

高次対称性の破れに伴う

南部・ゴールドストーンモードを数える

[arXiv:2007.15901]

広野雄士

apctp

共同研究者: 日高義将(KEK)・横倉諒(KEK)

自発的対称性の破れ → 低エネルギー自由度

- 南部・ゴールドストーン(NG)モードの例
 - パイ中間子 in QCD
 - マグノン
 - 超流動フォノン(He^4 , He^3 , atomic BEC)
 - 格子フォノン
 - Kelvin(超流動渦糸の振動)
 - 光子
 - ...

南部・ゴールドストーンモードの数

- (内部)対称性の破れ $G \rightarrow H$
 - ローレンツ不変性あり

$$N_{\text{NG}} = N_{\text{BG}}$$

質量ゼロ粒子の数

破れた対称性の数

- 分散関係 $\omega = ck$ $k = |\mathbf{k}|$

磁性体: Heisenberg model $H = J \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j$

- $J > 0$: 反強磁性

$$N_{\text{NG}} = 2 \quad \omega \propto k$$



- $J < 0$: 強磁性

$$N_{\text{NG}} = 1 \quad \omega \propto k^2$$



対称性の破れのパターンは共通 $SO(3) \rightarrow SO(2)$

$$N_{\text{BG}} = 2$$

系の熱力学的性質:比熱

- $\omega \sim k^n$ のとき

$$C \sim T^{\frac{d}{n}}$$

d :空間次元

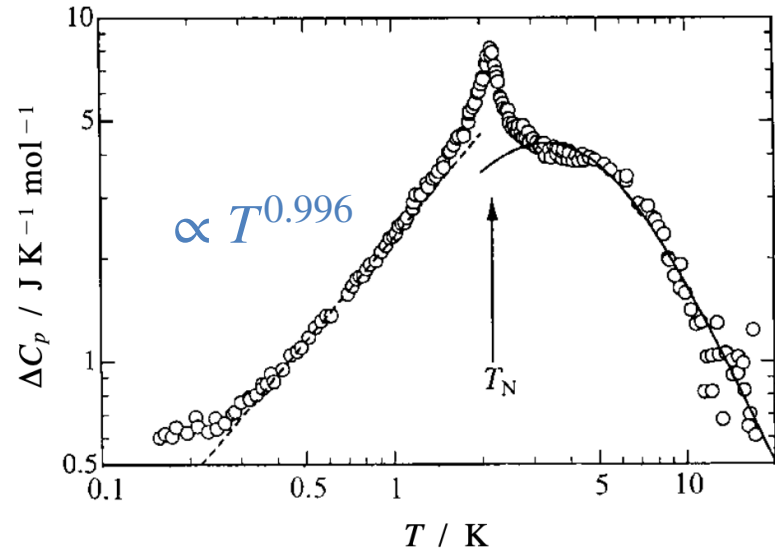


Fig.9 Excess heat capacities of $\text{MnCu}(\text{obbz}) \cdot 5\text{H}_2\text{O}$ around the antiferromagnetic phase transition temperature T_N . Solid line indicates the theoretical heat capacity curve estimated by the high-temperature series expansion for $S=2$ one-dimensional ferromagnetic Heisenberg model with $J/k_B=0.75$ K. The broken straight line shows the heat capacity due to the spin-wave excitation.³⁸⁾

違いは？

- 反強磁性: $\langle \hat{s}_z \rangle = 0$
- 強磁性: $\langle \hat{s}_z \rangle = \langle [\hat{s}_x, \hat{s}_y] \rangle \neq 0$
- $\langle [Q_A, Q_B] \rangle = 0$ for $\forall A, B \rightarrow N_{\text{NG}} = N_{\text{BG}}$

[Schafer-Son-Stephanov-Toublan-Verbaarschot '01]

南部・ゴールドストーンモードの数

- 非相対論的な系

$$N_{\text{NG}} = N_{\text{BG}} - \frac{1}{2} \text{rank} \langle [Q_A, Q_B] \rangle$$

質量ゼロ粒子の数

破れた対称性の数

[Watanabe-Brauner '11]

[Watanabe-Murayama'12] [Hidaka'12]

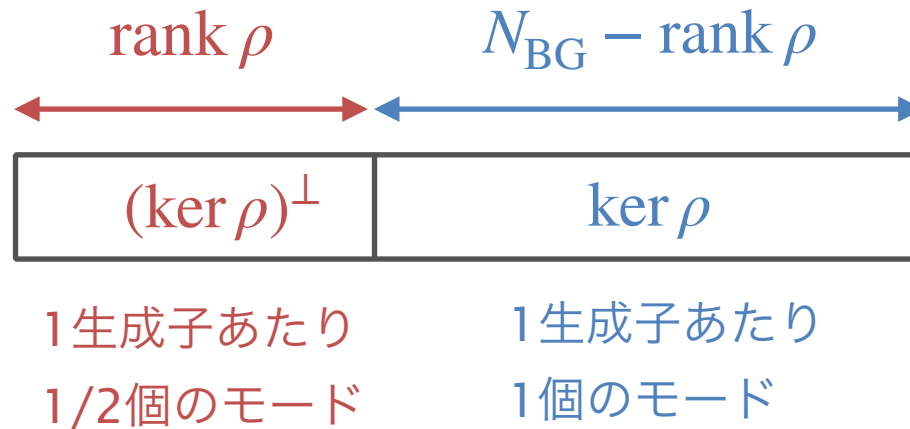
- 分散関係

- Type A: $\omega \sim k$
- Type B: $\omega \sim k^2$

有効場の理論からの理解

- 非相対論的な場合、場の2次・微分の2次までで、

$$\mathcal{L} = \rho_{AB} \pi^A \dot{\pi}^B + \frac{1}{2} G_{AB} \dot{\pi}^A \dot{\pi}^B - \frac{1}{2} \bar{G}_{AB} \partial_i \pi^A \partial^i \pi^B$$



$$N_{\text{NG}} = \frac{1}{2} \cdot \text{rank } \rho + 1 \cdot (N_{\text{BG}} - \text{rank } \rho) = N_{\text{BG}} - \frac{1}{2} \text{rank } \rho$$

高次対称性 (higher-form symmetry)

[Gaiotto-Kapustin-Seiberg-Willet '15]

- 対称性で変換するオブジェクトが**高次元**
 - “ p -form 対称性” → 電荷を持つ物体が p -次元



0-form 対称性



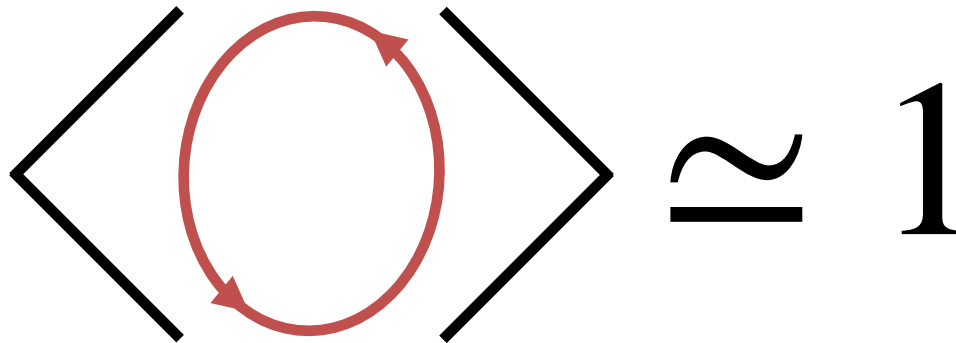
1-form 対称性

- $U(1)^{[p]}$ 対称性 $W(C_p) \rightarrow e^{i\alpha} W(C_p)$

高次対称性 (higher-form symmetry)

[Gaiotto-Kapustin-Seiberg-Willet '15]

- 連続な高次対称性のSSB → 質量ゼロ粒子



Perimeter law
あるいはCoulomb law

- $U(1)_e^{[1]}$ 1-form対称性の破れ → 光子、 $(3+1)$ -次元だと2個

• 疑問

- NGモードは何個出てくるのか？

- $\langle [Q_A, Q_B] \rangle \neq 0$ と関係するか？

- 0-formと1-formの電荷が交換しない例 [Sogabe-Yamamoto'19]

高次対称性のNGモード数

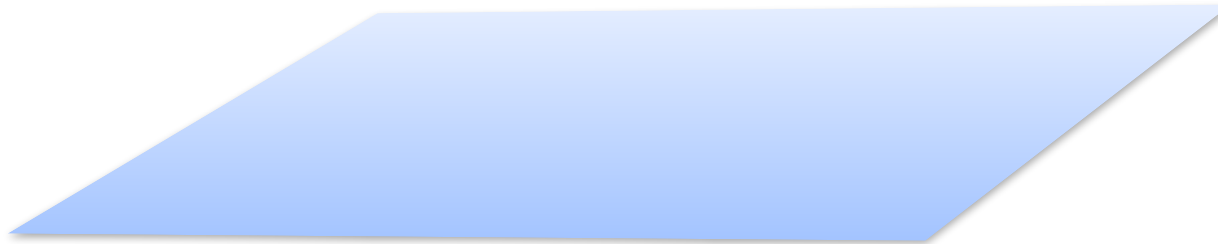
$$N_{\text{NG}} = \sum_A D-2 C_{p_A} - \frac{1}{2} \text{rank} \langle [Q_\alpha, Q_\beta] \rangle$$

[Hidaka-Hirono-Yokokura '20]

- 内部対称性(高次対称性を含む)のSSB
- D -次元 Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{1,D-1}$
 - ローレンツ対称性はなくても良い
 - 並進対称性は破れていない
- ラベル A : p_A -form 対称性の生成子

高次対称性のNGモード数

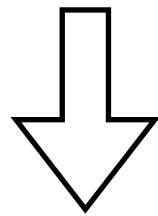
- 生成子 Q_α は置き方も含めて独立なものを列挙する
 - 0-form 対称性の場合、生成子 $Q(V)$ は $(D-1)$ -次元
 - p -form 対称性だと、生成子の次元は $D-p-1$ なので空間次元より小さくなりうる
 - 例) (3+1)次元の1-form対称性 → 生成子は2次元



$$U(e^{i\alpha}, S) = e^{i\alpha Q^{[1]}(S)}$$

高次対称性のNGモード数

$$N_{\text{NG}} = \sum_A D-2 C_{p_A} - \frac{1}{2} \text{rank} \langle [Q_\alpha, Q_\beta] \rangle$$



全ての対称性が 0-form

$$N_{\text{NG}} = N_{\text{BG}} - \frac{1}{2} \text{rank} \langle [Q_\alpha, Q_\beta] \rangle$$

以前の結果を再現

[Watanabe-Brauner '11]

[Watanabe-Murayama'12] [Hidaka'12]

高次対称性のNGモード数

$$N_{\text{NG}} = \sum_A D-2 C_{p_A} - \frac{1}{2} \text{rank} \langle [Q_\alpha, Q_\beta] \rangle$$

- (3 + 1) 次元での光子
- 破れた対称性: $U(1)_e^{[1]}$

$$N_{\text{NG}} = D-2 C_p = 2 \quad D = 4, \quad p = 1$$

例) θ gradient の下での光子

[Yamamoto '16]

- Lagrangian

$$L = -\frac{1}{2e^2} f \wedge \star f - \frac{\theta}{2\pi} f \wedge f$$

- $d\theta = C = C_i dx^i \neq 0$

- 破れた対称性: $U(1)_e^{[1]}$

- 保存電荷 $Q^{[1]}(S)$

- 電荷の交換子 $\langle [Q^{[1]}(S_1), Q^{[1]}(S_2)] \rangle \propto \int_{S_1 \cap S_2} d\theta \neq 0$

例) θ gradient の下での光子

S_1

$$\langle [Q^{[1]}(S_1), Q^{[1]}(S_2)] \rangle \propto \int_{S_1 \cap S_2} d\theta \neq 0$$

S_2

例) θ gradient の下での光子

- 独立な生成子: $\{Q^{[1]}(S_x), Q^{[1]}(S_y), Q^{[1]}(S_z)\}$

S_i は i 軸に垂直な2次元面

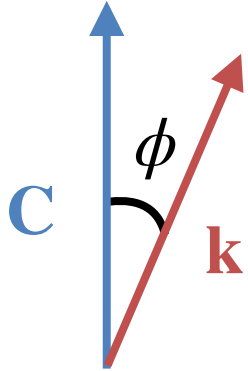
- 交換子の期待値

$$M_{ij} = \langle [Q^{[1]}(S_i), Q^{[1]}(S_j)] \rangle \propto \epsilon_{ijk} C_k$$

- NGモードの数

$$N_{\text{NG}} = D-2 C_1 - \frac{1}{2} \text{rank } M_{ij} = 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

例) θ gradient の下での光子



分散関係

$$\omega^2(k) = \begin{cases} C^2 + (2 - \sin^2 \phi)k^2 + O(k^4) \\ \sin^2 \phi k^2 + \frac{\cos^4 \phi}{C^2} k^4 + O(k^6) \end{cases}$$

massive
massless

$$C := |\mathbf{C}|$$

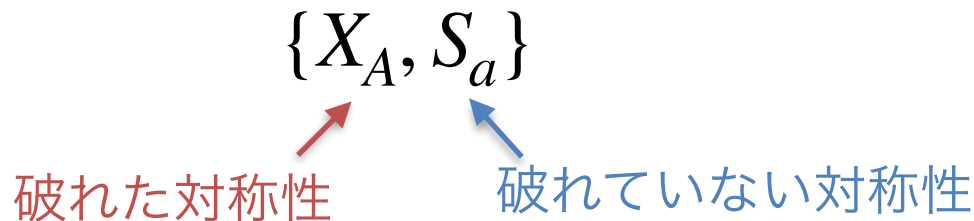
- $\mathbf{C} \parallel \mathbf{k}$ のとき $\omega \sim k^2$
- その他の場合は $\omega \sim k$
- 分散関係について一般的なことを言うのは、
高次対称性の場合には難しそう

導出: 有効場の理論

- NGモードの有効場の理論
 - 対称性からくる制限と consistent な項を書き下す
 - 微分展開
- 高次形式対称性の場合には？

コセット構成 - 0-form 対称性

- NGモード場: G/H の座標 $\xi(x) = e^{i\pi^A(x)X_A}$



- 変換性: $g\xi(\pi) \in G$ なので、

$$g\xi(\pi) = \xi(\pi')h(\theta(\pi, g)) \quad h(\theta) = e^{i\theta^a(x)S_a}$$

- コセット変数の、 $g \in G$ の下での変換は、

$$\xi(\pi) \mapsto \xi(\pi') = g \xi(\pi) h^{-1}(\theta(\pi, g))$$

コセット構成 - 0-form 対称性

- Maurer-Cartan (MC) 形式

$$\omega(x) = -i\xi^{-1}(x) d\xi(x)$$

$$= \omega_{\perp} + \omega_{\parallel}$$

破れた対称性

破れていない対称性

- $g \in G$ の下での変換性

$$\omega_{\perp} \mapsto h \omega_{\perp} h^{-1}$$

$$\omega_{\parallel} \mapsto h \omega_{\parallel} h^{-1} - i h d h^{-1}$$

コセット構成 - 0-form 対称性

- ローレンツ不変な系では、

$$\mathcal{L} = -F^2 \operatorname{tr} \left[\omega_{\perp} \wedge \star \omega_{\perp} \right] = -F^2 \operatorname{tr} \left[\omega_{\perp\mu} \omega_{\perp}^{\mu} \right]$$

- $\omega_{\perp} = e^A_B(\pi) d\pi^B X_A$ と書くと、

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} G_{AB}(\pi) d\pi^A \wedge \star d\pi^B$$

$G_{AB} = F^2 e_{CA}(\pi) e^C_B(\pi)$ は G/H 上の G -不変なメトリック

コセット構成 - 0-form 対称性

- 非相対論的な場合、下記の様な項が可能

$$F_t^2 \operatorname{tr} [(\omega_{\perp 0})^2] - F_s^2 \operatorname{tr} [\omega_{\perp i} \omega_{\perp}^i]$$

- 時間一回微分の項:

$$\operatorname{tr} [\omega_{\perp 0} X_A], \quad \operatorname{tr} [\omega_{\parallel 0} S_a]$$

$$\operatorname{tr} [\omega_{\perp 0} X_A] \mapsto \operatorname{tr} [\omega_{\perp 0} h^{-1} X_A h]$$

$$[X_A, S_a] = 0 \quad \text{for } \forall S_a$$

であれば不変

$$\operatorname{tr} [\omega_{\parallel 0} S_a] \mapsto \operatorname{tr} [\omega_{\parallel 0} h^{-1} S_a h] - i \operatorname{tr} [S_a h \partial_0 h^{-1}]$$

$$[S_a, S_b] = 0 \quad \text{for } \forall S_b$$

であれば不変

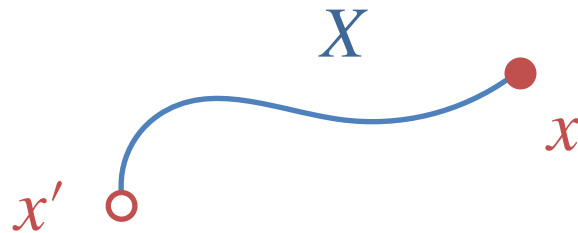
高次対称性への拡張

$U(1)^{[p]}$ の破れ \rightarrow コセット変数 $W(C_p) = \exp i \int_{C_p} a^{(p)}$

この変数には冗長性がある: $a^{(p)} \mapsto a^{(p)} + d\theta^{(p-1)}$

MC形式を以下のように書いてみる

$$\omega = -i\xi^\dagger(x)d\xi(x) \quad \Longrightarrow \quad \xi^\dagger(x')\xi(x) = \text{Pe}^{i\int_X \omega}$$

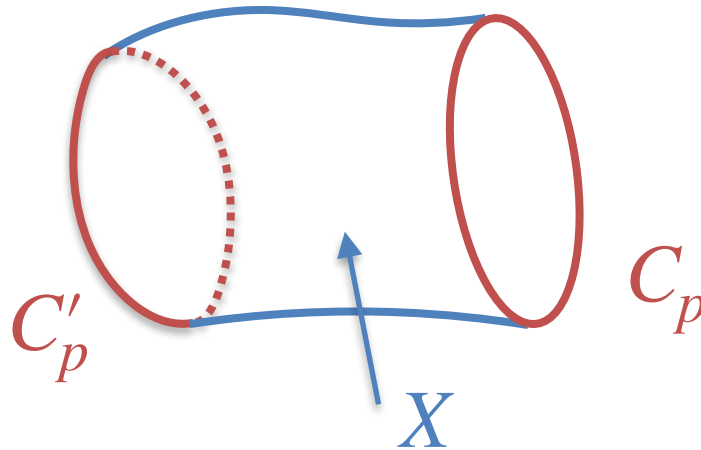


$$\partial X = \{x\} \cup \{-x'\}$$

“ X の選択によらない” \Longrightarrow MC方程式 $d\omega + i\omega \wedge \omega = 0$

高次対称性への拡張

$$\xi^\dagger(x')\xi(x) = \text{P}e^{i\int_X \omega} \Rightarrow W^\dagger(C'_p)W(C_p) = e^{i\int_X f^{(p+1)}}$$



$$\partial X = \{C_p\} \cup \{-C'_p\}$$

“ X の選択によらない” $\Rightarrow df^{(p+1)} = 0$

高次対称性への拡張

コセット変数 $W(C_p) = \exp i \int_{C_p} a^{(p)}$

冗長性 $a^{(p)} \mapsto a^{(p)} + d\theta^{(p-1)}$

MC形式の一般化 $W^\dagger(C'_p)W(C_p) = e^{i \int_X f^{(p+1)}}$

$f^{(p+1)} = da^{(p)}$ と書け、 $df^{(p+1)} = 0$ が成立

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2e^2} f^{(p+1)} \wedge \star f^{(p+1)}$$

$f^{(p+1)}$ は Maxwell理論での「場の強さ」と同定できる

MC方程式 \leftrightarrow Bianchi恒等式 \leftrightarrow magnetic対称性

有効ラグランジアン

- 非相対論的な場合、一回微分の項が可能

$$\Omega_{AB} \wedge a_A \wedge da_B \quad \Omega_{AB} \text{ は } (D - p_A - p_B - 1)\text{-form}$$

- 0-formの場合は、 $\Omega_{AB} \propto dx \wedge dy \wedge dz$ に相当($D = 4$ の場合)

- この項があるとき、 $\langle [Q_A^{[p_A]}(V_A), Q_B^{[p_B]}(V_B)] \rangle \propto \int_{V_A \cap V_B} \Omega_{AB}$

$V_A : (D - p_A - 1)$ -次元部分空間, $V_B : (D - p_B - 1)$ -次元部分空間

まとめ

- NGモードの数を与える公式を、高次対称性へ一般化

$$N_{\text{NG}} = \sum_A D-2 C_{p_A} - \frac{1}{2} \text{rank} \langle [Q_\alpha, Q_\beta] \rangle$$

- 分散関係に関する一般論は不明
- 高次対称性の破れに対する有効場の理論
 - MC形式の、高次対称性への一般化
 - MC方程式 \leftrightarrow Bianchi 恒等式 \leftrightarrow magnetic対称性

Backup slides

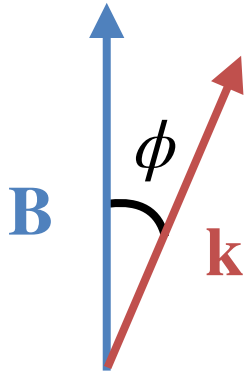
中性パイオン + 光子 + 外部磁場

- 運動項 $L_{\text{kin}} = -\frac{1}{2e^2} f \wedge \star f - \frac{1}{2} v^2 d\pi \wedge \star d\pi$
- mixing $L_{\text{mix}} = c \pi (f + B) \wedge (f + B) \supset 2c \pi f \wedge B$
- 電荷の交換子 $\langle [Q_A^{[0]}(V), Q_e^{[1]}(S)] \rangle \propto \int_{V \cap S} B$ [Sogabe-Yamamoto'19]
- $Q_\alpha = \{Q_A^{[0]}(V), Q_e^{[1]}(S_x), Q_e^{[1]}(S_y), Q_e^{[1]}(S_z)\}$

$$\text{rank} \langle [Q_\alpha, Q_\beta] \rangle = \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{B}^T \\ -\mathbf{B} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{pmatrix} = 2$$

- NG粒子の数は、 $N_{\text{NG}} = (1 + 2) - \frac{1}{2} \cdot 2 = 2$

中性パイオン + 光子 + 外部磁場



分散関係

$$\omega^2(k) = \begin{cases} \alpha^2 + (1 + \sin^2 \phi)k^2 + O(k^4) \\ \cos^2 \phi k^2 + \frac{\sin^4 \phi}{\alpha^2} k^4 + O(k^6) \\ k^2 \end{cases}$$

massive

massless

massless

$$\alpha := \frac{c |\mathbf{B}|}{v}$$

- $\mathbf{B} \perp \mathbf{k}$ のとき $\omega \sim k^2$
- その他の場合は $\omega \sim k$