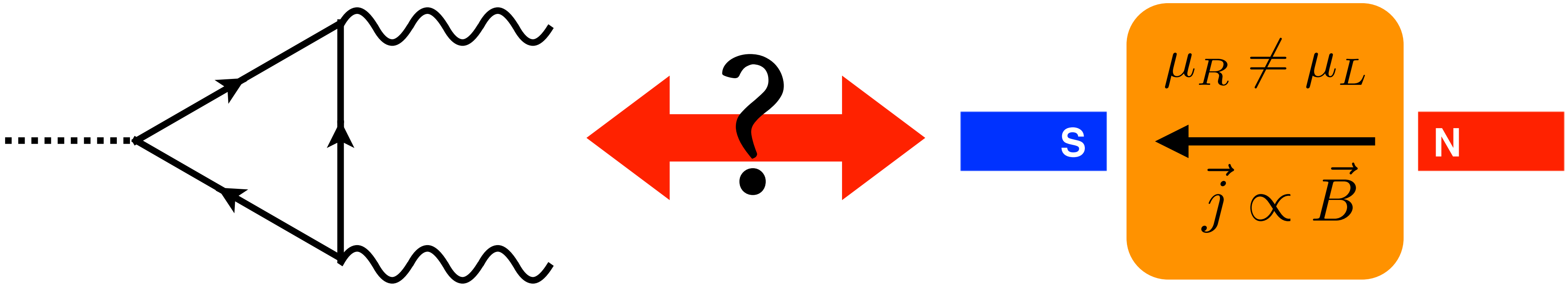
流体力学における
アノマリーマッチング



本郷 優 (イリノイ大学シカゴ校・理研iTHEMS)

京都大学 基礎物理学研究所, 基研研究会 素粒子物理学の進展 2020, 2020年 9月1日

Based on MH Ann. Phys. (2017), MH-Hidaka arXiv:1902.09166 [hep-th]

2020年代の物理＝ 流体力学

大前提：南部さんの物理は10年先の物理

小前提：最近は流体力学が面白い(2013)

ノーベル賞:南部さん阪大講演　「寝てても発見探し」

毎日新聞　2013年07月17日　03時25分（最終更新　07月17日　04時21分）

　南部さんは長く米国で教壇に立っていたが、数年前から同市で暮らしている。記者会見ではさらに、「家に帰っても、寝ているときも何か新しい発見はないかと考え続けている。最近は流体力学が面白い」と物理学への衰えぬ情熱を語っていた。【斎藤広子】

結論：2020年代は流体力学ルネサンス!!

流体力学ルネサンス 2010s

hep-th界隈(+α)の寄与で主に2つの大きな進展があった
場の理論の言葉でまとめると

1. 分配(汎)関数の構造 (虚時間形式)

"Hydrostatic"分配関数　　　　カレントの局所熱平衡期待値

$$Z[g_{\mu\nu}, A_\mu] \Rightarrow \langle \hat{T}^{\mu\nu}(x) \rangle = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \log Z}{\delta g_{\mu\nu}(x)}, \cdots$$

2. 有効ラグランジアンの方法 (実時間形式)

$$Z[g_{\mu\nu}, A_\mu] = \int \mathcal{D}\pi_{\mathrm{hydro}} \exp\left(\mathrm{i}\mathcal{S}_{\mathrm{eff}}[\pi_{\mathrm{hydro}}]\right)$$

(QCDで言うと，カイラルラグランジアンの構築に対応)

hep-th的な流体力学の理解

2. 有効ラグランジアンの方法 (実時間形式)

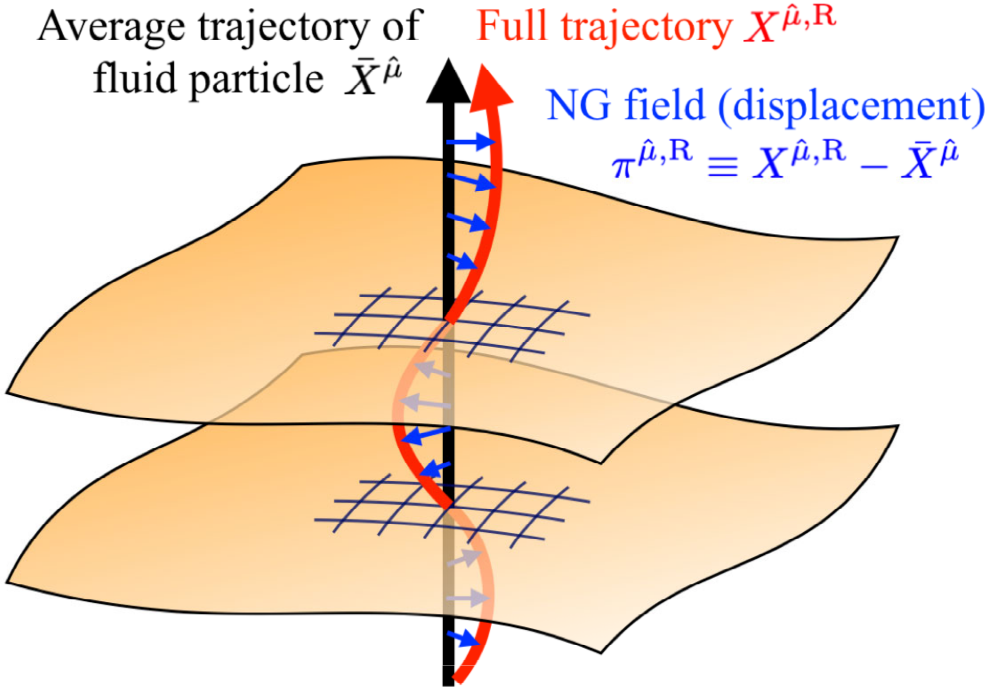
$$Z[g_{\mu\nu}, A_\mu] = \int \mathcal{D}\pi_{\mathrm{hydro}} \exp\left(\mathrm{i}\mathcal{S}_{\mathrm{eff}}[\pi_{\mathrm{hydro}}]\right)$$

(QCDで言うと，カイラルラグランジアンの構築に対応)

流体力学は

$$\begin{cases} \sigma^0 \to \sigma^0 + f(\sigma^0, \sigma^i) \\ \sigma^i \to \sigma^i + g^i(\sigma^i) \end{cases}$$

という創発ゲージ対称性を持つ
時空を埋めるブレーン $X^\mu(\sigma^0, \sigma^i)$
で記述される低エネルギー有効理論



[詳しくは Crossley et al. arXiv: 1511.03646 [hep-th], MH et al. ongoing work]

流体力学ルネサンス 2010s

hep-th界隈(+α)の寄与で主に2つの大きな進展があった

場の理論の言葉でまとめると

1. 分配(汎)関数の構造 (虚時間形式)

"Hydrostatic"分配関数　　　　カレントの局所熱平衡期待値

$$Z[g_{\mu\nu}, A_\mu] \Rightarrow \langle \hat{T}^{\mu\nu}(x) \rangle = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \log Z}{\delta g_{\mu\nu}(x)}, \cdots$$

2. 有効ラグランジアンの方法 (実時間形式)

$$Z[g_{\mu\nu}, A_\mu] = \int \mathcal{D}\pi_{\mathrm{hydro}} \exp\left(\mathrm{i}\mathcal{S}_{\mathrm{eff}}[\pi_{\mathrm{hydro}}]\right)$$

(QCDで言うと，カイラルラグランジアンの構築に対応)

流体力学ルネサンス 2010s

hep-th界隈(+α)の寄与で主に2つの大きな進展があった

場の理論の言葉でまとめると

1. 分配(汎)関数の構造 (虚時間形式)

"Hydrostatic"分配関数 → カレントの局所熱平衡期待値

$$Z[g_{\mu\nu}, A_\mu] \rightarrow \langle \hat{T}^{\mu\nu}(x) \rangle = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \log Z}{\delta g_{\mu\nu}(x)}, \cdots$$

2. 有効ラグランジアンの方法 (実時間形式)

$$Z[g_{\mu\nu}, A_\mu] = \int \mathcal{D}\pi_{\mathrm{hydro}} \exp\left(\mathrm{i}\mathcal{S}_{\mathrm{eff}}[\pi_{\mathrm{hydro}}]\right)$$

(QCDで言うと，カイラルラグランジアンの構築に対応)

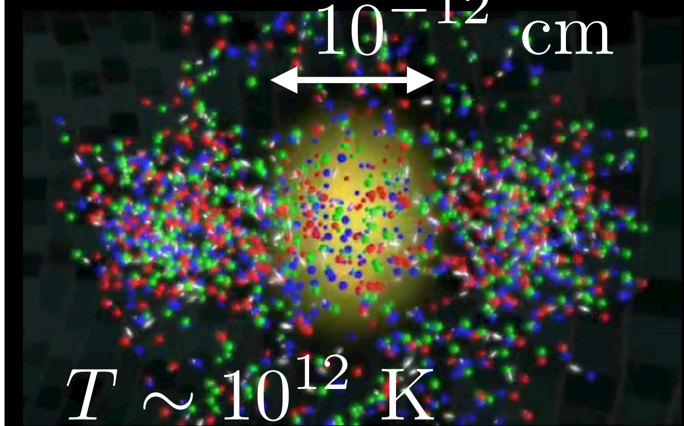
出題編1

そもそも流体力学とは?

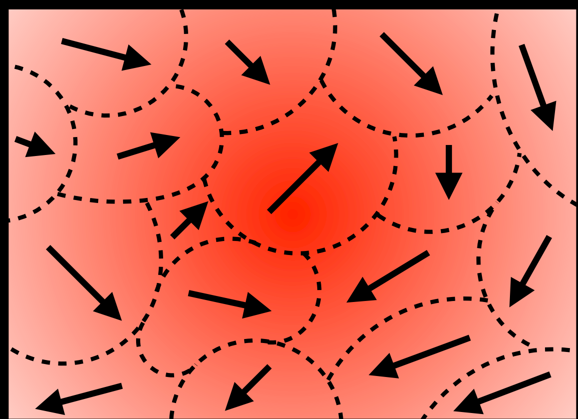
流体力学とは？

- 系の詳細によらない，ユニバーサルな記述を行う
- マクロなダイナミクスを記述する有効理論
- 保存量のみに注目 〜 系の対称性のみに注目

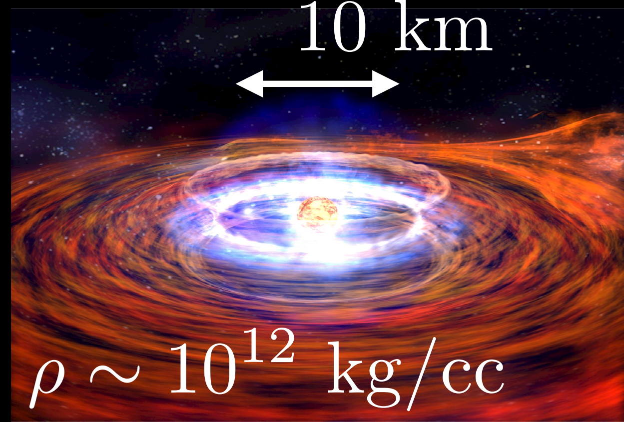
クォーク・グルーオン プラズマ　　流体力学 $\{\beta(x),\ \vec{v}(x)\}$　　中性子星



$\simeq$



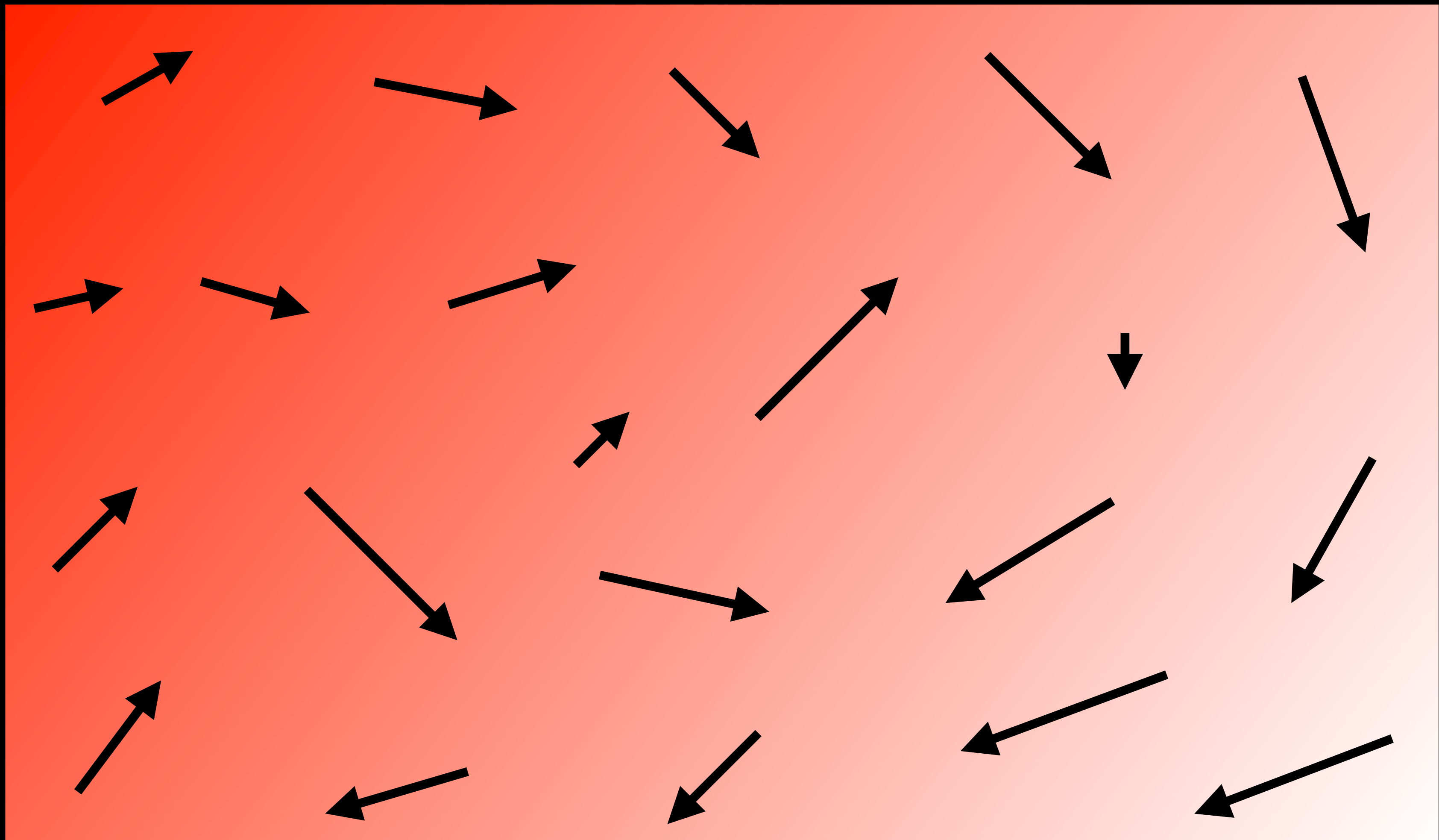
$\simeq$



http://www.bnl.gov/rhic/news2/news.asp?a=1403&t=pr

http://newsoffice.mjitugenn.edu/2012/model-bursting-star-0302

流体力学の理論構造



流体力学の理論構造

保存則

$$\nabla_\mu \langle \hat{T}^{\mu\nu}(x) \rangle = 0, \quad \nabla_\mu \langle \hat{J}^{\mu}(x) \rangle = 0$$

(3+1)次元の理論 with U(1) symmetryを考えると

運動方程式の数：	4	+	1	=	5	保存則だけでは方程式が足りず解けない！
成分の数：	10 $(T^{\mu\nu})$	+	4 (J^{μ})	=	14	

保存則を解ける形にするためには,

カレントの空間成分を時間成分で表す式(構成方程式)が必要

$$T^{ij} = T^{ij}[T^{0\mu}, J^0], \; J^i = J^i[T^{0\mu}, J^0]$$

流体力学の理論構造

保存則

$$\nabla_\mu \langle \hat{T}^{\mu\nu}(x) \rangle = 0, \quad \nabla_\mu \langle \hat{J}^\mu(x) \rangle = 0$$

(3+1)次元の理論 with U(1) symmetryを考えると

運動方程式の数：	4	+	1	=	5
独立な成分の数：	10 - 6	+	4 - 3	=	14 - 9
	$(T^{\mu\nu})$		(J^μ)		

保存則だけでは方程式が足りず解けない！

保存則を解ける形にするためには,
カレントの空間成分を時間成分で表す式(構成方程式)が必要

$$T^{ij} = T^{ij}[T^{0\mu}, J^0], \ J^i = J^i[T^{0\mu}, J^0]$$

流体力学の理論構造

保存則

$$\nabla_\mu \langle \hat{T}^{\mu\nu}(x) \rangle = 0, \quad \nabla_\mu \langle \hat{J}^\mu(x) \rangle = 0$$

(3+1)次元の理論 with U(1) symmetryを考えると

運動方程式の数：	4	+	1	=	5
独立な成分の数：	10 - 6 ($T^{\mu\nu}$)	+	4 - 3 (J^μ)	=	14 - 9

保存則 + 構成方程式 で解ける！

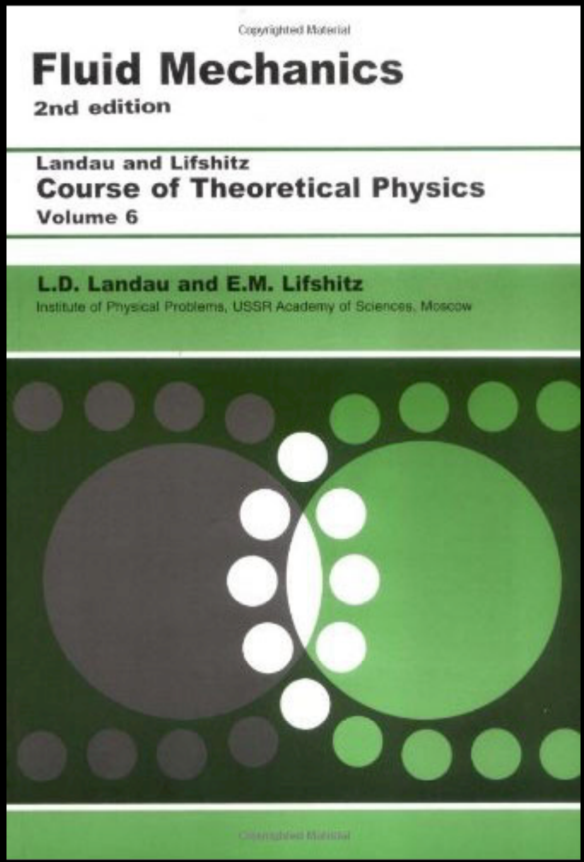
➡ 保存則を解ける形にするためには,
カレントの空間成分を時間成分で表す式(構成方程式)が必要

$$T^{ij} = T^{ij}[T^{0\mu}, J^0], \; J^i = J^i[T^{0\mu}, J^0]$$

相対論的流体力学の場合

Q. 何故 $T^{\mu\nu} = (e+p)u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu} + \cdots$?

Answer 1.



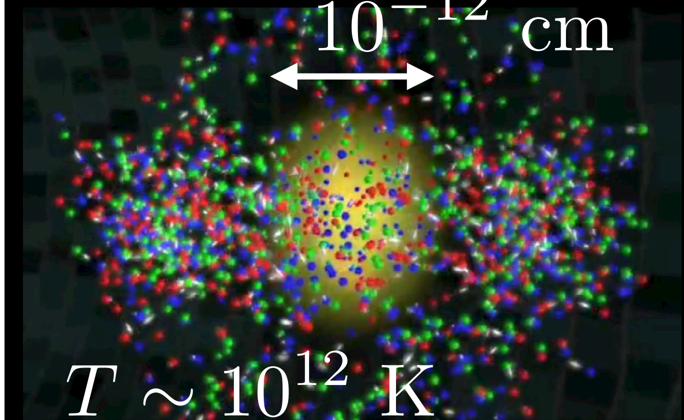
Answer2. トークの[目標1]

出題編2
流体力学とアノマリー

流体力学とは？

- 系の詳細によらない，**ユニバーサル**な記述を行う
- **マクロなダイナミクス**を記述する**有効理論**
- **保存量のみ**に注目 〜 系の~~対称性のみ~~に注目

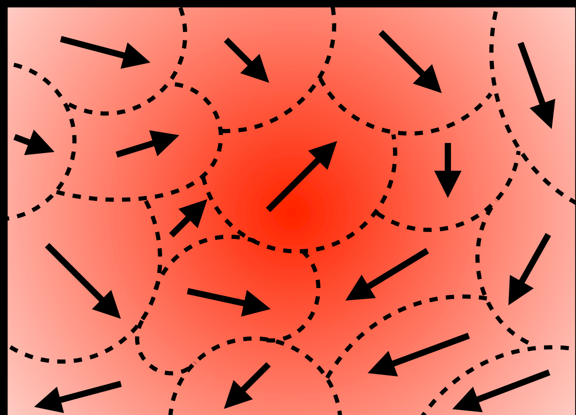
クォーク・グルーオン プラズマ



http://www.bnl.gov/rhic/news2/news.asp?a=1403&t=pr

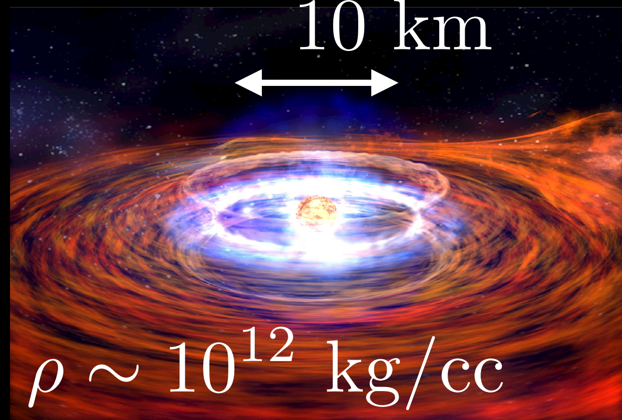
$\simeq$

流体力学 $\{\beta(x),\ \vec{v}(x)\}$



$\simeq$

中性子星

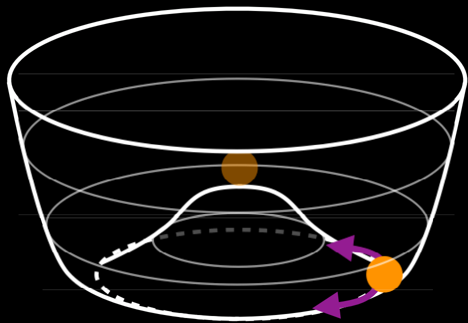


http://newsoffice.mjitugenn.edu/2012/model-bursting-star-0302

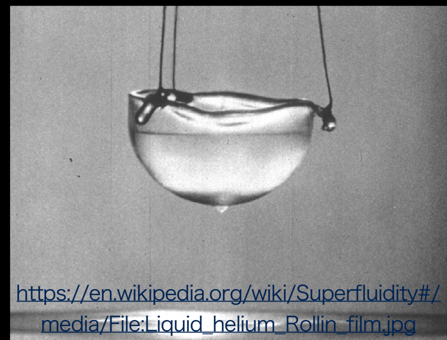
対称性の破れと流体力学

◆ 自発的な対称性の破れ

ミクロな現れ：真空の選択

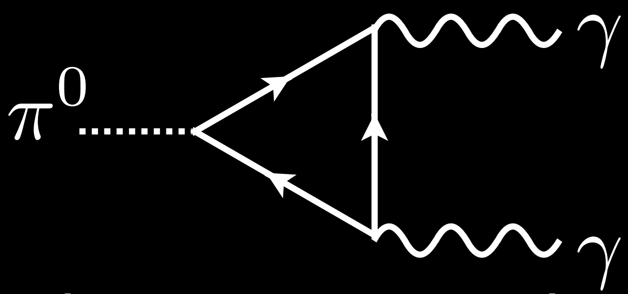


マクロな現れ：超流動



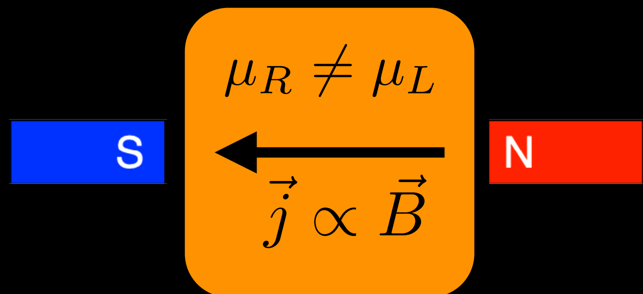
◆ 量子異常による対称性の破れ

ミクロな現れ：π^0崩壊



[Adller 1969, Bell-Jackiw 1969]

マクロな現れ：カイラル輸送現象



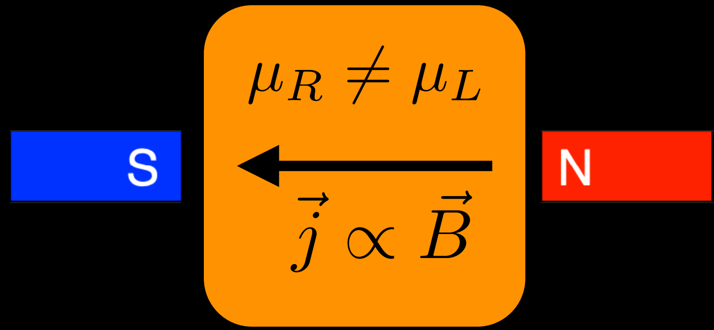
[Erdmenger et al. 2008, Son-Surowka 2009]

量子異常に起因したカイラル輸送

◆ カイラル磁気効果 (CME)

[Fukushima et al.2008, Vilenkin 1980]

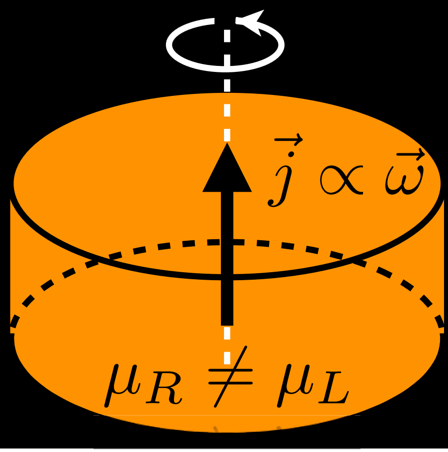
$$\vec{J}_V = \frac{\mu_5}{2\pi^2}\vec{B}$$



◆ カイラル渦効果 (CVE)

[Erdmenger et al. 2008, Son-Surowka 2009]

$$\vec{J}_V = \frac{\mu\mu_5}{2\pi^2}\vec{\omega}$$



カイラル輸送現象の導出

- 流体/重力(AdS/CFT)対応 [Erdmenger et al. 2008]

- 局所熱力学第二法則を用いた現象論 [Son-Surowka 2009]

- 線形応答理論に基づいた摂動論的解析 [Landsteiner et al, 2011]

- Berry位相を考慮したカイラル運動論 [J-H Gao et al, 2012 Son-Yamamoto, 2012, Stephanov-Yin, 2012, …]

- 局所熱平衡分配関数に対するアノマリーマッチング
[Jensen et al, 2012, Banerjee et al, 2012, (See Hongo-Hidaka, 2019 for a review)]

- カレント代数における異常交換関係
[Hongo-Sogabe-Yamamoto, ongoing]

カイラル輸送現象の導出

- 流体/重力(AdS/CFT)対応 [Erdmenger et al. 2008]

- 局所熱力学第二法則を用いた現象論 [Son-Surowka 2009]

- 線形応答理論に基づいた摂動論的解析 [Landsteiner et al, 2011]

- Berry位相を考慮したカイラル運動論 [J-H Gao et al, 2012
Son-Yamamoto, 2012,
Stephanov-Yin, 2012, …]

- 局所熱平衡分配関数に対するアノマリーマッチング
[Jensen et al, 2012, Banerjee et al, 2012, (See Hongo-Hidaka, 2019 for a review)]

- カレント代数における異常交換関係
[Hongo-Sogabe-Yamamoto, ongoing]

't Hooft アノマリーマッチング

◆ 't Hooftアノマリーの定義

$$Z[A+\mathrm{d}\theta] = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathcal{A}[A;\theta]} Z[A]$$

A : 大域対称性に結合する背景ゲージ場

(位相 $\mathrm{i}\mathcal{A}[A;\theta]$ がゲージ不変な局所相殺後で**取り除けない**)

◆ 't Hooftアノマリーマッチング

位相 $\mathrm{i}\mathcal{A}[A;\theta]$ は**RG不変** ➡ UVで見つけたら**IRの物理**を縛る

➡ **自明な(縮退のない)真空**は許されない

- 古典的な応用：massless QCDの真空はカイラル対称性を破る(だろう)
- 現代的な応用：高次対称性や離散対称性への適用 [米倉さんのトーク]

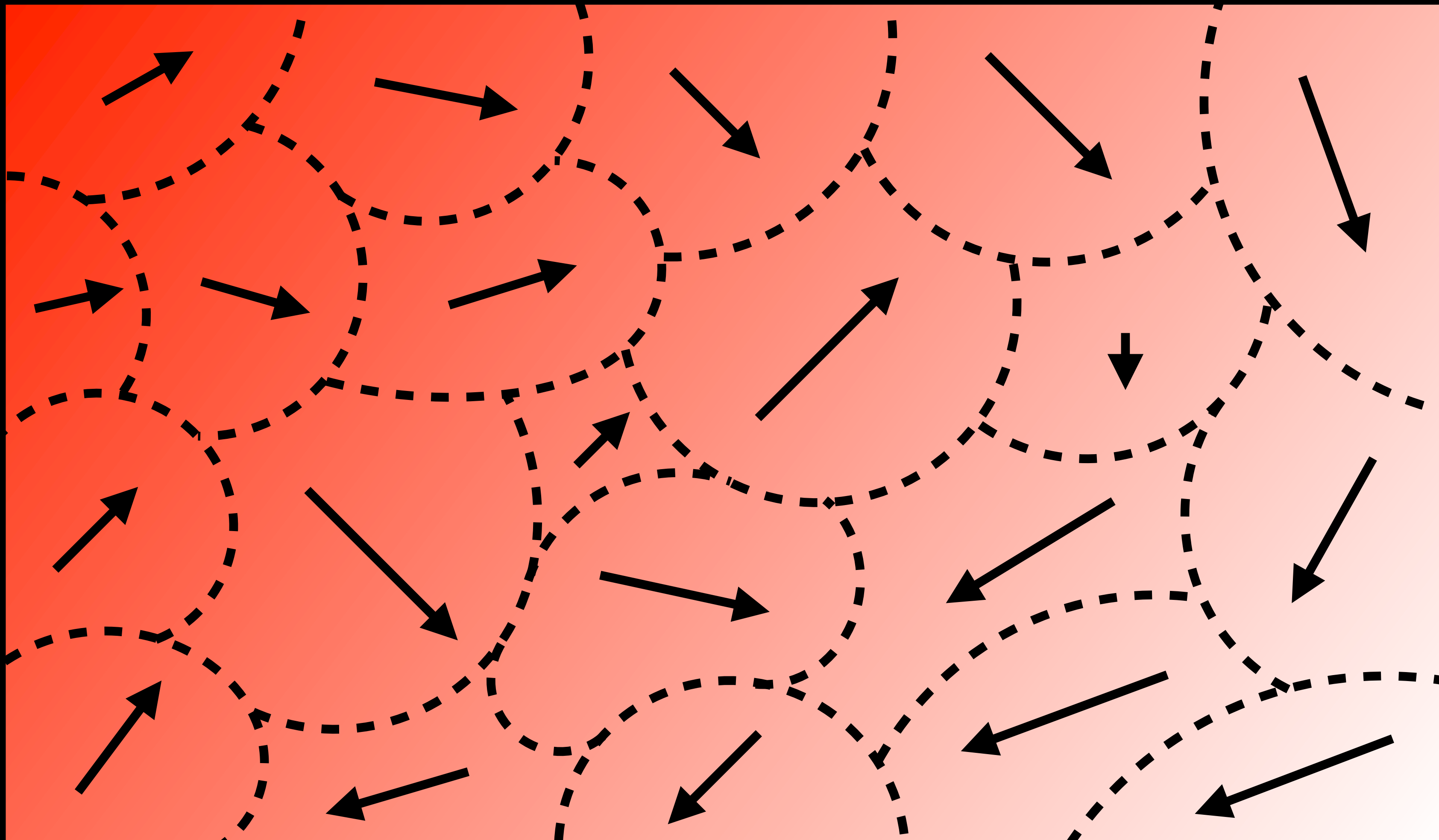
➡ **[目標2] これがどのように輸送現象に適用？**

解答編

局所熱平衡系の場の理論

参考文献: MH Ann. Phys. (2017), MH-Hidaka arXiv:1902.09166 [hep-th]

流体力学 ≒ 局所熱平衡系



その時刻の局所温度 $\beta(x)$・局所速度場 $\vec{v}(x)$ ...のみで定まる

($\beta(x)$, $\vec{v}(x)$ は x に関しては滑らかな連続関数とする)

局所熱平衡系の記述方法

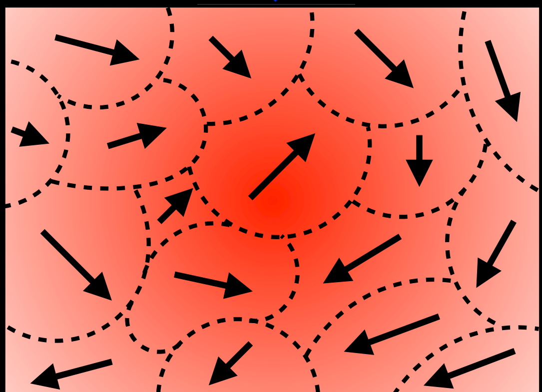
$$T = \mathrm{const.}$$

熱力学 (大域熱平衡)

ギブス分布:

$$\hat{\rho}_G = e^{-\beta \hat{H} - \Psi[\beta]}, \quad \Psi[\beta] \equiv \log \mathrm{Tr} e^{-\beta \hat{H}}$$

局所化



$\{\beta(x),\ \vec{v}(x)\}$

局所熱力学 (局所熱平衡)

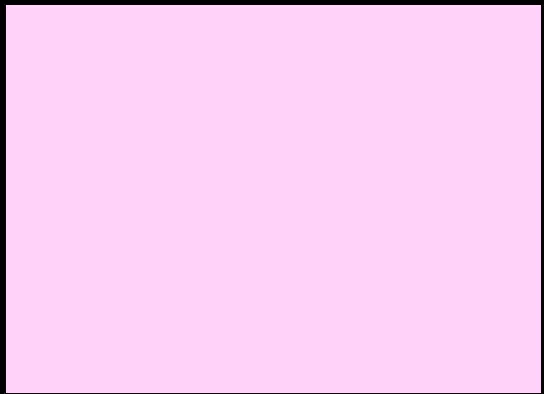
局所ギブス(LG)分布:

$$\hat{\rho}_{LG} = e^{-\hat{K} - \Psi[\beta^\mu(x), \nu(x)]}$$

$$\hat{K} = -\int d^3x \left(\beta^\mu(\boldsymbol{x}) \hat{T}^0{}_\mu(\boldsymbol{x}) + \nu(\boldsymbol{x}) \hat{J}^0(\boldsymbol{x}) \right)$$

局所ギブス分布の“導出”

ギブス分布



情報エントロピー： $S(\hat{\rho}) = -\mathrm{Tr}\hat{\rho}\log\hat{\rho}$

を最大にする状態は何か？

ただし，次の拘束条件を課す

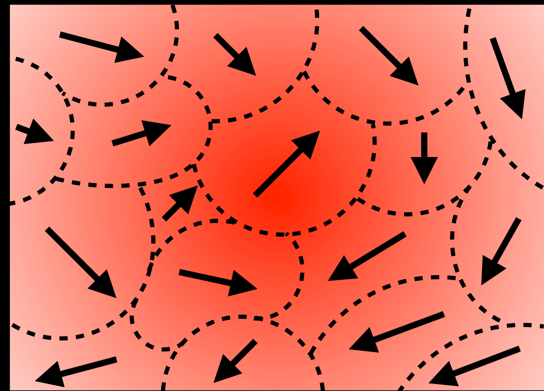
$$\langle \hat{H} \rangle = E = \mathrm{const.},\ \langle \hat{N} \rangle = N = \mathrm{const.}$$

Answer:

$$\hat{\rho}_{\mathrm{G}} = e^{-\beta\hat{H}-\nu\hat{N}-\Psi[\beta,\nu]}$$

ラグランジュ未定乗数: $\Lambda^a = \{\beta, \nu = \beta\mu\}$

局所ギブス分布



情報エントロピー： $S(\hat{\rho}) = -\mathrm{Tr}\hat{\rho}\log\hat{\rho}$

を最大にする状態は何か？

ただし，次の拘束条件を課す

$$\langle \hat{T}^0{}_\mu(x) \rangle = p_\mu(x),\ \langle \hat{J}^0(x) \rangle = n(x)$$

Answer:

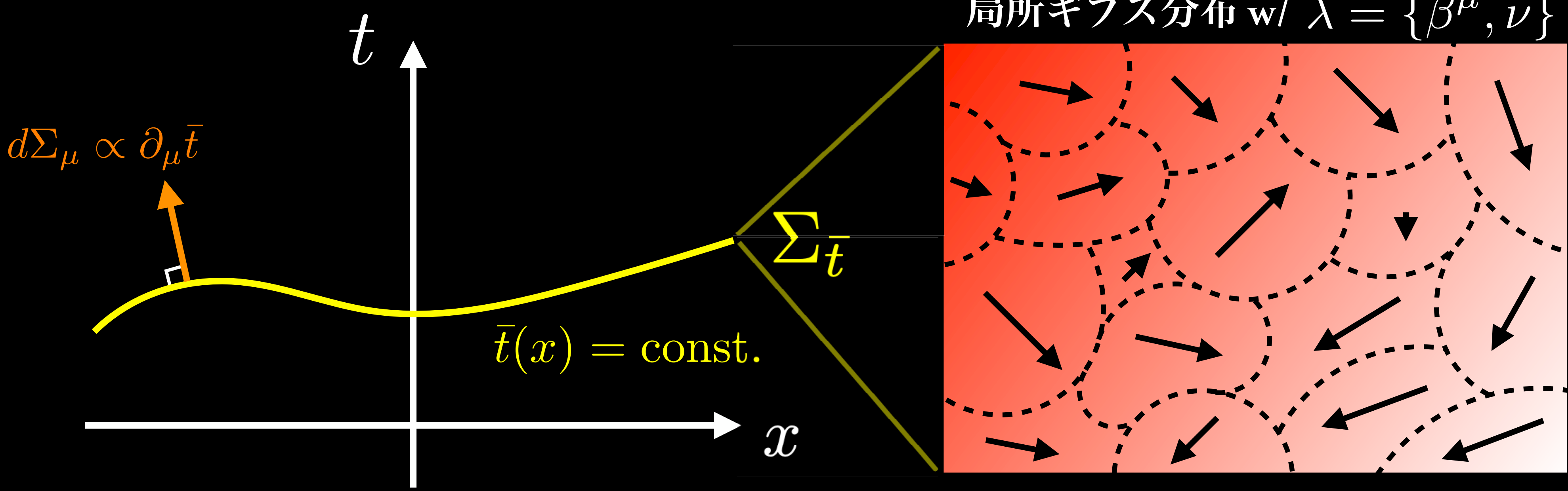
$$\hat{\rho}_{\mathrm{LG}} = e^{-\int d^{d-1}x(\beta^\mu\hat{T}^0{}_\mu+\nu\hat{J}^0)-\Psi[\beta^\mu,\nu]}$$

ラグランジュ未定乗数: $\lambda^a(x) = \{\beta^\mu(x), \nu(x)\}$

局所熱平衡系の熱力学ポテンシャル

[Banerjee et al.(2012), Jensen et al.(2012) , Haehl et al. (2015), MH(2017)]

局所ギブス分布 w/ $\lambda = \{\beta^{\mu}, \nu\}$



◆ マシュー・プランク汎関数 (= log Z) と変分公式

$$\Psi[\bar{t};\lambda] \equiv \log \mathrm{Tr} \exp\left[\int d\Sigma_{\bar{t}\nu}\left(\beta^{\mu}(x)\hat{T}^{\nu}{}_{\mu}(x) + \nu(x)\hat{J}^{\nu}(x)\right)\right]$$

$$\langle \hat{T}^{\mu\nu}(x)\rangle^{\mathrm{LG}}_{\bar{t}} = \frac{2}{\beta'\sqrt{\gamma}}\frac{\delta\Psi[\bar{t};\lambda]}{\delta g_{\mu\nu}(x)}, \quad \langle \hat{J}^{\mu}(x)\rangle^{\mathrm{LG}}_{\bar{t}} = \frac{1}{\beta'\sqrt{\gamma}}\frac{\delta\Psi[\bar{t};\lambda]}{\delta A_{\mu}(x)}$$

問. $\Psi \equiv \log Z$ **をどう計算するか？**

復習:大域熱平衡系の場の理論

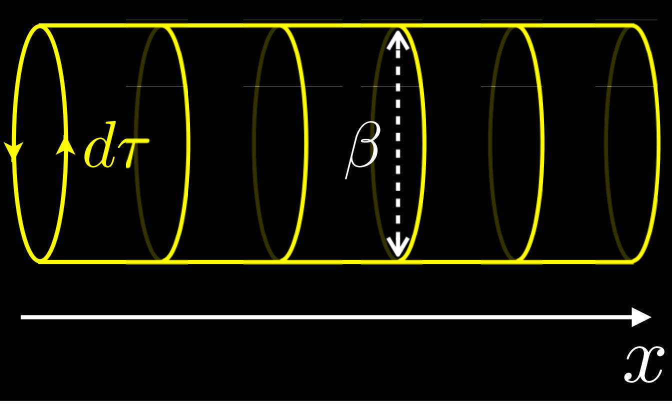
大局熱平衡 β

$T = \text{const.}$

経路積分

有限温度の場の量子論 = 松原形式

[Matsubara, 1955]



サイズ β の
平らな"時空"上
の場の理論

ギブス分布: $\hat{\rho}_G = \dfrac{e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}}{Z} = e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})-\Psi[\beta,\nu]}$

熱力学関数 with Euclidean作用

$$\Psi[\beta,\nu] = \log \mathrm{Tr}\, e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})} = \log \int d\varphi \langle \pm\varphi | e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})} | \varphi \rangle$$

$$= \log \int_{\varphi(\beta)=\pm\varphi(0)} \mathcal{D}\varphi\, e^{+S_E[\varphi]}, \quad S_E[\varphi] = \int_0^\beta d\tau \int d^3x\, \mathcal{L}_E(\varphi, \partial_\mu \varphi)$$

局所熱平衡系＝“曲がった時空”

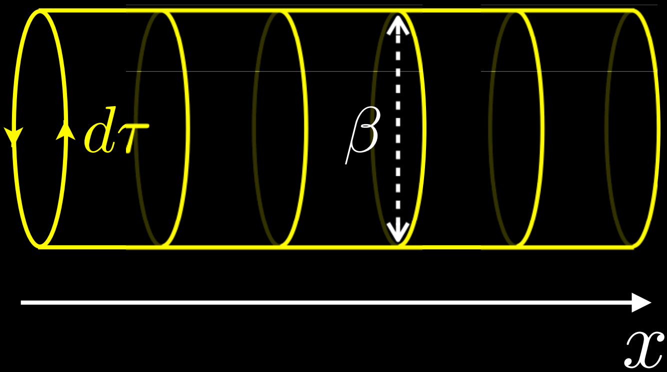
大局熱平衡 β

$$T = \text{const.}$$

経路積分

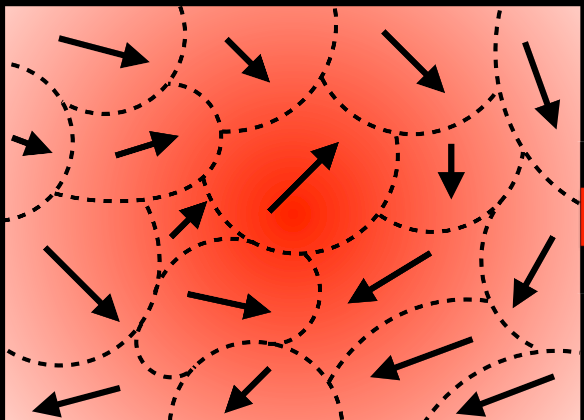
有限温度の場の量子論 = 松原形式

[Matsubara, 1955]



サイズ β の
平らな”時空”上
の場の理論

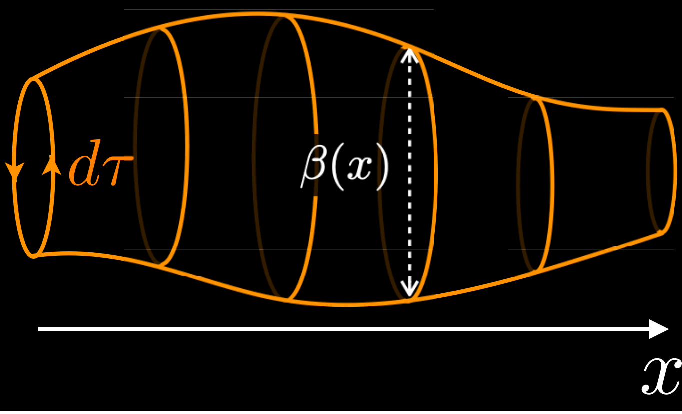
局所熱平衡 $\{\beta(x),\ \vec{v}(x)\}$



経路積分

局所熱平衡系の場の量子論

[Hayata, Hidaka, **MH**, Noumi PRD (2015), **MH** (2017)]



“線素”が
$$d\tilde{s}^2 = d\tilde{s}^2(\beta, \vec{v})$$
で与えられる
“曲がった時空”上
の場の量子論

熱的計量による熱力学関数の記述

$$\Psi[\bar{t};\lambda] = \log \int \mathcal{D}\phi \exp\left(S_E[\phi,;\tilde{g}]\right)$$

Thermal metric

$$\tilde{g}_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = \begin{pmatrix} -e^{2\sigma} & e^{\sigma}u_{\bar{j}} \\ e^{\sigma}u_{\bar{i}} & \gamma_{\bar{i}\bar{j}} \end{pmatrix}$$

$$\left(e^{\sigma(\bar{x})} \equiv \beta(\bar{x})/\beta_0\right)$$

Inverse thermal metric

$$\tilde{g}^{\bar{\mu}\bar{\nu}} = \begin{pmatrix} \dfrac{e^{-2\sigma}}{u^{\bar{0}}u_{\bar{0}}} & -\dfrac{e^{-\sigma}u^{\bar{j}}}{u^{\bar{0}}u_{\bar{0}}} \\ -\dfrac{e^{-\sigma}u^{\bar{i}}}{u^{\bar{0}}u_{\bar{0}}} & \gamma^{\bar{i}\bar{j}} + \dfrac{u^{\bar{i}}u^{\bar{j}}}{u^{\bar{0}}u_{\bar{0}}} \end{pmatrix}$$

◆ 結果の解釈

$\Psi[\bar{t};\lambda]$ は「曲がった時空」中の経路積分で記述される

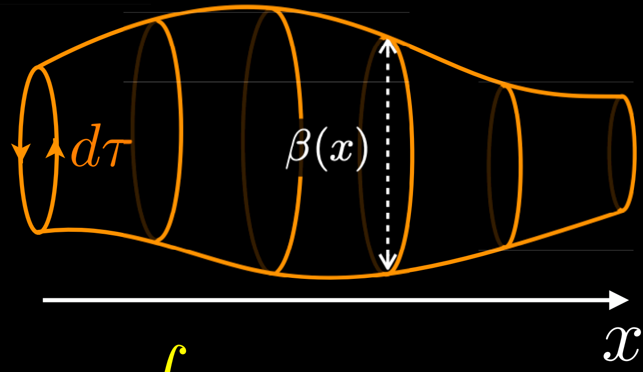
$$d\tilde{s}^2 = -e^{2\sigma}(d\tilde{t} + a_{\bar{i}}dx^{\bar{i}})^2 + \gamma'_{\bar{i}\bar{j}}dx^{\bar{i}}dx^{\bar{j}}$$

$$\left(a_{\bar{i}} \equiv e^{-\sigma}u_{\bar{i}}, \quad \gamma'_{\bar{i}\bar{j}} \equiv \gamma_{\bar{i}\bar{j}} + u_{\bar{i}}u_{\bar{j}}, \quad d\tilde{t} = -id\tau\right)$$

$\Psi \equiv \log Z$ を構築する2つの方法

1. 一般座標不変性とゲージ不変性を使う！

- Ψは $\{\tilde{g}_{\mu\nu}, \tilde{A}_\mu\}$ で表される
- Ψは一般座標変換不変+ゲージ不変



➡ ΨのBuilding blocks： $\beta = \oint d\tilde{s}, \ \beta\mu = \oint \tilde{A}, \ \tilde{R}, \ \tilde{F}_{\mu\nu}$

2. 虚時間形式に起因する時空対称性を使う！

- Ψは空間座標の貼り替えに対して不変
- ΨはKaluza-Kleinゲージ変換に対して不変

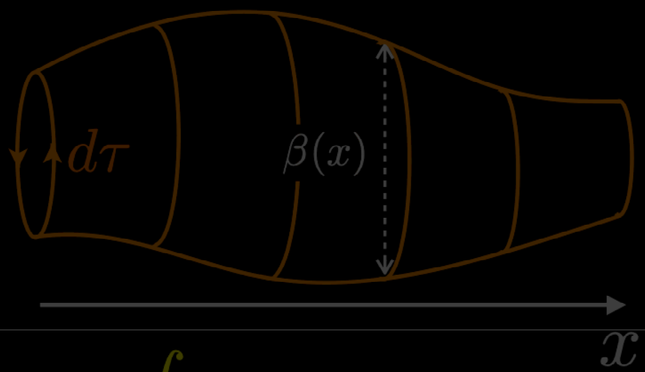
➡ $\Psi \equiv \log Z$ はこれらの対称性をrespectする！！

[cf. Hydrostatic partition function method: Banerjee et al.(2012), Jensen et al.(2012)]

$\Psi \equiv \log Z$ を構築する2つの方法

1. 一般座標不変性とゲージ不変性を使う！

- Ψは $\{\tilde{g}_{\mu\nu}, \tilde{A}_\mu\}$ で表される
- Ψは一般座標変換不変+ゲージ不変



➡ ΨのBuilding blocks： $\beta = \oint d\tilde{s},\ \beta\mu = \oint \tilde{A},\ \ \tilde{R},\ \ \tilde{F}_{\mu\nu}$

2. 虚時間形式に起因する時空対称性を使う！

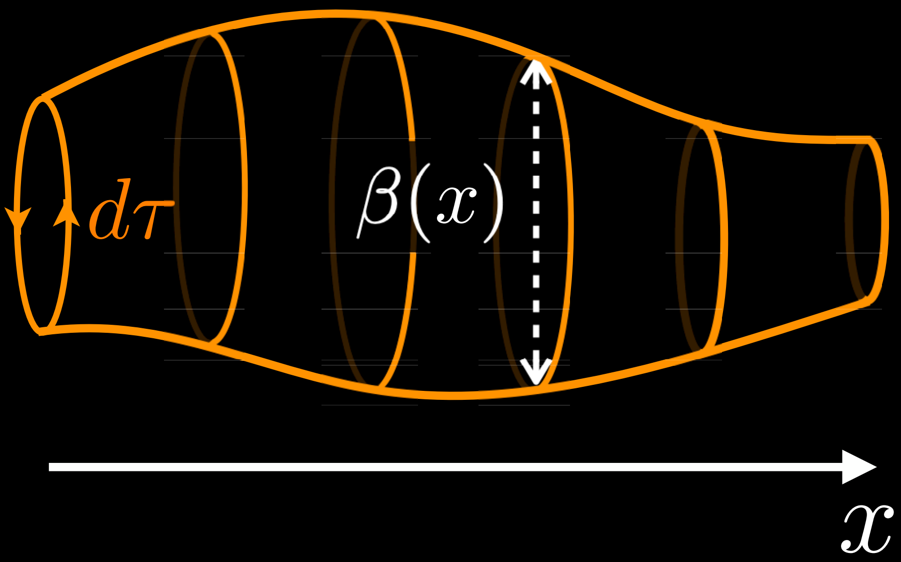
- Ψは空間座標の貼り替えに対して不変
- ΨはKaluza-Kleinゲージ変換に対して不変

➡ $\Psi \equiv \log Z$ はこれらの対称性をrespectする！！

[cf. Hydrostatic partition function method: Banerjee et al.(2012), Jensen et al.(2012)]

“時空”の対称性：Kaluza-Klein対称性

$$ds^2 = -e^{2\sigma}(d\tilde{t} + a_{\bar{i}}d\bar{x}^{\bar{i}})^2 + \gamma'_{\bar{i}\bar{j}}d\bar{x}^{\bar{i}}d\bar{x}^{\bar{j}} \quad (d\tilde{t} = -id\tau)$$



パラメータ λ は虚時間 τ に依存しない！

Kaluza-Kleinゲージ変換：

$$\begin{cases} \tilde{t} \to \tilde{t} + \chi(\bar{\boldsymbol{x}}) \\ \bar{\boldsymbol{x}} \to \bar{\boldsymbol{x}} \\ a_{\bar{i}}(\bar{\boldsymbol{x}}) \to a_{\bar{i}}(\bar{\boldsymbol{x}}) - \partial_{\bar{i}}\chi(\bar{\boldsymbol{x}}) \end{cases}$$

$$\Psi[\lambda] = \log \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi e^{S[\psi,\bar{\psi},\tilde{e}]} \ni$$

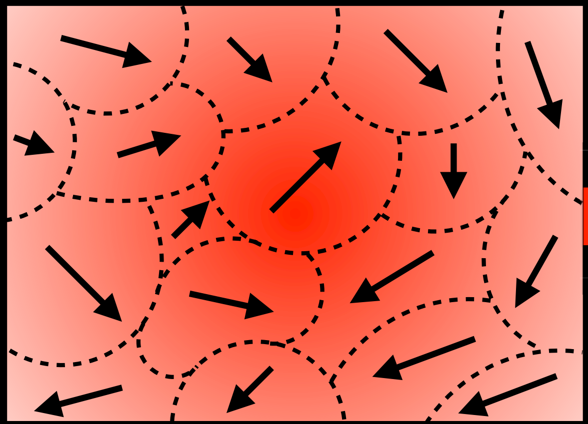
$$(f_{\bar{i}\bar{j}} \equiv \partial_{\bar{i}}a_{\bar{j}} - \partial_{\bar{j}}a_{\bar{i}})$$

$f^{\bar{i}\bar{j}}f_{\bar{i}\bar{j}}, \cdots$

$a_{\bar{i}},\ a_{\bar{i}}a^{\bar{i}}, \cdots$

局所熱平衡系の場の量子論

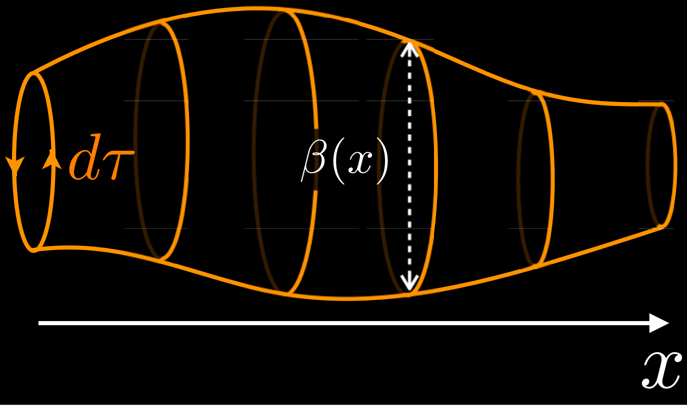
局所熱平衡 $\{\beta(x),\ \vec{v}(x)\}$



経路積分

局所熱平衡系の場の量子論

[Hayata, Hidaka, MH, Noumi (2015), MH (2017)]



“線素”が

$d\tilde{s}^2 = d\tilde{s}^2(\beta, \vec{v})$

で与えられる

“曲がった時空”上

の場の量子論

$$\Psi[\bar{t}; \lambda] \equiv \log \mathrm{Tr} \exp \left[\int d\Sigma_{\bar{t}\nu} \left(\beta^\mu(x) \hat{T}^\nu{}_\mu(x) + \nu(x) \hat{J}^\nu(x) \right) \right]$$

① $\Psi[\lambda]$ は局所熱平衡状態の生成汎関数： $\langle \hat{T}^{\mu\nu}(x) \rangle^{\mathrm{LG}} = \dfrac{2}{\sqrt{-g}} \dfrac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}(x)} \Psi[\lambda]$

② $\Psi[\lambda]$ は次のような「曲がった時空」中の経路積分公式で与えられる

$$d\tilde{s}^2 = -e^{2\sigma}(d\tilde{t} + a_{\bar{i}} dx^{\bar{i}})^2 + \gamma'_{\bar{i}\bar{j}} dx^{\bar{i}} dx^{\bar{j}}$$

対称性：空間座標の張り替え + Kaluza-Kleinゲージ対称性

問. $\Psi \equiv \log Z$ をどう計算するか？

解. 対称性に基づいて，微分展開！

目標1の解答
アノマリーを持たない場合

局所熱平衡状態における微分展開

生成汎関数に関する微分展開

$$\Psi[\beta^\mu,\nu] = \boxed{\Psi^{(0)}[\beta^\mu,\nu]} + \boxed{\Psi^{(1)}[\beta^\mu,\nu,\partial]} + \mathcal{O}(\partial^2) + \cdots$$

$\simeq \beta p$

Symmetry property

$= 0$ **Parity-even system**

非散逸性の輸送に関する微分展開

$$\langle \hat{T}^{\mu\nu}(x)\rangle_{\bar{t}}^{\mathrm{LG}} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}(x)}\Psi[\bar{t};\lambda] = T^{\mu\nu}_{(0)}[\lambda(x)] + \boxed{T^{\mu\nu}_{(1)}[\lambda(x),\nabla\lambda(x)]} + \cdots$$

$$\langle \hat{J}^{\mu}(x)\rangle_{\bar{t}}^{\mathrm{LG}} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta A_{\mu}(x)}\Psi[\bar{t};\lambda] = J^{\mu}_{(0)}[\lambda(x)] + \boxed{J^{\mu}_{(1)}[\lambda(x),\nabla\lambda(x)]} + \cdots$$

$= 0$

局所熱力学ポテンシャルのレシピ

[See also Banerjee et al.(2012), Jensen et al.(2012)]

◆ マシュー・プランク汎関数

$$\Psi[\lambda] = \log \int \mathcal{D}\phi e^{S[\phi,\tilde{g}]} = \underbrace{\Psi^{(0)}[\lambda]}_{\mathcal{O}(p^0)} + \underbrace{\Psi^{(1)}[\lambda,\partial]}_{\mathcal{O}(p^1)} + \mathcal{O}(\partial^2)$$

- **Building blocks**：$\lambda = \{e^{\sigma},\ a_{\bar{i}},\ \mu,\ A_{\bar{i}}\}$

- **対称性**：**Spatial diffeo,　Kaluza-Klein,　U(1)-gauge**

$A_{\bar{i}}$ ：**not Kaluza-Klein inv.** ➡ $A'_{\bar{i}} \equiv A_{\bar{i}} - \mu a_{\bar{i}}$

- **Power counting scheme**：　$\lambda = \mathcal{O}(p^0)$

$f_{\bar{i}\bar{j}} \equiv \partial_{\bar{i}} a_{\bar{j}} - \partial_{\bar{j}} a_{\bar{i}} = \mathcal{O}(p^1)$ ➡ $ff = \mathcal{O}(p^2)$

$\Psi^{(0)}$：Order $\mathcal{O}(p^0)$

◆ マシュー・プランク汎関数

$$\Psi[\lambda] = \log \int \mathcal{D}\phi e^{S[\phi,\tilde{g}]} = \underbrace{\Psi^{(0)}[\lambda]}_{\mathcal{O}(p^0)} + \underbrace{\Psi^{(1)}[\lambda, \partial]}_{\mathcal{O}(p^1)} + \mathcal{O}(\partial^2)$$

- Building blocks：$\lambda = \{e^{\sigma}, \cancel{a_i}, \mu, \cancel{A_i'}\}$

$$\Psi^{(0)}[\lambda] = \int_0^{\beta_0} d\tau \int d^3\bar{x}\sqrt{\gamma'}e^{\sigma}p(\beta,\mu)$$

完全流体

$$\langle \hat{T}^{\mu\nu}(x)\rangle_{\bar{t}}^{\mathrm{LG}} = (e+p)u^{\mu}u^{\nu} + p\eta^{\mu\nu}$$

$$\langle \hat{J}^{\mu}(x)\rangle_{\bar{t}}^{\mathrm{LG}} = nu^{\mu}$$

目標2の**解答**

アノマリーを**持つ**場合

生成汎関数のレシピ

Weyl fermion：$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\xi^\dagger\left(e_m^{\ \mu}\sigma^m\overrightarrow{D}_\mu - \overleftarrow{D}_\mu\sigma^m e_m^{\ \mu}\right)\xi$

$$\Psi[\lambda] = \log\int\mathcal{D}\xi^\dagger\mathcal{D}\xi e^{S[\xi,\xi^\dagger,A,\tilde{e}]} = \underbrace{\Psi^{(0)}[\lambda]}_{\mathcal{O}(p^0)} + \underbrace{\Psi^{(1)}[\lambda,\partial]}_{\mathcal{O}(p^1)} + \mathcal{O}(\partial^2)$$

- **Building blocks**：$\lambda = \{e^\sigma,\ a_{\bar{i}},\ \mu_R,\ A'_{\bar{i}}\}$
- **対称性**：Spatial diffeo, Kaluza-Klein, U(1)$_R$-gauge

$A_{\bar{i}}$ ：not Kaluza-Klein inv. ➡ $A'_{\bar{i}} \equiv A_{\bar{i}} - \mu_R a_{\bar{i}}$

- **Power counting scheme**： $\lambda = \mathcal{O}(p^0)$

$f_{\bar{i}\bar{j}} \equiv \partial_{\bar{i}}a_{\bar{j}} - \partial_{\bar{j}}a_{\bar{i}} = \mathcal{O}(p^1)$ ➡ $ff = \mathcal{O}(p^2)$

局所熱平衡状態における微分展開

生成汎関数に関する微分展開

$$\Psi[\beta^\mu,\nu] = \boxed{\Psi^{(0)}[\beta^\mu,\nu]} + \boxed{\Psi^{(1)}[\beta^\mu,\nu,\partial]} + \mathcal{O}(\partial^2) + \cdots$$

$\simeq \beta p$ $\quad = 0$ **Parity-even system**

Symmetry property $\quad \neq 0$ **Parity-odd system**

非散逸性の輸送に関する微分展開

$$\langle \hat{T}^{\mu\nu}(x)\rangle^{\mathrm{LG}}_{\bar{t}} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}(x)}\Psi[\bar{t};\lambda] = T^{\mu\nu}_{(0)}[\lambda(x)] + T^{\mu\nu}_{(1)}[\lambda(x),\nabla\lambda(x)] + \cdots$$

$$\langle \hat{J}^{\mu}(x)\rangle^{\mathrm{LG}}_{\bar{t}} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta A_{\mu}(x)}\Psi[\bar{t};\lambda] = J^{\mu}_{(0)}[\lambda(x)] + J^{\mu}_{(1)}[\lambda(x),\nabla\lambda(x)] + \cdots$$

$= 0 \qquad \neq 0$

$-\frac{1}{24\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_\nu F_{\rho\sigma}$ Bardeen-Zumino current

$\psi^{(0)}$：Order $\mathcal{O}(p^0)$

Weyl fermion：$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\xi^\dagger \left(e_m^{\ \mu}\sigma^m \overrightarrow{D}_\mu - \overleftarrow{D}_\mu \sigma^m e_m^{\ \mu}\right)\xi$

$$\Psi[\lambda] = \log \int \mathcal{D}\xi^\dagger \mathcal{D}\xi e^{S[\xi,\xi^\dagger,A,\tilde{e}]} = \underbrace{\Psi^{(0)}[\lambda]}_{\mathcal{O}(p^0)} + \underbrace{\Psi^{(1)}[\lambda,\partial]}_{\mathcal{O}(p^1)} + \mathcal{O}(\partial^2)$$

- **Building blocks**：$\lambda = \{e^\sigma,\ \cancel{a_{\bar{i}}},\ \mu_R,\ \cancel{A_{\bar{i}}}\}$

$$\Psi^{(0)}[\lambda] = \int_0^{\beta_0} d\tau \int d^3\bar{x}\sqrt{\gamma'} e^\sigma p(\beta,\mu_R)$$

完全流体

$$\langle \hat{T}^{\mu\nu}(x)\rangle_{\bar{t}}^{\mathrm{LG}} = (e+p)u^\mu u^\nu + p\eta^{\mu\nu}$$

$$\langle \hat{J}^\mu_R(x)\rangle_{\bar{t}}^{\mathrm{LG}} = n_R u^\mu$$

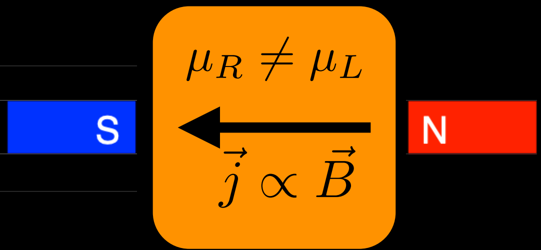
$\psi^{(\mathrm{I})}$: Order $\mathcal{O}(p)$

Weyl fermion : $\mathcal{L} = \frac{i}{2}\xi^\dagger \left(e_m^{\ \mu} \sigma^m \overrightarrow{D}_\mu - \overleftarrow{D}_\mu \sigma^m e_m^{\ \mu} \right) \xi$

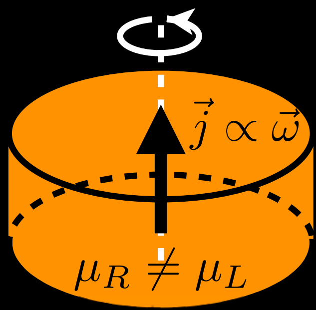
$$\Psi[\lambda] = \log \int \mathcal{D}\xi^\dagger \mathcal{D}\xi \, e^{S[\xi,\xi^\dagger,A,\tilde{e}]} = \underbrace{\Psi^{(0)}[\lambda]}_{\mathcal{O}(p^0)} + \underbrace{\Psi^{(1)}[\lambda,\partial]}_{\mathcal{O}(p^1)} + \mathcal{O}(\partial^2)$$

- Building blocks : $\lambda = \{e^\sigma,\ a_{\bar{i}},\ \mu_R,\ A'_{\bar{i}}\}$

$$\int c_1 A' \mathrm{d} A'$$



$$\int c_2 A' \mathrm{d} a$$



Question

係数 c_I, c_2を
どう決める?

't Hooft アノマリーマッチング

◆ 't Hooftアノマリーの定義

$$Z[A+\mathrm{d}\theta] = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathcal{A}[A;\theta]} Z[A]$$

A : 大域対称性に結合する背景ゲージ場

(位相 $\mathrm{i}\mathcal{A}[A;\theta]$ がゲージ不変な局所相殺後で**取り除けない**)

◆ 't Hooftアノマリーマッチング

位相 $\mathrm{i}\mathcal{A}[A;\theta]$ は**RG不変** ➡ UVで見つけたら**IRの物理**を縛る

➡ **自明な(縮退のない)真空**は許されない

- 古典的な応用：massless QCDの真空はカイラル対称性を破る(だろう)
- 現代的な応用：高次対称性や離散対称性への適用 [米倉さんのトーク]

➡ **[目標2]** これがどのように輸送現象に適用？

生成汎関数のレシピ

Weyl fermion：$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\xi^\dagger \left(e_m^{\ \mu}\sigma^m \overrightarrow{D}_\mu - \overleftarrow{D}_\mu \sigma^m e_m^{\ \mu}\right)\xi$

$$\Psi[\lambda] = \log \int \mathcal{D}\xi^\dagger \mathcal{D}\xi e^{S[\xi,\xi^\dagger,A,\tilde{e}]} = \underbrace{\Psi^{(0)}[\lambda]}_{\mathcal{O}(p^0)} + \underbrace{\Psi^{(1)}[\lambda,\partial]}_{\mathcal{O}(p^1)} + \mathcal{O}(\partial^2)$$

- **Building blocks**：$\lambda = \{e^\sigma,\ a_{\bar{i}},\ \mu_R,\ A'_{\bar{i}}\}$
- **対称性**：Spatial diffeo, $\boxed{\text{Kaluza-Klein, U(1)}_\text{R}\text{-gauge}}$ Anomalous!!

  $A_{\bar{i}}$ ：not Kaluza-Klein inv. $\Rightarrow$ $A'_{\bar{i}} \equiv A_{\bar{i}} - \mu_R a_{\bar{i}}$

- **Power counting scheme**： $\lambda = \mathcal{O}(p^0)$

  $f_{\bar{i}\bar{j}} \equiv \partial_{\bar{i}} a_{\bar{j}} - \partial_{\bar{j}} a_{\bar{i}} = \mathcal{O}(p^1)$ $\Rightarrow$ $ff = \mathcal{O}(p^2)$

局所熱平衡系のアノマリー

◆ 't Hooftアノマリーの定義

$$Z[A+\mathrm{d}\theta] = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathcal{A}[A;\theta]} Z[A]$$

A : 大域対称性に結合する背景ゲージ場

(位相 $\mathrm{i}\mathcal{A}[A;\theta]$ がゲージ不変な局所相殺後で取り除けない)

◆ 右巻きWeylフェルミオン系 (T≠0)

- U(1)$_R$ 対称性：摂動的なカイラルアノマリー
- U(1)$_R$×U(1)$_{KK}$ 対称性：混合大域アノマリー

[See Golkar-Sethi arXiv:1512.02607, Chowdhury-David, arXiv:1604.05003]

➡ Z[A,a]はこれらのアノマリーを再現せねばならない

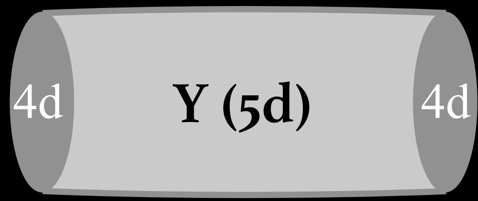
大域/摂動アノマリー計算法の例

[See Golkar-Sethi arXiv:1512.02607, Chowdhury-David, arXiv:1604.05003]

Step1. Mapping torus

Large KKゲージ変換 ：$\tilde{g}_{\mu\nu} \to \tilde{g}'_{\mu\nu}$ の前後をつなぐ1次元高い空間 Y

$$\tilde{g}^{5d}_{\mu\nu}(x^\mu, y) = (1-y)\tilde{g}_{\mu\nu}(x^\mu) + y\tilde{g}'_{\mu\nu}(x^\mu), \quad 0 \le y \le 1$$



Step2. アノマリーとη不変量

$$Z[\tilde{g}'_{\mu\nu}, \tilde{A}'_\mu] = \mathrm{e}^{-i\pi\eta} Z[\tilde{g}_{\mu\nu}, \tilde{A}_\mu] \ \text{ with } \ \not{D}_Y \psi = \lambda_k \psi, \ \eta \equiv \sum_k \mathrm{sign}(\lambda_k)$$

Step3. Atiyah-Patodi-Singer指数定理

Y(5d)を境界として持つ，さらに1次元高い空間 X(6d) で

$$\mathrm{ind}\, \not{D}_X = \int_X \hat{A}(R)\mathrm{ch}(F) - \frac{\eta}{2}$$ を計算すると，ηが求まる！

Weylフェルミオン(T≠0)のアノマリー

◆ U(1)$_R$対称性：摂動的なカイラルアノマリー

U(1)$_R$ゲージ変換：$A_0 \to A_0,\ A_i \to A_i + \partial_i \theta(\boldsymbol{x})$ のもとで

$$\delta_\theta \Psi[\lambda, j; t] = -\frac{C}{3}\int d^3x\theta\varepsilon^{0ijk}\partial_i\mu_R\partial_j A_k \text{ with } C = \frac{1}{4\pi^2}$$

◆ U(1)$_R$×U(1)$_{KK}$ 対称性：混合大域アノマリー

Large KKゲージ変換：$a_i \to a_i + 2\mathrm{i}\beta_0/L$ のもとで

$$\delta_{\mathrm{lKK}}\Psi[\lambda, j; t] = -\frac{\mathrm{i}\eta}{4}\int_{S^2}\mathrm{d}A' \quad \text{with} \quad \eta = \frac{1}{6}$$: eta invariant

[See Golkar-Sethi arXiv:1512.02607, Chowdhury-David, arXiv:1604.05003]

生成汎関数のアノマリーマッチング

◆ 右巻きWeylフェルミオン系 (T≠0)

- $U(1)_R$ 対称性：摂動的なカイラルアノマリー
- $U(1)_R \times U(1)_{KK}$ 対称性：混合大域アノマリー

[See Golkar-Sethi arXiv:1512.02607, Chowdhury-David, arXiv:1604.05003]

Consistency: $C = \dfrac{1}{4\pi^2}$ $\quad C_1 = \dfrac{\eta}{2} = \dfrac{1}{12}$

◆ 局所熱平衡Weylフェルミオン系の生成汎関数

$$\log Z_{\text{ano}} = \frac{C\beta_0}{6}\int \tilde{A}_0 \left(\tilde{A}' \mathrm{d}\tilde{A}' + \frac{1}{2}\tilde{A}_0 \tilde{A}' \mathrm{d}a\right) - \frac{C_1}{\beta_0}\int \tilde{A}' \mathrm{d}a$$

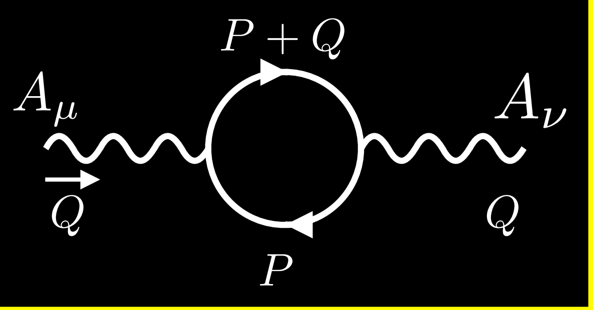
カイラルアノマリー　大域アノマリー

カイラル輸送現象の導出

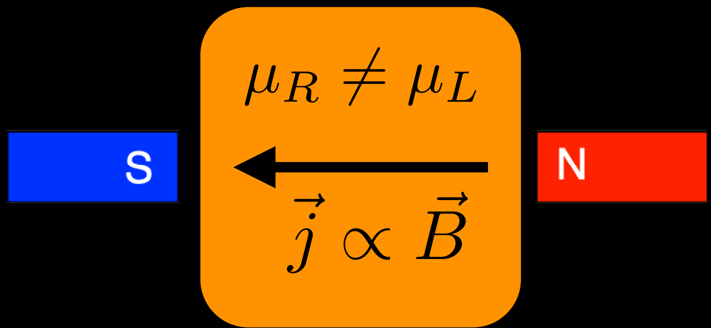
$$\langle \hat{J}^i_R(x)\rangle^{\mathrm{LG}}_{(0,1)} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\Psi^{(1)}}{\delta A_i(x)} - \frac{C}{6}\epsilon^{i\nu\rho\sigma}A_\nu F_{\rho\sigma}$$

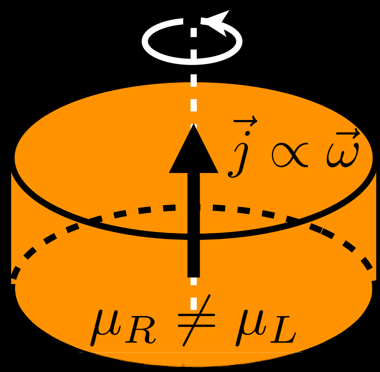
$$= \frac{\mu_R}{4\pi^2}B^i + \left(\frac{\mu_R^2}{4\pi^2} + \frac{T^2}{12}\right)\omega^i$$

Consistent with e.g.



$$\boxed{\begin{aligned}\langle \hat{J}^i_V(x)\rangle^{\mathrm{LG}}_{(0,1)} &= \frac{\mu_5}{2\pi^2}B^i + \frac{\mu\mu_5}{2\pi^2}\omega^i \\ \langle \hat{J}^i_A(x)\rangle^{\mathrm{LG}}_{(0,1)} &= \frac{\mu}{2\pi^2}B^i + \left(\frac{\mu^2+\mu_5^2}{4\pi^2} + \frac{T^2}{12}\right)\omega^i\end{aligned}}$$





流体力学におけるアノマリーマッチング

◆ ’t Hooftアノマリーマッチング

位相 $i\mathcal{A}[A;\theta]$ はRG不変 ➡ UVで見つけたらIRの物理を縛る

➡ 自明な(縮退のない)真空は許されない

E

UV

IR

例. massless QCD (T=0)

QCD (quark, gluon)

[カイラル対称性の自発的破れ]
カイラル摂動論 (pion)
with Wess-Zumino項

$$\log Z\big|_{T=0}$$ は非局所

例. Weyl fermion (局所熱平衡)

Weyl fermion (+interaction)
with 反周期境界条件

流体力学+カイラル輸送現象

$$\log Z\big|_{T\neq 0}$$ は局所

(Fermion はKK massを持つため!)

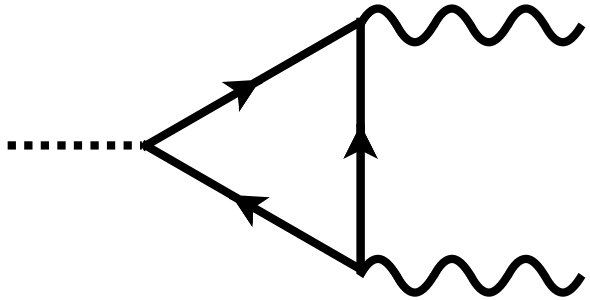
標語によるまとめ

標語

局所熱平衡量子系を考える $\Leftrightarrow$ S^1コンパクト化された曲がった時空に理論を置く

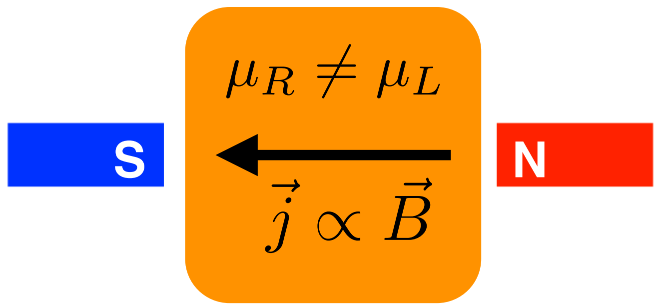
考えている物理系が't Hooftアノマリーを持つときは生成汎関数に関してアノマリーマッチングをする

Quantum anomaly



アノマリーマッチング

Chiral transport



展望:2020sは流体ルネサンスか？

2010年代の発展によって

流体力学の“定式化”については一段落ついた印象

QCDの言葉と対応させると
- 生成汎関数の対称性とアノマリーマッチングがわかった
  [↔Wess-Zumino無矛盾条件，Bardeen-Zuminoの方法]
- 有効ラグランジアンの構築法がわかった
  [↔カイラルラグランジアンのコセット構成(CCWZの方法)]

具体的な物理系/設定への応用を考えるのが最近の潮流

(個人的には“非摂動効果”が調べられたらおもしろい)

参考：日本語の解説記事

特集／量子異常の拡がり

数理科学 2020年1月号

輸送現象における量子異常のあらわれ

本 郷　優

1. カイラルアノマリーと輸送現象

量子異常（アノマリー）とは作用が持つ対称性が量子補正により破れる現象のことを表す．古くから知られている有名な例として，カイラルフェルミオンに付随する**カイラルアノマリー**があり，QCD

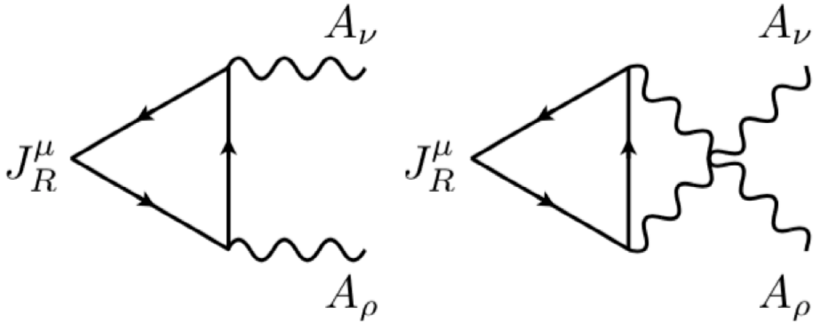


図 1　カレント J^μ_R の湧き出し項を与える寄与．

Backup