軽い暗黒物質検出のための固体物理入門

中山和則（東京大学）

2020/9/3 @ PPP2020

背景と目標

- WIMP以外の暗黒物質にも注目が集まっている
  様々な質量・相互作用の暗黒物質探索のアイデアが重要

- 最近、固体の物性を利用したアイデアが多数提案されている

- <u>今日の目標</u>
  - 固体中の電子の性質
  - 固体中の低エネルギー励起とその分散関係
  - 暗黒物質への応用 （アクシオン、**Hidden photon**）

固体中の低エネルギー励起

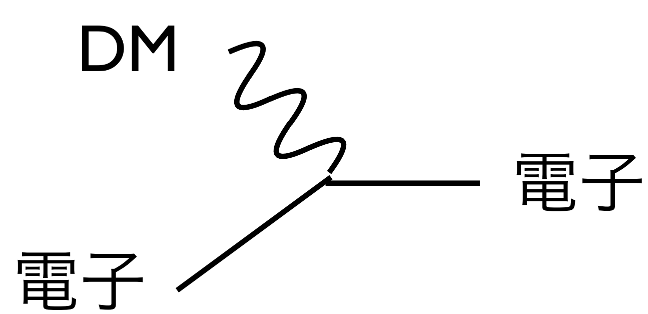
		ターゲット物質	ミクロな起源
Sec.1	**固体電子**	半導体、Dirac物質、超伝導体 ...	電子
Sec.2	**マグノン**	強磁性体、反強磁性体	電子スピン
Sec.3	**フォノン**	誘電体	格子原子核の変位

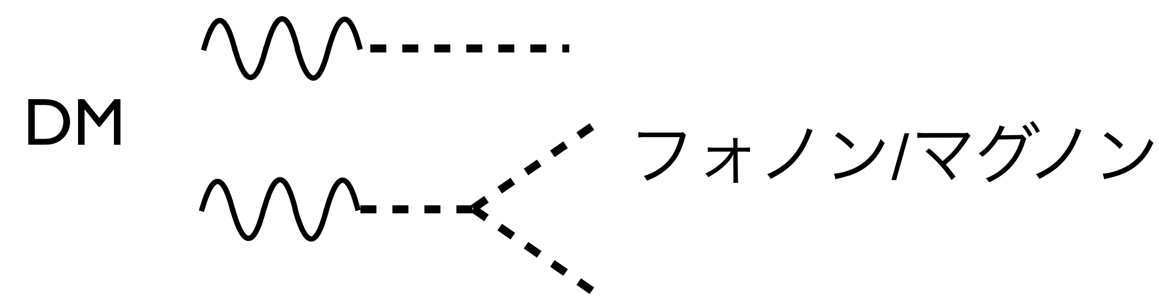
暗黒物質の模型と質量領域

- 吸収の場合　$1\,\mathrm{meV} \lesssim m_{\mathrm{DM}} \lesssim 1\,\mathrm{eV}$

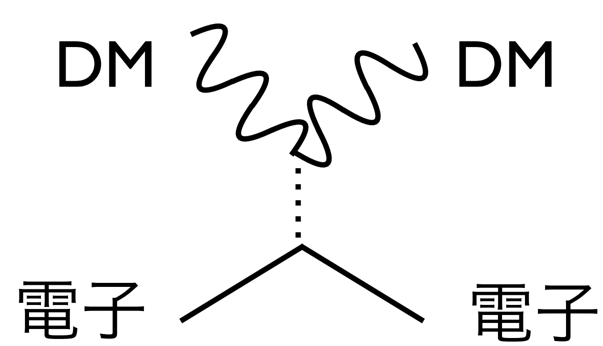
Axion: $$S = \int d^4x \sqrt{-g}\left(-\frac{1}{2}(\partial a)^2 - \frac{1}{2}m^2 a^2 - \frac{\partial_\mu a}{2f}\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi\right)$$

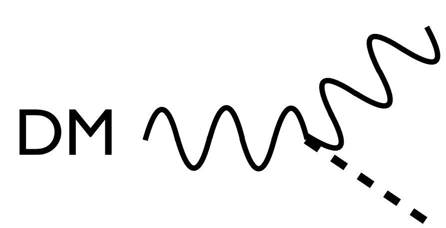
Hidden photon: $$S = \int d^4x \sqrt{-g}\left(-\frac{1}{4}V_{\mu\nu}V^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}m_V^2 V_\mu V^\mu - \frac{\epsilon}{2}V_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)$$

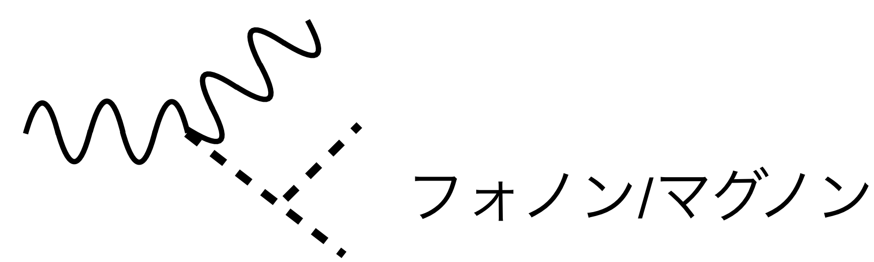




- 散乱の場合　$1\,\mathrm{keV} \lesssim m_{\mathrm{DM}} \lesssim 1\,\mathrm{MeV}$



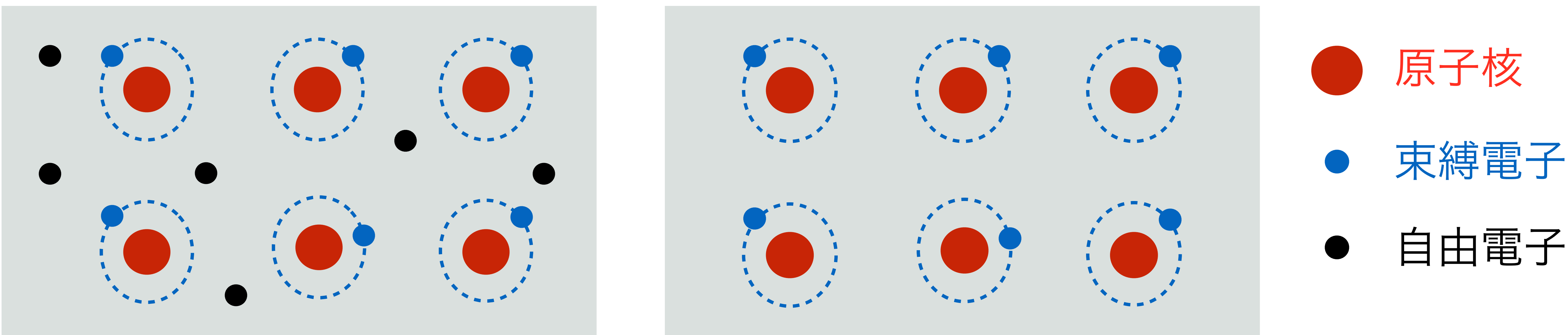




I. 固体電子

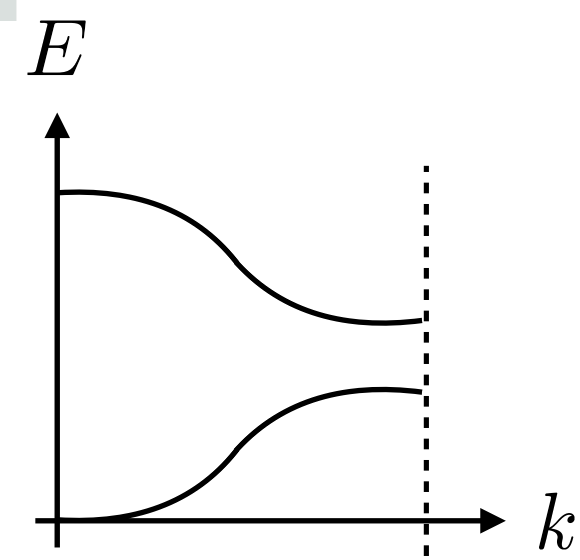
固体中の電子

金属　　　　絶縁体



- 周期的ポテンシャル中の電子の分散関係は？

  ⟶ **バンド理論**



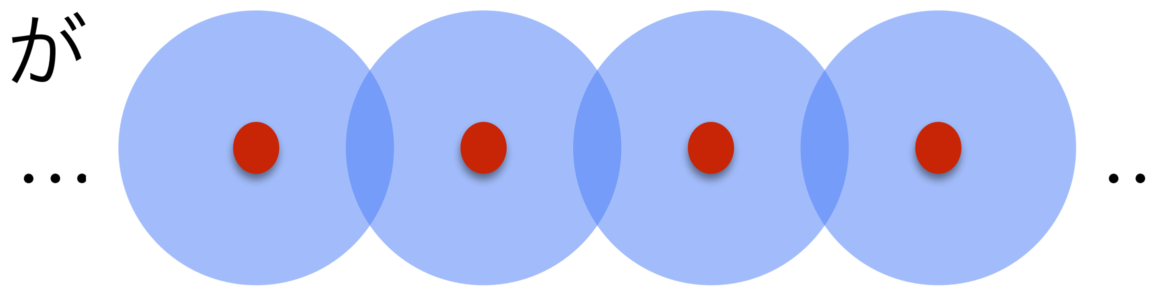
- ２つの考え方

  1. 電子は原子核に強く束縛されている(Tight-binding模型)

  2. ほぼ自由電子 + 結晶格子からの弱い周期ポテンシャル

Tight-binding 模型

- 電子は各原子に強く束縛されているが
  隣の電子と薄く重なっている



- この系のハミルトニアン H
  i番目のサイトの電子軌道に電子が１ついる状態 $|i\rangle$

$$\langle i|\, H \,|i\rangle = \epsilon \qquad \langle i|\, H \,|i+1\rangle = -t$$

- <u>第２量子化</u>　$c_{i\sigma}, c^\dagger_{i\sigma}$ ：i番目のサイトの電子の生成消滅演算子

$$\boxed{H = \epsilon \sum_{i,\sigma} c^\dagger_{i\sigma} c_{i\sigma} - t \sum_{\langle i,j\rangle,\sigma} c^\dagger_{i\sigma} c_{j\sigma}}$$

Tight-binding 模型

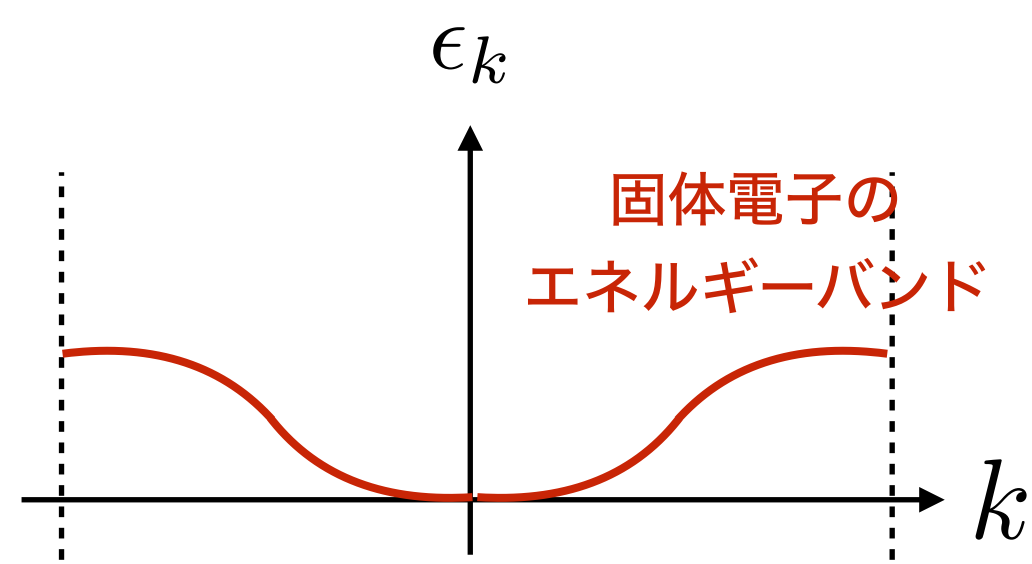
- **Tight-binding ハミルトニアン（波数空間表示）**

$$\boxed{H=\sum_{\vec{k},\sigma}\epsilon_{\vec{k}}c^{\dagger}_{\vec{k},\sigma}c_{\vec{k},\sigma}}$$

$$c_{i\sigma}=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\vec{k}}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}_i}c_{\vec{k},\sigma}$$

単純３次元立方格子の場合：

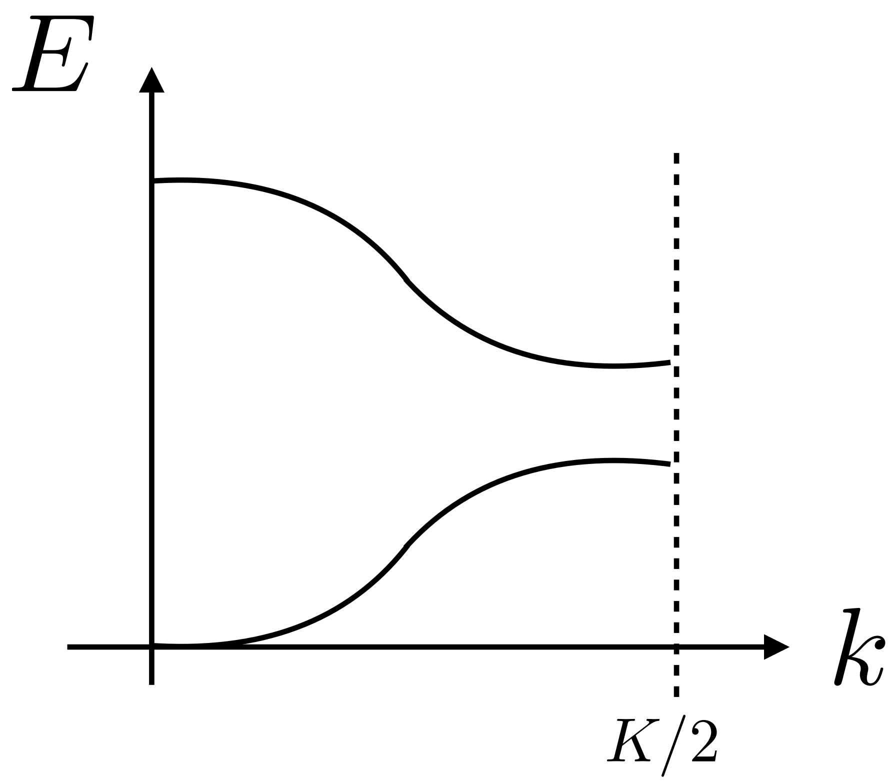
$$\epsilon_k=\epsilon+2t\left(1-\sum_{i=x,y,z}\cos(k_i a)\right)$$



- Tight-binding 近似 〜 格子上の自由フェルミオン

格子の形状によってバンドの形（分散関係）が変わる

- エネルギーバンド（複数の電子軌道を考慮）



- フェルミエネルギーが バンドギャップに位置する ＝**絶縁体**

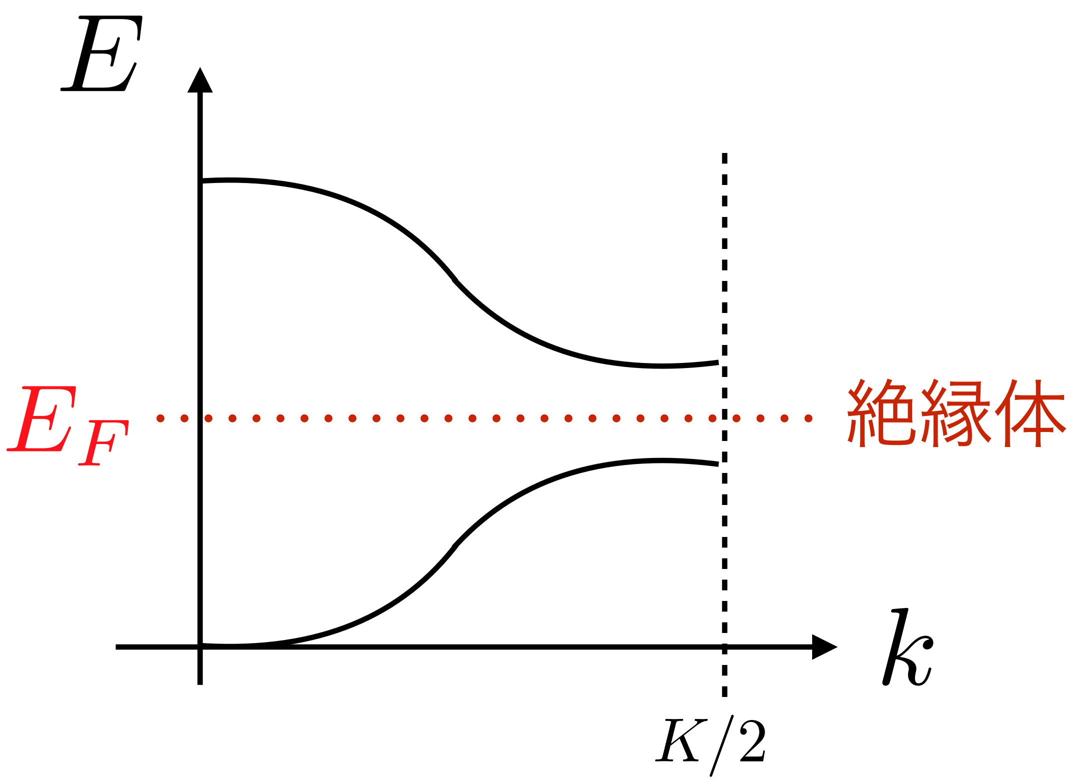
- フェルミエネルギーが エネルギーバンド中に位置する ＝**金属**

- コメント
  - 実空間で $\vec{x} \to \vec{x} + \vec{a}$ の周期性 $\longleftrightarrow$ 波数空間で $\vec{k} \to \vec{k} + \vec{K}$ の周期性

    $|\vec{k}| \lesssim |\vec{K}/2|$ の領域だけ考えればよい（**第一ブリルアン域**）
  - 典型的なオーダー： $K \sim \dfrac{2\pi}{a} \sim \mathrm{keV}$ $\quad t \sim E_F \sim \mathrm{eV}$

    $T \ll E_F$ なので固体中の電子は強くフェルミ縮退している
  - 電子相関などの効果で物性が変わることがある (e.g.Mott絶縁体)

- エネルギーバンド（複数の電子軌道を考慮）

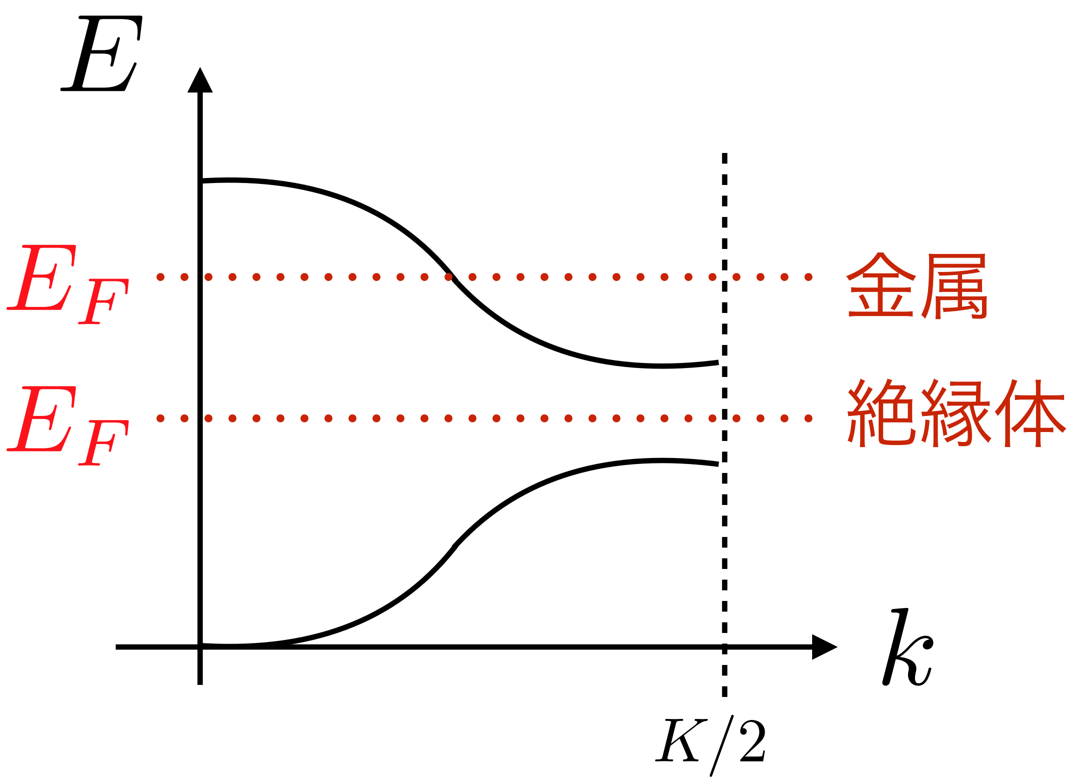


- フェルミエネルギーが
バンドギャップに位置する
＝絶縁体

- フェルミエネルギーが
エネルギーバンド中に位置する
＝金属

- コメント
  - 実空間で $\vec{x} \to \vec{x} + \vec{a}$ の周期性 $\longleftrightarrow$ 波数空間で $\vec{k} \to \vec{k} + \vec{K}$ の周期性
  $|\vec{k}| \lesssim |\vec{K}/2|$ の領域だけ考えればよい（**第一ブリルアン域**）
  - 典型的なオーダー： $K \sim \dfrac{2\pi}{a} \sim \mathrm{keV}$　　$t \sim E_F \sim \mathrm{eV}$
  $T \ll E_F$ なので固体中の電子は強くフェルミ縮退している
  - 電子相関などの効果で物性が変わることがある　(e.g.Mott絶縁体)

- エネルギーバンド（複数の電子軌道を考慮）



- フェルミエネルギーが バンドギャップに位置する ＝絶縁体
- フェルミエネルギーが エネルギーバンド中に位置する ＝金属

- コメント
  - 実空間で $\vec{x} \to \vec{x} + \vec{a}$ の周期性 $\longleftrightarrow$ 波数空間で $\vec{k} \to \vec{k} + \vec{K}$ の周期性
    $|\vec{k}| \lesssim |\vec{K}/2|$ の領域だけ考えればよい（**第一ブリルアン域**）
  - 典型的なオーダー： $K \sim \dfrac{2\pi}{a} \sim \mathrm{keV}$ $\quad t \sim E_F \sim \mathrm{eV}$
    $T \ll E_F$ なので固体中の電子は強くフェルミ縮退している
  - 電子相関などの効果で物性が変わることがある (e.g.Mott絶縁体)

Tight-binding 模型の拡張

$$H = -t \sum_{\langle i,j \rangle,\sigma} c^{\dagger}_{i\sigma} c_{j\sigma}$$

Tight-binding模型

⟶ バンド金属、バンド絶縁体

$$+U \sum_{i} n_{i\uparrow} n_{i\downarrow}$$

電子間斥力（ハバード模型）

⟶ Mott絶縁体、(反)強磁性体

$$+\lambda \sum_{(i,j)} c^{\dagger}_{i} (\vec{\sigma} \cdot \vec{L}) c_{j}$$

スピン軌道相互作用

⟶ トポロジカル絶縁体

$$+\sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{k}'} g_{k} c^{\dagger}_{\vec{k}+\vec{k}'} c_{\vec{k}'} (b_{\vec{k}} + b^{\dagger}_{-\vec{k}})$$

電子-フォノン相互作用

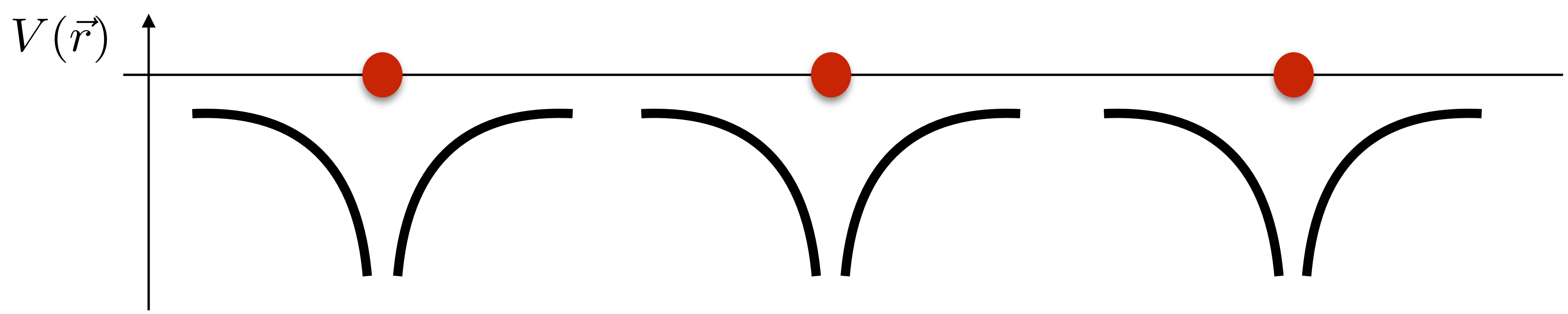
⟶ 超伝導体

様々な物性を理解する模型としてよく応用されている

弱い周期ポテンシャル

- 電子のシュレディンガー方程式： $H\psi = E\psi$ $\qquad H = \dfrac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r})$

格子イオンによる周期ポテンシャル： $V(\vec{r}) = \sum_{\vec{K}} V_{\vec{K}} e^{i\vec{K}\cdot\vec{r}}$ $\quad \vec{K}$:逆格子ベクトル



- 摂動論： $E_{\vec{k}} \simeq E_{\vec{k}}^{(0)} + \sum_{\vec{K}} \dfrac{|V_{\vec{K}}|^2}{E_{\vec{k}}^{(0)} - E_{\vec{k}-\vec{K}}^{(0)}}$ $\qquad E_k^{(0)} = \dfrac{k^2}{2m}$

- ブリルアン域の境界では摂動論が破綻 $\vec{k} = \vec{K}/2 \qquad E_{\vec{k}}^{(0)} \simeq E_{\vec{k}-\vec{K}}^{(0)}$

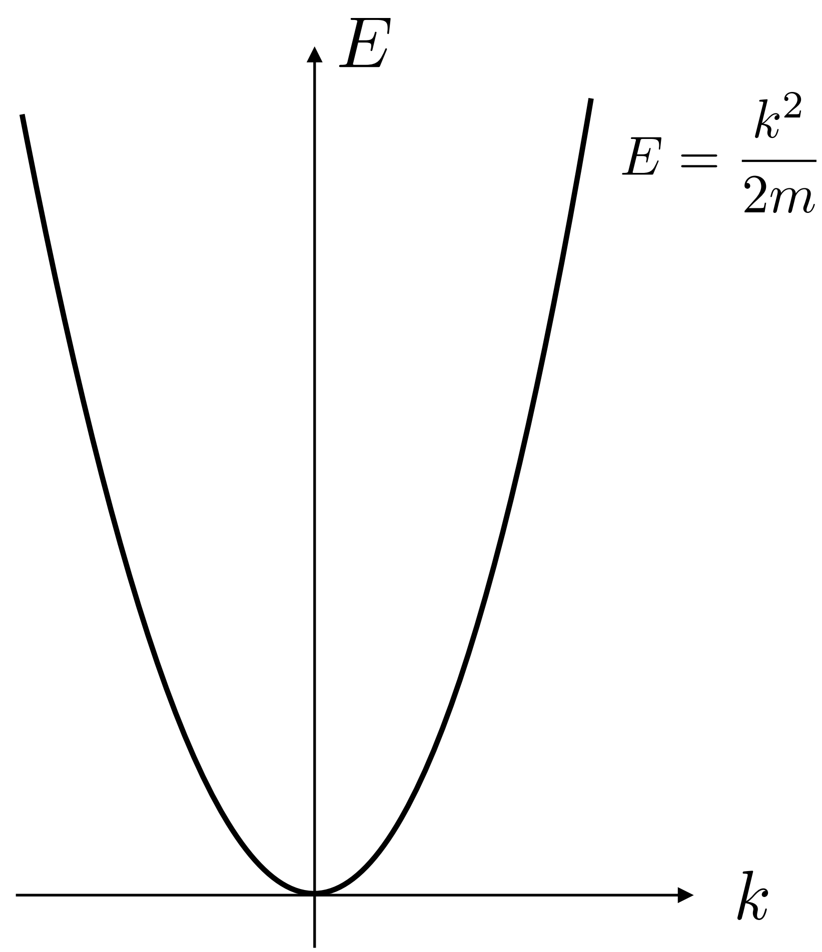
$$\begin{pmatrix} E_{\vec{k}}^{(0)} & V_{\vec{K}} \\ V_{\vec{K}}^* & E_{\vec{k}-\vec{K}}^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left|\vec{k}\right\rangle \\ \left|\vec{k}-\vec{K}\right\rangle \end{pmatrix}$$

エネルギー固有値： $E_{\vec{k}}^{(0)} \pm |V_{\vec{K}}|$

エネルギーギャップ

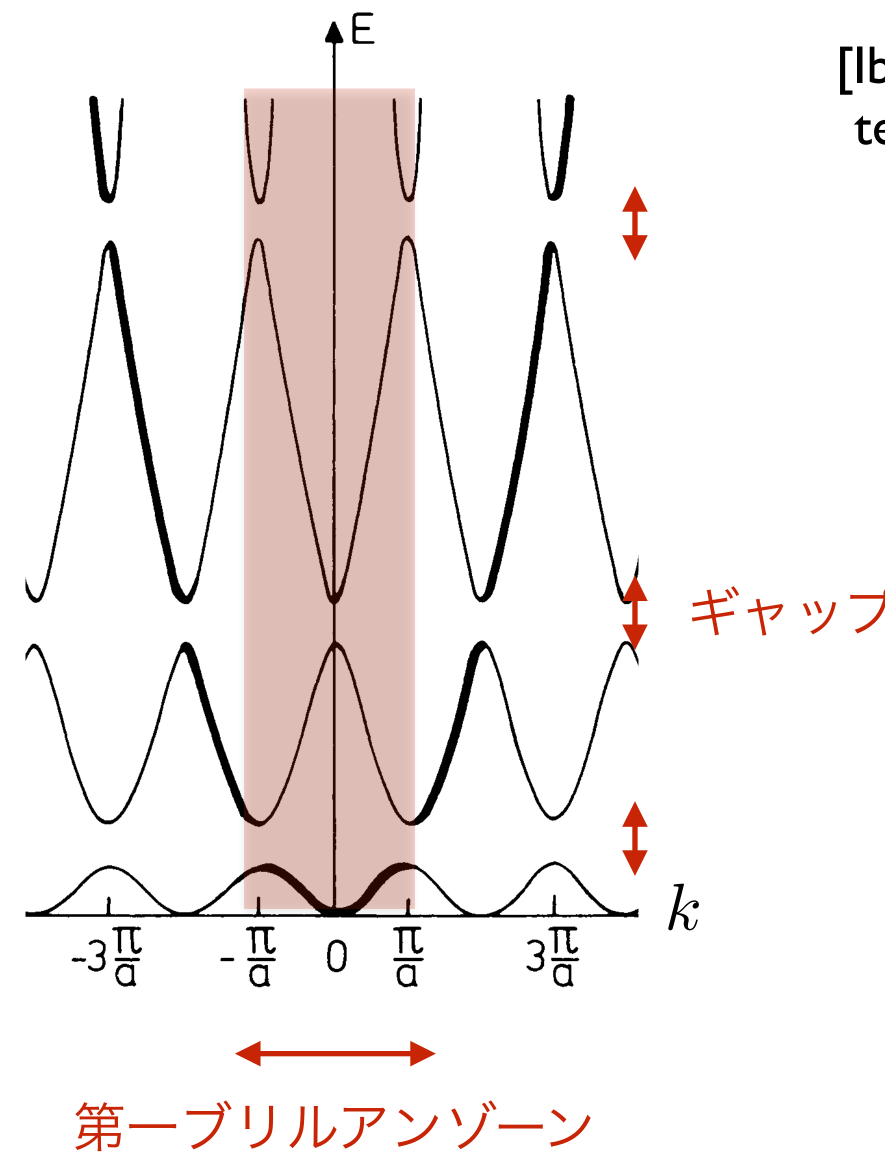
弱い周期ポテンシャル

自由電子



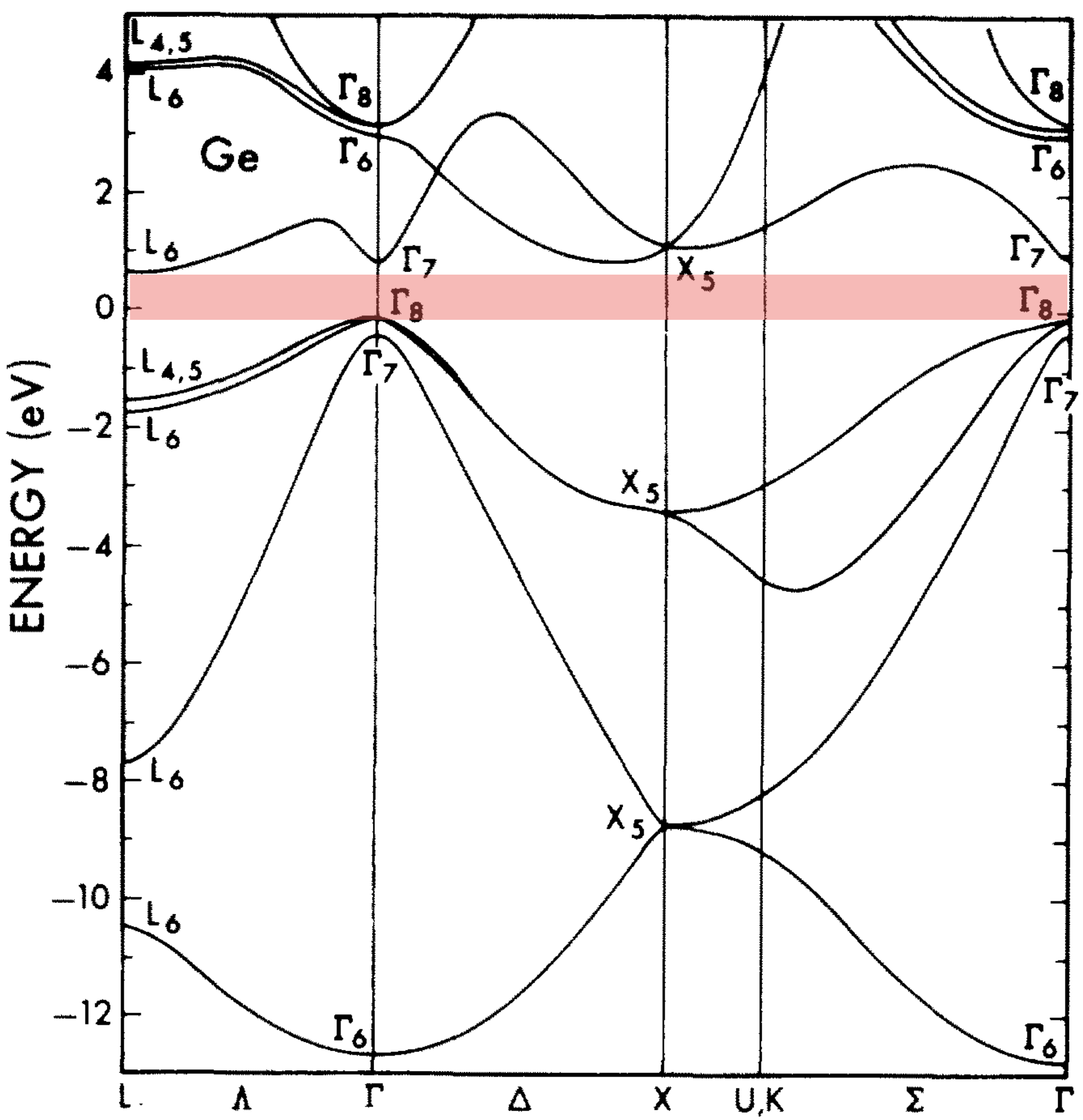
弱周期ポテンシャル中の電子

[Ibach, Luth textbook]



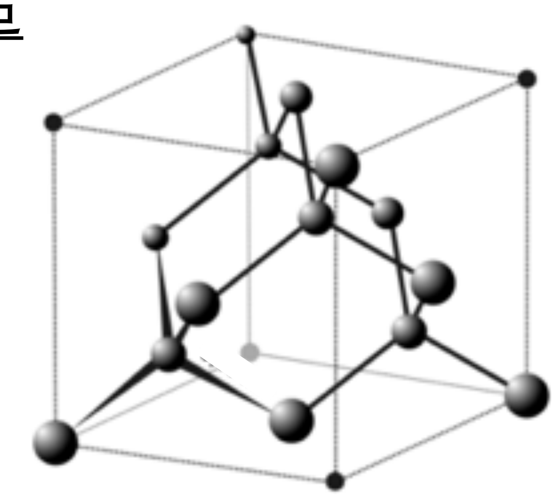
Tight-binding模型、弱い周期ポテンシャルどちらの描像でも
バンド構造が現れる

例：ゲルマニウムのエネルギーバンド



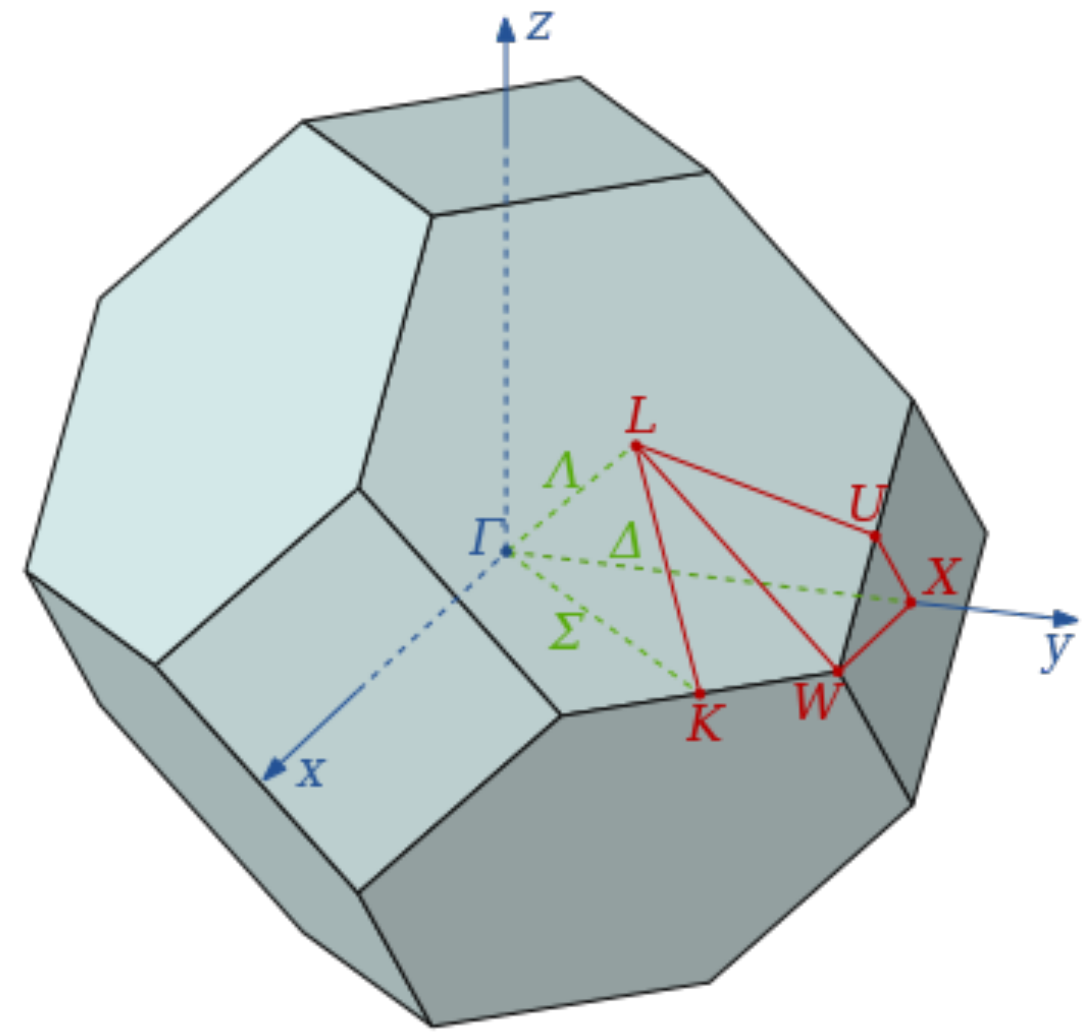
Chelikowsky, Cohen (1976)

結晶構造



wikipedia

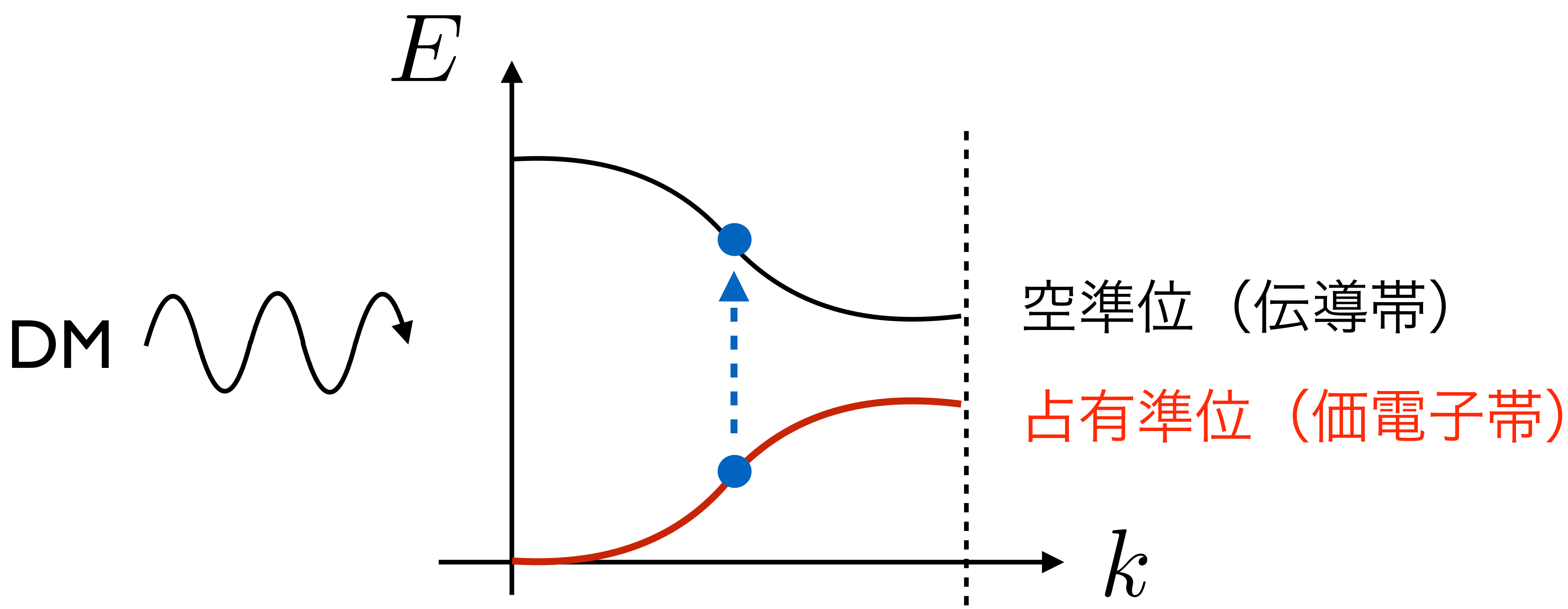
ブリルアンゾーン



wikipedia

固体電子と暗黒物質

- 暗黒物質の吸収： **価電子帯の電子を伝導帯に叩き上げる**



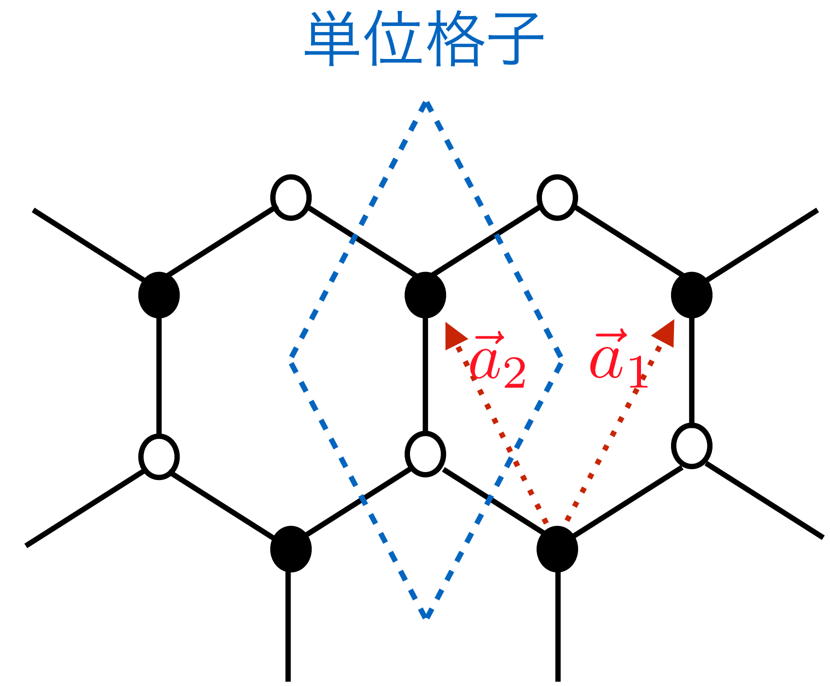
- 暗黒物質の質量>バンドギャップ が必要
  - 半導体：ギャップ ~ 1eV

    Hochberg, Lin, Zurek (2016)
    Bloch et al (2016)
  - **Dirac物質：ギャップ << 1eV**

    Hochberg et al (2017),
    Geilhufe, Kahlhoefer, Winkler (2019)
  - **超伝導体**：フェルミ面付近の電子がクーパー対を形成し、**1meV**程度の準粒子ギャップを生じる（吸収＋フォノン放出が必要）

Hochber et al (2015), Hochberg, Lin, Zurek (2016)

Dirac物質



<u>２次元の例：グラフェン</u>

- Tight-binding ハミルトニアン

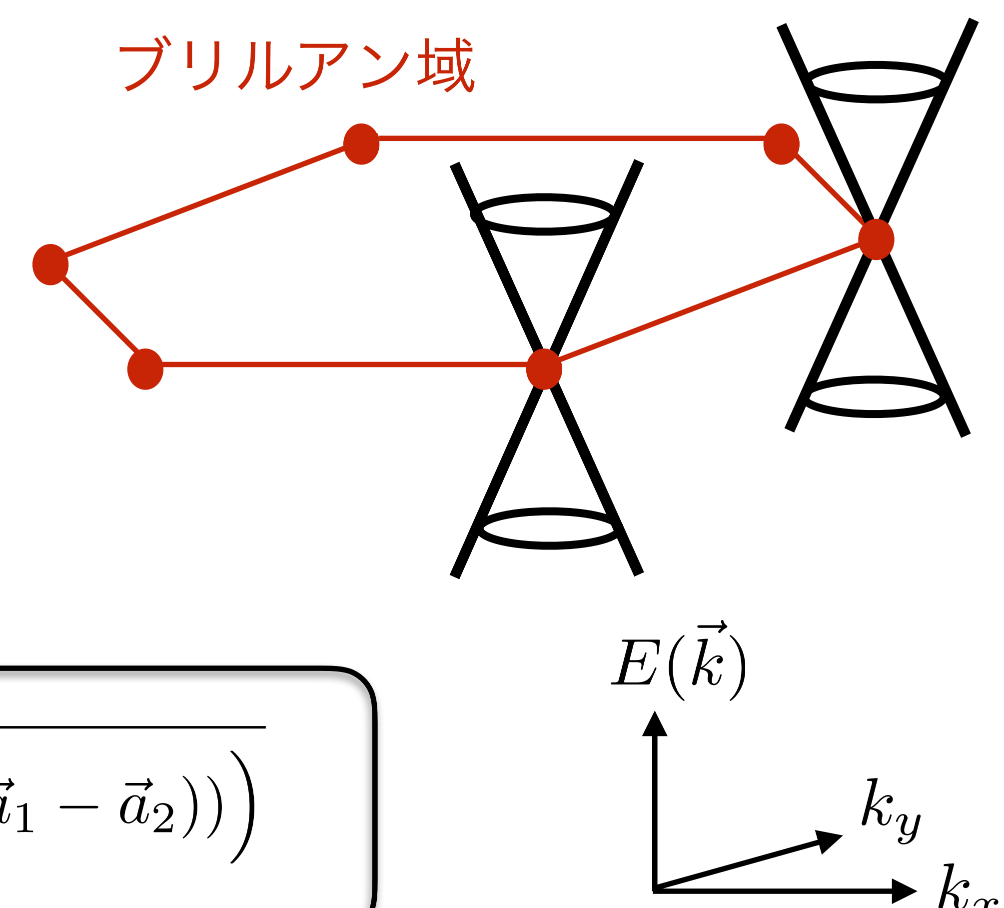
$$H = -t \sum_{\langle i,j \rangle, \sigma} c^\dagger_{i\sigma} c_{j\sigma}$$

波数空間（単位格子に２原子あることに注意）

$$H = -t \sum_{\vec{k}} (c^\dagger_{A,\vec{k}}, c^\dagger_{B,\vec{k}}) \mathcal{H} \begin{pmatrix} c_{A,\vec{k}} \\ c_{B,\vec{k}} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 + e^{-i\vec{k}\cdot\vec{a}_1} + e^{-i\vec{k}\cdot\vec{a}_2} \\ 1 + e^{i\vec{k}\cdot\vec{a}_1} + e^{i\vec{k}\cdot\vec{a}_2} & 0 \end{pmatrix}$$

エネルギー分散



- エネルギー固有値

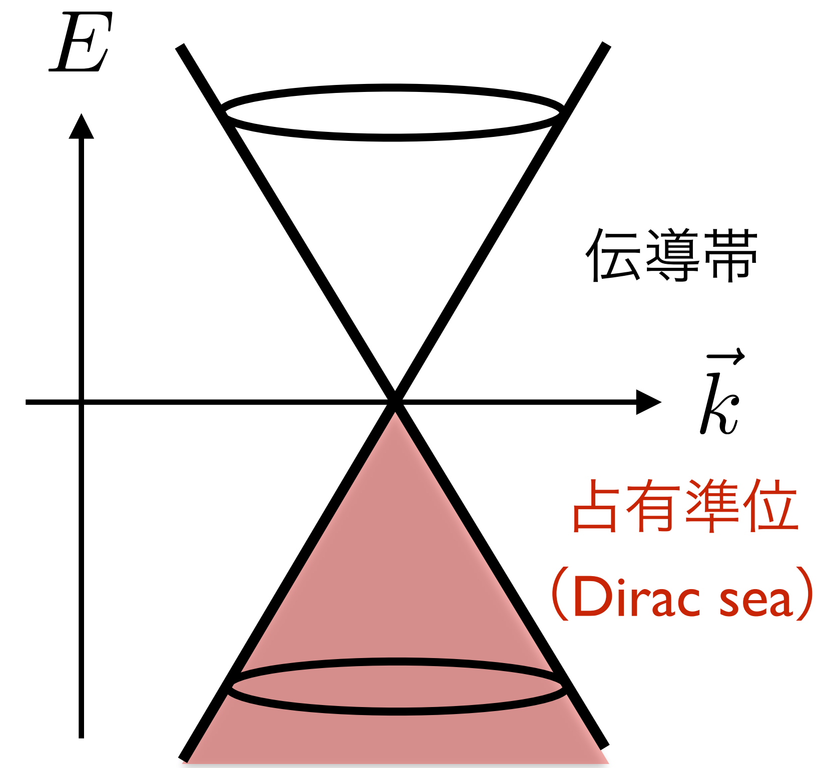
$$\boxed{E = \pm t \sqrt{3 + 2\left(\cos(\vec{k}\cdot\vec{a}_1) + \cos(\vec{k}\cdot\vec{a}_2) + \cos(\vec{k}\cdot(\vec{a}_1 - \vec{a}_2))\right)}}$$

Dirac物質

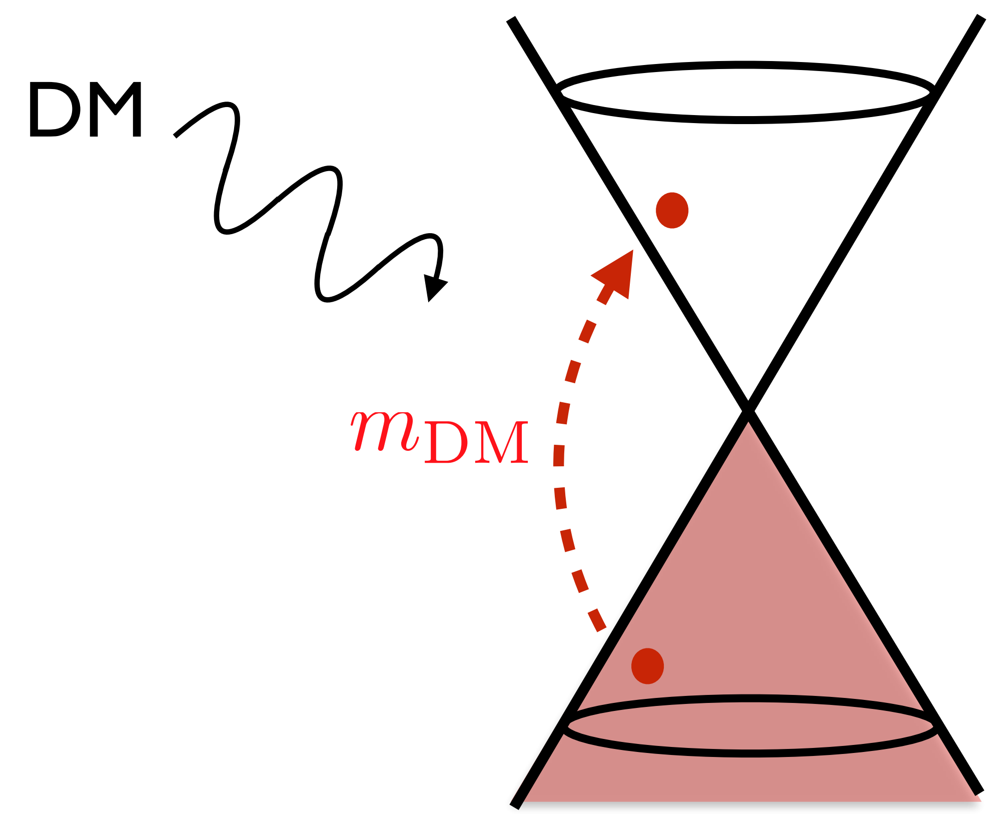
- 電子の分散関係が錐状になる物質：Dirac物質
  （相対論的massless Dirac粒子とのアナロジー）

  ２次元：グラフェン
  　　　　トポロジカル絶縁体のエッジモード

  ３次元：Na3Bi, Cd3Ar2, ZrTe5…



- 軽い暗黒物質の吸収に好都合
  広範囲の暗黒物質質量を一度に探れる



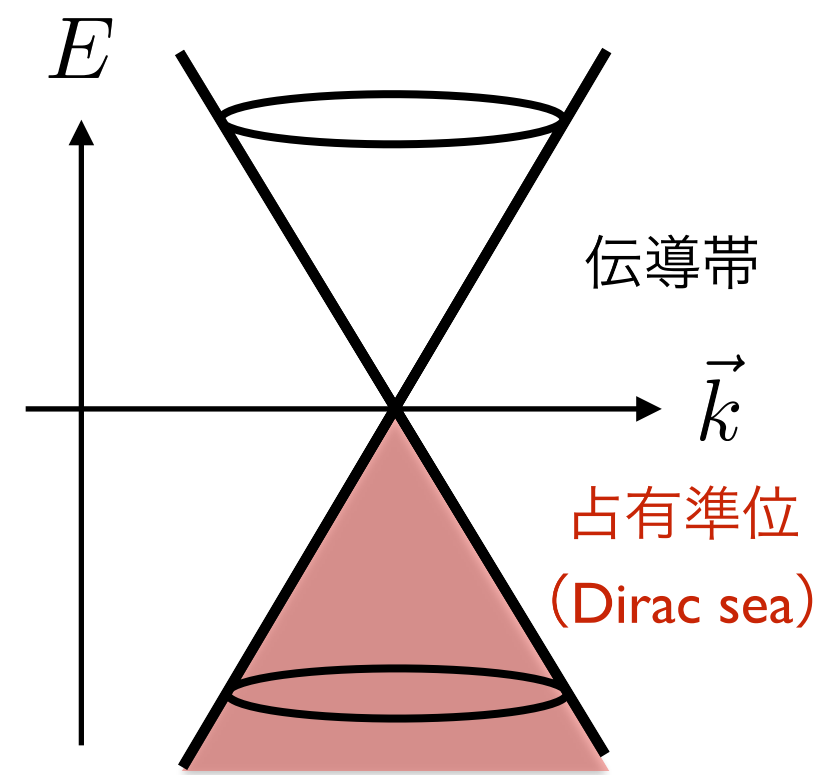
- 実際にはわずかにギャップが空く

Dirac物質

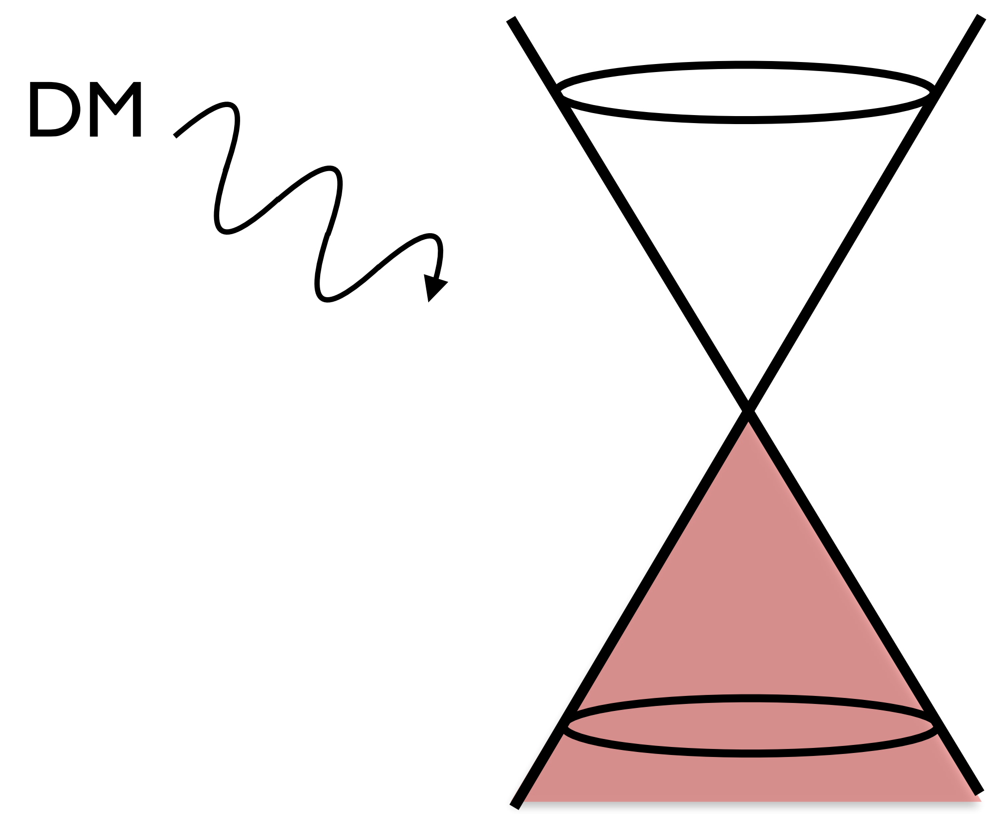
- 電子の分散関係が錐状になる物質：Dirac物質
  （相対論的massless Dirac粒子とのアナロジー）

  ２次元：グラフェン
  　　　　トポロジカル絶縁体のエッジモード

  ３次元：Na3Bi, Cd3Ar2, ZrTe5…



- 軽い暗黒物質の吸収に好都合
  広範囲の暗黒物質質量を一度に探れる



- 実際にはわずかにギャップが空く

Dirac物質

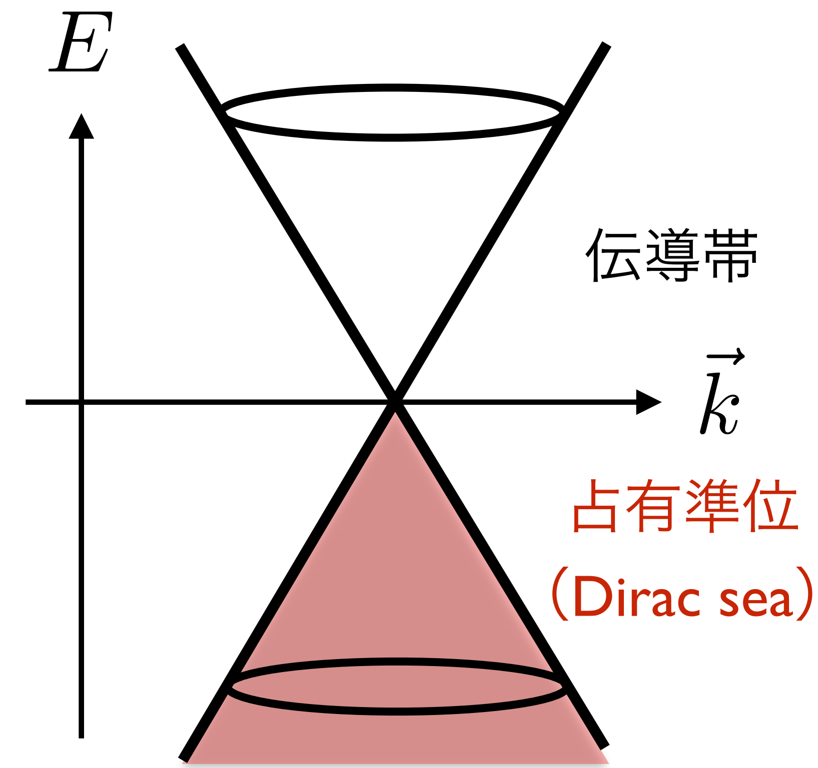
- 電子の分散関係が錐状になる物質：Dirac物質

（相対論的massless Dirac粒子とのアナロジー）

２次元：グラフェン

　　　　トポロジカル絶縁体のエッジモード

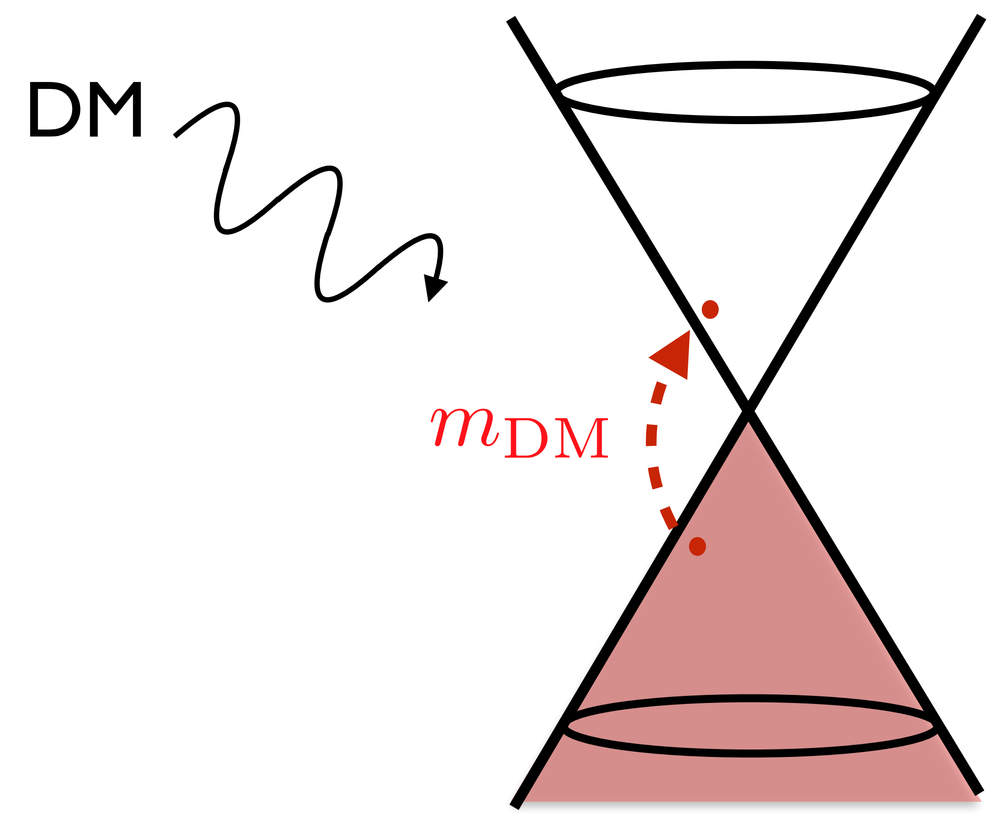
３次元：Na3Bi, Cd3Ar2, ZrTe5…



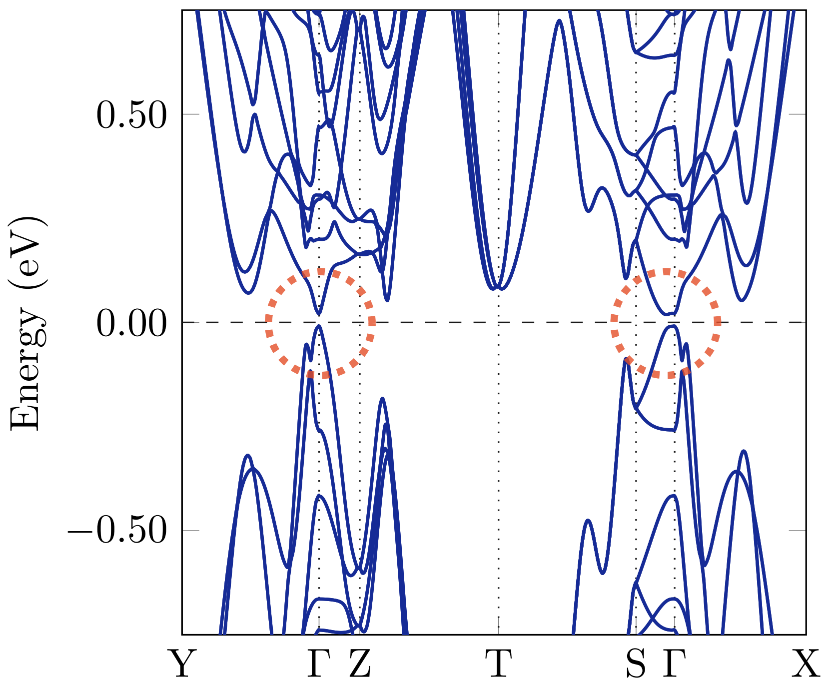
- 軽い暗黒物質の吸収に好都合

広範囲の暗黒物質質量を一度に探れる

- 実際にはわずかにギャップが空く

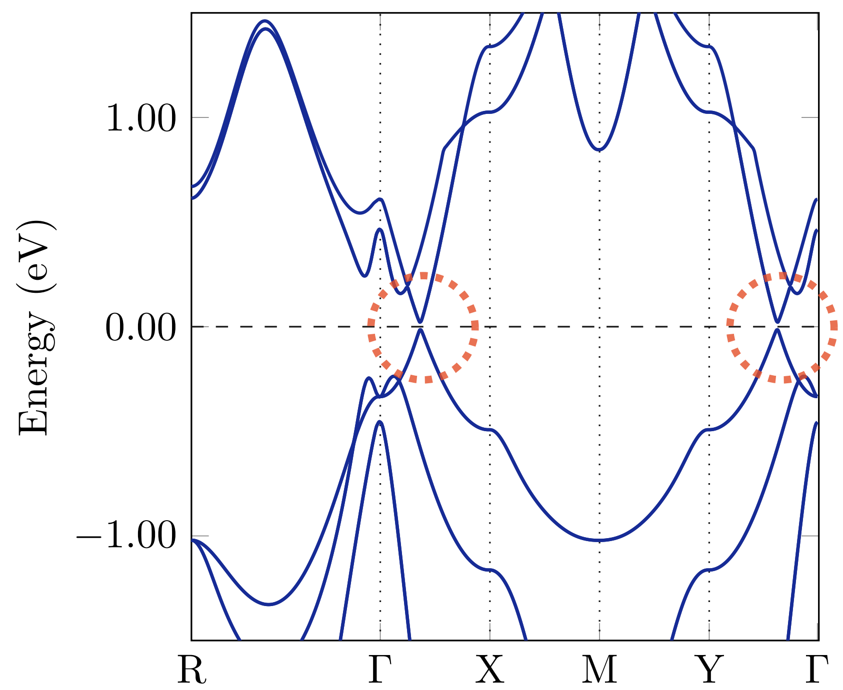


ZrTe5



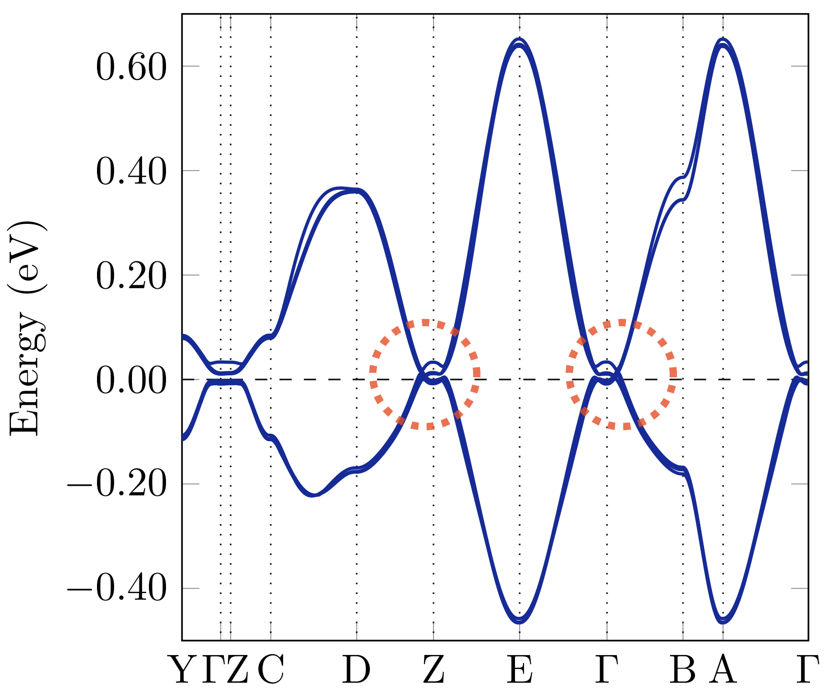
gap ~ 16meV

Yb3PbO



gap ~ 19meV

BNQ-TTF



gap ~ 5meV

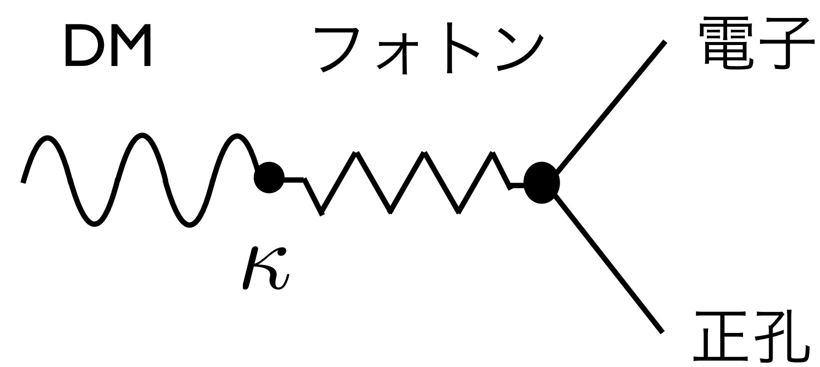
Geilhufe, Kahlhoefer, Winkler (2019)

暗黒物質の吸収

- Hidden photon DMの場合 $\mathcal{L} = \frac{\kappa}{2} F_{\mu\nu} V^{\mu\nu}$
- 単位時間・重量あたりの暗黒物質吸収率

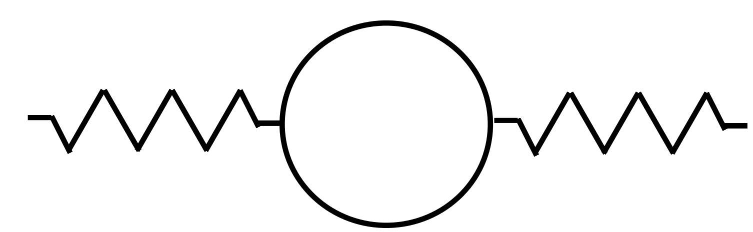
$$R = \frac{n_{\rm DM}}{\rho_{\rm target}} \kappa_{\rm eff}^2 \left. \frac{{\rm Im}\,\Pi(\omega)}{\omega} \right|_{\omega = m_{\rm DM}}$$

$$\kappa_{\rm eff}^2 = \frac{\kappa^2 m_{\rm DM}^4}{(m_{\rm DM}^2 - {\rm Re}\,\Pi)^2 + ({\rm Im}\,\Pi)^2}$$

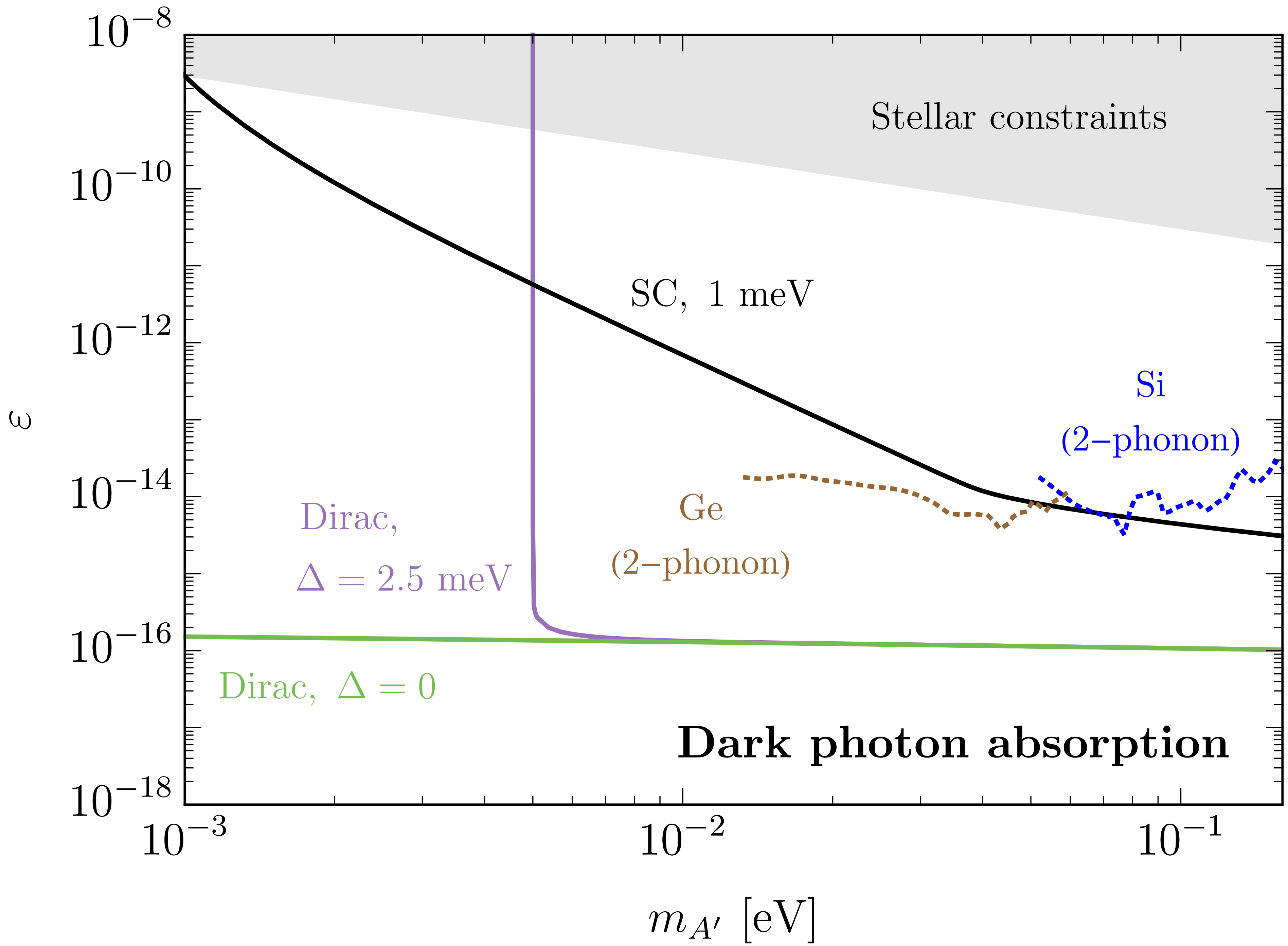


- 光子のself-energyはQEDと同じ手法で計算できる

ただし電子の分散関係の違いに注意 $c \to v_F$ $e \to \frac{c}{v_F} e$



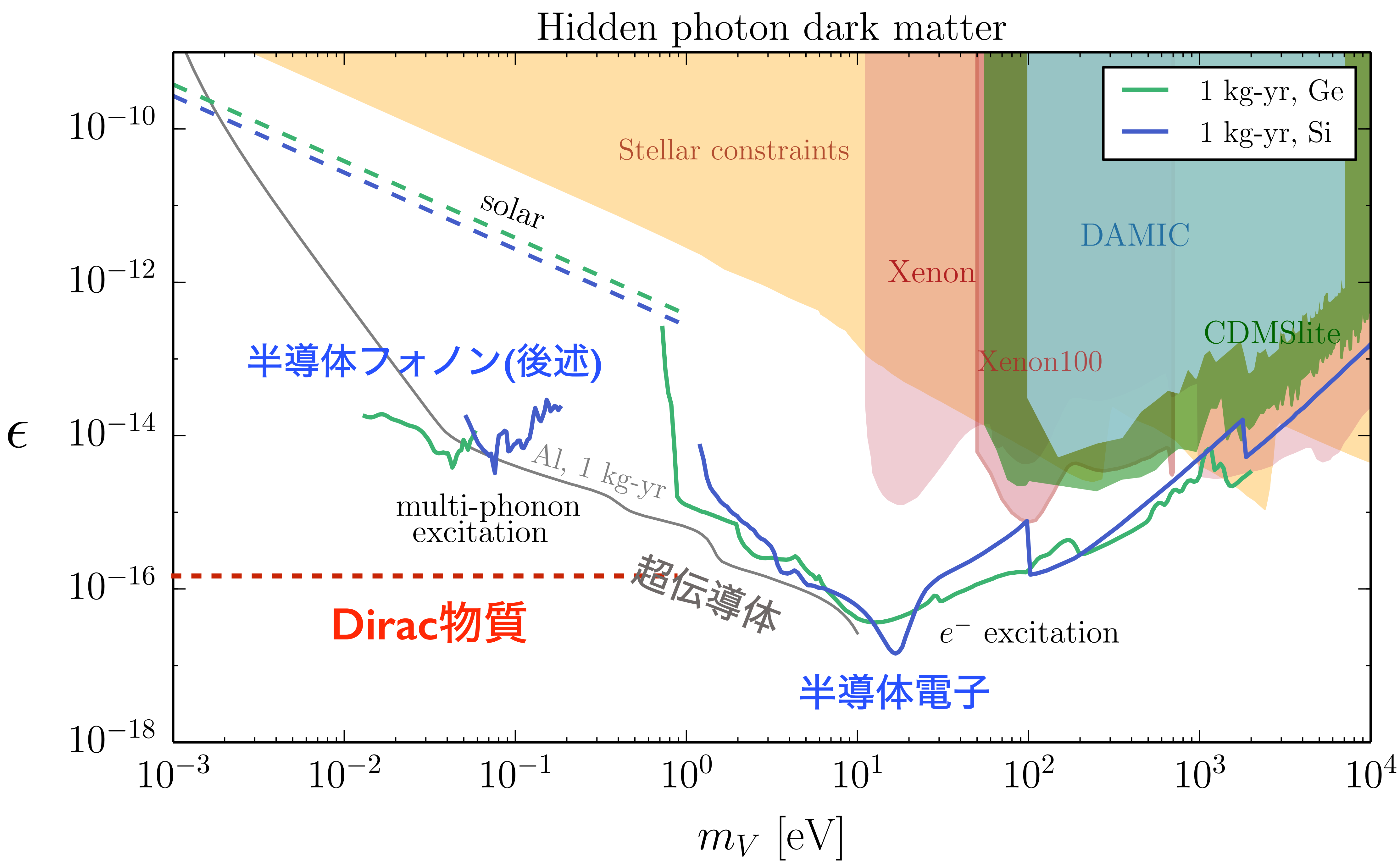
- Hidden photon 暗黒物質に対するsensitivity　(1kg yr, 3events)



Hochberg et al. (2017)

固体電子による検出まとめ

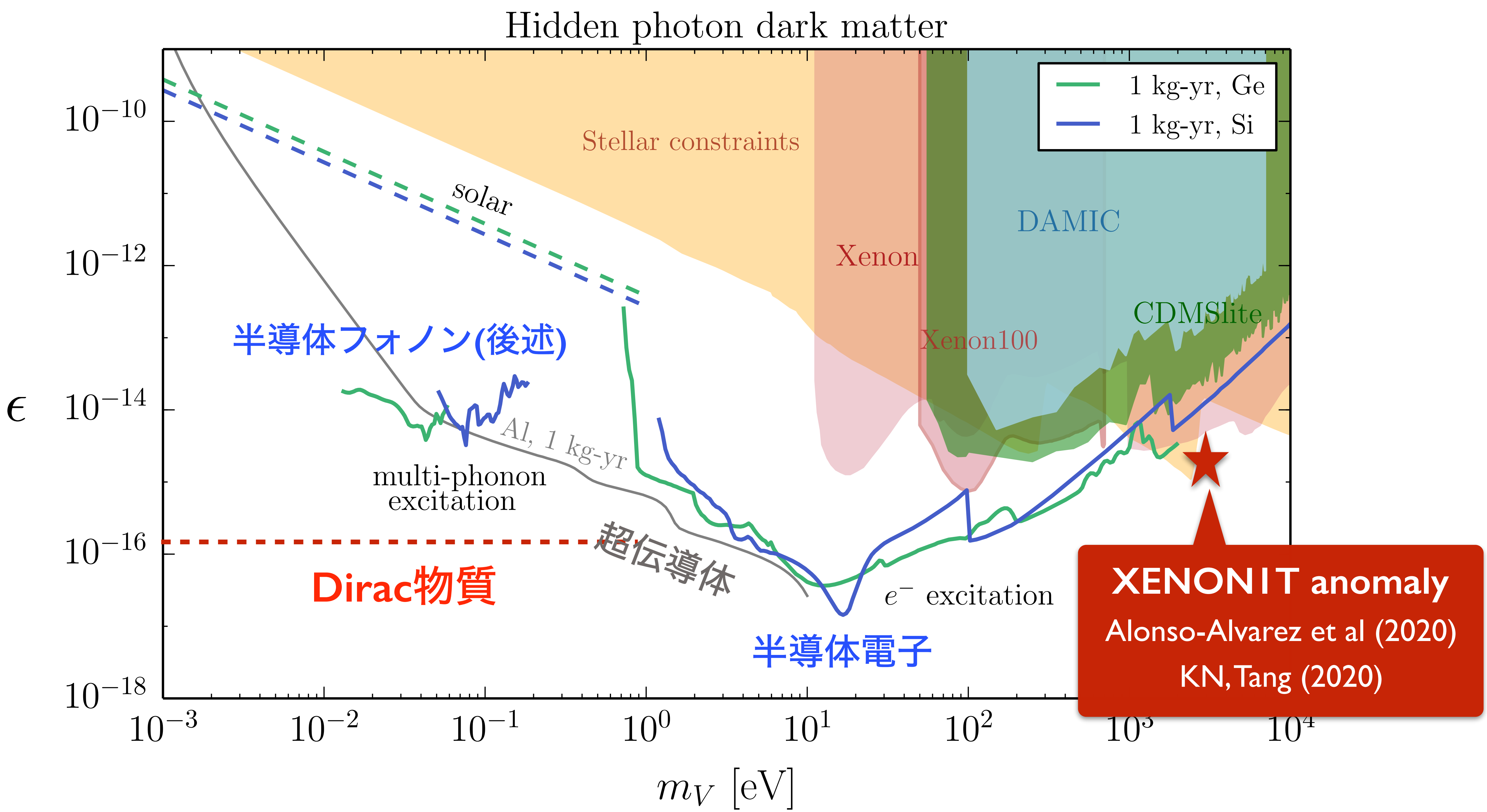
- Hidden photon 暗黒物質



Hochberg, Lin, Zurek (2016)

固体電子による検出まとめ

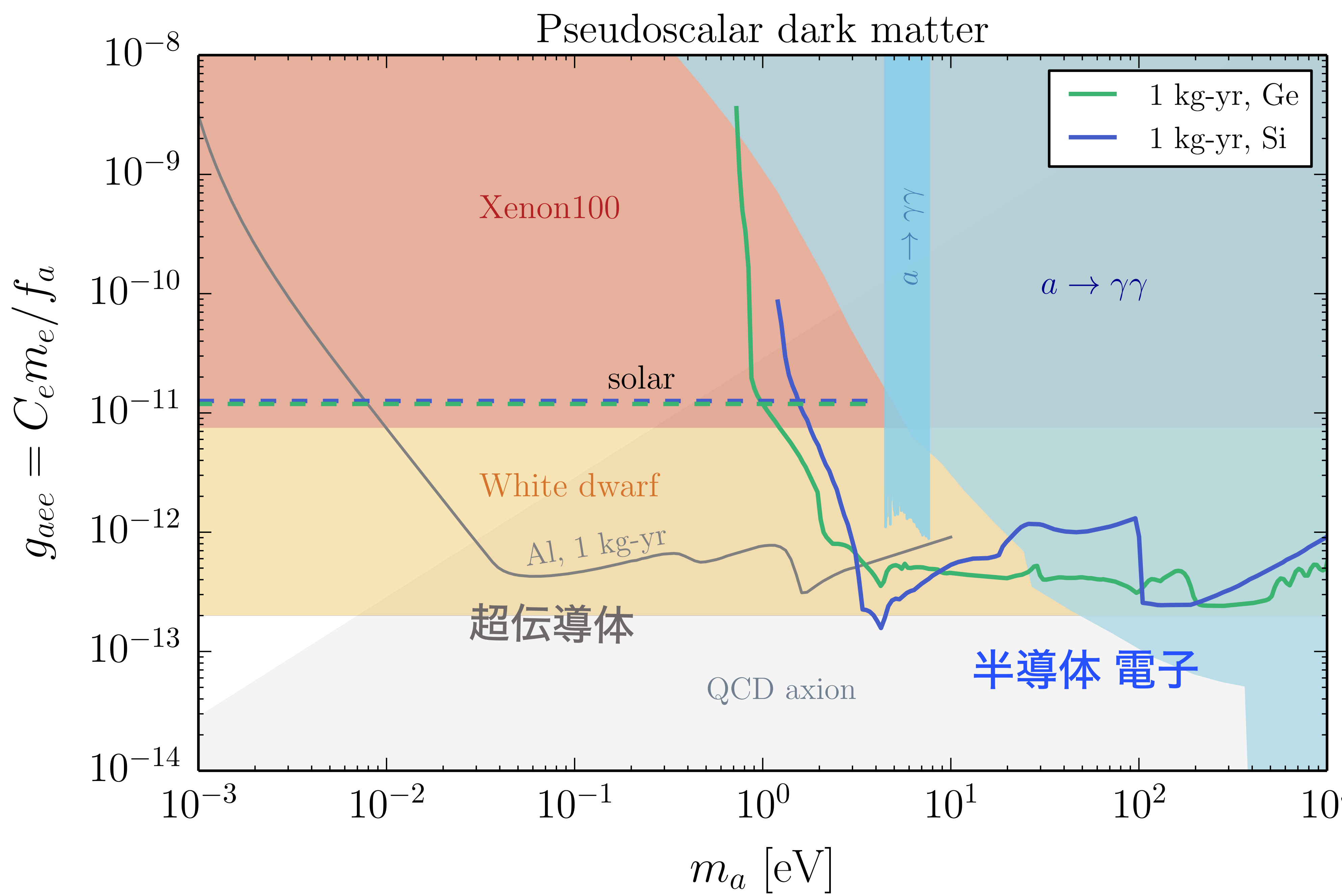
- Hidden photon 暗黒物質



Hochberg, Lin, Zurek (2016)

固体電子による検出まとめ

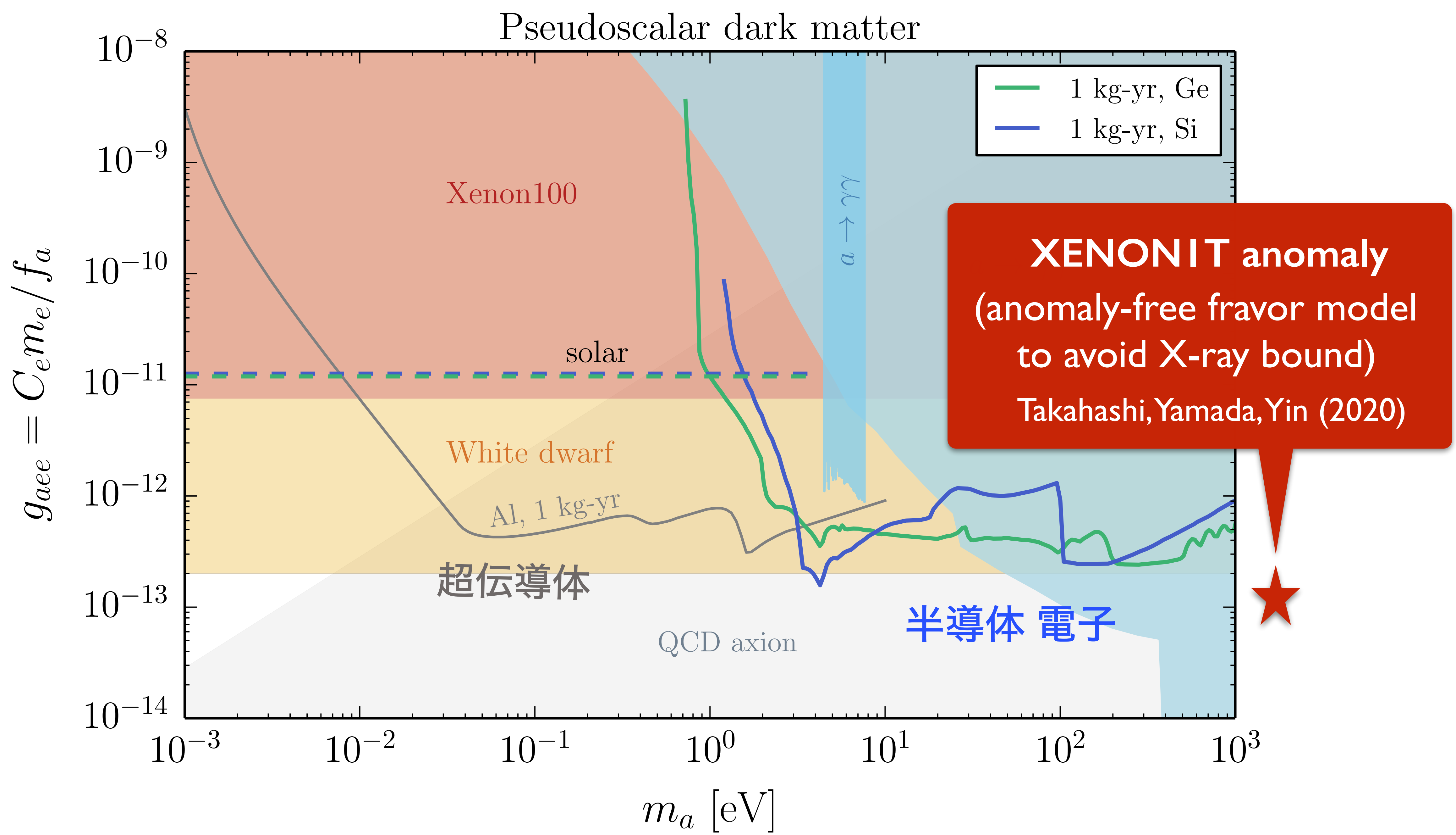
- Axion-like 暗黒物質



Hochberg, Lin, Zurek (2016)

固体電子による検出まとめ

- Axion-like 暗黒物質



Hochberg, Lin, Zurek (2016)

2. マグノン

磁性

- 電子の磁気モーメント（スピン&軌道）が磁性に寄与

  （核子は基本的に固体の磁性には寄与しない）

- 電子のスピン磁気モーメント　$\vec{M} = -g\mu_B \vec{S}$　　$g = 2$　$\mu_B = \dfrac{e}{2m_e}$

- 外部磁場をかけると電子のスピンがそろう＝**常磁性体**

  外部磁場なしでも電子のスピンがそろっている＝**強磁性体**

- 自由電子磁性：Pauli常磁性

  局在電子磁性：常磁性（相互作用が弱い時）

  Heisenberg強磁性（相互作用が強い時）

強磁性体

- 格子点に電子が局在している<u>**絶縁性磁性体**</u>を考える ⟷ （**金属強磁性**）

強磁性の担い手
- **伝導電子** ……… 遷移金属(Fe, Co, Ni) ……… 金属(3d伝導)
- **局在電子**
  - ……… 希土類化合物 ……… 金属(4f局在 5d伝導)
  - ……… 遷移金属酸化物等 ……… 絶縁体

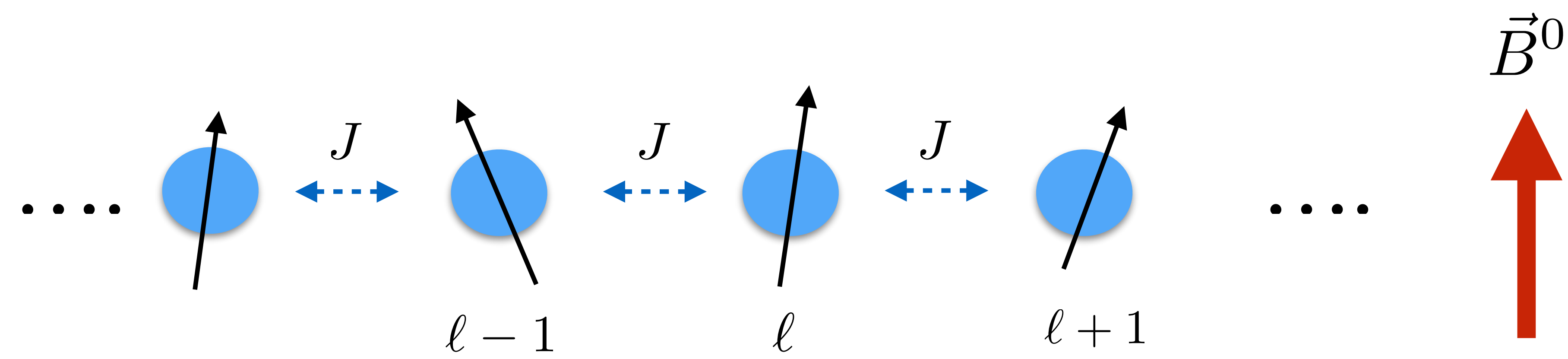
（注：軌道が全部埋まっていない電子の局在化には電子相関の効果が重要！）

- 基底状態：各格子点の最外殻電子のスピンが揃っている

- 励起状態：集団励起モード＝**スピン波（マグノン）**

ハイゼンベルグ模型

- 局在電子が隣の電子とスピンに依存する交換相互作用を持つ



- ハミルトニアン

$$\boxed{H_{\rm eff} = -g\mu_B \sum_{\ell} \vec{B}^0 \cdot \vec{S}_\ell - \frac{J}{2} \sum_{\ell,\ell'} \vec{S}_\ell \cdot \vec{S}_{\ell'},}$$

$\vec{S}_\ell$:電子スピン@ ℓ　　$\mu_B = \dfrac{e}{2m_e}$:ボーア磁子　　g :Lande g-factor

- J>0 のとき絶対零度・基底状態ではスピンが揃っている（**強磁性体**）

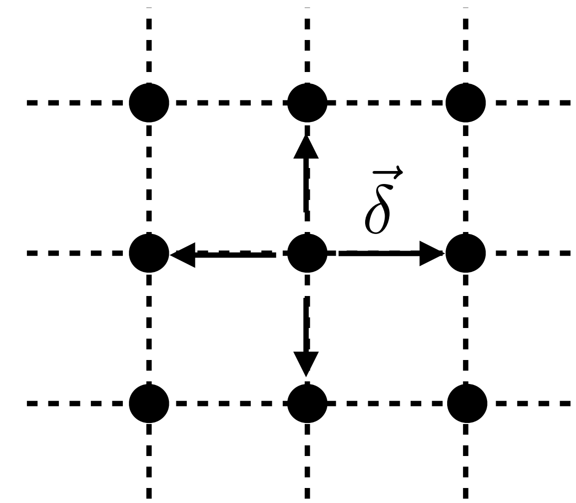
- 量子化 (Holstein-Primakoff 変換)

マグノン生成消滅演算子： $\left[\tilde{c}_\ell, \tilde{c}^\dagger_{\ell'}\right] = \delta_{\ell\ell'}$

$$S^+_\ell = \sqrt{2s - \tilde{c}^\dagger_\ell \tilde{c}_\ell}\,\tilde{c}_\ell \qquad S^-_\ell = \tilde{c}^\dagger_\ell \sqrt{2s - \tilde{c}^\dagger_\ell \tilde{c}_\ell} \qquad S^z_\ell = s - \tilde{c}^\dagger_\ell \tilde{c}_\ell \qquad (S^\pm_\ell \equiv S^x_\ell \pm i S^y_\ell)$$

- 波数表示ハミルトニアン

フーリエ変換： $c_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_\ell e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}_\ell} \tilde{c}_\ell \qquad \gamma_{\vec{k}} = \frac{1}{z} \sum_{\vec{\delta}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{\delta}}$



$$\boxed{H = \sum_k \left[\omega_L + Js \sum_{\vec{a}} (1 - \gamma_{\vec{k}})\right] c^\dagger_{\vec{k}} c_{\vec{k}} = \sum_k \omega_k c^\dagger_{\vec{k}} c_{\vec{k}}}$$

マグノン分散関係: $\omega_{\vec{k}} \simeq \omega_L + JsL^2k^2 \equiv \omega_L + \frac{k^2}{2M}$

Type-II NG bozon
[Watanabe,Murayama(2012), Hidaka(2012)]

Larmor 振動数: $\omega_L \equiv g\mu_B B^0_z \simeq 1.2 \times 10^{-4}\,\mathrm{eV} \left(\frac{B^0_z}{1\,\mathrm{T}}\right)$

- 単位格子に複数ある場合はマグノンも複数モードある

"音響"マグノン: NG mode

"光学"マグノン: それ以外

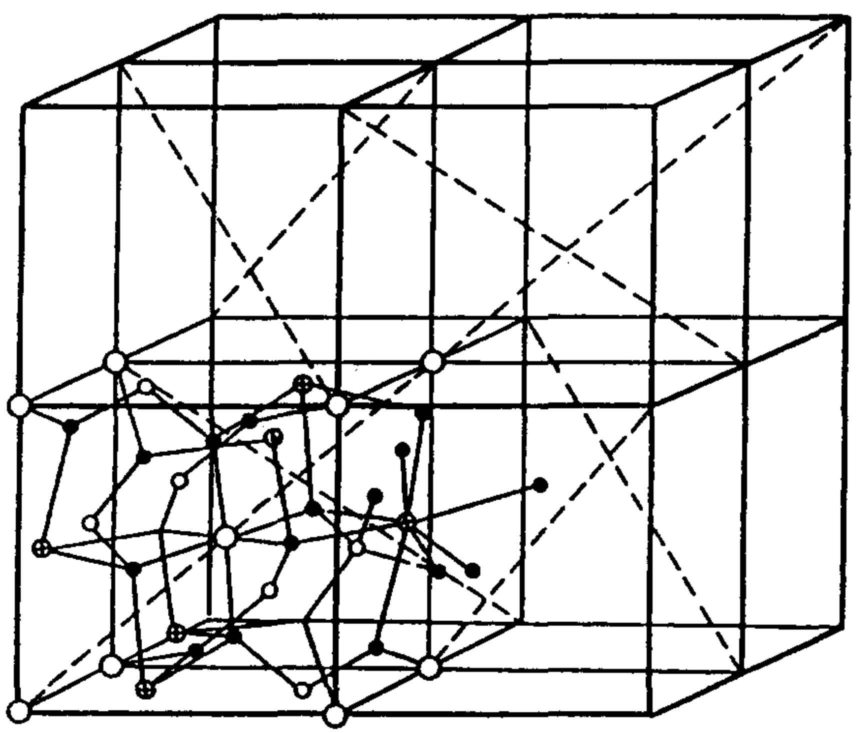
マグノンの分散関係（YIG）

YIG= $\mathrm{Y_3Fe_5O_{12}}$

- 20 Fe^3+ イオン in magnetic unit cell
- “フェリ強磁性”

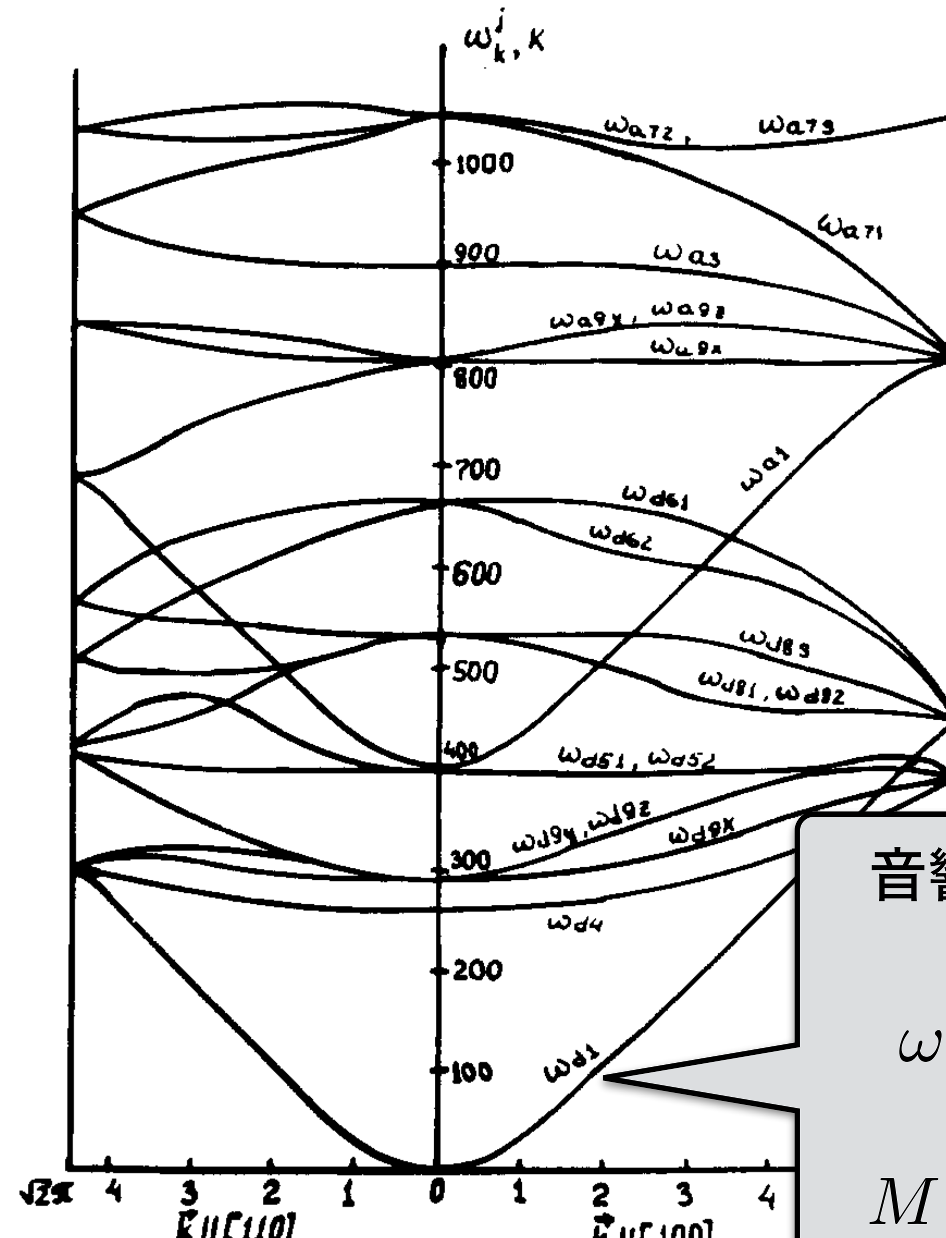
12 Fe : $\frac{5}{2}\mu_B \times 12$

8 Fe : $-\frac{5}{2}\mu_B \times 8$



Fe Y Fe O

マグノン分散関係 (20マグノン分枝)



音響マグノン

$$\omega \simeq \frac{k^2}{2M}$$

$$M \sim 7\,\mathrm{MeV}$$

Cherepanov, Kolokolov, L’vov (1993)

Axion-magnon conversion

Barbieri et al (1989); Chigusa, Moroi, KN (2020)

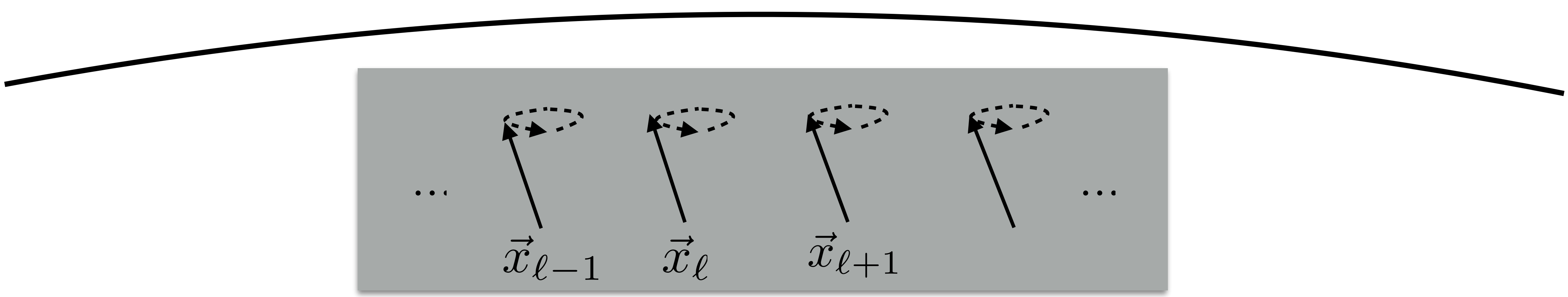
- アクシオン電子相互作用

$$\mathcal{L} = \frac{\partial_\mu a}{2f}\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi \longrightarrow H_{\rm int} = \frac{1}{f}\sum_\ell \vec{\nabla}a(\vec{x}_\ell)\cdot\vec{S}_\ell$$

- **アクシオン-マグノン相互作用ハミルトニアン**

$$\boxed{H_{\rm int} = \frac{m_a a_0 \sin(m_a t+\delta)}{f}\sqrt{\frac{s}{2}}\sum_\ell\left(v_a^-\widetilde{c}_\ell + v_a^+\widetilde{c}_\ell^\dagger\right)}$$

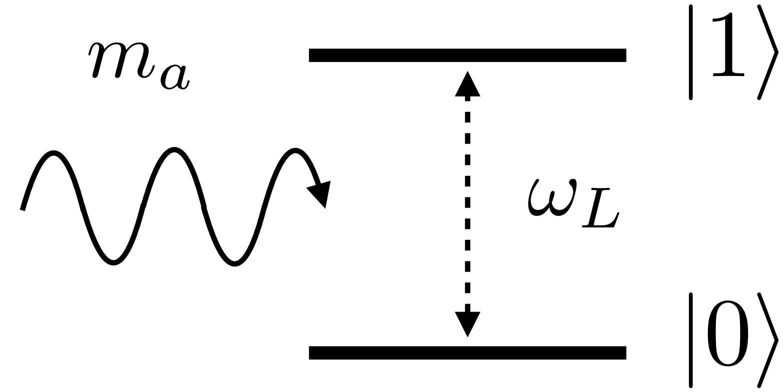
アクシオンDM: $a(\vec{x},t) = a_0\cos(m_a t - m_a\vec{v}_a\cdot\vec{x}+\delta)$



- ２レベル系の量子力学
  - k=0 モード (Kittel mode) のみに注目

    $|0\rangle$: 0-magnon state

    $|1\rangle$: 1-magnon state



  - シュレディンガー方程式

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = (H_0 + H_{\rm int})|\psi(t)\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle = \alpha_0(t)|0\rangle + \alpha_1(t)|1\rangle$$

$$\alpha_0(t=0) = 1$$
$$\alpha_1(t=0) = 0$$

  - 解

$$\alpha_1(t) \simeq \frac{iV}{2}\frac{e^{i\delta}(m_a - \omega_L)(e^{im_a t} - e^{-i\omega_L t}) + e^{-i\delta}(m_a + \omega_L)(e^{-im_a t} - e^{-i\omega_L t})}{m_a^2 - \omega_L^2}$$

Resonant enhancement for $m_a \simeq \omega_L$

- Signal power

$$\frac{dE_{\rm signal}}{dt} = \frac{\omega_L P(t)}{2t} = \frac{\omega_L |V|^2 t}{8}. \qquad V \equiv \sqrt{\frac{sN}{2}} \frac{m_a a_0 v_a^+}{f}$$

Limitation:

- アクシオンのコヒーレンス時間 $\tau_a \sim (m_a v_a^2)^{-1}$
- マグノンの緩和時間 $\tau_{\rm magnon} \sim (1/\tau_{\rm spin-spin} + 1/\tau_{\rm spin-lattice})^{-1}$
  - スピン-スピン緩和時間

    磁気モーメント相互作用： $\Delta H = \sum_{\langle \ell, \ell' \rangle} D_{ij} S_\ell^i S_{\ell'}^j$

    $\longrightarrow$ マグノン自己相互作用
  - スピン-格子緩和時間

    $$H = -\frac{J}{2} \sum_{\langle \ell, \ell' \rangle} \vec{S}_\ell \cdot \vec{S}_{\ell'}$$

    Jは格子間隔による

    フォノン

    $$J(r) = J(r_0) + \nabla J \cdot \delta \vec{r}$$

    $\longrightarrow$ マグノン-フォノン相互作用

- マグノン-光子混合 (マグノン-ポラリトン)

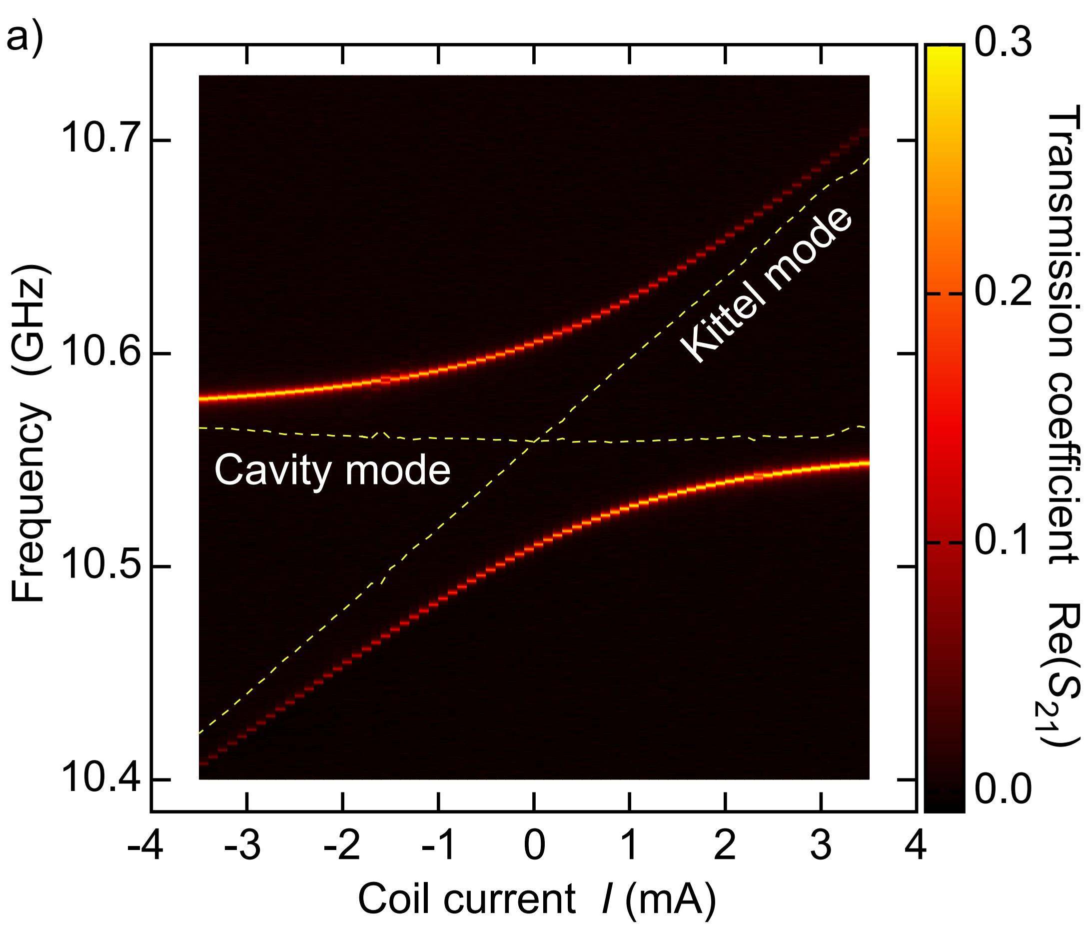
Cavity内ではマグノンと電磁波の混合が起こる

Cavity modeを検出することでアクシオンを探す

QUAX experiment:
Barbieri et al (2016)

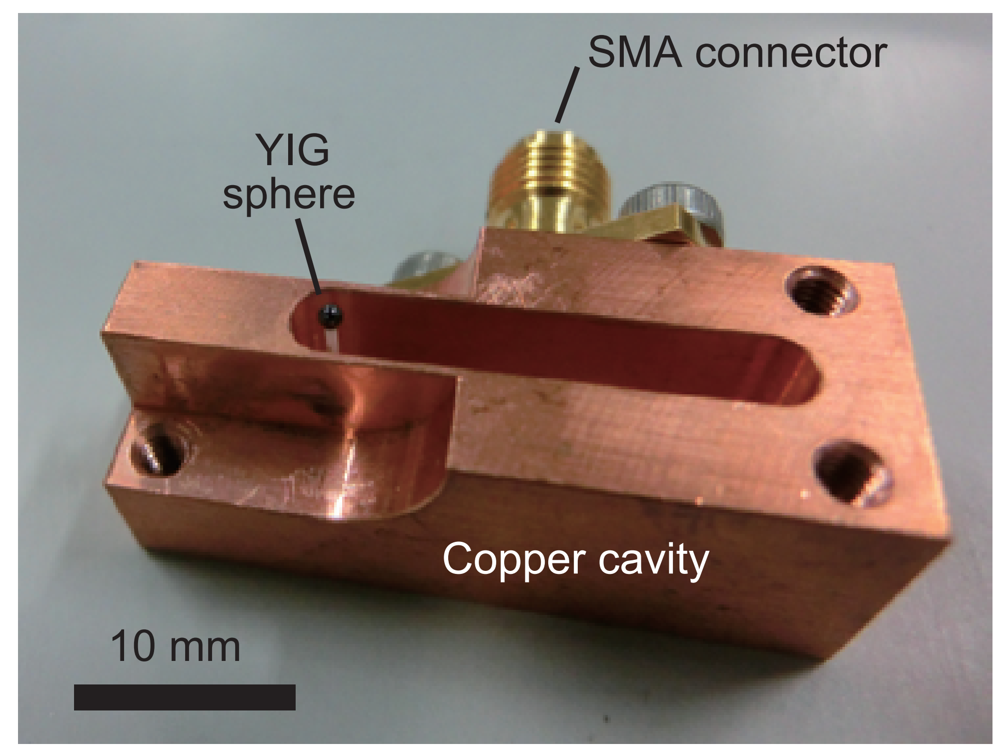
$$H = \omega_L c_0^\dagger c_0 + \omega_{\rm cav} b^\dagger b + \underline{g_{\rm cm}(b^\dagger c_0 + c_0^\dagger b)}$$

$$H = g\mu_B \vec{B}\cdot\vec{S}$$



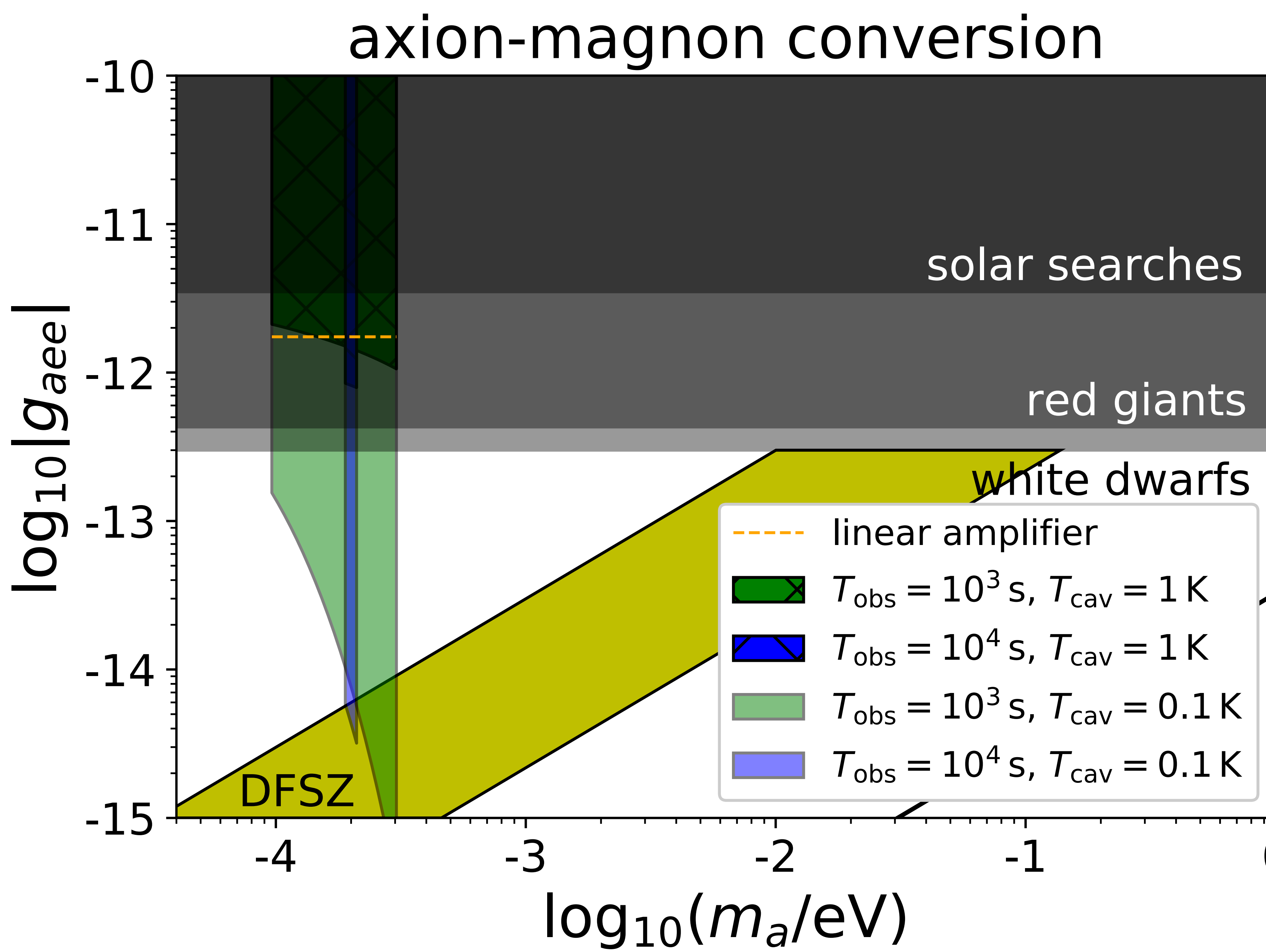
$\propto B_0$

a)



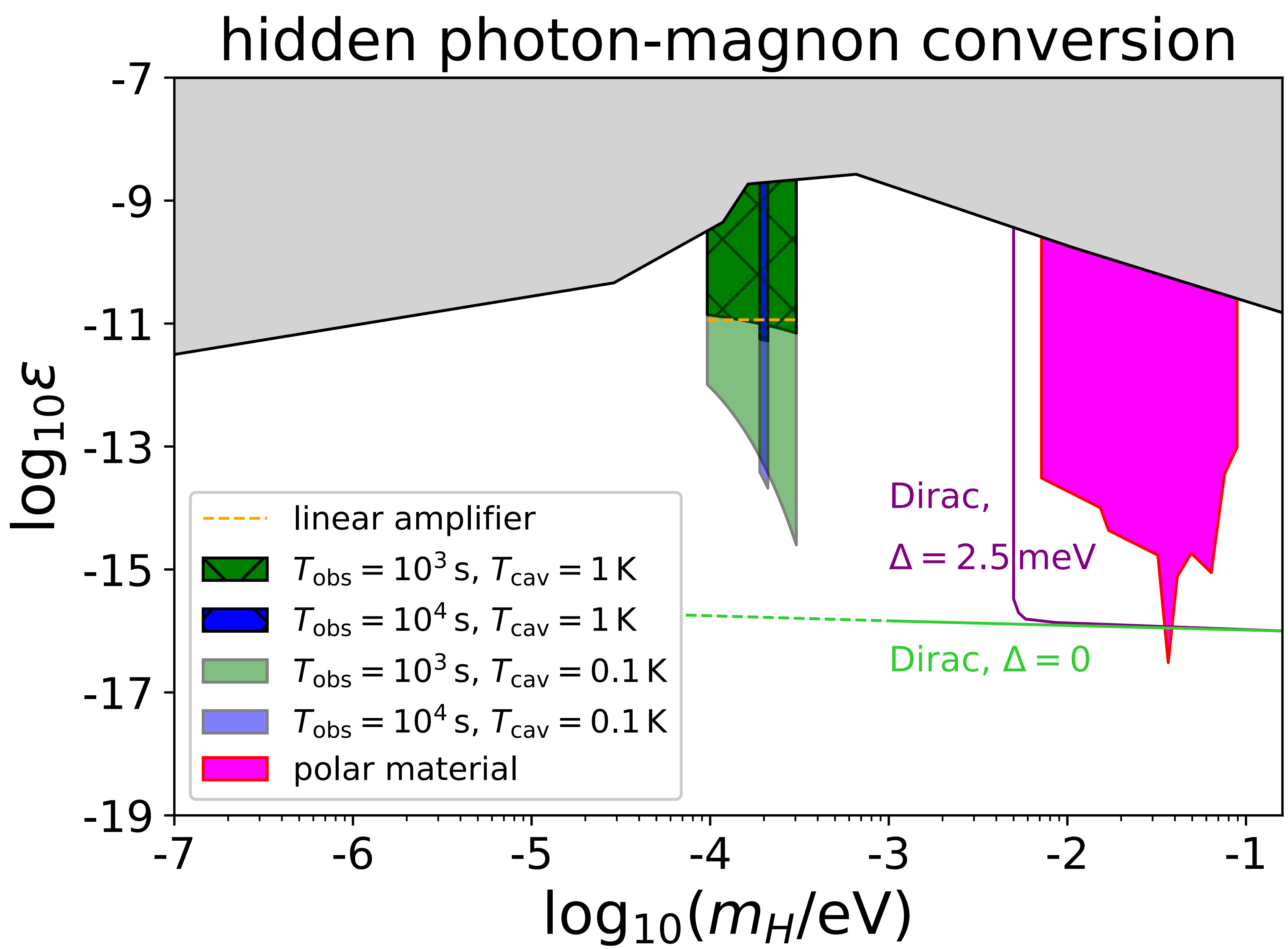
Tabuchi et al., 1508.05290

- Sensitivity in QUAX-like setup



Chigusa, Moroi, KN (2020)

- Sensitivity in QUAX-like setup

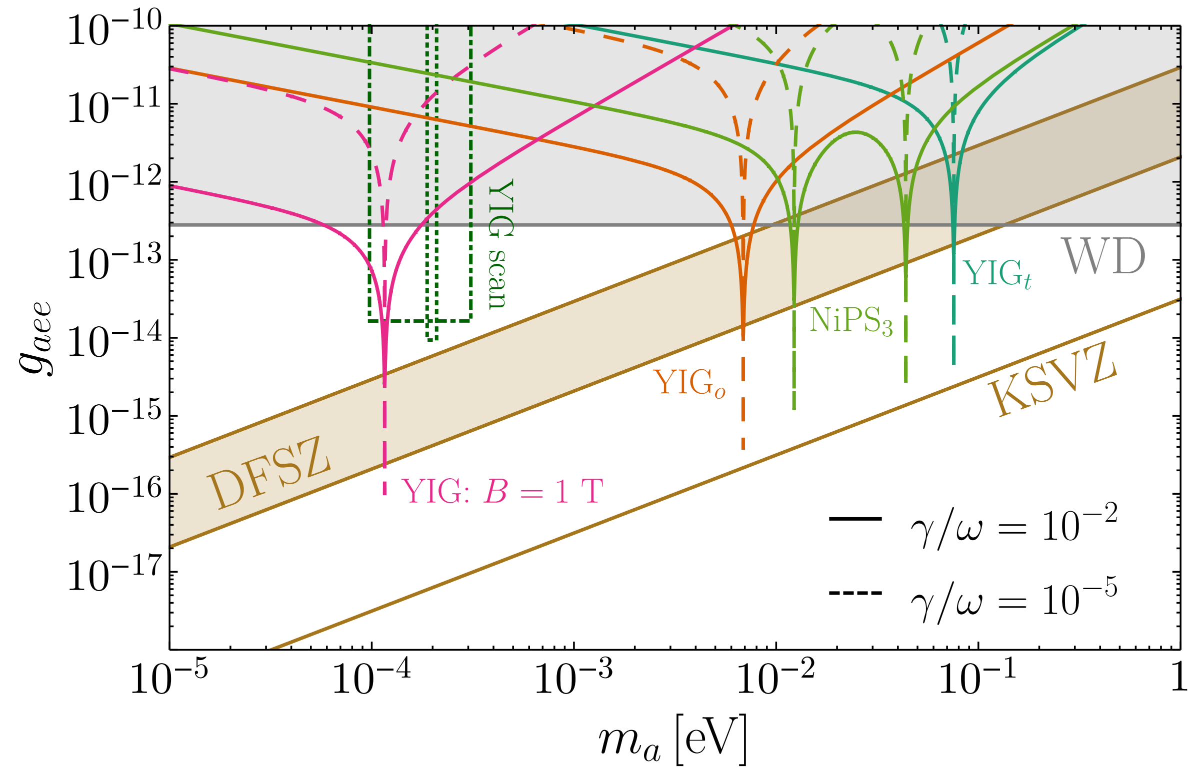


Chigusa, Moroi, KN (2020)

その他のマグノン利用法

- 光学マグノンモードを使ったアクシオン検出

  Mitridate, Trickle, Zhang, Zurek (2020)



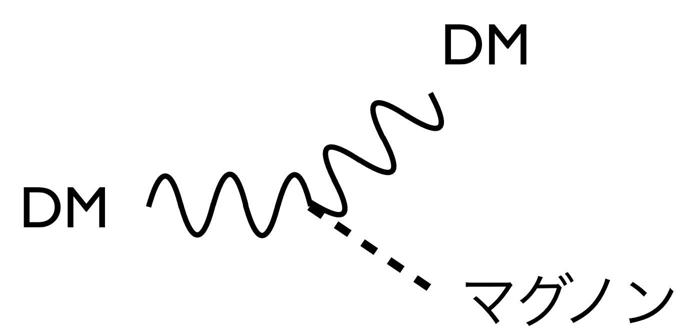
- トポロジカル磁性体を用いたアクシオン検出

  Marsh, Fong, Lentz, Smejkal, Ali (2018)

トポロジカル磁性体中のマグノンはアクシオン的に振る舞う

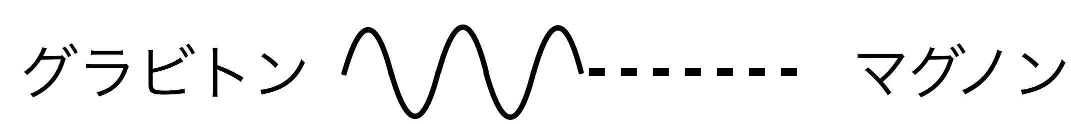
- 軽い暗黒物質の散乱

  Trickle, Zhang, Zurek (2019)



- 重力波検出（graviton-magnon conversion）

  Ito, Ikeda, Miuchi, Soda (2019)



3. フォノン

格子振動（フォノン）

- 結晶格子の振動を量子化 $\longrightarrow$ フォノン

  並進対称性の破れに伴うNGモード：**音響フォノン** $\omega \sim v_s k$

  それ以外のモード（副格子がある場合）：**光学フォノン**

- フォノンの物性における役割

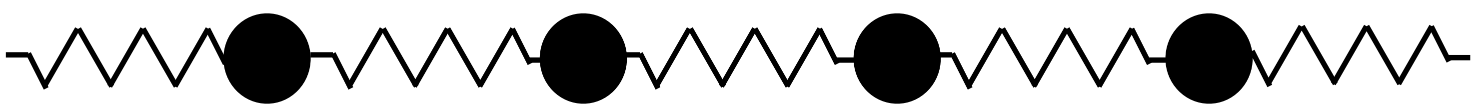
  - 固体の熱伝導に寄与（デバイ比熱）
  - 金属の電気抵抗に寄与（電子フォノン散乱） $\frac{1}{\tau} \propto T^5$
  - 伝導電子にフォノン媒介引力 $\longrightarrow$ 超伝導
  - イオン結晶の光学的性質に寄与（フォノン-ポラリトン）

  etc.

- （軽い）暗黒物質検出にも有用

単原子模型

- ばね定数Kでつながった結晶格子（周期境界条件）



$\vec{r}_n$ $\vec{r}_{n+1}$

平衡位置 $\vec{r}_n$

変位 $\vec{X}_n = \vec{x}_n - \vec{r}_n$

- ハミルトニアン $H = \sum_n \frac{p_n^2}{2m} + U, \qquad U = \sum_n \frac{K}{2}\left(X_{n+1} - X_n\right)^2$

- 第二量子化形式 **フォノン生成消滅演算子：** $\left[a_{\vec{k},\lambda}, a^\dagger_{\vec{k}',\lambda'}\right] = \delta_{\vec{k},\vec{k}'}\delta_{\lambda\lambda'}$

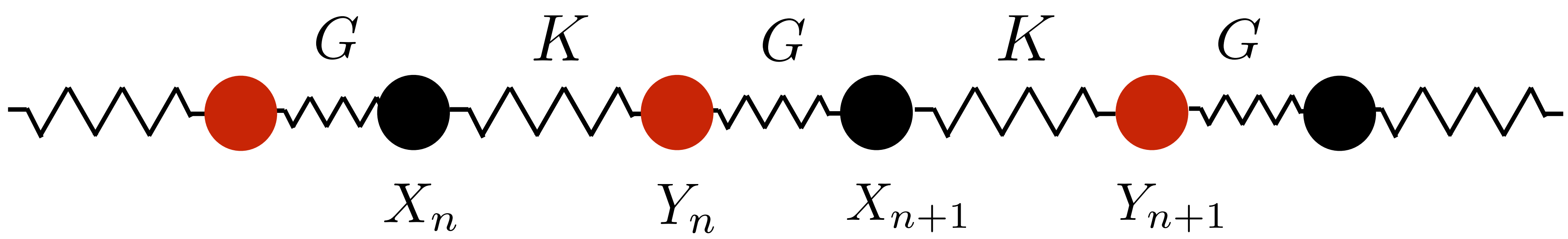
$$X_{\vec{k},\lambda} = \frac{a_{\vec{k},\lambda} + a^\dagger_{-\vec{k},\lambda}}{\sqrt{2m\omega_{\vec{k},\lambda}}}, \qquad p_{\vec{k},\lambda} = -i\sqrt{\frac{m\omega_{\vec{k},\lambda}}{2}}\left(a_{\vec{k},\lambda} - a^\dagger_{-\vec{k},\lambda}\right).$$

$$\boxed{H = \sum_{\vec{k},\lambda}\left[\frac{p_{-\vec{k},\lambda}p_{\vec{k},\lambda}}{2m} + \frac{m\omega^2_{\vec{k},\lambda}}{2}X_{-\vec{k},\lambda}X_{\vec{k},\lambda}\right] = \sum_{\vec{k},\lambda}\epsilon_{\vec{k},\lambda}\left(a^\dagger_{\vec{k},\lambda}a_{\vec{k},\lambda} + \frac{1}{2}\right)}$$

１次元格子の分散関係： $\epsilon_k^2 = \frac{2K}{m}(1 - \cos ka)$ **音響フォノン**

２原子模型

- ばね定数K,Gでつながった結晶格子（周期境界条件）



- ハミルトニアン

$$H = \sum_n \left(\frac{p_{n,X}^2}{2m_X} + \frac{p_{n,Y}^2}{2m_Y} \right) + U \qquad U = \sum_n \left[\frac{K}{2} (Y_n - X_n)^2 + \frac{G}{2} (X_{n+1} - Y_n)^2 \right]$$

- フォノン分散関係

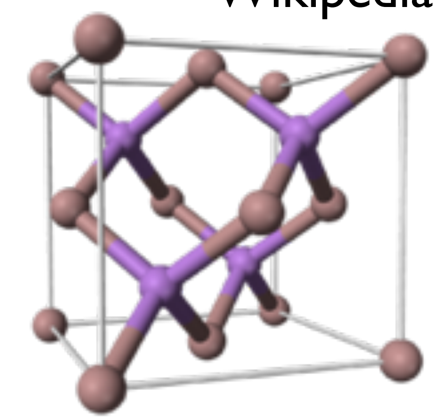
$$\omega_\pm^2 = \frac{m_X + m_Y}{2m_X m_Y}(K+G) \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{8m_X m_Y}{(m_X+m_Y)^2} \frac{KG}{(K+G)^2}(1-\cos kd)} \right]$$

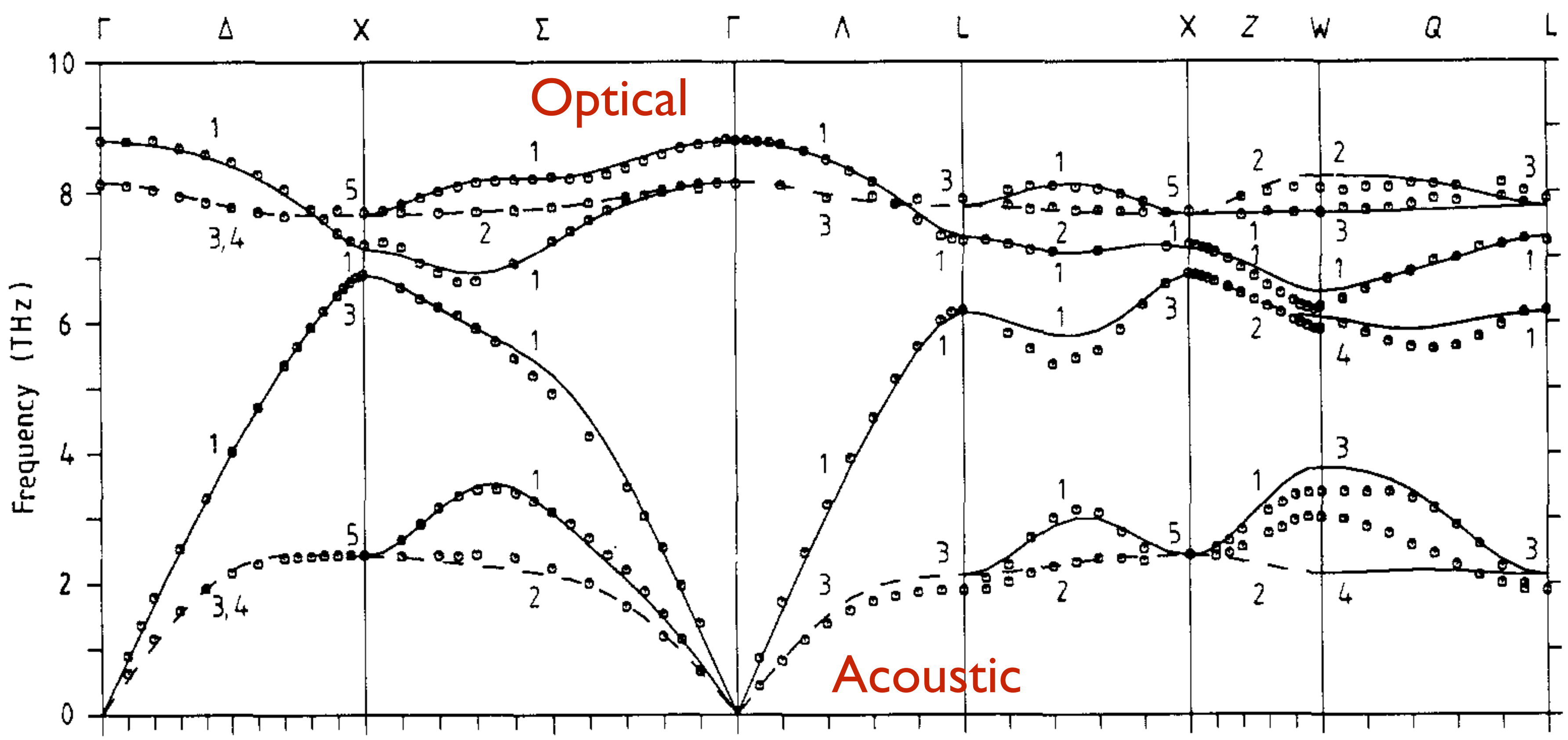
＋：光学フォノン　　エネルギーギャップあり

ー：音響フォノン　　ギャップレス　$\omega_- \simeq v_s k$　　$v_s \sim 10^{-5}$

GaAsのフォノン分散関係

Wikipedia

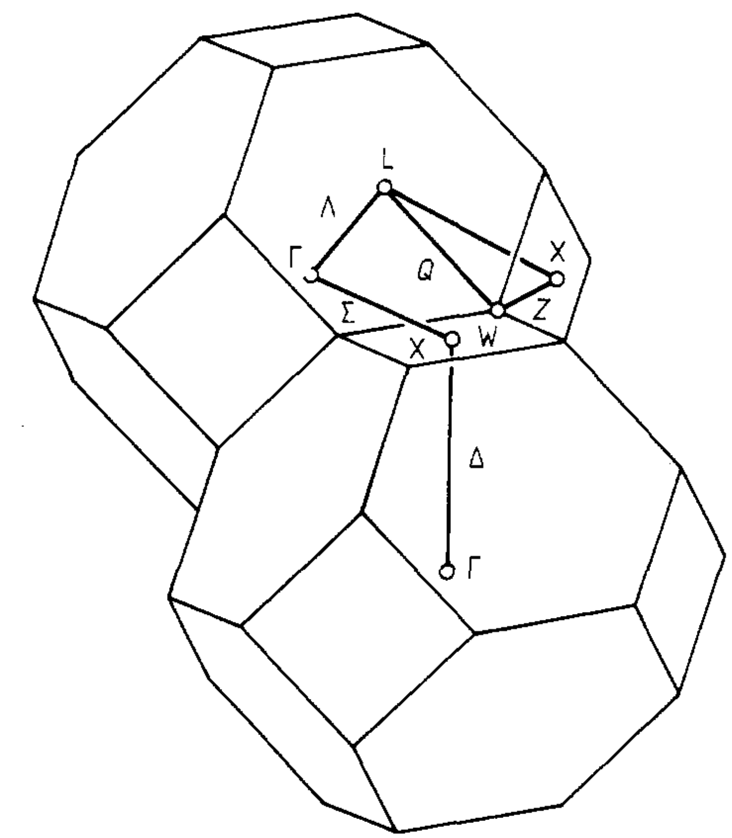




1THz~4meV

Strauch, Dorner (1990)

ブリルアンゾーン



- ２種類の原子

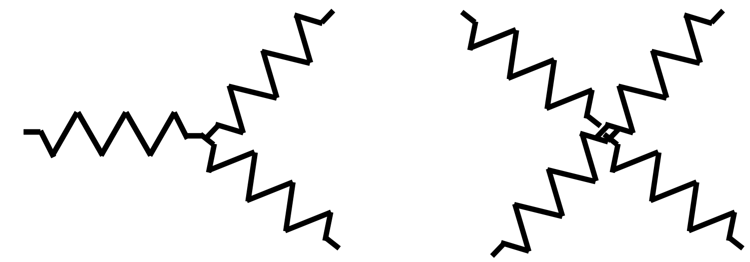
→ ３音響フォノンモード（縦波1+横波2）

３光学フォノンモード（縦波1+横波2）

フォノンの相互作用

- **自己相互作用**

  ポテンシャルの高次項（非調和項）から



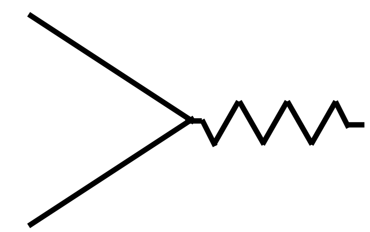
- **フォノン-電子相互作用**

$$H = \int d^3x_e \int d^3x_A V(\vec{x}_e - \vec{x}_A) n_e(\vec{x}_e) n_A(\vec{x}_A) \qquad \delta n_A \simeq -n_A^0 \vec{\nabla} \cdot \delta\vec{x}_A$$

フォノン

電子　格子イオン

$$\longrightarrow H = \sum_{\vec{q}} g_q n^e_{-\vec{q}} (a_{\vec{q}} + a^\dagger_{-\vec{q}}) \qquad n^e_{-\vec{q}} = \sum_{\vec{k}} c^\dagger_{\vec{k}+\vec{q}} c_{\vec{k}}$$

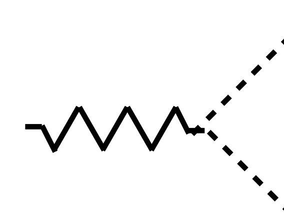


- **フォノン-マグノン相互作用**

$$H = -\frac{J}{2} \sum_{\langle \ell, \ell' \rangle} \vec{S}_\ell \cdot \vec{S}_{\ell'} \qquad J(\vec{x}_{A\ell} - \vec{x}_{A\ell'}) \sim J_0 + J' \delta x_A$$

マグノン

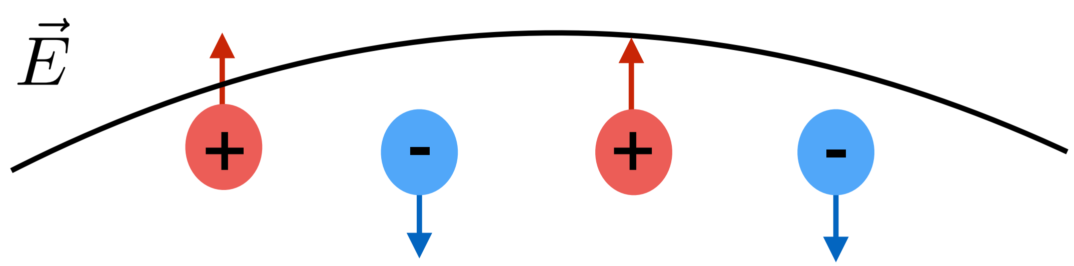
フォノン



誘電体の光学応答

- 誘電体：絶縁体で電場を
かけると分極を示すもの

- 分極=格子イオンの変位
=横波フォノン



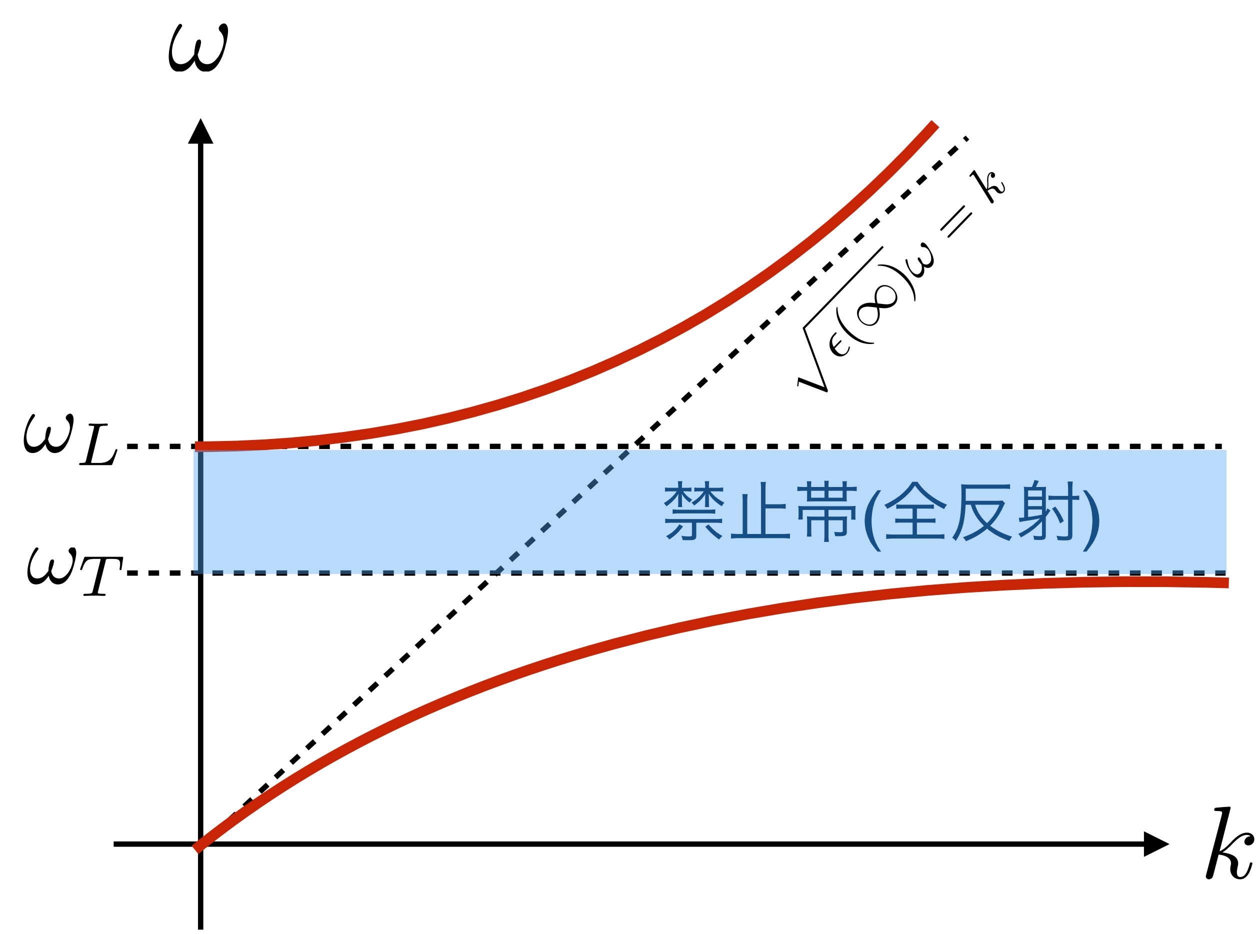
- 光子と(光学)フォノンは混合する
フォノン-ポラリトン

- 光学応答は誘電率で表される

$$\epsilon(\omega) = \epsilon(\infty)\frac{\omega_L^2 - \omega^2 + i\omega\gamma_L}{\omega_T^2 - \omega^2 + i\omega\gamma_T}$$

虚部：multi-phonon過程等による“width”

フォノン-ポラリトンの分散関係



典型的には $\omega_T \sim \omega_L \sim 0.01 - 0.1\,\mathrm{eV}$

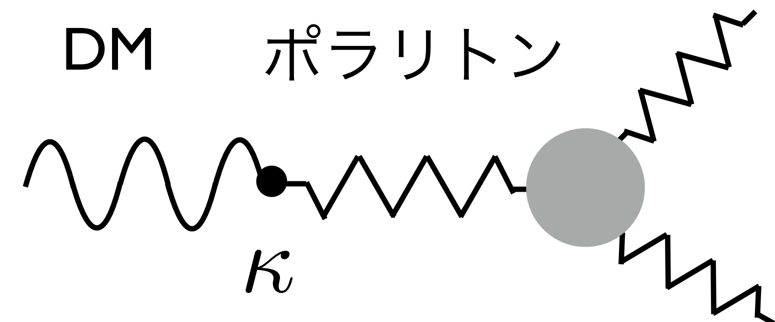
誘電体による暗黒物質吸収

- Hidden photon DMの場合 $\mathcal{L} = \frac{\kappa}{2} F_{\mu\nu} V^{\mu\nu}$

- 単位時間・重量あたりの暗黒物質吸収率

$$R = \frac{n_{\mathrm{DM}}}{\rho_{\mathrm{target}}} \kappa_{\mathrm{eff}}^2 \Gamma_{\mathrm{pol}}$$

$$\kappa_{\mathrm{eff}}^2 = \frac{\kappa^2 m_{\mathrm{DM}}^4}{(m_{\mathrm{DM}}^2 - \omega_L^2)^2 + m_{\mathrm{DM}}^2 \Gamma_{\mathrm{pol}}^2}$$

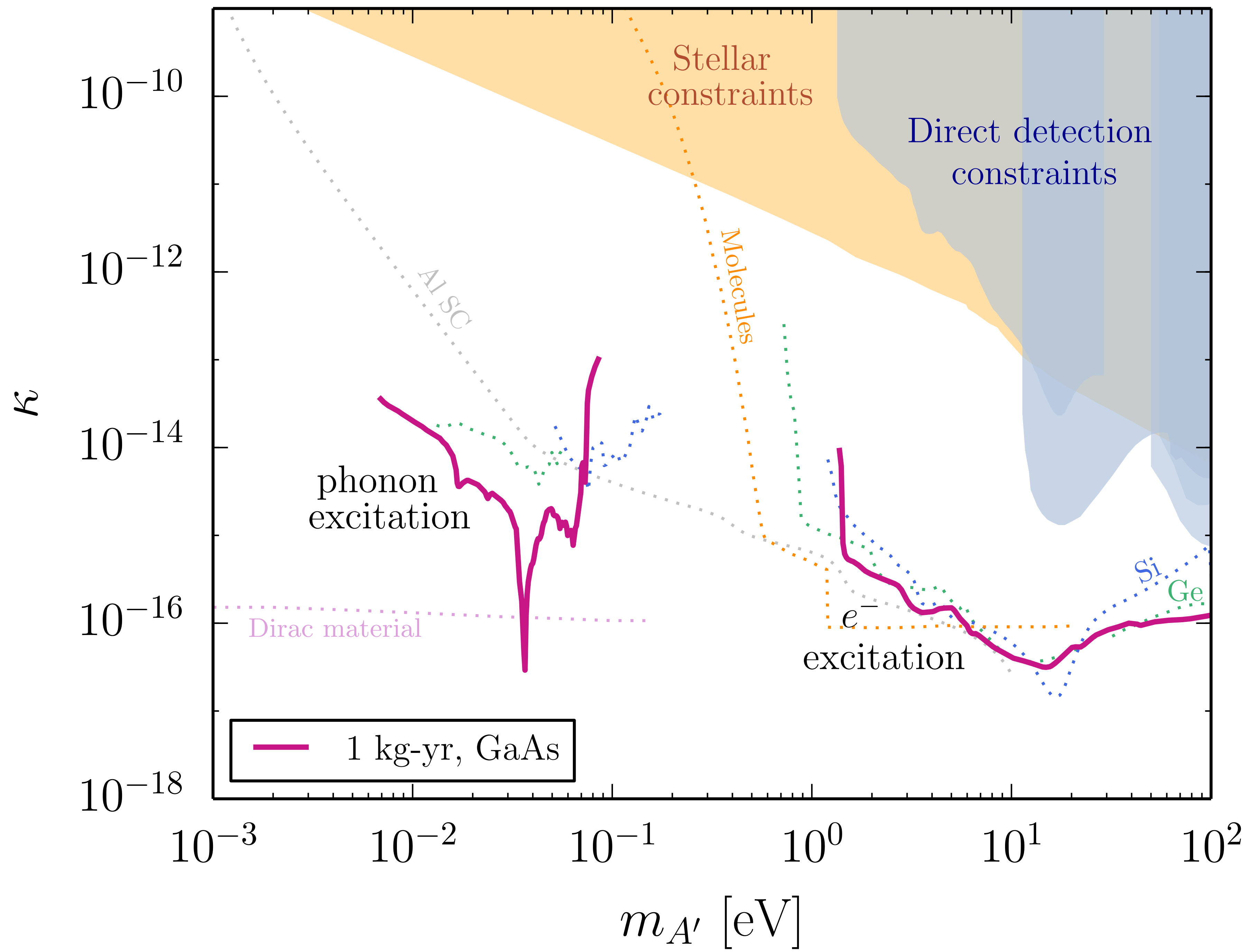


Γ_{pol} : フォノン-ポラリトンの崩壊率

- 複素誘電率の理論計算・実験値を使って
  暗黒物質吸収率を見積もることができる

Knapen, Lin, Pyle, Zurek (2017)

- Sensitivity on hidden photon dark matter



Knapen, Lin, Pyle, Zurek (2017)

その他のフォノン利用法

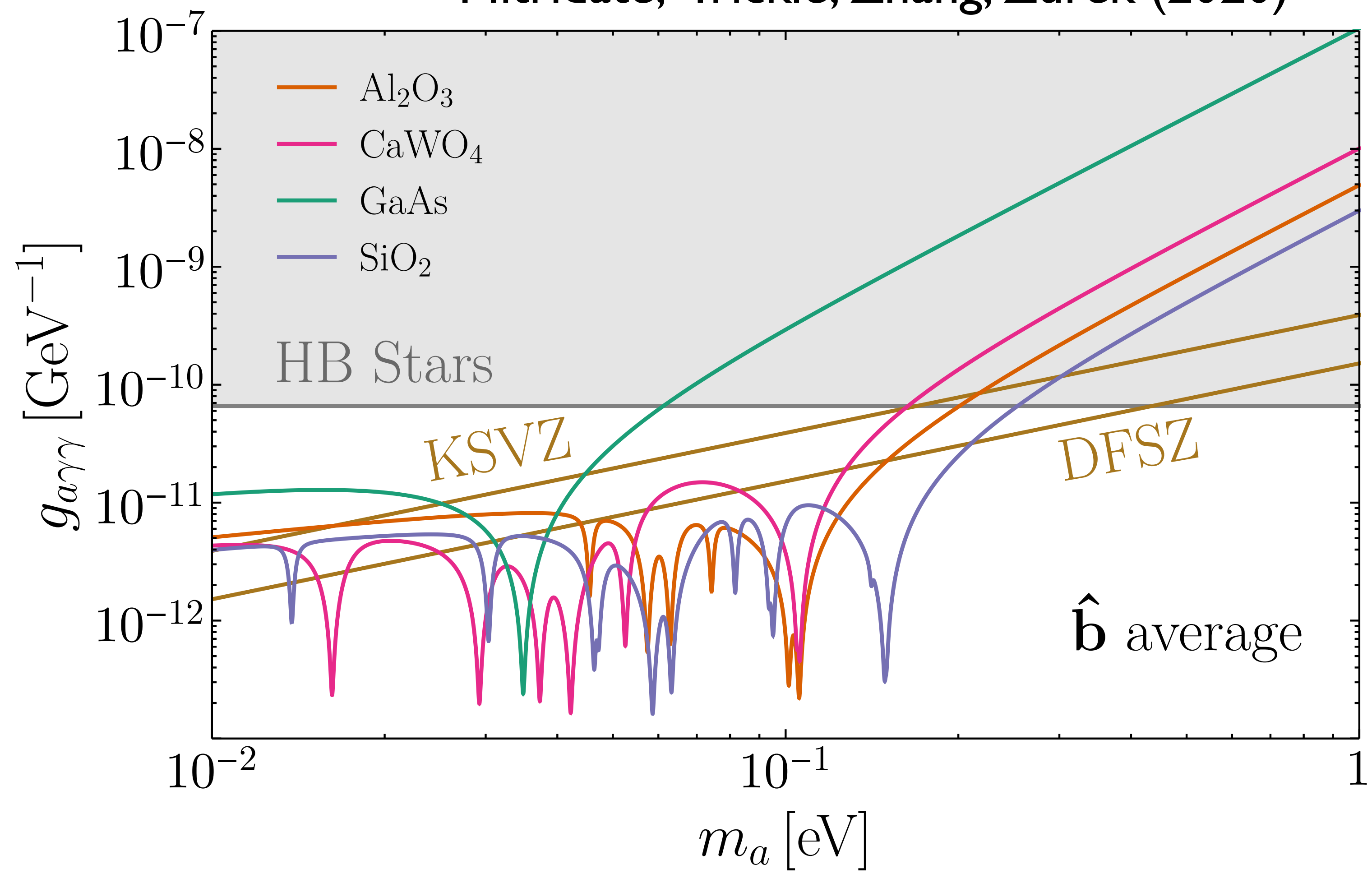
- 磁場中でのアクシオン-フォノン変換

$g_{a\gamma} a \vec{B}_0 \cdot \vec{E}$

→ axion-induced Electric field

→ Transverse phonon (Phonon-polariton)

Mitridate, Trickle, Zhang, Zurek (2020)



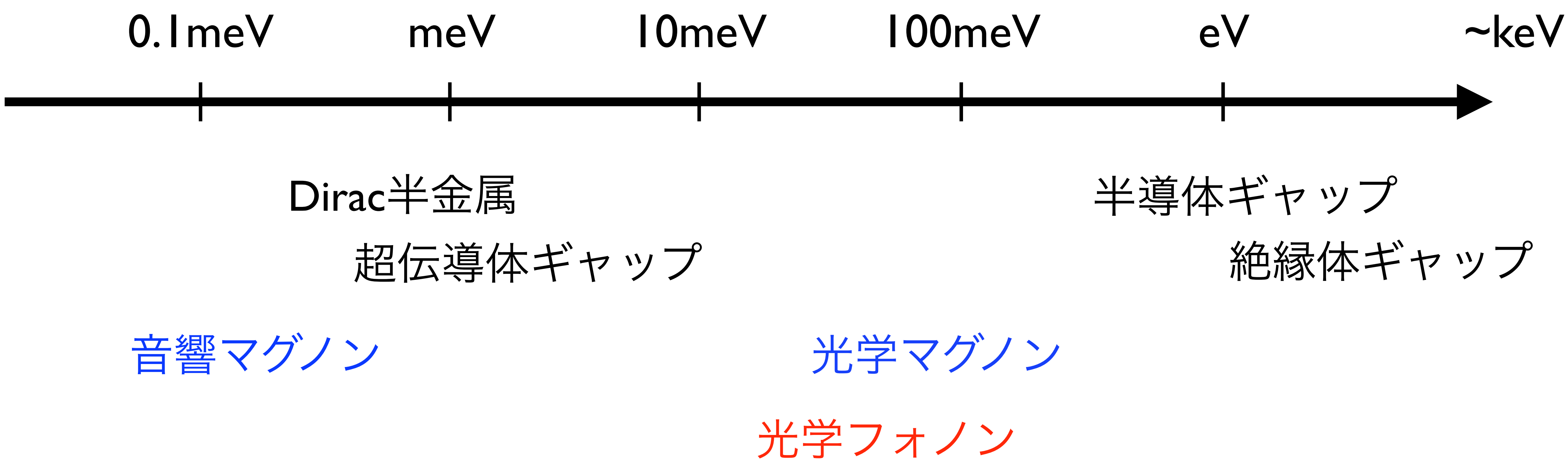
- 暗黒物質散乱による multi-phonon excitation

Campbell-Deem, Cox, Knapen, Lin, Melia (2019)

4. まとめ

固体物性を利用したDM検出まとめ

- 固体には様々な低エネルギー励起があり軽い暗黒物質検出に使える



- 固体物理も素粒子物理も歴史が深いが、
固体物理の素粒子物理への応用は考えられ始めたばかり

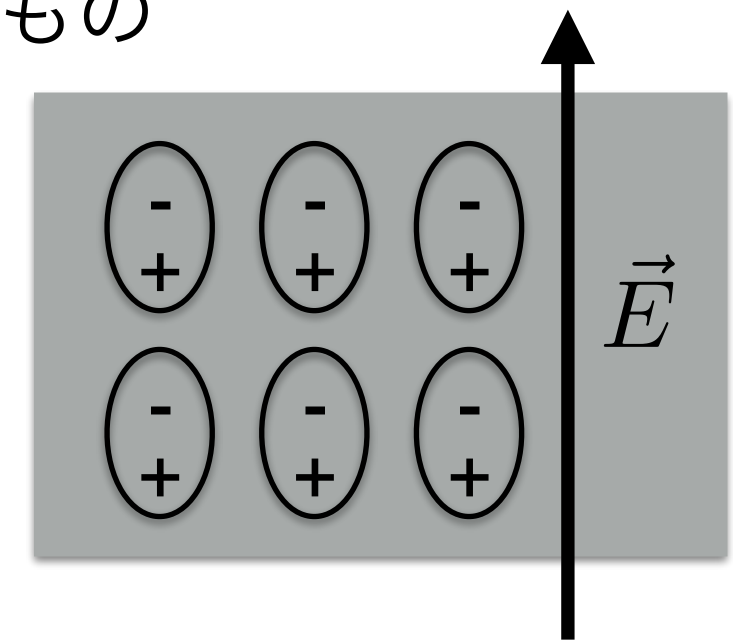
有用なアイデアはまだまだ眠っていると思われ

Appendix

App.1 誘電体の光学応答

誘電体の光学応答

- 誘電体：絶縁体で電場をかけると分極を示すもの



- 分極の起源

  変位分極：イオン核の平衡位置からのずれ

  原子分極：原子核まわりの電荷分布の偏り

- 双極子能率　$\vec{P} = \alpha \vec{E}$　　$\alpha(\omega)$：分極率（ミクロに計算する量）
- 有効電場　$\vec{E} + \vec{P} \equiv \epsilon \vec{E} \, (\equiv \vec{D})$　　$\epsilon(\vec{k}, \omega)$：誘電率
- 光に対する応答

  ϵ の実部：光の位相速度（負のとき伝播できない）　　ϵ の虚部：光の吸収

  - $\omega \gtrsim \mathrm{eV}$　　電子のバンド間遷移による吸収
  - $0.01\mathrm{eV} \lesssim \omega \lesssim 0.1\mathrm{eV}$　　フォノンとの結合による反射・吸収

フォノン-ポラリトン

- 双極子の運動方程式　$\vec{P} = Ze\, n_{\mathrm{ion}} \vec{u}$

$$\ddot{\vec{P}} + \omega_T^2 \vec{P} = \frac{Ze^2 n_{\mathrm{ion}}}{M} \vec{E} \longrightarrow \epsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_{p,\mathrm{ion}}^2}{\omega^2 - \omega_T^2}$$

$\vec{u}$：イオン変位

ω_T：横波光学フォノン振動数

$$\omega_{p,\mathrm{ion}} = \sqrt{\frac{Ze^2 n_{\mathrm{ion}}}{M}}$$

- 電磁波の運動方程式

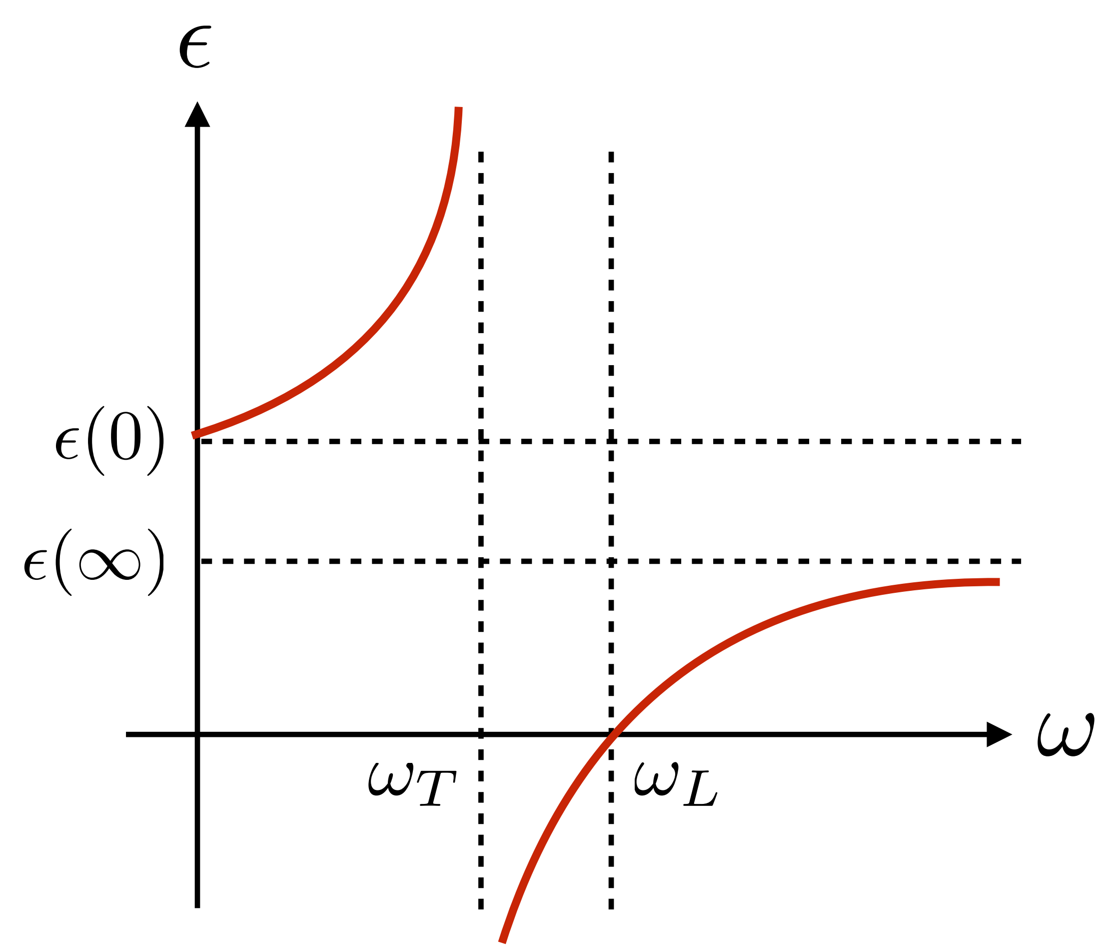
$$\ddot{\vec{D}} - \nabla^2 \vec{E} = 0$$

- フォノンと電磁波の混合：

フォノン-ポラリトン

- 原子分極の効果：

$$\epsilon(\omega) = \epsilon(\infty) + \frac{\omega_{p,\mathrm{ion}}^2}{\omega_T^2 - \omega^2}$$



フォノン-ポラリトン

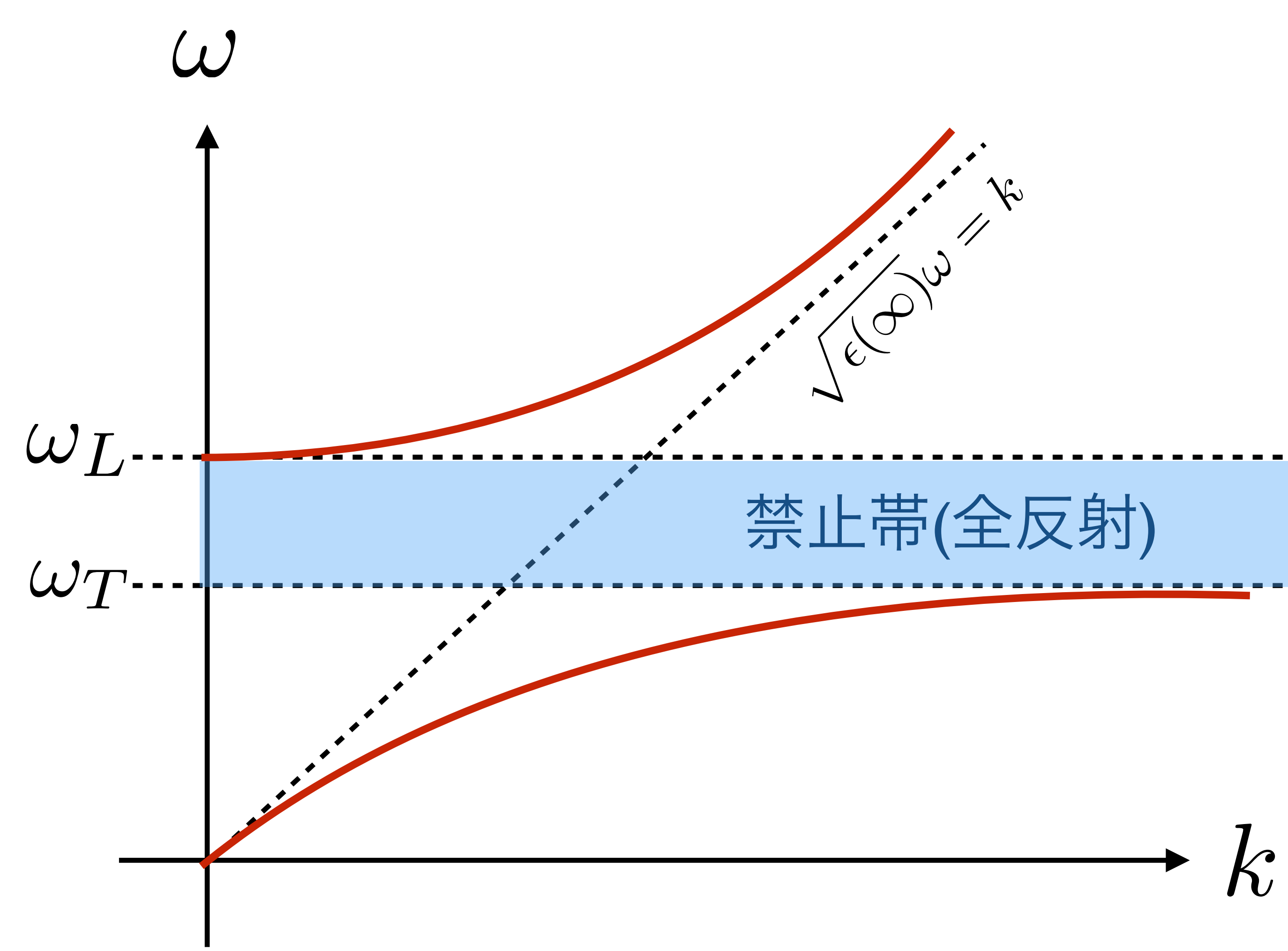
- 誘電率 $\epsilon(\omega) = \epsilon(\infty)\dfrac{\omega_L^2 - \omega^2}{\omega_T^2 - \omega^2}$
  - $\epsilon(\omega_L) = 0$: 縦波フォノン

    $$\omega_L^2 = \omega_T^2 + \frac{Ze^2 n_{\rm ion}}{M}$$

  - LZT関係式: $\dfrac{\omega_L^2}{\omega_T^2} = \dfrac{\epsilon(\omega=0)}{\epsilon(\omega=\infty)}$
  - Typically

    $\omega_T \sim \omega_L \sim 0.01 - 0.1\,{\rm eV}$

フォノン-ポラリトンの分散関係



- フォノンの散逸を入れる

$$\ddot{\vec{P}} + \gamma\dot{\vec{P}} + \omega_T^2\vec{P} = \omega_{p,{\rm ion}}^2\vec{E}$$

複素誘電率 $\epsilon(\omega) = \epsilon(\infty)\dfrac{\omega_L^2 - \omega^2 + i\omega\gamma_L}{\omega_T^2 - \omega^2 + i\omega\gamma_T}$

multi-phonon過程等による

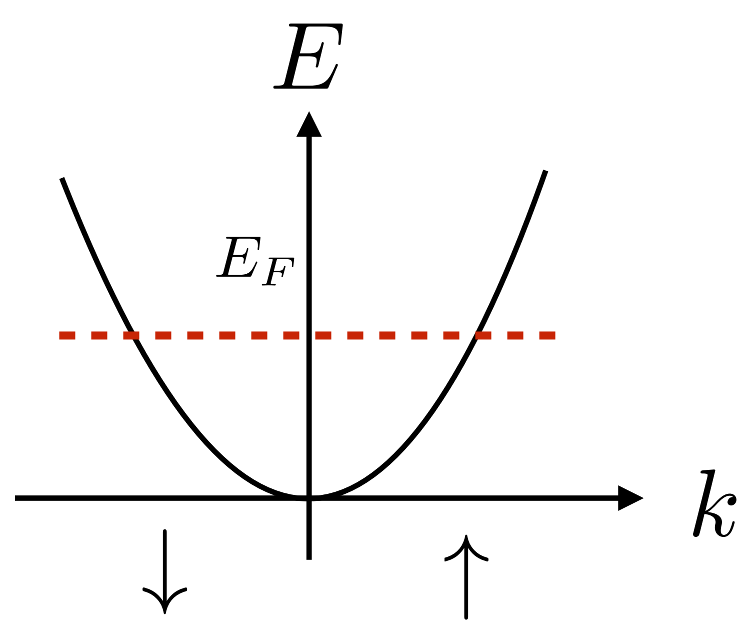
“width”を表す

App. 2 磁性

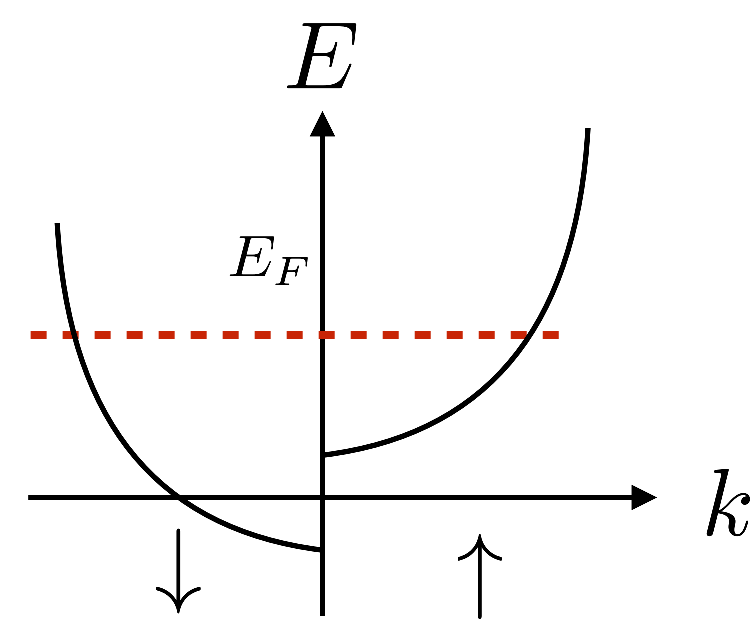
Pauli常磁性

- 自由電子系に磁場をかけるとスピンによって準位が分裂する

$\boxed{\vec{B}=0}$



$\boxed{\vec{B}\neq 0}$



フェルミ面の状態密度に比例した磁化率　**（Pauli常磁性）**

- 電子の軌道運動は反磁性を示す**（Landau反磁性）**
- 絶縁体ではPauli常磁性はないが、(スピン)角運動量非保存の効果で常磁性を示すことがある　**（van Vleck常磁性）**

局在電子磁性

- 局在電子系（ハイゼンベルグ相互作用あり）に磁場をかける

サイト i にあるスピンのハミルトニアン $H = -J\vec{S}_i \cdot \sum_j \vec{S}_j - g\mu_B B_0 S_i^z$

分子場近似：$\left\langle \vec{S}_j \right\rangle = s_z \longrightarrow H = -(zJs_z + g\mu_B B_0)S_i^z$

- 自己無撞着条件：$\left\langle \vec{S}_i^z \right\rangle = s_z$

$$\alpha \equiv \beta(zJs_z + g\mu_B B_0)/S$$

$$\left\langle \vec{S}_i^z \right\rangle = \frac{\sum_{m=-S}^{S} m \exp\left(\beta m(zJs_z + g\mu_B B_0)\right)}{\sum_{m=-S}^{S} \exp\left(\beta m(zJs_z + g\mu_B B_0)\right)} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln\left(\frac{\sinh(\alpha(1+1/2S))}{\sinh(\alpha/2S)}\right) = SB_S(\alpha)$$

- 高温：$T \gg g\mu_B B_0 \qquad s_z \simeq \dfrac{g\mu_B B_0 S(S+1)}{3(T-T_c)} \qquad T_c \equiv \dfrac{JzS(S+1)}{3}$

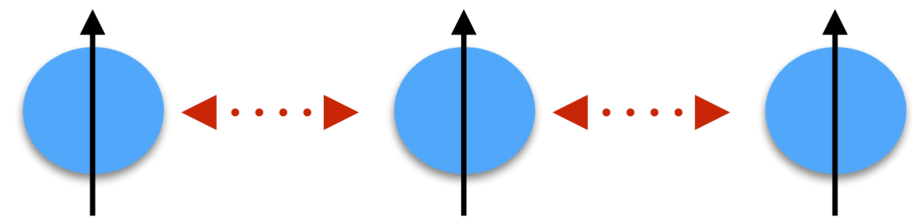
Curie-Weiss則

- 低温ゼロ磁場極限：$T \ll T_c \qquad s_z(T) \simeq S\left[1 - \dfrac{\exp(-\beta zSJ)}{S}\right]$ 自発磁化

交換相互作用

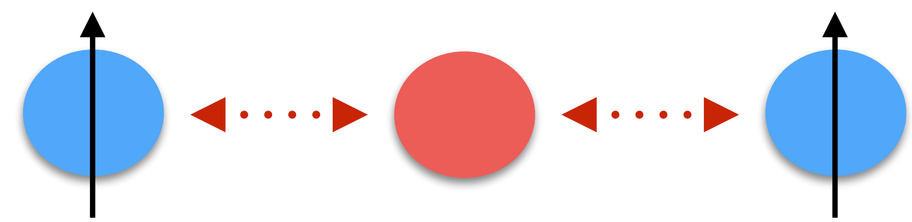
ハイゼンベルグ模型の交換相互作用 Jの起源

- **直接交換**



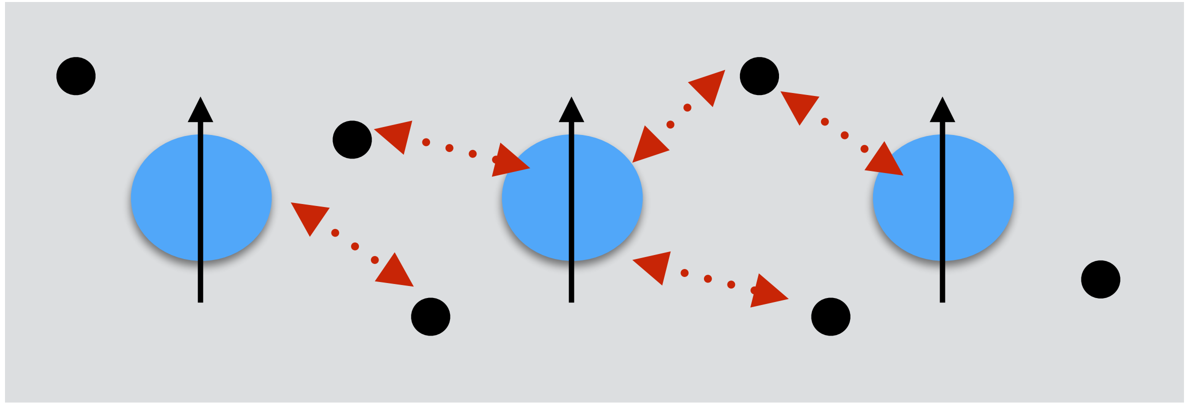
- **超交換**

  遷移金属酸化物等



- **間接交換 (RKKY相互作用)**

  希土類化合物等



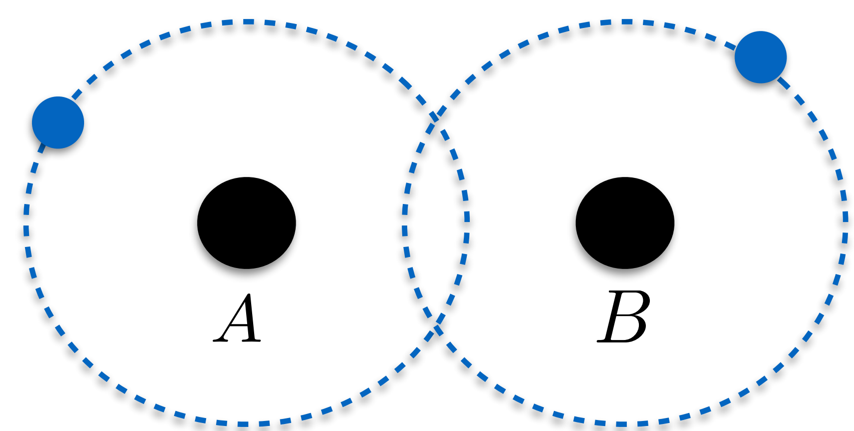
Direct exchange interaction

- Two-electron system with Coulomb interaction
  - Orbital wave function:

$$\Psi_{-} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_A(x_1)\psi_B(x_2) - \psi_A(x_2)\psi_B(x_1)\right] \qquad \text{for spin triplet}$$

$$\Psi_{+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_A(x_1)\psi_B(x_2) + \psi_A(x_2)\psi_B(x_1)\right] \qquad \text{for spin singlet}$$

  - Coulomb energy:



$$E = \int dx_1 dx_2 \Psi_{\pm}^* \frac{e^2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}\Psi_{\pm} = U \pm J$$

$$U = \int dx_1 dx_2\, \psi_A^*(x_1)\psi_B^*(x_2)\frac{e^2}{x_{12}}\psi_A(x_1)\psi_B(x_2)$$

$$J = \int dx_1 dx_2\, \psi_A^*(x_1)\psi_B^*(x_2)\frac{e^2}{x_{12}}\psi_A(x_2)\psi_B(x_1)$$

Direct exchange interaction

- Rewrite effective Hamiltonian

$$\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$$

$$\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = \frac{1}{2}(\vec{S}^2 - \vec{s}_1^2 - \vec{s}_2^2) \begin{cases} = \frac{1}{4} \quad \text{for} \quad S = 1 \quad \text{(triplet)} \\ = -\frac{3}{4} \quad \text{for} \quad S = 0 \quad \text{(singlet)} \end{cases}$$

$$E = U \pm J \quad \longleftrightarrow \quad E = U - \frac{J}{2}(1 + 4\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2)$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{H_{\text{eff}} = -2J\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}$$

App.3 Anti-ferromagnet

Hubbard model

- Hubbard model

$$H = -t \sum_{(i,j),\sigma} (c^\dagger_{i\sigma} c_{j\sigma} + c^\dagger_{j\sigma} c_{i\sigma}) + U \sum_i c^\dagger_{i\uparrow} c_{i\uparrow} c^\dagger_{i\downarrow} c_{i\downarrow}$$

Tight-binding model Hubbard interaction

- Electron number per site: $n = N_e/N_s$ $n = 1$: half-filling
- Model of Mott insulator
- Fourier space Hamiltonian

$$H = \sum_{k,\sigma} \omega_k c^\dagger_{k\sigma} c_{k\sigma} + \frac{U}{N_s} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} \delta_{\vec{k}_1+\vec{k}_2, \vec{k}_3+\vec{k}_4} c^\dagger_{k_1\uparrow} c^\dagger_{k_2\downarrow} c_{k_3\downarrow} c_{k_4\uparrow}$$

$\omega_k = -t \sum_{\vec{\delta}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{\delta}}$: usual energy band structure for U=0

- Hubbard model with large U limit (n=1)

  - Effective Hamiltonian at the second order in H0:

$$H_{\mathrm{eff}} = -\frac{t^2}{U} \sum_{(ij)\sigma\sigma'} \left(c^\dagger_{i\sigma} c_{j\sigma} c^\dagger_{j\sigma'} c_{i\sigma'} + c^\dagger_{j\sigma} c_{i\sigma} c^\dagger_{i\sigma'} c_{j\sigma'} \right)$$

  - Rewrite it with spin operator:

$$S_i^+ = c^\dagger_{i\uparrow} c_{i\downarrow} \qquad S_i^- = c^\dagger_{i\downarrow} c_{i\uparrow} \qquad S_i^z = \frac{1}{2} \sum_\sigma \sigma c^\dagger_{i\sigma} c_{i\sigma}$$

$$\longrightarrow \boxed{H_{\mathrm{eff}} = -2J \sum_{(i,j)} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j} \qquad J = -\frac{t^2}{U} < 0$$

Anti-ferromagnetic Heisenberg model !

Anti-ferromagnet model

- Hamiltonian

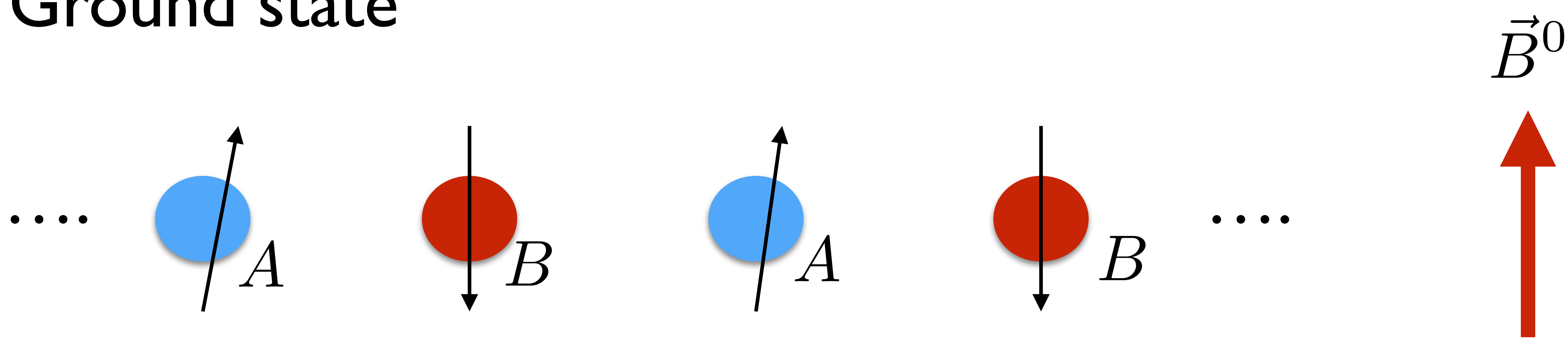
$$\boxed{H = -\frac{J}{2}\sum_{\ell,\ell'} \vec{S}_\ell \cdot \vec{S}_{\ell'} - g\mu_B(B_A + B_0)\sum_{\ell\in A} S^z_\ell + g\mu_B(B_A - B_0)\sum_{\ell'\in B} S^z_{\ell'}}$$

$J < 0$

$\vec{S}_\ell$: electron spin at site ℓ

B_A : anisotropy field

- Ground state



- Quantization

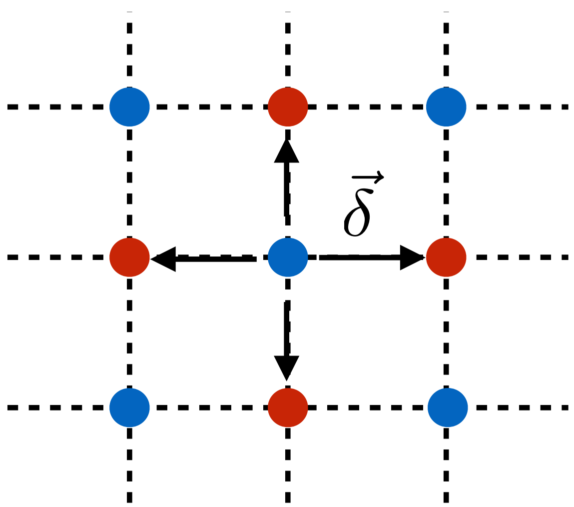
$$S^+_{A,\ell} = \sqrt{2s}\sqrt{1-\frac{a^\dagger_\ell a_\ell}{2s}}\,a_\ell \qquad S^+_{B,m} = b^\dagger_m\sqrt{2s}\sqrt{1-\frac{b^\dagger_m b_m}{2s}}$$

$$S^-_{A,\ell} = a^\dagger_\ell\sqrt{2s}\sqrt{1-\frac{a^\dagger_\ell a_\ell}{2s}} \qquad S^-_{B,m} = \sqrt{2s}\sqrt{1-\frac{b^\dagger_m b_m}{2s}}\,b_m$$

$$S^z_{A,\ell} = s - a^\dagger_\ell a_\ell \qquad S^z_{B,m} = -s + b^\dagger_m b_m$$

$$\left[S^+_{A,\ell}, S^-_{A,\ell'}\right] = 2S^z_{A,\ell}\delta_{\ell\ell'}$$

$$\left[S^+_{B,m}, S^-_{B,m'}\right] = 2S^z_{B,m}\delta_{mm'}$$



- Fourier transform

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_\ell e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}_\ell}a_\ell \qquad b_k = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_m e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}_m}b_m$$

- Hamiltonian

$$\boxed{H = (\omega_e+\omega_A+\omega_L)a^\dagger_k a_k + (\omega_e+\omega_A-\omega_L)b^\dagger_k b_k + \omega_e\gamma_{\vec{k}}(a_k b_k + a^\dagger_k b^\dagger_k)}$$

$$\omega_e = -2zJs$$
$$\omega_A = g\mu_B B_A \qquad \gamma_{\vec{k}} = \frac{1}{z}\sum_{\vec{\delta}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{\delta}}$$
$$\omega_L = g\mu_B B_0$$

- Diagonalize through Bogoliubov transformation

$$\alpha_k = u_k a_k - v_k b_k^\dagger \qquad a_k = u_k \alpha_k + v_k \beta_k^\dagger$$
$$\beta_k = u_k b_k - v_k a_k^\dagger \longleftrightarrow b_k = v_k \alpha_k^\dagger + u_k \beta_k \qquad (u_k^2 - v_k^2 = 1)$$

$$u_k^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\omega_e + \omega_A}{\sqrt{(\omega_e+\omega_A)^2 - \gamma_k^2\omega_e^2}}\right) \qquad v_k^2 = \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{\omega_e + \omega_A}{\sqrt{(\omega_e+\omega_A)^2 - \gamma_k^2\omega_e^2}}\right)$$

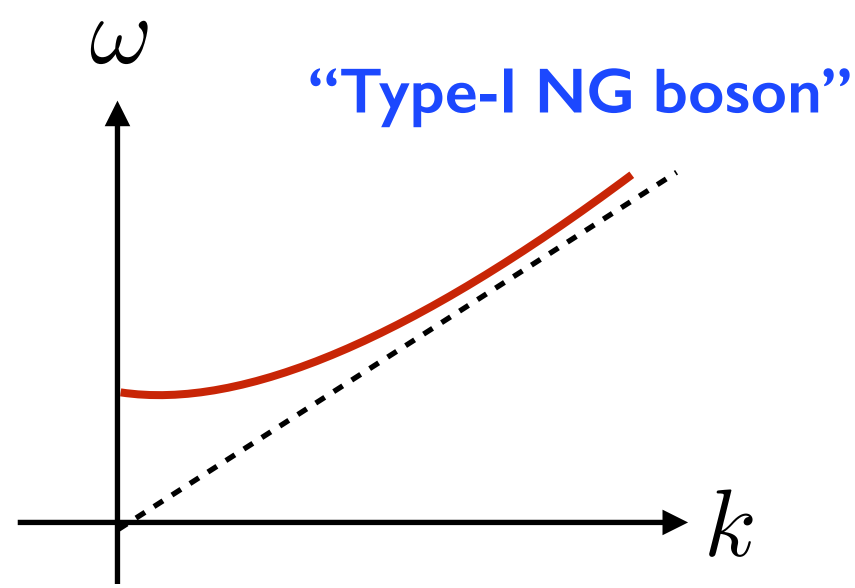
- Diagonal Hamiltonian

$$\boxed{H = \sum_k \left[(\omega_k + \omega_L)\alpha_k^\dagger \alpha_k + (\omega_k - \omega_L)\beta_k^\dagger \beta_k\right]}$$

Dispersion relation:

$$\omega_k^2 = (\omega_e+\omega_A)^2 - \gamma_k^2\omega_e^2 = \omega_e^2(1-\gamma_k^2) + \omega_A(2\omega_e + \omega_A)$$

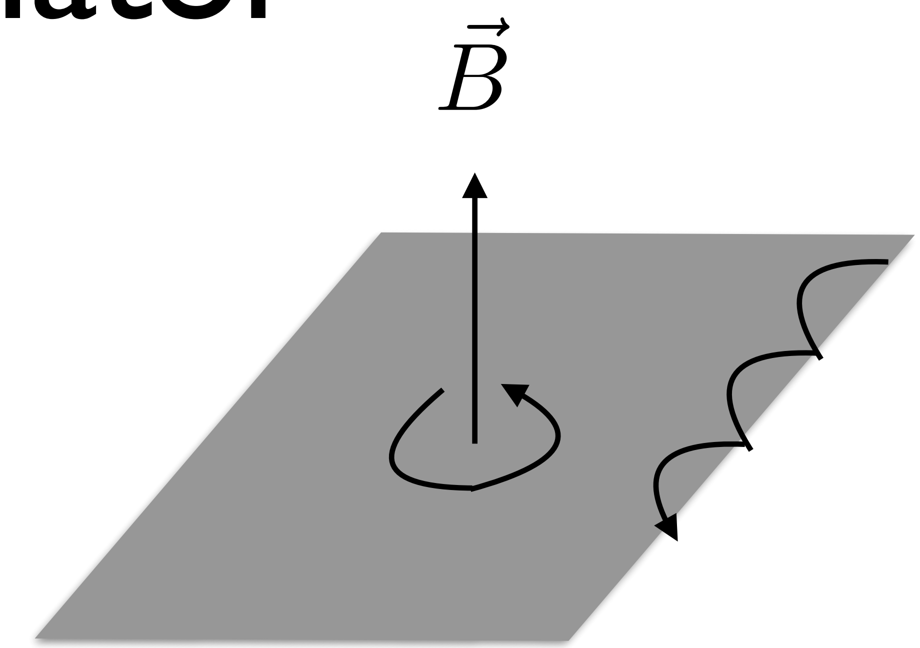
$$|\vec{k}\cdot\vec{\delta}| \ll 1 \longrightarrow \gamma_k \simeq 1 - \frac{k^2a^2}{z}$$



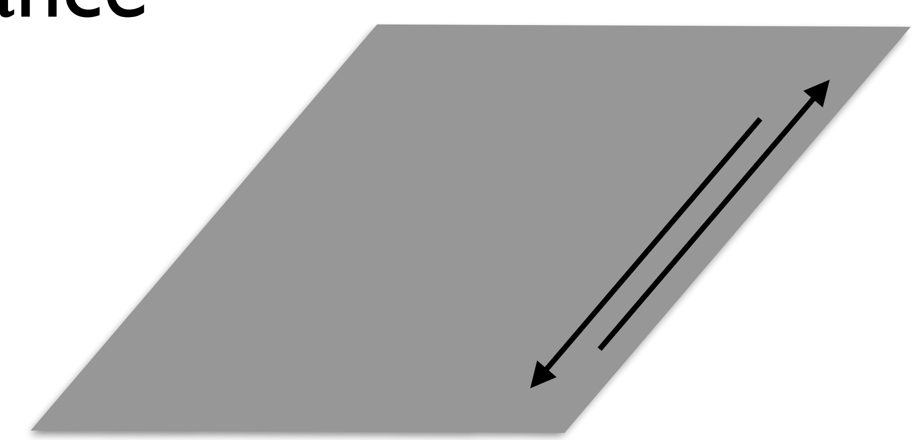
App.4 Topological insulator

Topological insulator

- 2D quantum Hall insulator
  - Quantized Conductivity $\sigma_{xy} = \frac{\alpha_e}{2\pi} n$
    (n: TKNN number)
  - Gapless edge state



- 2D topological insulator with T invariance
  - Spin-orbit coupling instead of ext B
  - Gapless edge state
  - Charcterized by Z2 index

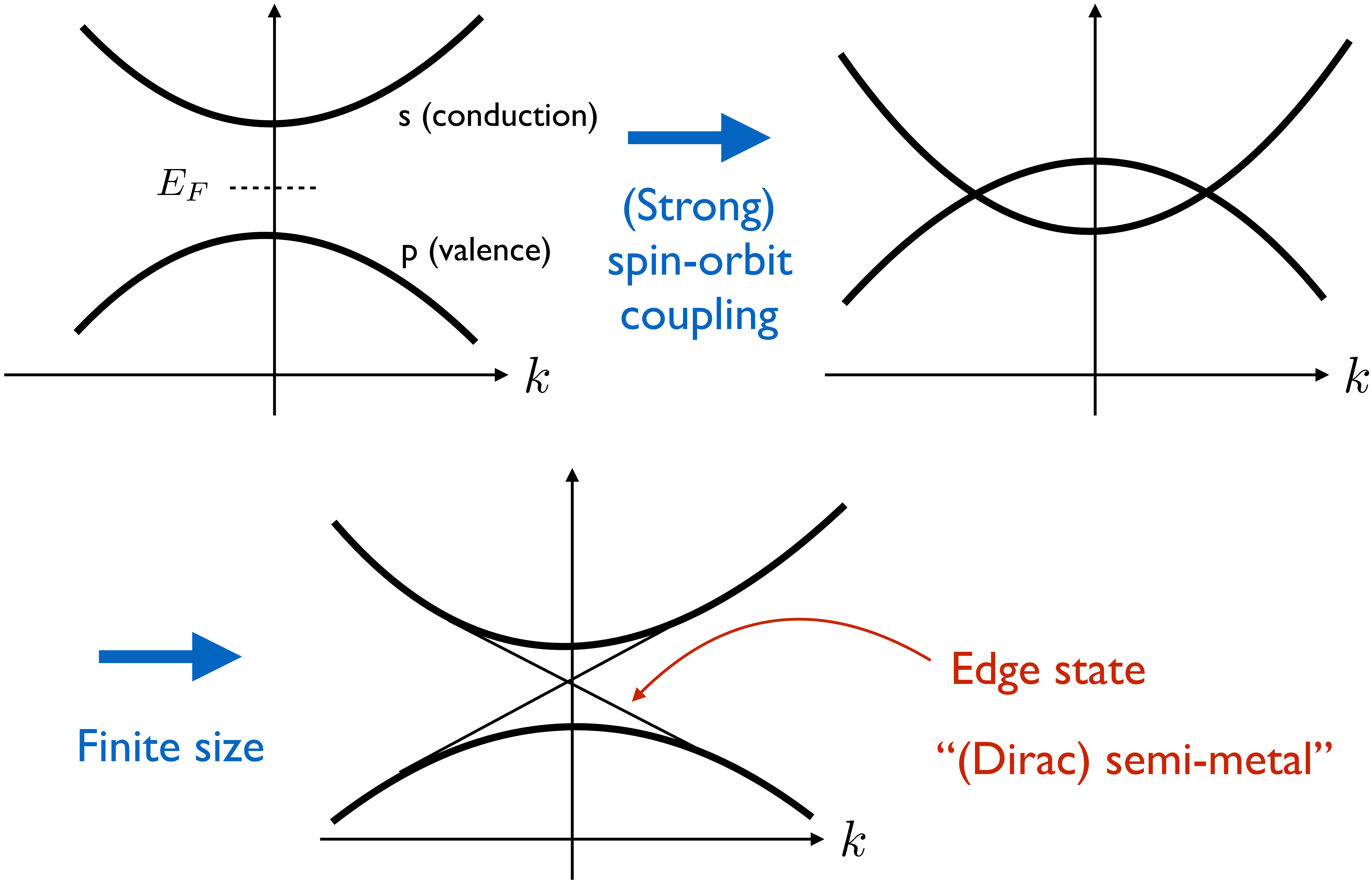


Honeycomb system (Kane-Mele model) , Quantum well system (BHZ model), …

- 3D topological insulator with T invariance

  $\mathrm{Bi_{1-x}Se_x}$, $\mathrm{Bi_2Se_3}$, … (Fu-Kane)

●Typical band structure of TI



Topological anti-ferromagnet

Sekine, Nomura (2014)

- Fu-Kane-Mele-Hubbard model on diamond lattice

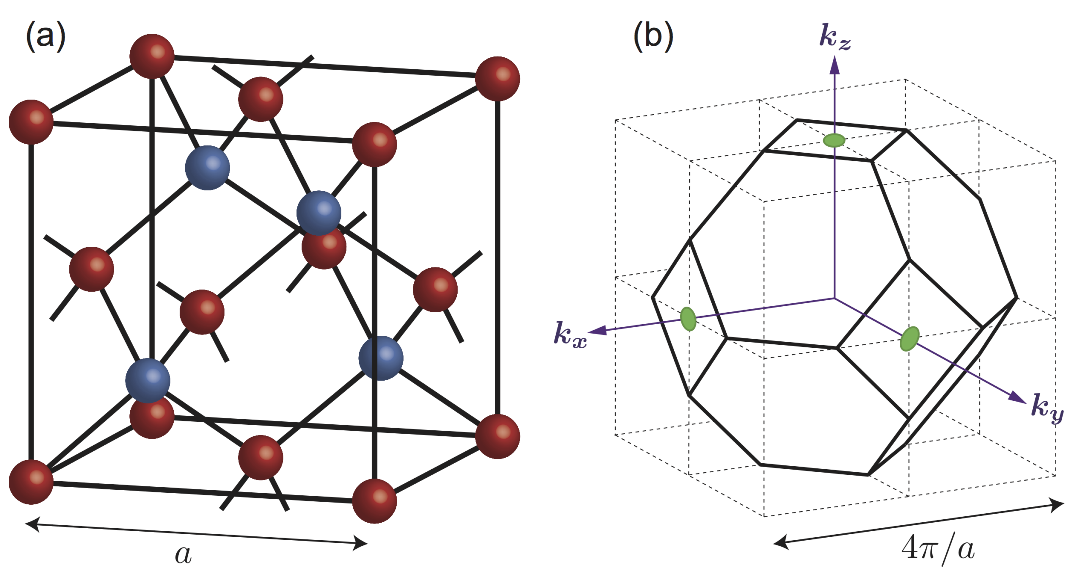
$$H_0 = \sum_{\langle i,j\rangle,\sigma} t_{ij} c^\dagger_{i\sigma} c_{j\sigma} + i\frac{4\lambda}{a^2} \sum_{\langle\langle i,j\rangle\rangle} c^\dagger_i \boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{d}^1_{ij}\times\boldsymbol{d}^2_{ij}) c_j,$$

Tight-binding

Spin-orbit coupling ↔ Topological insulator

$$H_{\rm int} = U\sum_i n_{i\uparrow}n_{i\downarrow} + \sum_{\langle i,j\rangle} V_{ij} n_i n_j,$$

Hubbard interaction ↔ Anti-ferromagnet



- Fourier space Hamiltonian

$$\mathcal{H}_0(\boldsymbol{k}) = \sum_{\mu=1}^{5} R_\mu(\boldsymbol{k})\alpha_\mu \qquad \text{in the basis} \qquad c_{\boldsymbol{k}} \equiv [c_{\boldsymbol{k}A\uparrow}, c_{\boldsymbol{k}A\downarrow}, c_{\boldsymbol{k}B\uparrow}, c_{\boldsymbol{k}B\downarrow}]^T$$

$$\begin{aligned}
R_1(\boldsymbol{k}) &= \lambda[\sin u_2 - \sin u_3 - \sin(u_2 - u_1) + \sin(u_3 - u_1)], \\
R_2(\boldsymbol{k}) &= \lambda[\sin u_3 - \sin u_1 - \sin(u_3 - u_2) + \sin(u_1 - u_2)], \\
R_3(\boldsymbol{k}) &= \lambda[\sin u_1 - \sin u_2 - \sin(u_1 - u_3) + \sin(u_2 - u_3)], \\
R_4(\boldsymbol{k}) &= t + \delta t_1 + t(\cos u_1 + \cos u_2 + \cos u_3), \\
R_5(\boldsymbol{k}) &= t(\sin u_1 + \sin u_2 + \sin u_3).
\end{aligned}$$

$$u_i \equiv \vec{k} \cdot \vec{a}_i$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_1 &= \tfrac{a}{2}(0, 1, 1) \\
\boldsymbol{a}_2 &= \tfrac{a}{2}(1, 0, 1) \\
\boldsymbol{a}_3 &= \tfrac{a}{2}(1, 1, 0)
\end{aligned}$$

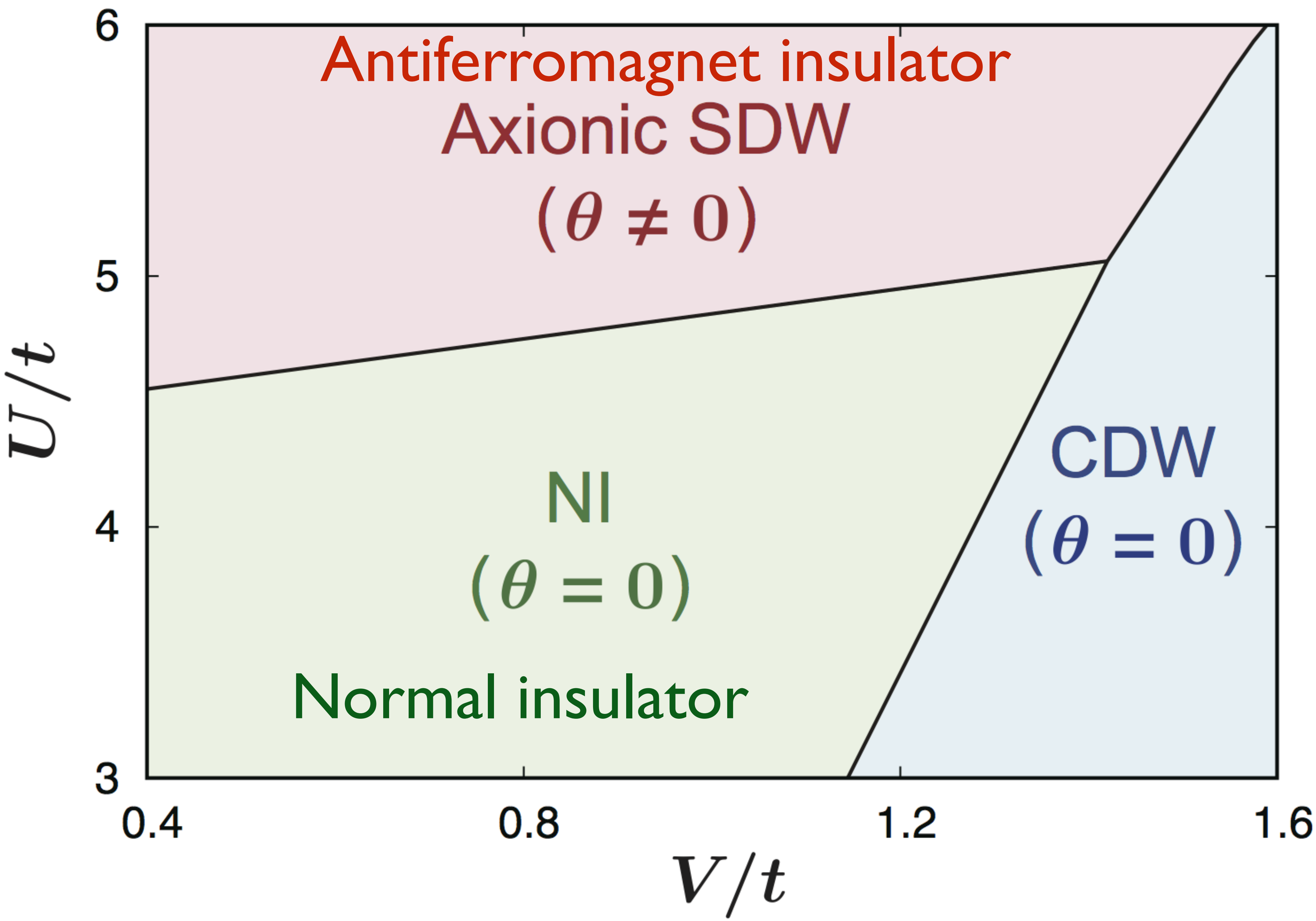
$$\alpha_j = \begin{bmatrix} \sigma_j & 0 \\ 0 & -\sigma_j \end{bmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_5 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

- Large U $\longrightarrow$ Anti-ferromagnetic order

$$\langle \boldsymbol{S}_{i'A} \rangle = -\langle \boldsymbol{S}_{i'B} \rangle = (m \sin\theta \cos\varphi, m \sin\theta \sin\varphi, m \cos\theta) \equiv m_1 \boldsymbol{e}_x + m_2 \boldsymbol{e}_y + m_3 \boldsymbol{e}_z$$

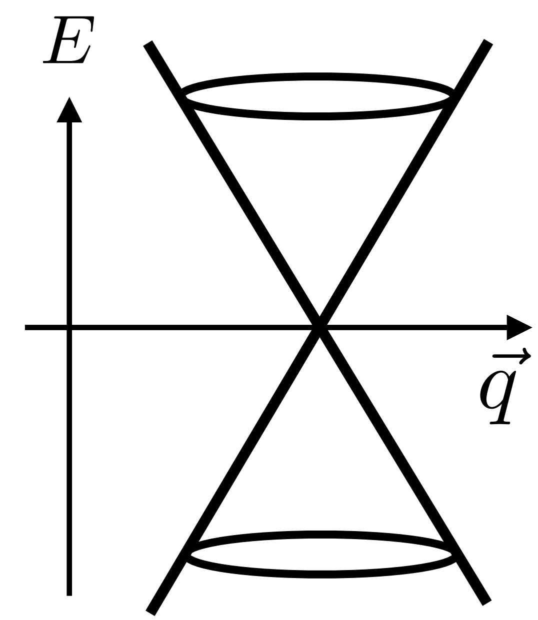
Theta term: $\theta = \dfrac{\pi}{2}[1 + \mathrm{sgn}(\delta t_1)] - \sum_{f=1,2,3} \tan^{-1}\left[\dfrac{U m_f}{\delta t_1(1 + V\Delta/t)}\right]$

- Phase diagram in mean-field approximation



Sekine, Nomura (2014)

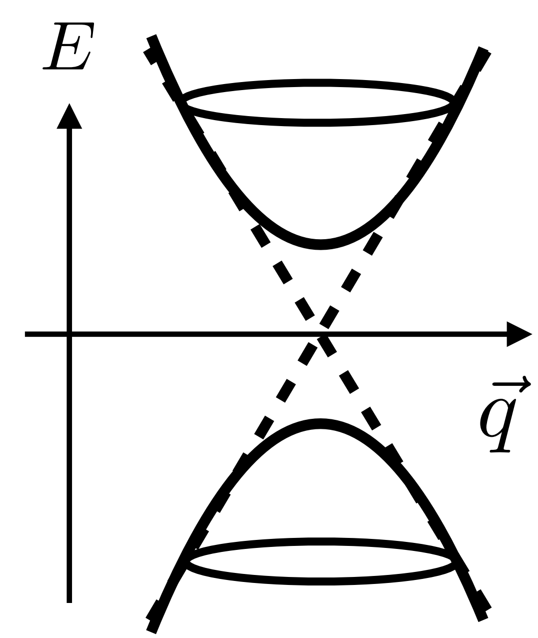
- Dirac dispersion relation at X points of Brillouin zone



$$E_\pm(\vec{q}) = \pm\sqrt{(tq_x)^2 + 4\lambda^2(q_y^2 + q_z^2)} \qquad \vec{k} = \vec{k}_{X_1} + \vec{q}$$

$$\vec{k}_{X_1} = \tfrac{2\pi}{a}(1,0,0) \qquad \vec{k}_{X_2} = \tfrac{2\pi}{a}(0,1,0), \qquad \vec{k}_{X_3} = \tfrac{2\pi}{a}(0,0,1)$$

- Bulk gap at the anti-ferromagnetic phase



$$E_\pm(\vec{q}) = \pm\sqrt{(tq_x)^2 + 4\lambda^2(q_y^2 + q_z^2) + (\delta t)^2 + (Um_1)^2}$$

- Hamiltonian around X point

$$\mathcal{H}_{\widetilde{X}_1}(\vec{q}) = \frac{1}{a}(\widetilde{q}_x\alpha_1 + \widetilde{q}_y\alpha_2 + \widetilde{q}_z\alpha_3) + \delta t\,\alpha_4 + Um_1\alpha_5$$

$$tq_x \to \widetilde{q}_x/a,\; 2\lambda q_y \to \widetilde{q}_y/a,\; 2\lambda q_z \to \widetilde{q}_z/a.$$

- Effective action $S = \int d^4x \sum_{r=1,2,3} \overline{\psi}_r \left[i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) - \delta t - i\gamma_5 U m_r\right]\psi_r$

$\xrightarrow{\text{chiral rotation}}$ $S = \int d^4x\,\theta \frac{\alpha_e}{8\pi} F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu}, \qquad \theta \equiv \sum_r \theta_r = \sum_r \tan^{-1}\left(\frac{Um_r}{\delta t}\right)$

magnon behaves as axion

Axion-magnon conversion in ATI

- Anti-ferromagnetically doped topological insulator

  $\longrightarrow$ Magnon has interaction to photon-photon

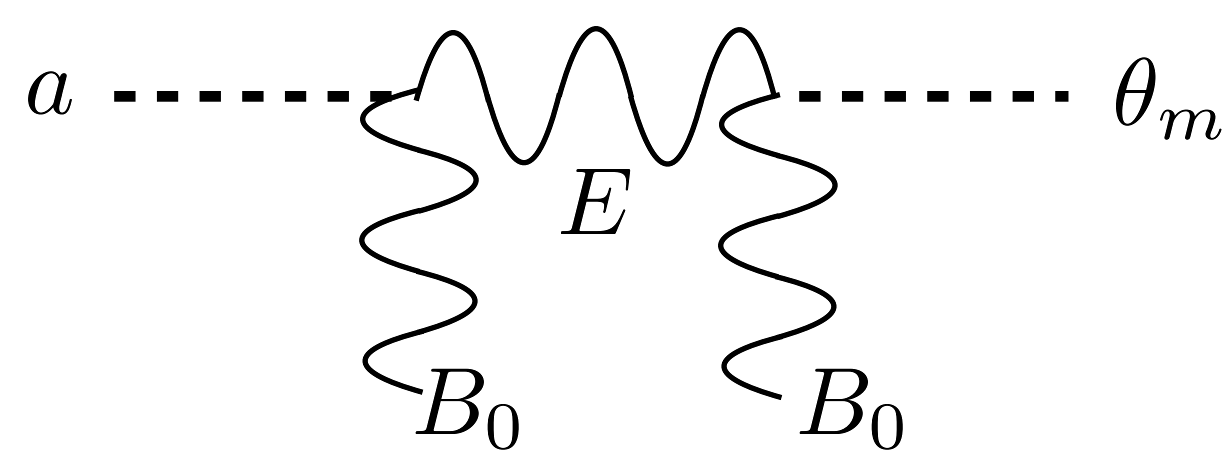
- Interaction Lagrangian

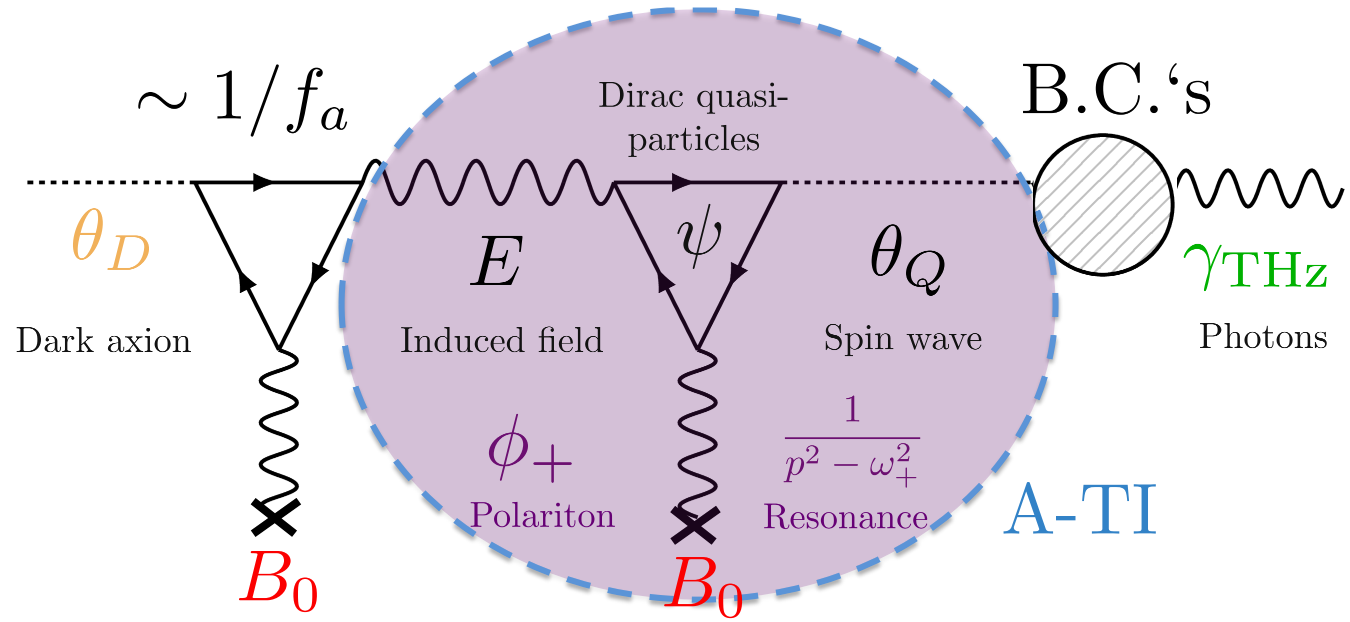
$$\mathcal{L} = \frac{\alpha_e}{8\pi}\left(C_a\theta_a + C_m\theta_m\right) F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu}$$

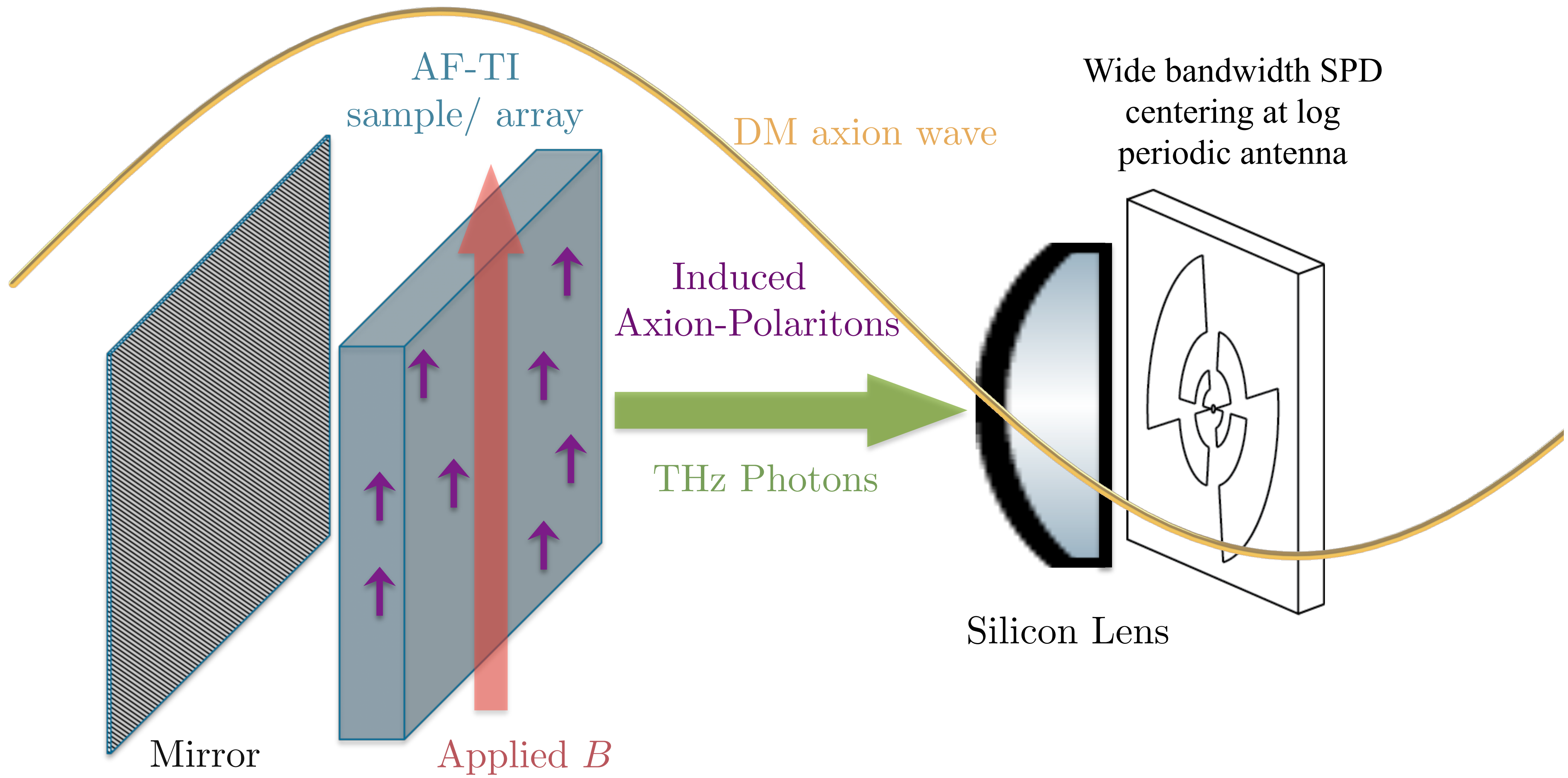
$\frac{a}{f}$:Axion

Magnon

- Axion-magnon conversion







TI: $(\mathrm{Bi}_{1-x}\mathrm{Fe}_x)_2\mathrm{Se}_3$

Marsh et al. (2018)

Magnon-Polariton

- EoM of photon and magnon

$$\epsilon\ddot{\mathbf{E}} - \nabla^2\mathbf{E} + \frac{\alpha}{\pi}[\mathbf{B}_0\ddot{\theta}_Q - \nabla(\nabla\theta_Q\cdot\mathbf{B}_0)] = \mathbf{A}\cos\omega_a t$$

$$\ddot{\theta}_Q - v_Q^2\nabla^2\theta_Q + m_Q^2\theta_Q - \frac{\alpha}{4\pi^2 f_Q^2}\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{E} = 0\,,$$

$$\mathbf{A} \;=\; 2\mathbf{B}_0 g_\gamma\sqrt{2\rho_{\mathrm{DM}}}/m_a$$

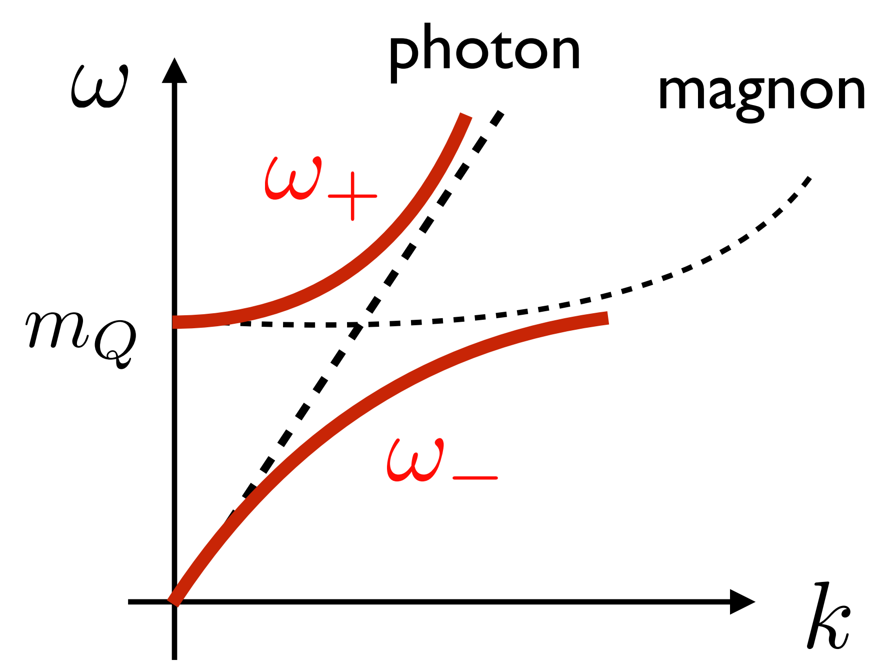
- Polariton dispersion relation

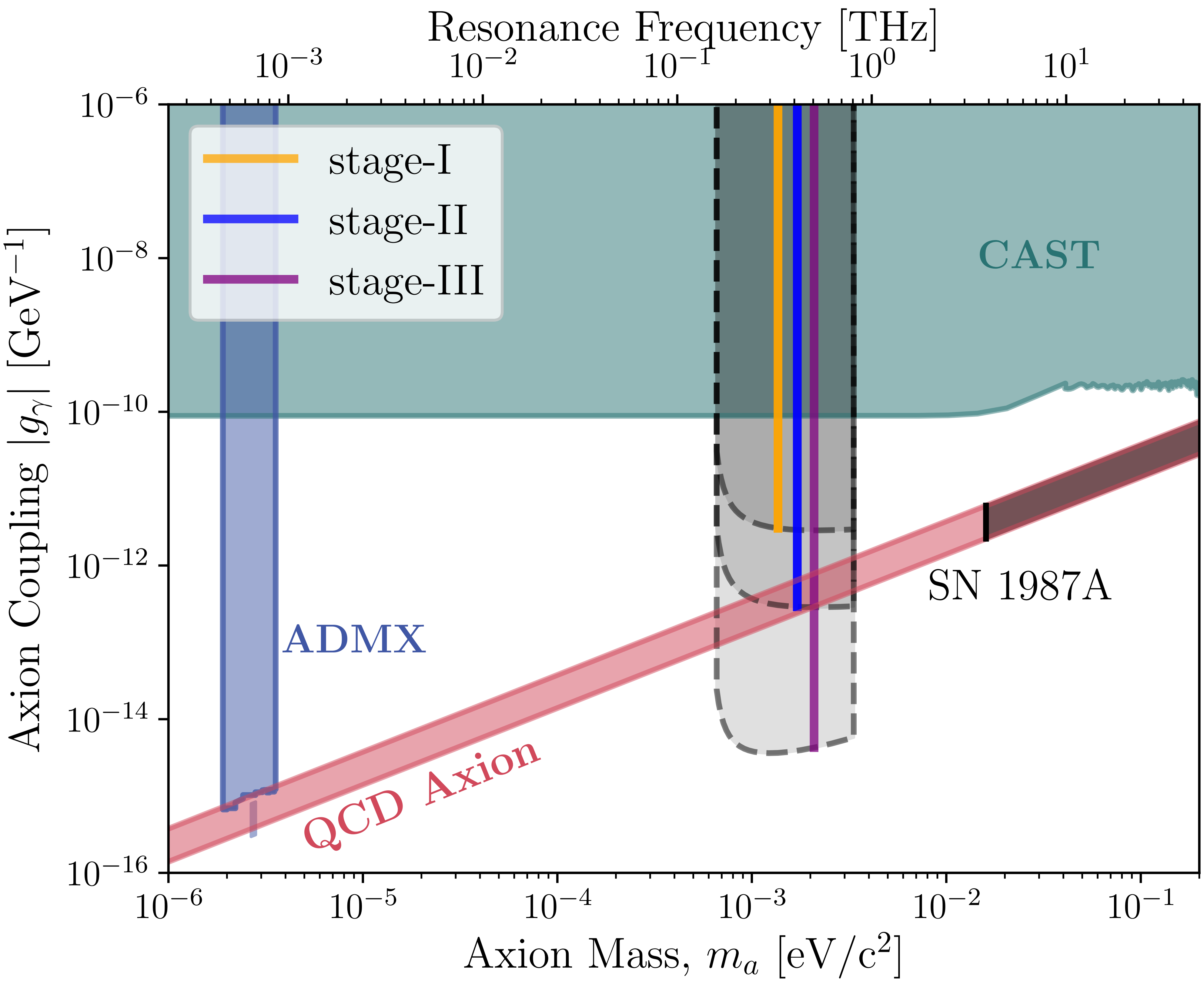
$$\omega_\pm^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{k^2}{\epsilon} + m_Q^2 + b^2 \pm \sqrt{\left(\frac{k^2}{\epsilon} + m_Q^2 + b^2\right)^2 - \frac{4k^2 m_Q^2}{\epsilon}}\right]$$

$$\begin{aligned} m_Q &= \sqrt{\omega_A(\omega_A + 2\omega_e)} + \omega_L \\ &= [0.12(B_0/2\ \mathrm{T}) + 0.6]\ \mathrm{meV} \end{aligned}$$

$$f_Q \;=\; 190\ \mathrm{eV}$$

$$b^2 \equiv \frac{\alpha^2 B_0^2}{4\pi^3\epsilon f_Q^2}$$

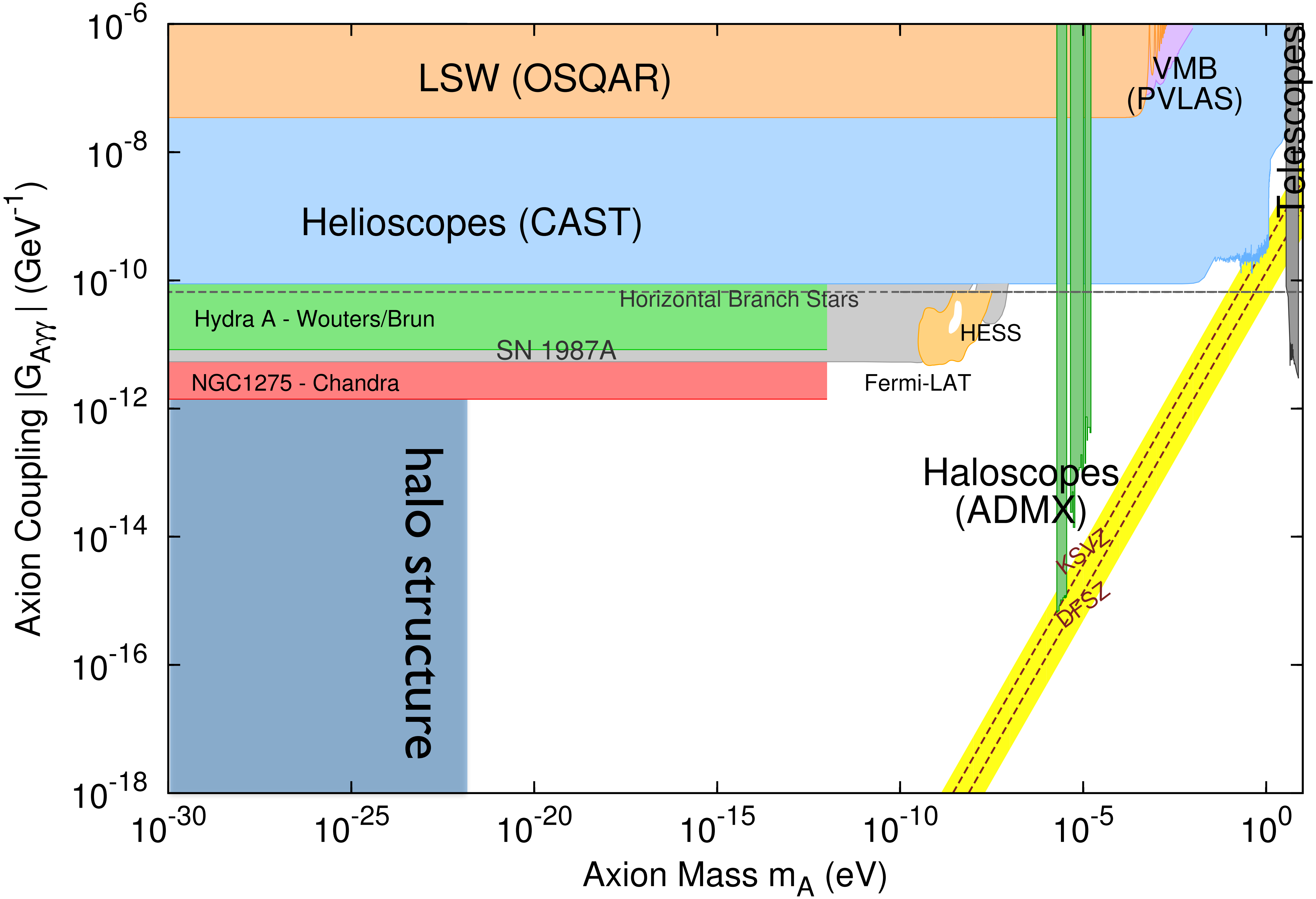




Marsh et al. (2018)

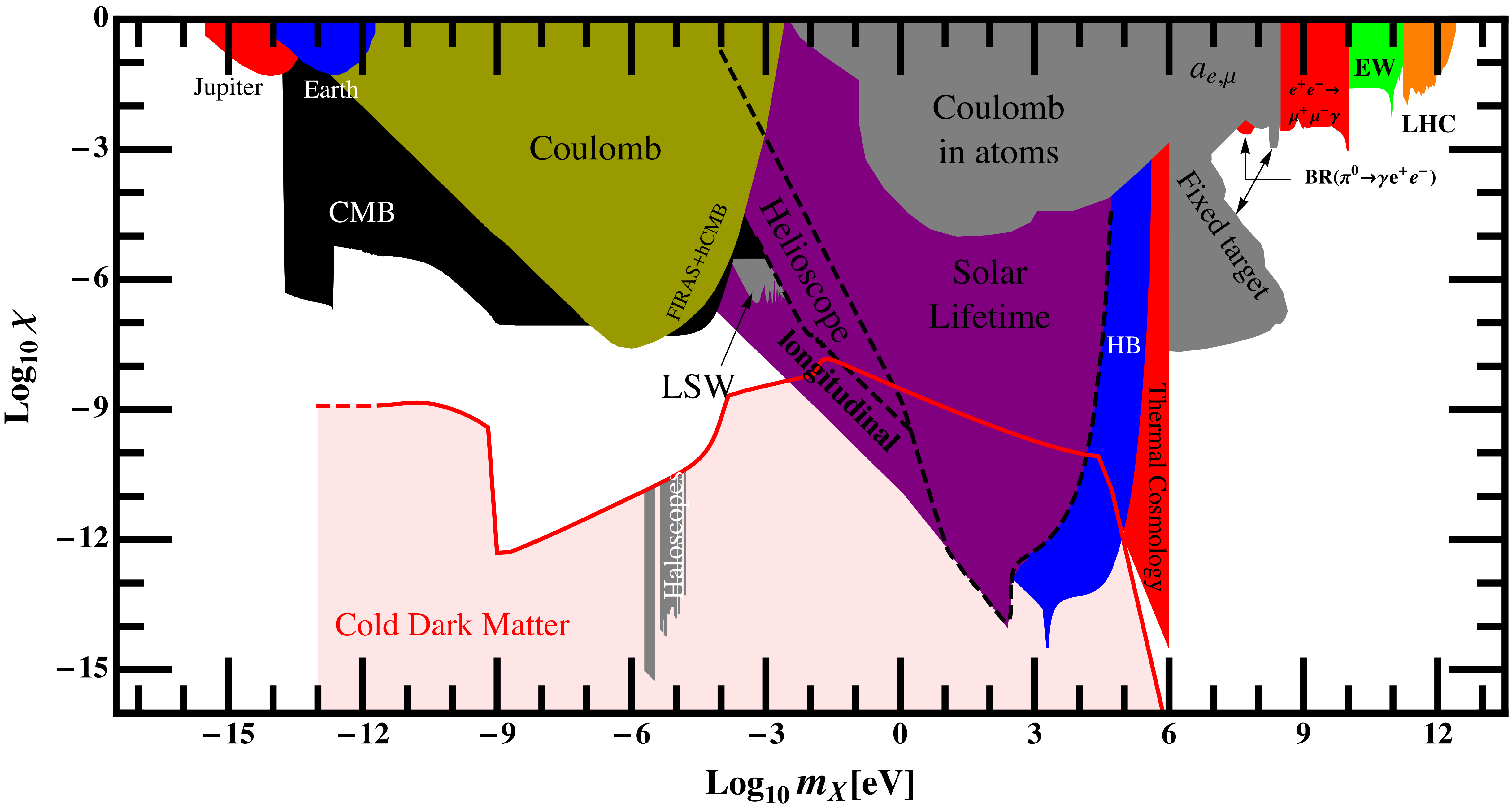
App.5 その他

Constraint on axion-like particle



Berg et al (2017)

Constraint on hidden photon



Jaeckel (2013)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	1 H																	2 He
2	3 Li	4 Be											5 B	6 C	7 N	8 O	9 F	10 Ne
3	11 Na	12 Mg											13 Al	14 Si	15 P	16 S	17 Cl	18 Ar
4	19 K	20 Ca	21 Sc	22 Ti	23 V	24 Cr	25 Mn	26 Fe	27 Co	28 Ni	29 Cu	30 Zn	31 Ga	32 Ge	33 As	34 Se	35 Br	36 Kr
5	37 Rb	38 Sr	39 Y	40 Zr	41 Nb	42 Mo	43 Tc	44 Ru	45 Rh	46 Pd	47 Ag	48 Cd	49 In	50 Sn	51 Sb	52 Te	53 I	54 Xe
6	55 Cs	56 Ba	*1	72 Hf	73 Ta	74 W	75 Re	76 Os	77 Ir	78 Pt	79 Au	80 Hg	81 Tl	82 Pb	83 Bi	84 Po	85 At	86 Rn
7	87 Fr	88 Ra	*2	104 Rf	105 Db	106 Sg	107 Bh	108 Hs	109 Mt	110 Ds	111 Rg	112 Cn	113 Nh	114 Fl	115 Mc	116 Lv	117 Ts	118 Og
8	119 Uue	120 Ubn	*3															

ランタノイド	57 La	58 Ce	59 Pr	60 Nd	61 Pm	62 Sm	63 Eu	64 Gd	65 Tb	66 Dy	67 Ho	68 Er	69 Tm	70 Yb	71 Lu
アクチノイド	89 Ac	90 Th	91 Pa	92 U	93 Np	94 Pu	95 Am	96 Cm	97 Bk	98 Cf	99 Es	100 Fm	101 Md	102 No	103 Lr

- 金属元素
- 半金属元素
- 非金属元素
- 遷移金属
- 希土類元素
- アルカリ金属
- アルカリ土類金属
- ハロゲン
- 希ガス
- 卑金属元素

from Wikipedia “周期表”