

Kähler 曲率の符号と ユニタリテイ

寺田 隆広 (KEK, JSPS fellow)

共同研究者

江間 洋平

北野 龍一郎

広義のイントロ

メインの議論

非自明な応用例

まとめ

1. イントロダクション
2. 現象論的な動機付け
3. UV理論とEFTの例
4. 散乱振幅の解析
5. ラージNゲージ理論
6. ストリングの散乱振幅
7. まとめと結論

Nontrivial constraints on EFT

$$\mathcal{L} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{\mathcal{O}_n}{\Lambda^{n-4}}$$

Causality constraint

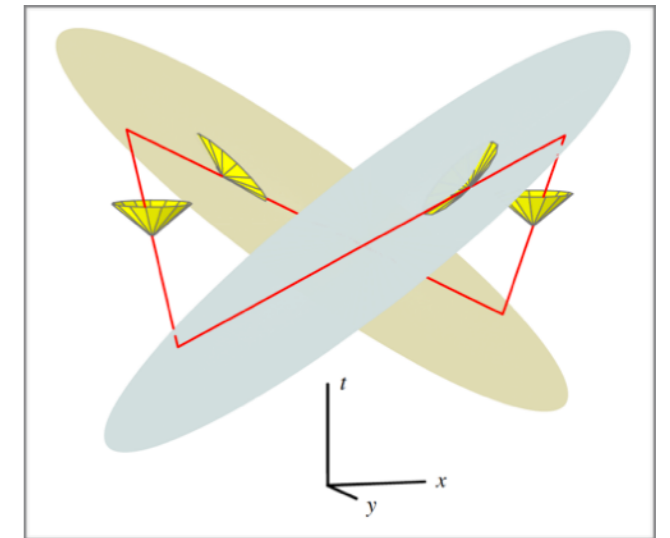
[Adams, Arkani-Hamed, Dubovsky, Nicolis, Rattazzi, hep-th/0602178]

ex.) Lagrangian of a NG boson

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial^\mu\pi\partial_\mu\pi + \frac{c}{\Lambda^4}(\partial^\mu\pi\partial_\mu\pi)^2 + \dots$$

On a non-trivial background: $\langle\partial_\mu\pi\rangle = C_\mu$

$$\omega^2 = \left(1 - \frac{4c}{\Lambda^4} \left(C^0 - \vec{C} \cdot \hat{k}\right)^2\right) k^2$$



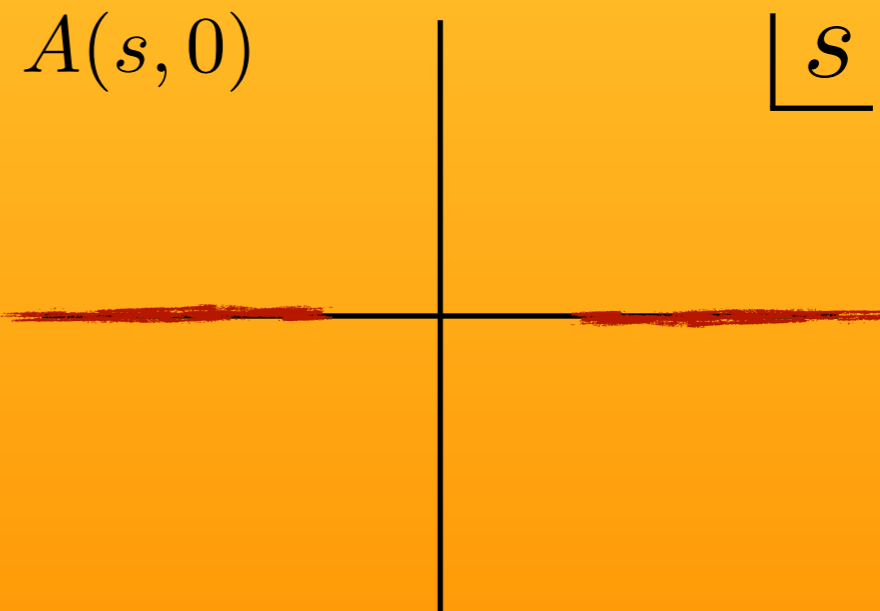
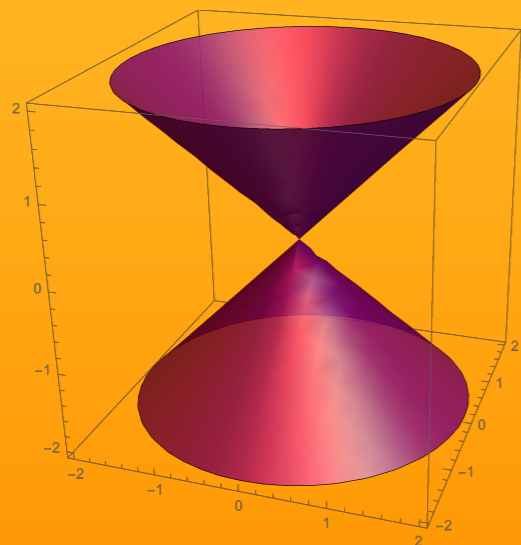
Forbidding superluminal propagation, $c \geq 0$

Unitarity

$$\text{Im}A(s, 0) = s\sigma(s)$$

Analyticity

Causality



Unitarity constraint

[Adams, Arkani-Hamed, Dubovsky, Nicolis, Rattazzi, hep-th/0602178]

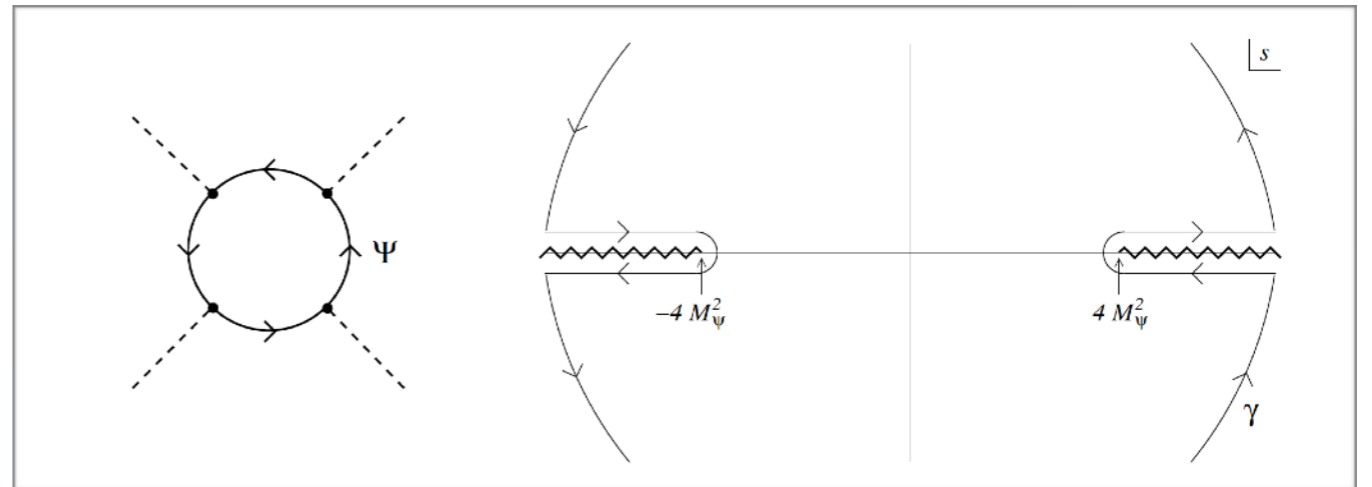
Scattering amplitude

$$A(s, t) = \frac{c}{\Lambda^4} (s^2 + t^2 + u^2)$$

Note: $u = -s - t$

Consider an integral

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} ds \frac{A(s, 0)}{s^3}$$



$$\frac{2c}{\Lambda^4} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} ds \left(\frac{\sigma(s)}{s^2} + \frac{\sigma^{\text{cross}}(s)}{s^2} \right) > 0$$

Crossing symmetry

$$A(-s, 0) = A^{\text{cross}}(s, 0)$$

Optical theorem

$$\text{Im } A(s, 0) = s\sigma(s)$$

$$K = X^\dagger X - \frac{c}{4\Lambda^2} (X^\dagger X)^2$$

Stability of SUSY breaking vacuum

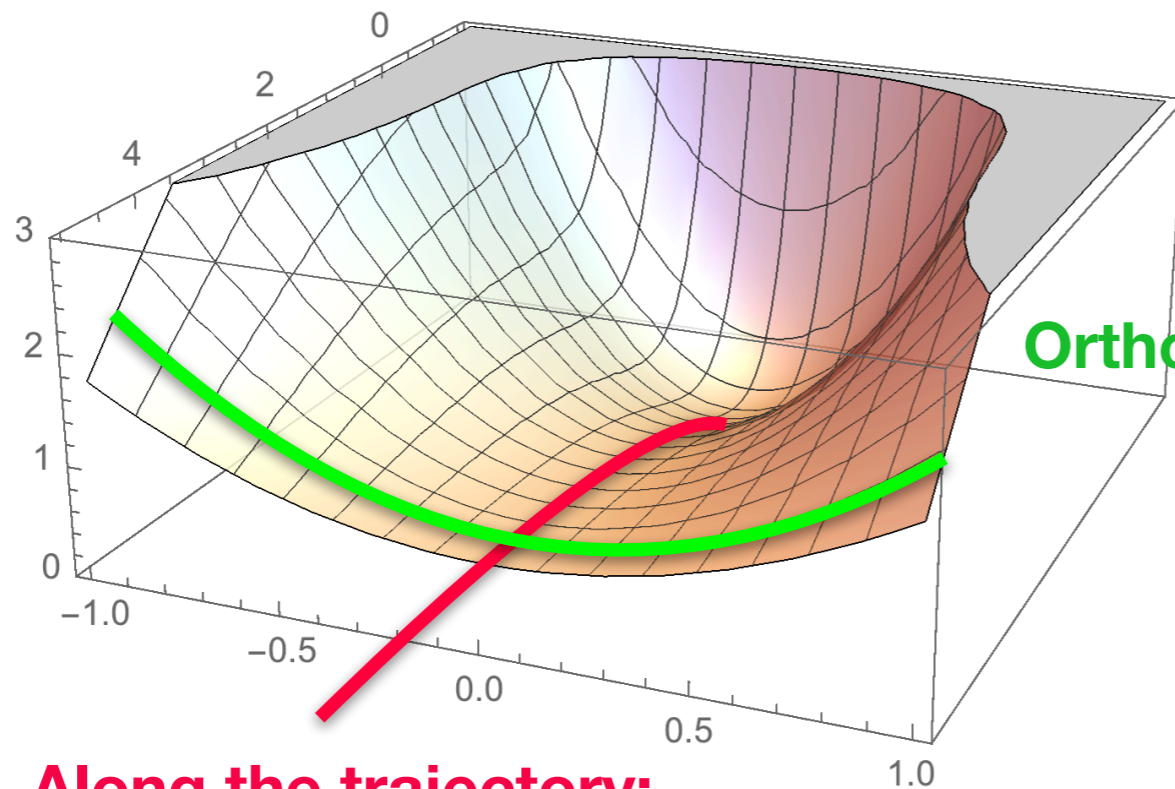
$$K = X^\dagger X - \frac{c}{4\Lambda^2} (X^\dagger X)^2$$

$$W = \mu^2 X$$

$$\mathcal{L} = - \left(1 - \frac{c}{\Lambda^2} X^\dagger X \right) \partial^\mu X^\dagger \partial_\mu X - V$$

$$V = \mu^4 + \frac{c}{\Lambda^2} \mu^4 |X|^2 + \dots$$

Curvature of inflation potential



Along the trajectory:

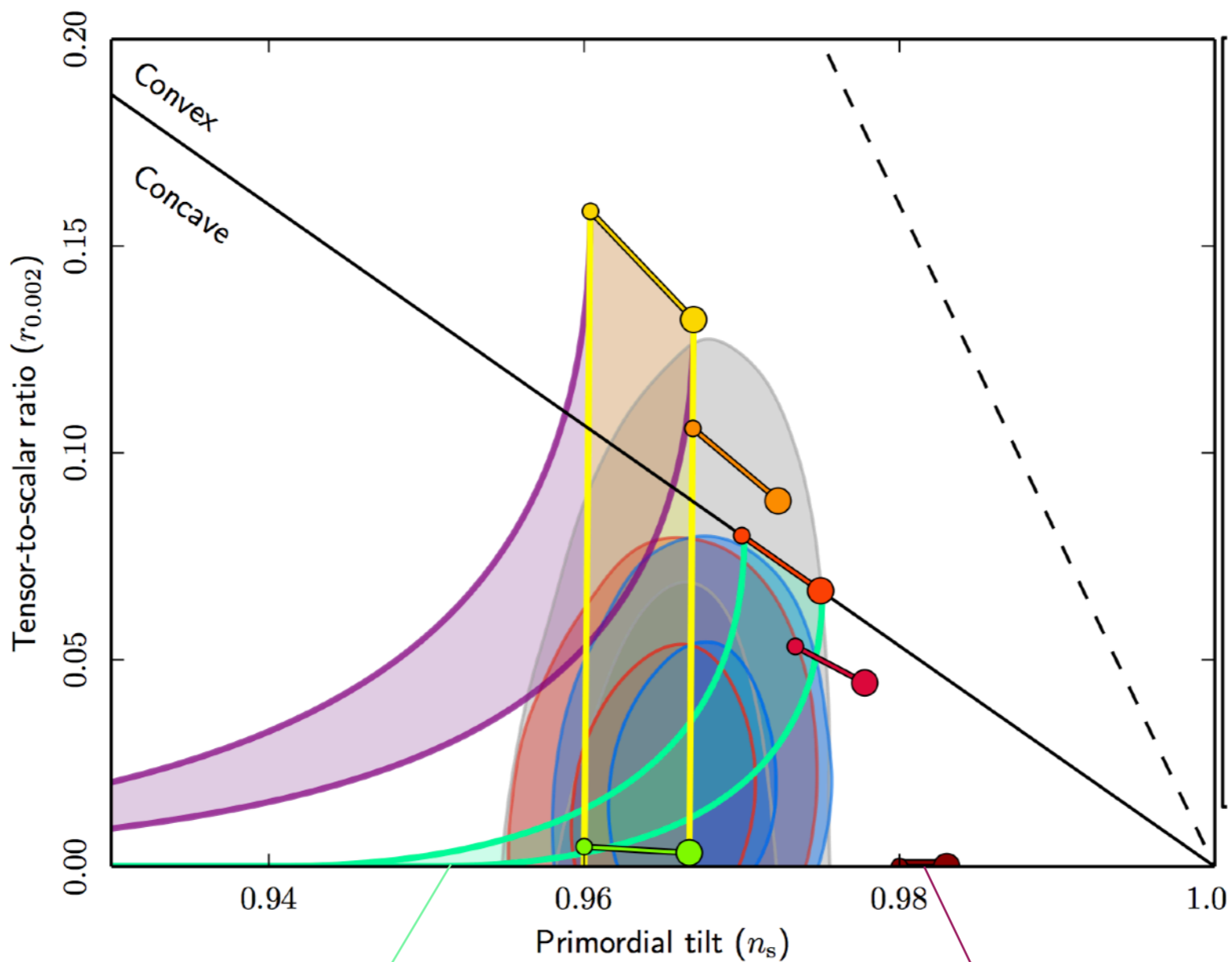
Spectral index

Orthogonal to the trajectory:

Stability of inflation

$c > 0$ **Stable**

$c < 0$ **Unstable**



Hilltop inflation

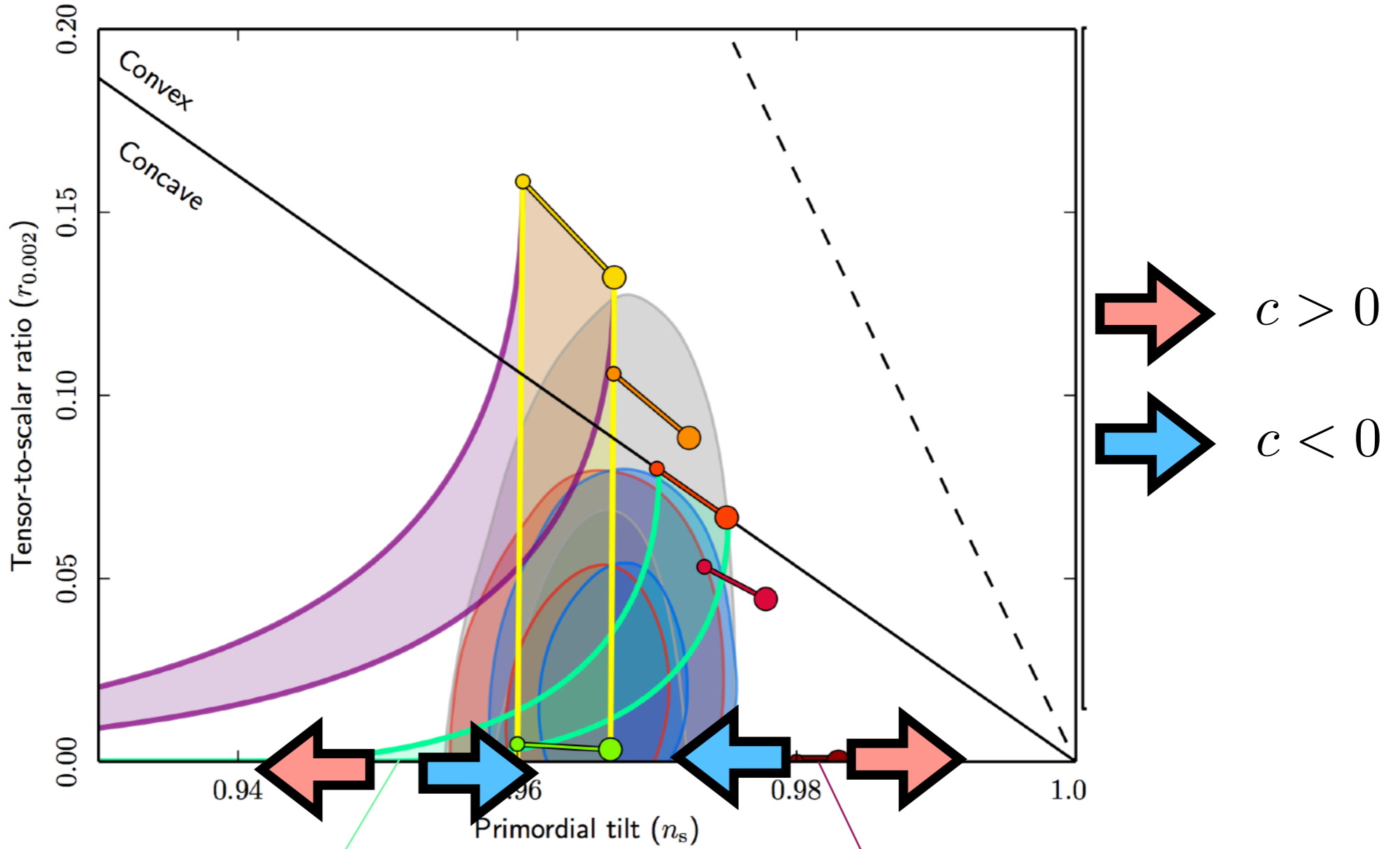
$$K = X^\dagger X - \frac{c}{4\Lambda^2} (X^\dagger X)^2,$$

$$W = v^2 X - \frac{g}{n+1} X^{n+1},$$

Hybrid inflation

$$K = X^\dagger X + \phi^\dagger \phi + \bar{\phi}^\dagger \bar{\phi} - \frac{c}{4\Lambda^2} (X^\dagger X)^2 + \dots,$$

$$W = \kappa X (\phi \bar{\phi} - \mu^2),$$



Hilltop inflation

$$K = X^\dagger X - \frac{c}{4\Lambda^2} (X^\dagger X)^2,$$

$$W = v^2 X - \frac{g}{n+1} X^{n+1},$$

Hybrid inflation

$$K = X^\dagger X + \phi^\dagger \phi + \bar{\phi}^\dagger \bar{\phi} - \frac{c}{4\Lambda^2} (X^\dagger X)^2 + \dots,$$

$$W = \kappa X (\phi \bar{\phi} - \mu^2),$$

[K. I. Izawa, hep-ph/0305286]

[K. I. Izawa and T. Yanagida, hep-ph/9608359]

[K. Kumekawa, T. Moroi, and T. Yanagida, hep-ph/9405337]

[G. R. Dvali, Q. Shafi, and R. K. Schaefer, hep-ph/9406319]

[M. Bastero-Gil, S. F. King, and Q. Shafi, hep-ph/0604198]

広義のイントロ

メインの議論

非自明な応用例

まとめ

1. イントロダクション
2. 現象論的な動機付け
3. UV理論とEFTの例
4. 散乱振幅の解析
5. ラージNゲージ理論
6. ストリングの散乱振幅
7. まとめと結論

Q

u

i

z

z

!

.

設問 1

以下の模型で、重い場 Y, Z を integrate out して得られる EFT の c の符号を答えよ。

$$K = X^\dagger X + Y^\dagger Y + Z^\dagger Z$$

$$W = \frac{\lambda}{2} X^2 Y + m Y Z$$



$$K = X^\dagger X - \frac{c}{4\Lambda^2} (X^\dagger X)^2$$

解答 1

以下の模型で、重い場 Y, Z を integrate out して得られる EFT の c の符号を答えよ。

$$K = X^\dagger X + Y^\dagger Y + Z^\dagger Z$$

$$W = \frac{\lambda}{2} X^2 Y + m Y Z$$



$$K_{\text{eff}} = X^\dagger X + \frac{|\lambda|^2}{4m^2} (X^\dagger X)^2 + \dots$$

$$W_{\text{eff}} = 0$$

設問 2

以下の模型で、重い場 Y, Z を integrate out して得られる EFT の c の符号を答えよ。

$$K = X^\dagger X + Y^\dagger Y + Z^\dagger Z$$

$$W = \frac{\lambda}{2} X Y^2 + m Y Z$$



$$K = X^\dagger X - \frac{c}{4\Lambda^2} (X^\dagger X)^2$$

解答 2

以下の模型で、重い場 Y, Z を integrate out して得られる EFT の c の符号を答えよ。

$$K = X^\dagger X + Y^\dagger Y + Z^\dagger Z$$

$$W = \frac{\lambda}{2} X Y^2 + m Y Z$$



$$K_{\text{eff}} = X^\dagger X - \frac{|\lambda|^4}{64\pi^2 m^2} (X^\dagger X)^2 + \dots$$

$$W_{\text{eff}} = 0$$

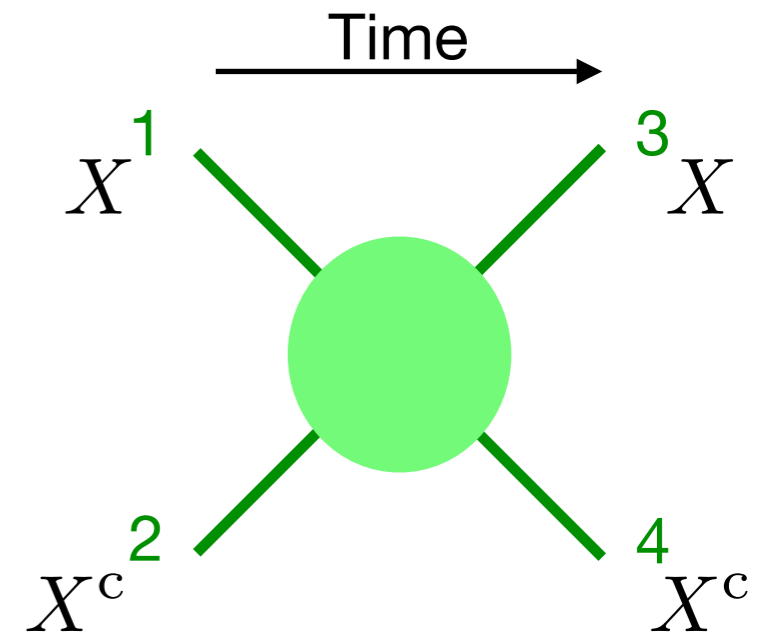
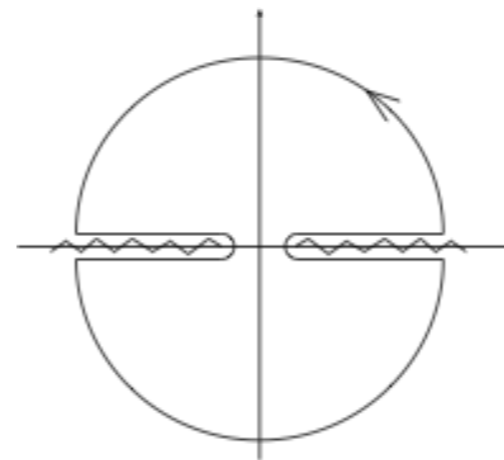
Unitarity & Analyticity

Scattering amplitude

$$A_{XX^\dagger}(s, t) = \frac{c}{\Lambda^2}(s + t) + \dots$$

Consider an integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C ds \frac{A_{XX^\dagger}(s, 0)}{s^2}$$



$$\frac{c}{\Lambda^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty ds \left(\frac{\sigma_{XX^\dagger}(s)}{s} - \frac{\sigma_{XX}(s)}{s} \right)$$

Crossing symmetry

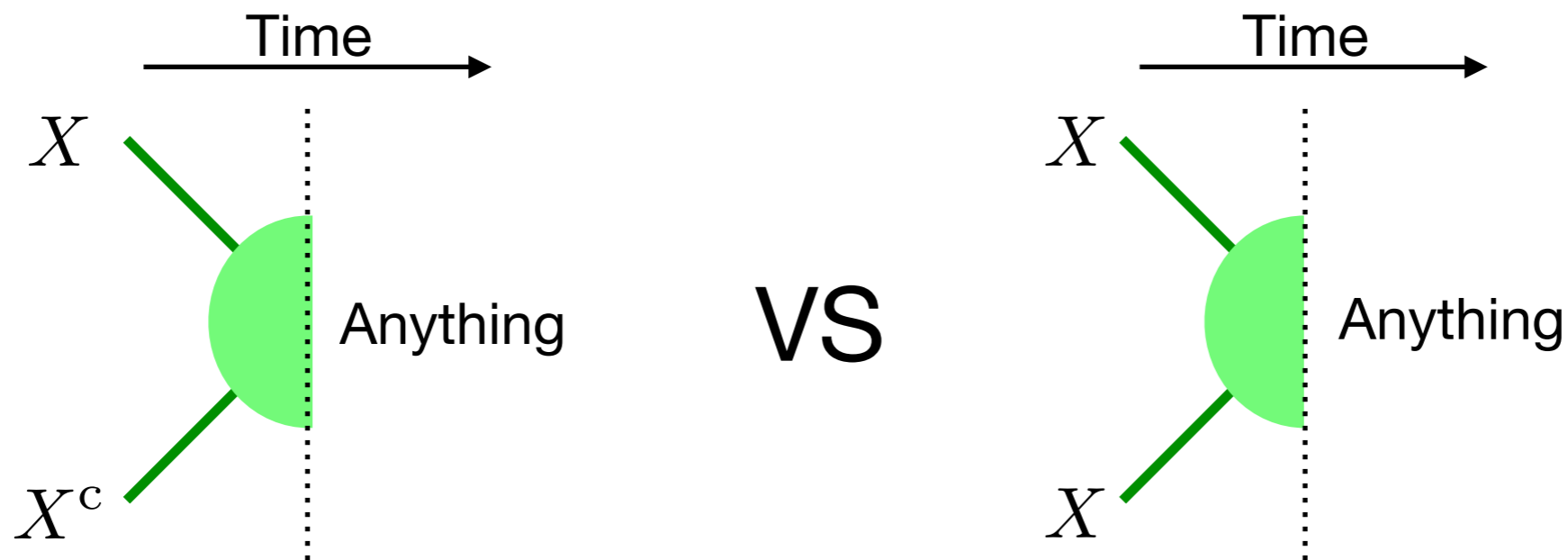
$$A(-s, 0) = A^{\text{cross}}(s, 0)$$

Optical theorem

$$\text{Im } A(s, 0) = s\sigma(s)$$

Unitarity & Analyticity

$$\frac{c}{\Lambda^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty ds \left(\frac{\sigma_{XX^\dagger}(s)}{s} - \frac{\sigma_{XX}(s)}{s} \right) \quad (+ \text{ large } s \text{ part})$$



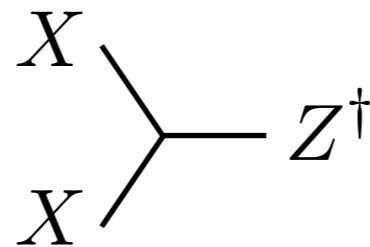
For related works, see e.g. [I. Low, R. Rattazzi, and A. Vichi, 0907.5413 [hep-ph]]
[A. Falkowski, S. Rychkov, and A. Urbano, 1202.1532 [hep-ph]]
[B. Bellazzini, L. Martucci, and R. Torre, 1405.2960 [hep-th]]

Unitarity & Analyticity

$$\frac{c}{\Lambda^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty ds \left(\frac{\sigma_{XX^\dagger}(s)}{s} - \frac{\sigma_{XX}(s)}{s} \right) \quad (+ \text{ large } s \text{ part})$$

Example 1

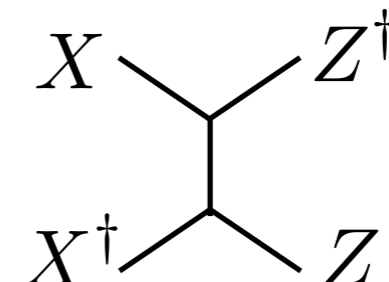
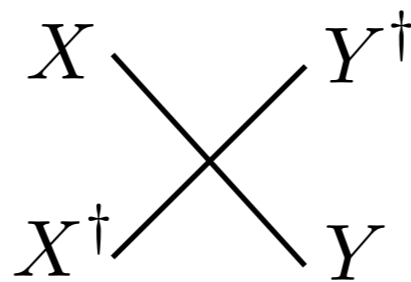
$$W = \frac{\lambda}{2} X^2 Y + m Y Z$$



$$c < 0$$

Example 2

$$W = \frac{\lambda}{2} X Y^2 + m Y Z$$



$$\dots \quad c > 0$$

設問 3

以下の模型で、重い場 V を integrate out して得られる EFT の c の符号を答えよ。

$$K = X^\dagger e^{-2V} X + m^2 V^2$$

$$f = \frac{1}{4g^2} W^\alpha W_\alpha$$



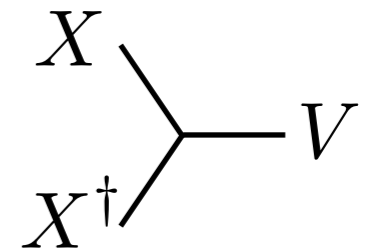
$$K = X^\dagger X - \frac{c}{4\Lambda^2} (X^\dagger X)^2$$

解答 3

以下の模型で、重い場 V を integrate out して得られる EFT の c の符号を答えよ。

$$K = X^\dagger e^{-2V} X + m^2 V^2$$

$$f = \frac{1}{4g^2} W^\alpha W_\alpha$$



**Note: the large s part
is non-negligible!**

$$K_{\text{eff}} = X^\dagger X - \frac{g^2}{m^2} (X^\dagger X)^2 + \dots$$

$$W_{\text{eff}} = 0$$

広義のイントロ

メインの議論

非自明な応用例

まとめ

1. イントロダクション
2. 現象論的な動機付け
3. UV理論とEFTの例
4. 散乱振幅の解析
5. ラージNゲージ理論
6. ストリングの散乱振幅
7. まとめと結論

Large N SUSY QCD

Low energy description

$$K = \text{Tr}(M^\dagger M) - \frac{c}{4\Lambda^2} \text{Tr}(M^\dagger M M^\dagger M)$$

Meson chiral superfields

$$M = \sqrt{2} M^a T^a + \frac{1}{\sqrt{N_f}} M^0 \cdot \mathbf{1}, \quad (a = 1, \dots, N_f^2 - 1)$$

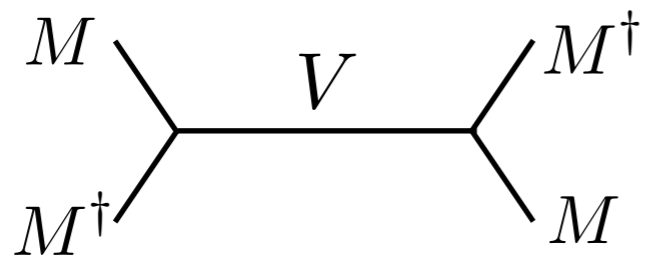
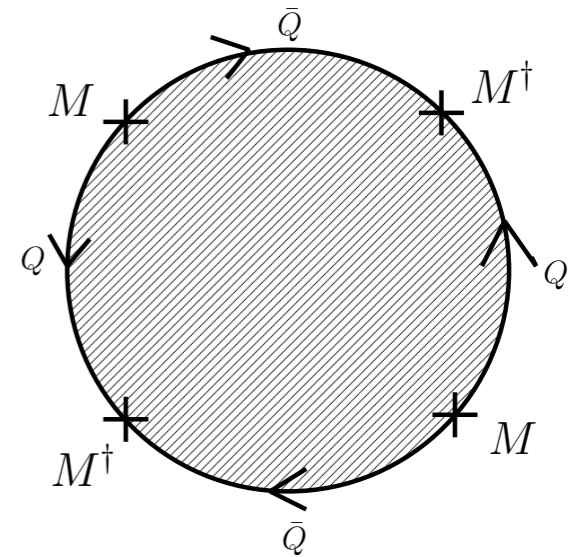
Consider the scattering process $M^a M^{0c} \rightarrow M^a M^{0c}$

$$A_{MM^\dagger}^{(a0)}(s, t) = \frac{c}{\Lambda^2} (s + t) + \dots$$

No u -channel process

The leading diagram in $1/N$ is a **disk**.

The **unique** disk diagram consistent with **chirality**:



s - or t -channel exchanges of **massive** vector (real) mesons

No u -channel process at this order!

$$\frac{c}{\Lambda^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty ds \left(\frac{\sigma_{MM^\dagger}(s)}{s} - \frac{\sigma_{MM}(s)}{s} \right) \quad (+ \text{ large } s \text{ part})$$

Large s doesn't contribute

Consider a sufficiently negative $t=t_0$, and argue that the limit $t \rightarrow 0$ is smooth.

Define:
$$\frac{\hat{c}(t)}{\Lambda^2} \equiv \left. \frac{d}{ds} A_{MM^\dagger}^{(a0)}(s, t) \right|_{s=0} = \frac{1}{2\pi i} \int_C ds \frac{A_{MM^\dagger}^{(a0)}(s, t)}{s^2}$$

Large s doesn't contribute

Consider a sufficiently negative $t=t_0$, and argue that the limit $t \rightarrow 0$ is smooth.

Define:
$$\frac{\hat{c}(t)}{\Lambda^2} \equiv \left. \frac{d}{ds} A_{MM^\dagger}^{(a0)}(s, t) \right|_{s=0} = \frac{1}{2\pi i} \int_C ds \frac{A_{MM^\dagger}^{(a0)}(s, t)}{s^2}$$

Asymptotic Freedom \rightarrow Quark Counting Rule for fixed-angle scattering

$$A(s, t) \sim s^{-2} \quad \begin{array}{l} \text{(large } s (>0) \text{ with } s/t (<0) \text{ fixed)} \\ \text{(A smooth transition b/w fixed } t \text{ and fixed } s/t \text{ is assumed.)} \end{array}$$

\rightarrow large s part does not contribute.

Large s doesn't contribute

Consider a sufficiently negative $t=t_0$, and argue that the limit $t \rightarrow 0$ is smooth.

Define:
$$\frac{\hat{c}(t)}{\Lambda^2} \equiv \left. \frac{d}{ds} A_{MM^\dagger}^{(a0)}(s, t) \right|_{s=0} = \frac{1}{2\pi i} \int_C ds \frac{A_{MM^\dagger}^{(a0)}(s, t)}{s^2}$$

Asymptotic Freedom \rightarrow Quark Counting Rule for fixed-angle scattering

(large s (>0) with s/t (<0) fixed)

$$A(s, t) \sim s^{-2}$$

(A smooth transition b/w fixed t and fixed s/t is assumed.)

\rightarrow large s part does not contribute.

$$\frac{\hat{c}(t)}{\Lambda^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{\text{Im}A(s, t)}{s^2} = \sum_{k=0}^\infty c_k(t_0) (t - t_0)^k$$

$$\text{Im}A(s, t) = \sum_{k=0}^\infty a_k(s, t_0) (t - t_0)^k$$

$$c_k(t_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{a_k(s, t_0)}{s^2}$$

The convergence radius of this series must be larger than $|t_0|$

because of the absence of t -channel massless/tachyonic singularity.

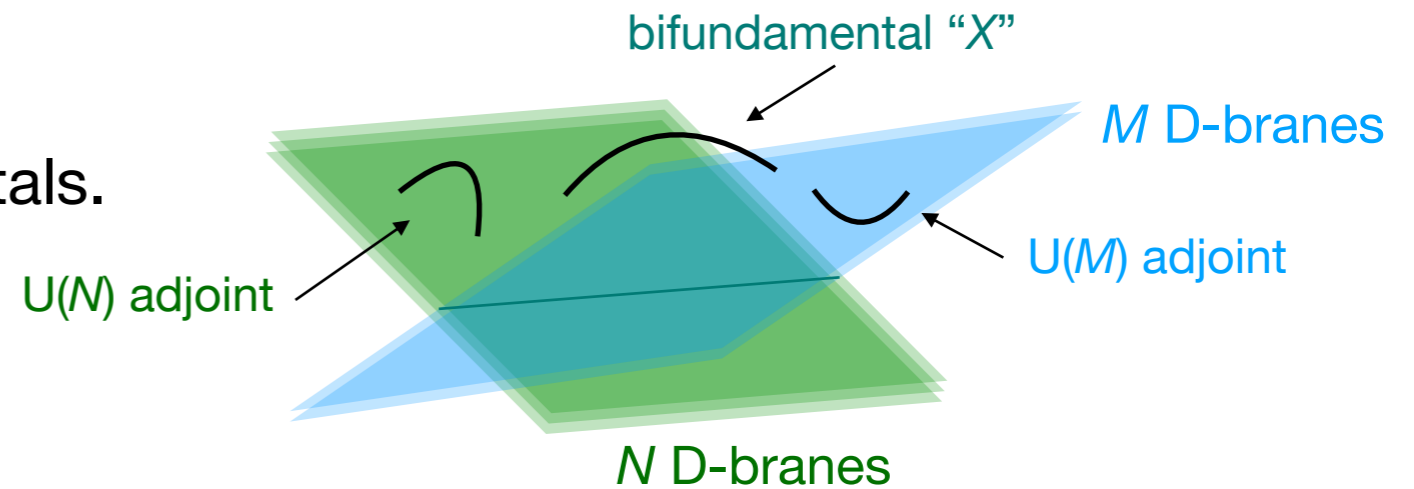
Open string amplitudes

Open string amplitudes

Intersecting D-brane models

Consider scattering of bifundamentals.

$$XX^c \rightarrow XX^c$$

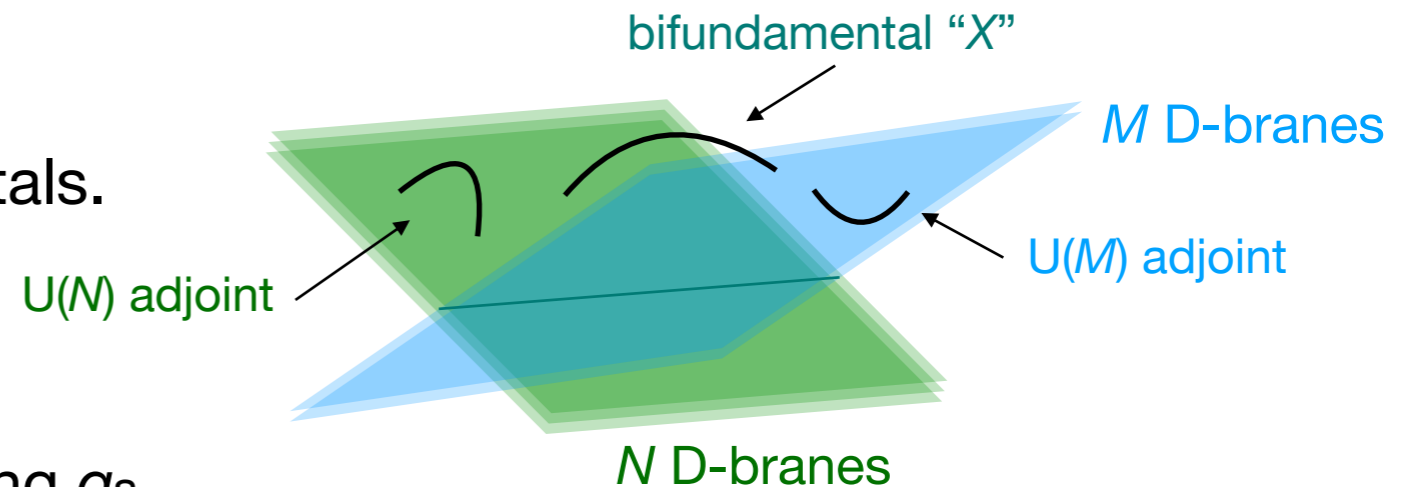


Open string amplitudes

Intersecting D-brane models

Consider scattering of bifundamentals.

$$XX^c \rightarrow XX^c$$



At the leading order of string coupling g_s ,

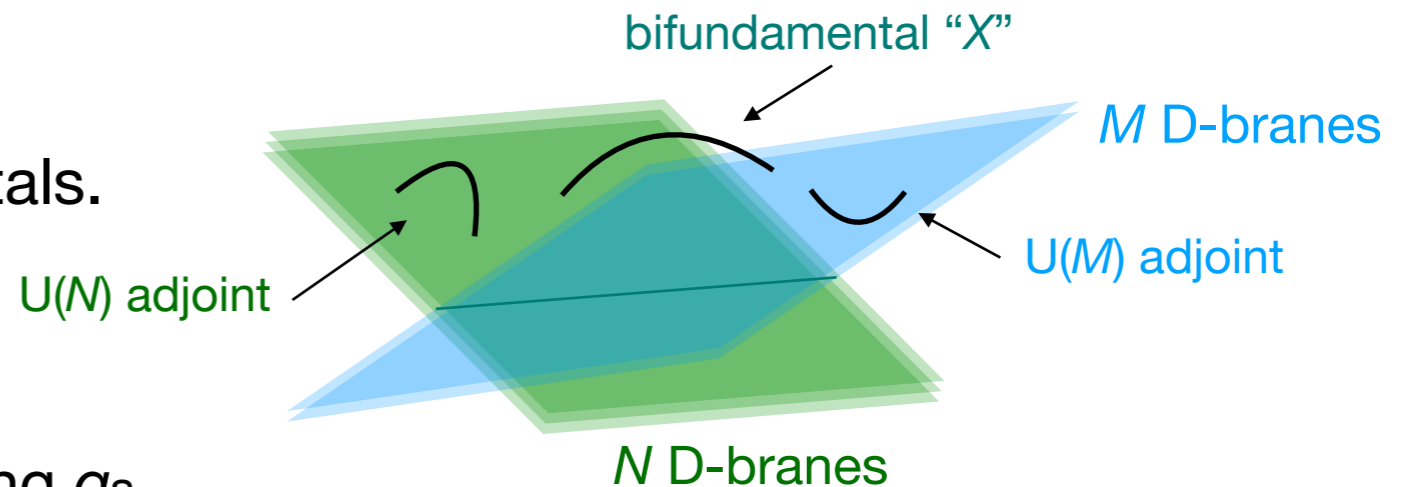
there are only **poles in s-channel** (as well as in t -channel). **No u -channel poles.**

Open string amplitudes

Intersecting D-brane models

Consider scattering of bifundamentals.

$$XX^c \rightarrow XX^c$$

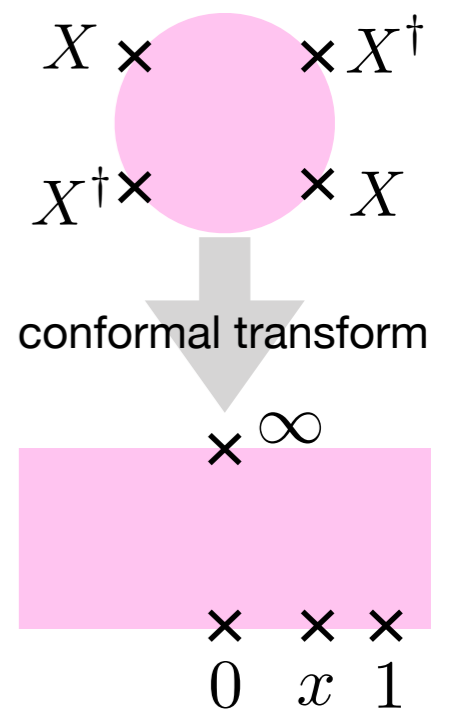


At the leading order of string coupling g_s ,

there are only **poles in s-channel** (as well as in t -channel). **No u -channel poles.**

The amplitude is of the form:

$$A_{XX^\dagger}(s, t) = g_s l_s^2 (s + t) \int_0^1 dx x^{-1-l_s^2 s} (1-x)^{-1-l_s^2 t} G(x)$$



We can explicitly check that the **large s contribution is zero**

for

[I. R. Klebanov and E. Witten, hep-th/0304079]

[I. Antoniadis, K. Benakli, and A. Laugier, hep-th/0011281]

Open string amplitudes

$$\frac{c}{\Lambda^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty ds \left(\frac{\sigma_{XX^+}(s)}{s} - \frac{\sigma_{XX}(s)}{s} \right) \text{ (+ large } s \text{ part)} > 0$$

Summary & Conclusion

まとめ

まとめ

- EFTの係数はS行列のユニタリティや解析性から非自明な制限を受ける。

まとめ

- EFTの係数はS行列のユニタリティや解析性から非自明な制限を受ける。
- 次元 6 の項の係数の符号を、特にSUSYの文脈で調べた。

$$K = X^\dagger X - \frac{c}{4\Lambda^2} (X^\dagger X)^2 \quad \text{cf.) SUSYを破る真空の安定性、インフレーションの予言}$$

まとめ

- EFTの係数はS行列のユニタリティや解析性から非自明な制限を受ける。
- **次元 6** の項の係数の**符号**を、特にSUSYの文脈で調べた。
$$K = X^\dagger X - \frac{c}{4\Lambda^2} (X^\dagger X)^2 \quad \text{cf.) SUSYを破る真空の安定性、インフレーションの予言}$$
- 係数の正負は**普遍的には決まらない**。
s/u-channel が勝てば c は**正/負**。無限遠積分も重要。

まとめ

- EFTの係数はS行列のユニタリティや解析性から非自明な制限を受ける。
- **次元 6** の項の係数の**符号**を、特にSUSYの文脈で調べた。
$$K = X^\dagger X - \frac{c}{4\Lambda^2} (X^\dagger X)^2 \quad \text{cf.) SUSYを破る真空の安定性、インフレーションの予言}$$
- 係数の正負は**普遍的には決まらない**。
s/u-channel が勝てば **c** は**正/負**。無限遠積分も重要。
- **Large N 超対称SU(N)ゲージ理論**の低エネルギー EFT
メソンの非自明な(1/N)主要項の係数は負。(c > 0)

まとめ

- EFTの係数はS行列のユニタリティや解析性から非自明な制限を受ける。
- **次元 6** の項の係数の**符号**を、特にSUSYの文脈で調べた。
$$K = X^\dagger X - \frac{c}{4\Lambda^2} (X^\dagger X)^2 \quad \text{cf.) SUSYを破る真空の安定性、インフレーションの予言}$$
- 係数の正負は**普遍的には決まらない**。
s/u-channel が勝てば **c** は**正/負**。無限遠積分も重要。
- **Large N 超対称SU(N)ゲージ理論**の低エネルギー EFT
メソンの非自明な(1/N)主要項の係数は負。(c > 0)
- **超弦理論の開弦セクター**も同様 (c > 0)。具体例で確認した。

結論

- (SUSY) EFT の係数の符号は、
Feynman diagram を計算しなくても分かる！
- SUSY breaking 模型や SUSY インフレーション模型で
係数の符号を選ぶと、**UV 理論**をある程度**指定している**事になる。

江間、北野、寺田, “Unitarity constraint on the Kähler curvature”, arXiv:1807.06940 [hep-th]