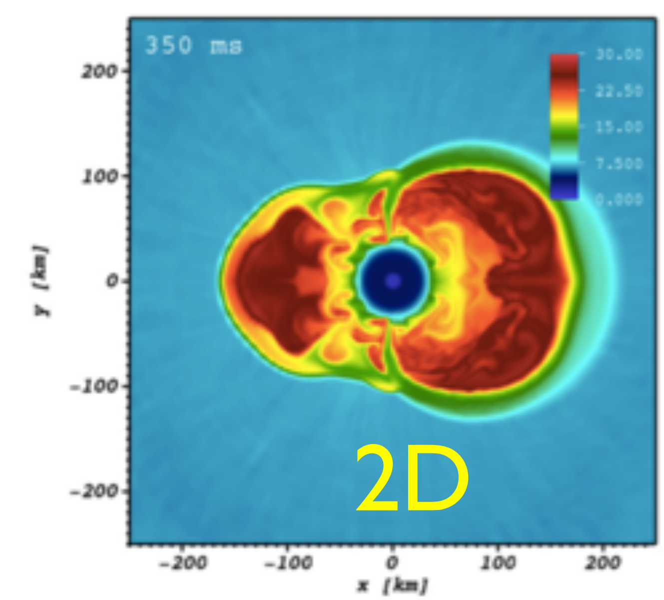


F. Hanke (2014)

逆カスケード

（2D 通常の物質）

爆発しやすい



3D カイラル物質では？

Neutrino radiation *chiral* hydro

- 超新星にはニュートリノだけでなく原子核・電子も存在.
- コア外部ではニュートリノに対して流体力学が使えない

→ Neutrino radiation *chiral* hydrodynamics

= 原子核・電子の流体力学 + ニュートリノカイラル運動論

NY, work in progress

カイラル流体力学

エネルギー運動量の保存: $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$

カレントの保存: $\partial_\mu j^\mu = 0$

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + P)u^\mu u^\nu - P g^{\mu\nu} + (\text{dissipation})$$

$$j^\mu = n u^\mu + \kappa\omega^\mu + (\text{dissipation})$$

chiral vortical effect

$$\omega^\mu \equiv \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} u_\nu \partial_\alpha u_\beta$$

Son-Surowka (2009); Neiman-Oz (2011)

ニュートリノ流体力学

NY, PRD (2016) [arXiv:1511.00933]

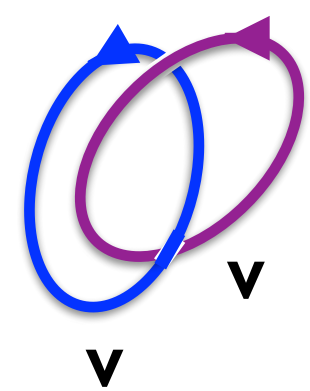
- $|v| \ll 1$ でのカイラル流体方程式:

$$(\epsilon + P)(\partial_t + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{\nabla}P + \nu\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{v}$$

$$\partial_t\left(n + \underbrace{\kappa\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\omega}}_{\text{CVE}}\right) + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j} = 0, \qquad \boldsymbol{j} = n\boldsymbol{v} + \underbrace{\kappa\boldsymbol{\omega}}_{\text{CVE}}.$$

- ヘリシティの保存:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\underbrace{\int d^3\boldsymbol{x}\; n}_{\text{ニュートリノ\#}} + \underbrace{\int d^3\boldsymbol{x}\; \kappa\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\omega}}_{\text{流体ヘリシティ}}\right) = 0$$



カイラル乱流のスケール則

NY, PRD (2016) [arXiv:1603.08864]

- "慣性領域" での唯一のスケール対称性:

$$\boldsymbol{x} \to l\boldsymbol{x}, \quad t \to l^{1-h}t, \quad \boldsymbol{v} \to l^h \boldsymbol{v}, \quad \mu \to l^p \mu$$

$$\boxed{h = 0, \qquad p = -1}$$

- エネルギースペクトル: $\mathcal{E}_v(l^{-1}k, l^{-1}t) = l\mathcal{E}_v(k,t)$

$\longrightarrow \mathcal{E}_v(k,t) = k^{-1}\psi_v(kt)$ 唯一の自己相似解

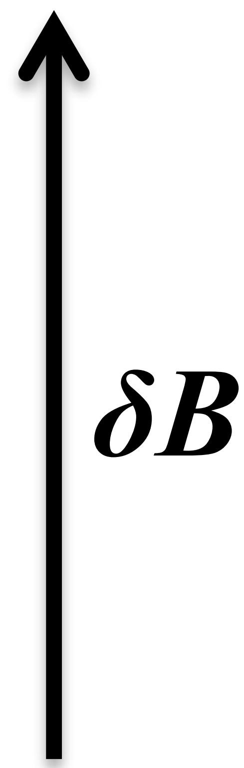
- スケーリング解での流体エネルギーの相関長:

$$\xi_v(t) = \xi_v(t_s)\left(\frac{t}{t_s}\right)$$

逆カスケードを示唆
（爆発に有利）

カイラル電磁流体
への拡張

Chiral plasma instability



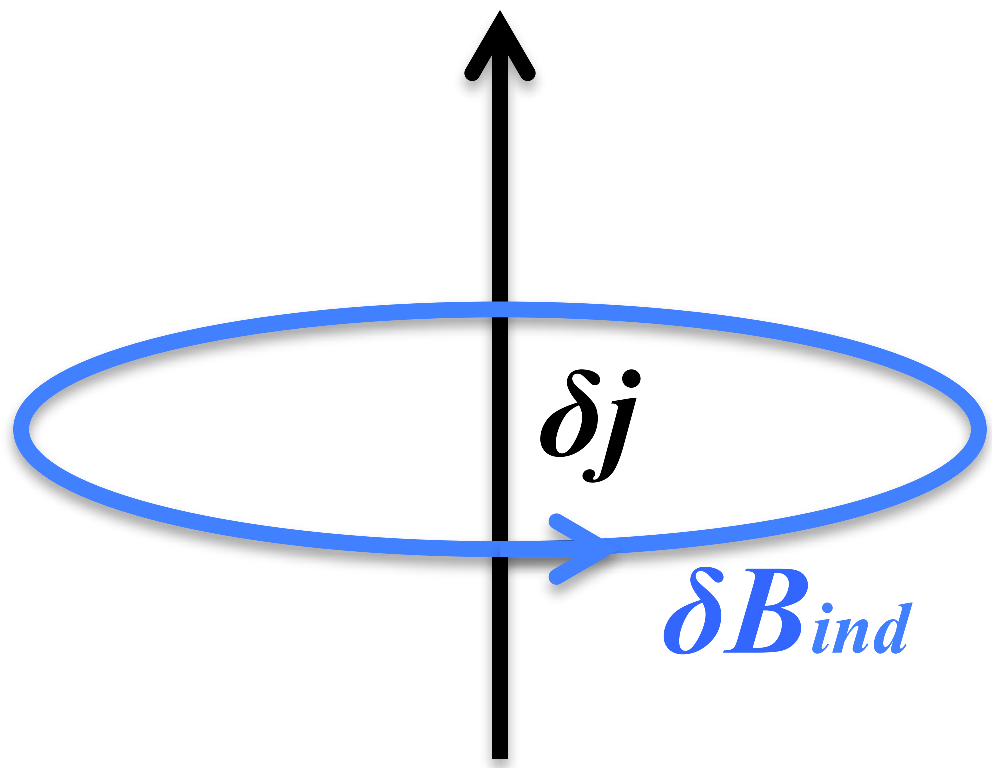
最初に一様な $\mu_5 \equiv \mu_{\mathrm{R}} - \mu_{\mathrm{L}}$ があると仮定

Chiral plasma instability

Chiral magnetic effect

$$\boldsymbol{\delta j} \sim \mu_5 \boldsymbol{\delta B}$$

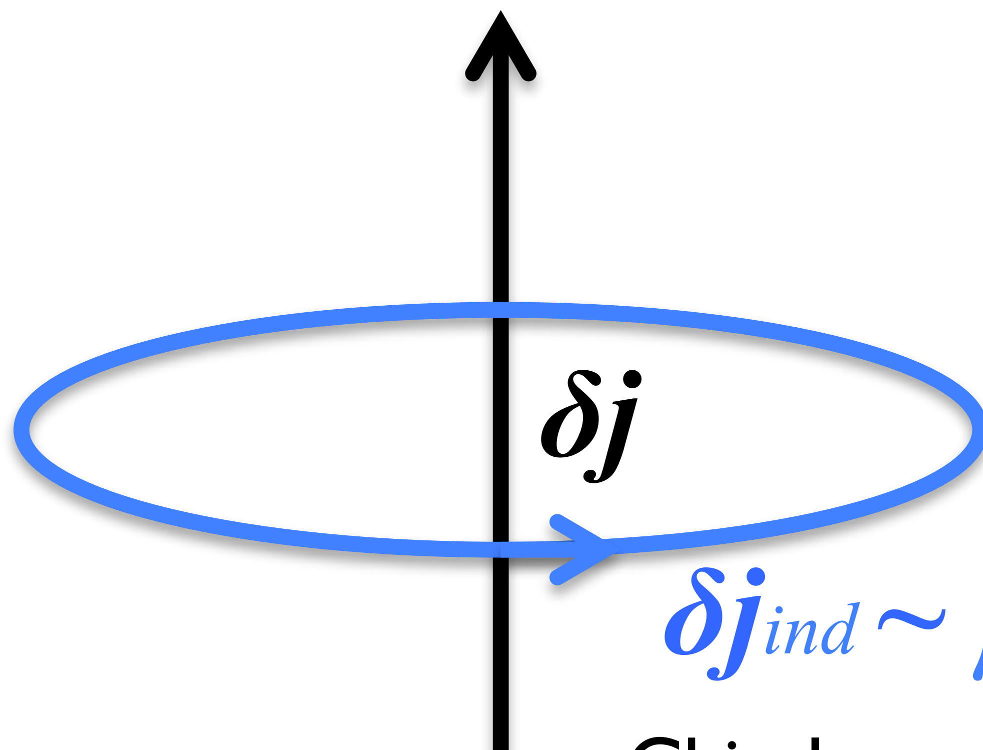
Chiral plasma instability



Ampereの法則

$$\nabla \times B = j$$

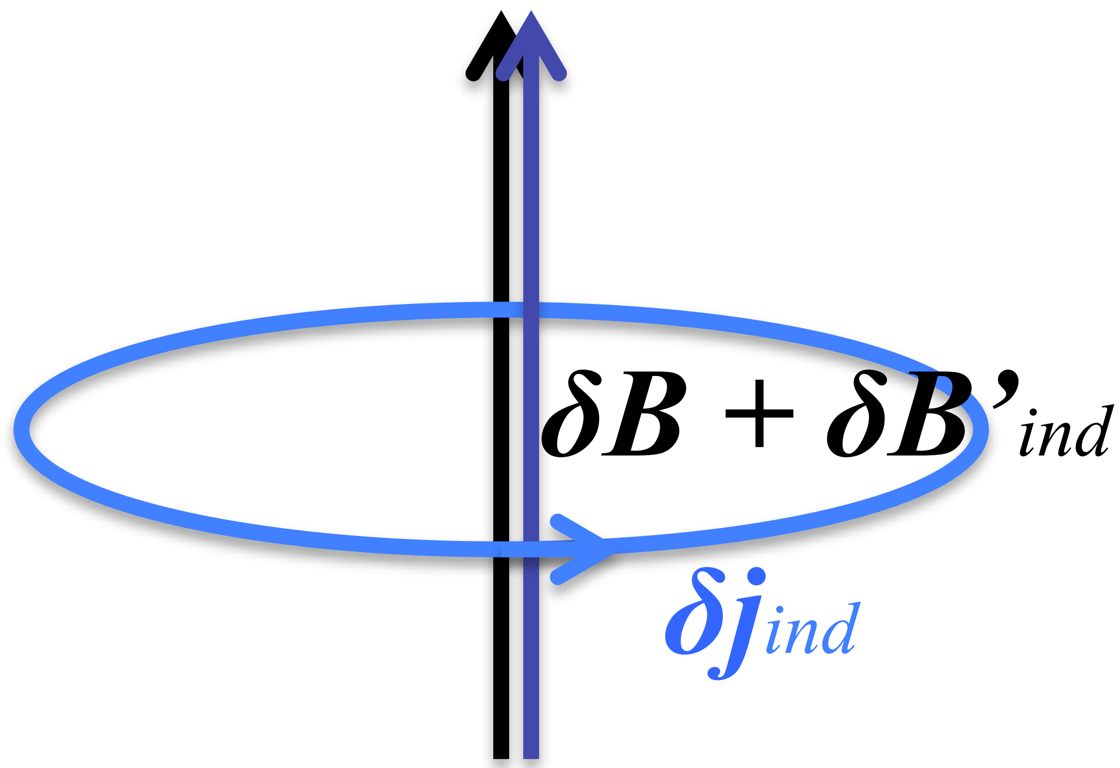
Chiral plasma instability



$\boldsymbol{\delta j}_{ind} \sim \mu_5 \boldsymbol{\delta B}_{ind}$

Chiral magnetic effect

Chiral plasma instability

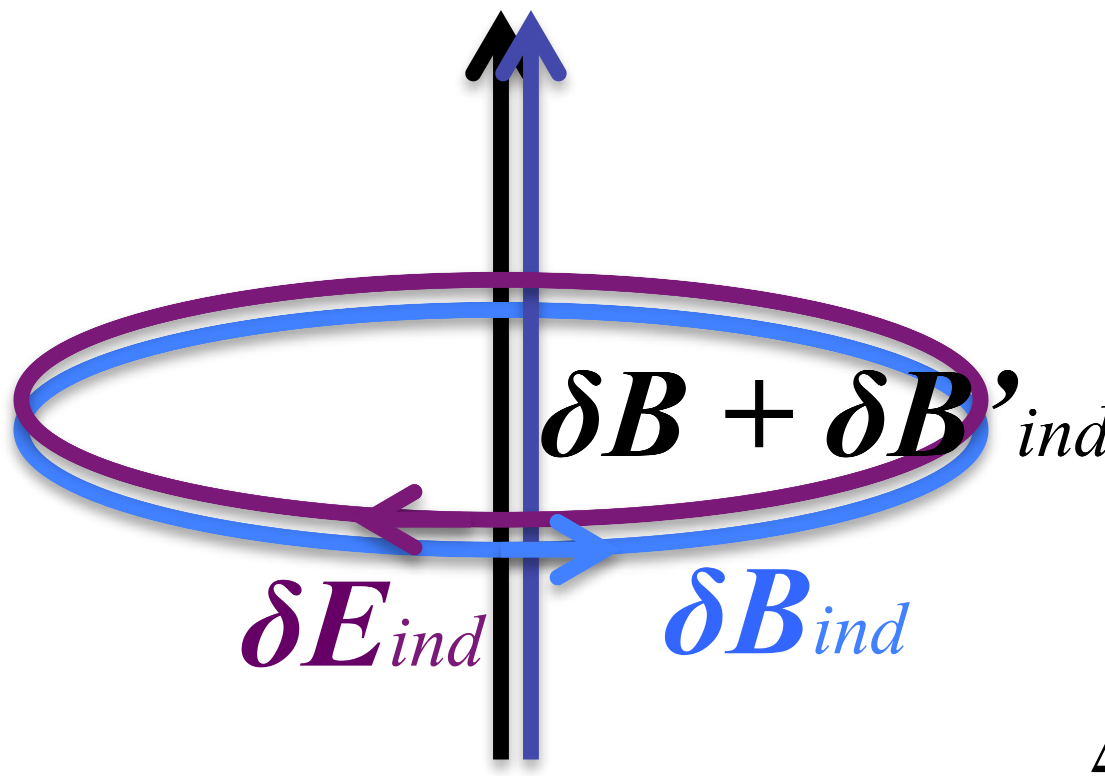


Ampereの法則

$$\nabla \times B = j$$

正のフィードバック：不安定性

Chiral plasma instability



Faradayの法則

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\partial_t \boldsymbol{B}$$

量子異常

$$\Delta Q_5 = \# \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B} < 0$$

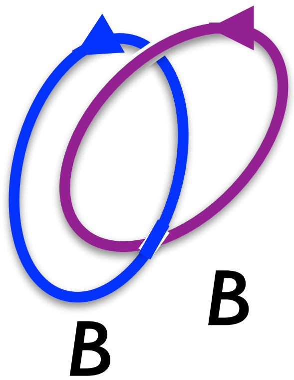
量子異常は不安定性を緩和

Anomalous Maxwell equations

- ヘリシティの保存:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int d^3\boldsymbol{x}\ n_5 + \frac{1}{4\pi^2}\int d^3\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\right) = 0$$

カイラル電荷　　磁気ヘリシティ



- Maxwell方程式 + CME:

$$\nabla\times\boldsymbol{B} = \frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} + \boldsymbol{j}_{\mathrm{EM}}\,, \qquad \nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0\,, \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{E} = 0$$

$$\boldsymbol{j}_{\mathrm{EM}} = \sigma\boldsymbol{E} + \underbrace{\sigma_A\boldsymbol{B}}_{\text{CME}}$$

Chiral MHD への拡張

- $|\boldsymbol{v}| \ll 1$ でのカイラル電磁流体 (MHD) 方程式:

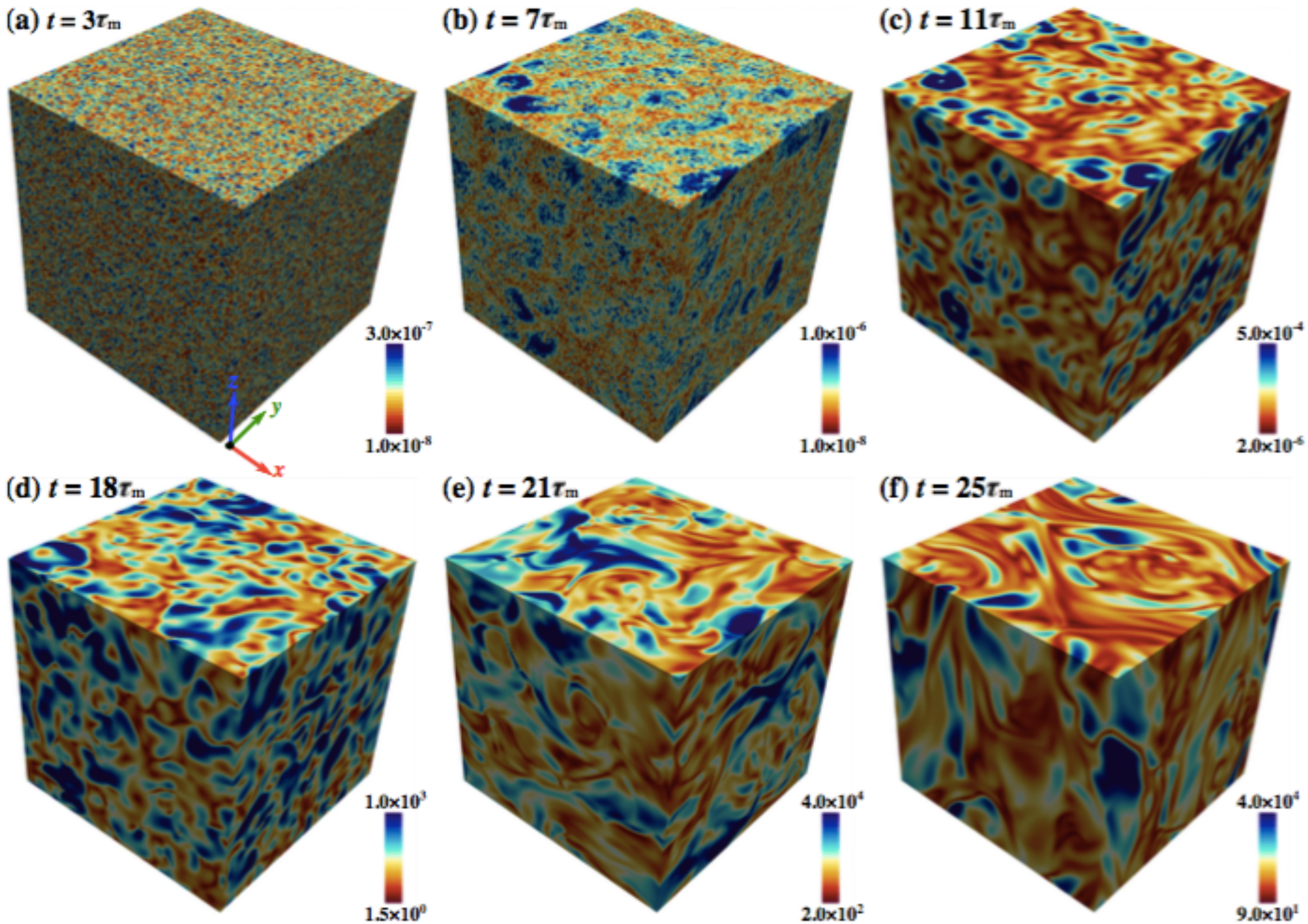
$$(\epsilon + P)(\partial_t \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}) = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{B}^2 + (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B} + \nu\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{v}$$

$$\partial_t \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) + \underbrace{\kappa_B \eta \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}}_{\text{CME}} + \eta\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{B}$$

$$\partial_t n_5 + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla} n_5 = \underbrace{-C\eta[\kappa_B \boldsymbol{B}^2 - (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{B}]}_{\text{anomaly}}$$

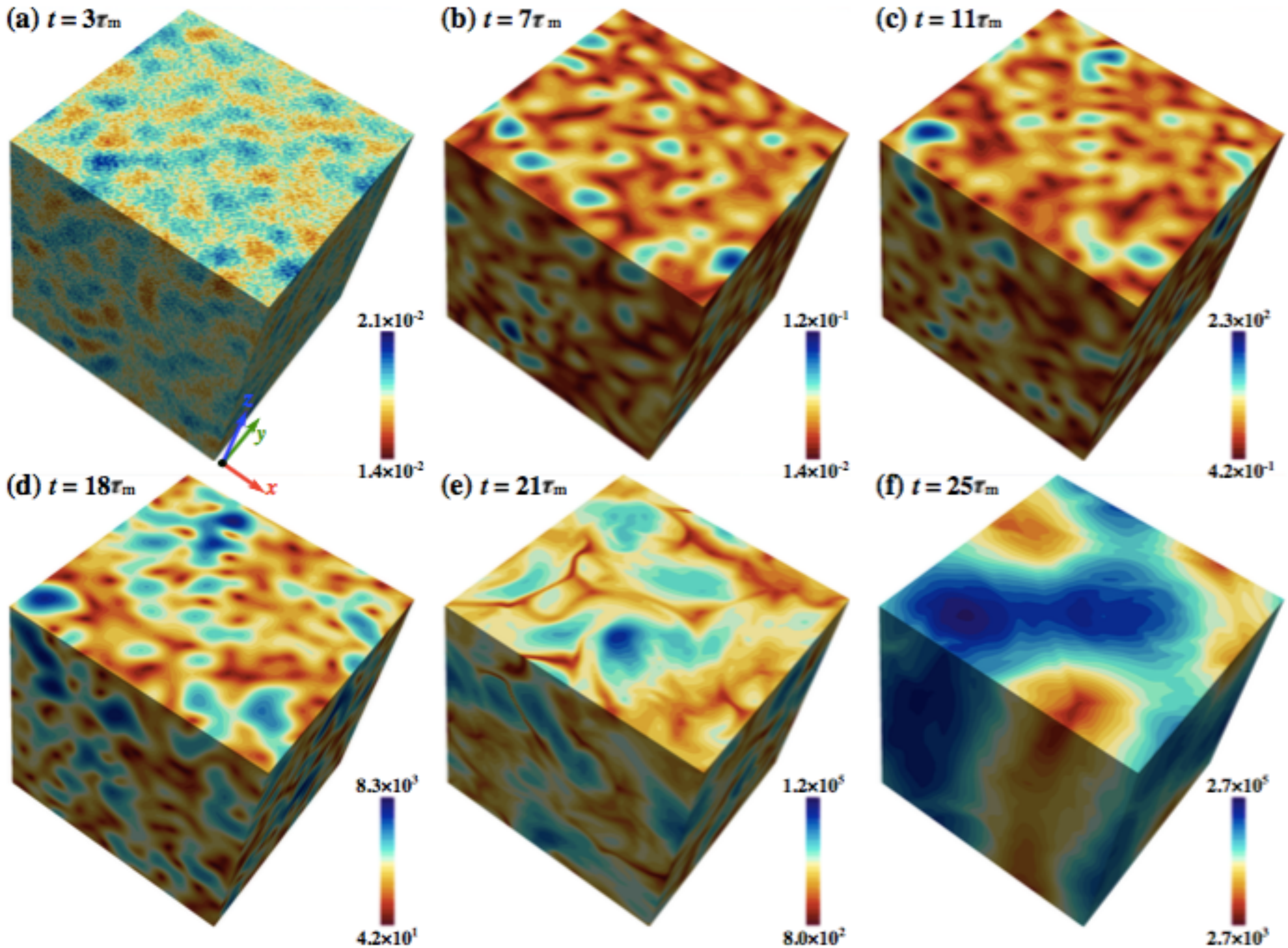
（簡単のため、渦度やCVEを無視）

Preliminary result (*v* field)



Masada-Kotake-Takiwaki-NY, in preparation

Preliminary result (B field)



Masada-Kotake-Takiwaki-NY, in preparation

Conclusion & Outlook

- 相対論的な非平衡・量子多体系:

Chirality = Topology

- ミクロなchirality → マクロな乱流現象（逆カスケード）
- Neutrino radiation *chiral* hydro ではどうか？
- カイラル運動論の初期宇宙への応用？

Backup slides

Full chiral kinetic theory

(for charged *chiral* particles)

Substitute modified EOM into

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \underline{\dot{\boldsymbol{x}}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} + \underline{\dot{\boldsymbol{p}}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}} = C[f]$$

$$\boxed{\begin{aligned}(1 + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{p}}) \frac{\partial f}{\partial t} &+ \left[\tilde{\boldsymbol{v}} + \tilde{\boldsymbol{E}} \times \boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{p}} + (\tilde{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{p}}) \boldsymbol{B} \right] \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} \\ &+ \left[\tilde{\boldsymbol{E}} + \tilde{\boldsymbol{v}} \times \boldsymbol{B} + (\tilde{\boldsymbol{E}} \cdot \boldsymbol{B}) \boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{p}} \right] \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}} = C[f]\end{aligned}}$$

$$\epsilon_{\boldsymbol{p}} = |\boldsymbol{p}|(1 - \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{\Omega}), \quad \tilde{\boldsymbol{v}} \equiv \frac{\partial \epsilon_{\boldsymbol{p}}}{\partial \boldsymbol{p}}, \quad \tilde{\boldsymbol{E}} \equiv \boldsymbol{E} - \frac{\partial \epsilon_{\boldsymbol{p}}}{\partial \boldsymbol{x}}$$

Son-NY, PRL (2012); Stephanov-Yin, PRL (2012)

ニュートリノ平均自由行程

Textbook formula: $l_{\mathrm{mfp}} = (\sigma_A n_A)^{-1}$

$$\sigma_A \sim G_{\mathrm{F}}^2 E_\nu^2 A^2 \qquad n_A = \rho/(A m_N)$$

$$E_\nu \simeq \mu_e = (3\pi^2 \rho Y_e/m_N)^{1/3}$$

$$\boxed{l_{\mathrm{mfp}} \sim 10^7\ \mathrm{cm} \left(\frac{\rho}{10^{10}\ \mathrm{g/cm^3}}\right)^{-\frac{5}{3}} \left(\frac{A}{56}\right)^{-1} \left(\frac{Y_e}{26/56}\right)^{-\frac{2}{3}}}$$