一般相対性理論におけるエネルギーの定義と連星からの重力波

青木　慎也

京都大学　基礎物理学研究所　重力物理学研究センター

基研研究会

素粒子物理学の進展２０２１

２０２１年９月６日ー９月１０日, オンライン開催

参考文献

S. Aoki, T. Onogi and S. Yokoyama,
“Conserved charge in general relativity”,
Int. J. Mod. Phys. A36 (2021) 2150098 arXiv:2005.13233[gr-qc].

S. Aoki, T. Onogi and S. Yokoyama,
“Charge conservation, Entropy, and Gravitation”,
arXiv:2010.07660[gr-qc].

S.Aoki and T. Onogi, 論文準備中 & 研究進行中

青木慎也

大野木　哲也

横山　修一

0. 序論
一般相対性理論の理解は正しいか？

一般相対性理論は正しく理解されているか？

重力の量子化は素粒子理論の最大の未解決問題。超弦理論？

量子化以前に、「古典重力理論の我々の理解」を再検討する。

古典重力理論（一般相対性理論）

アインシュタイン方程式 $$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G_d T_{\mu\nu}$$

重力（空間）　”エネルギー”（物質）

物質（エネルギー）が空間（重力）を規定する方程式

エネルギー運動量テンソル(EMT) $$T_{\mu\nu}(x) = \frac{\delta S_{\mathrm{matter}}}{\delta g^{\mu\nu}(x)} \qquad \nabla_\mu T^\mu{}_\nu = 0$$

保存則に必要なのは $\partial_\mu (\sqrt{-g} T^\mu{}_\nu) = 0$ 　しかし、一般には $\partial_\mu (\sqrt{-g} T^\mu{}_\nu) \neq 0$

相対性理論で保存するエネルギーとは何か？

（教科書に書かれている）２つの答え

伝統的な答え：共変性を諦める　　Landau-Lifshitz, Weber, 内山, Weinberg, Misner-Thorne-Wheeler, …

$\partial_\mu\left[\sqrt{-g}(T^\mu{}_\nu + t^\mu{}_\nu)\right] = 0$　保存則を満たすように定義を変える。　　アインシュタイン

$t_{\mu\nu}$ 座標変換で共変でない（擬テンソル）。重力場のエネルギー？（アインシュタイン）

$E = \int_V d^3x\sqrt{-g}(T^\mu{}_\nu + t^\mu{}_\nu)$　様々な条件が必要（直交座標、２粒子以上、漸近的に平坦、など）

そもそも一般相対論の最も大事な原理が損なわれている（アインシュタイン最大のミス？）

現代的な答え：局所的なエネルギーを諦める　　Wald, …

$$E = \int_{r\to\infty} dS \ \text{(quasi-local energy)} \quad \longleftrightarrow \quad E = \int dV \ \cancel{\text{(local energy)}}$$

準局所エネルギー　　重力場のエネルギーは局所化されない？

Komar, Bondi, Arnowitt-Deser-Misner, Gibbons-Hawking, Brown-York

統一的な定義がない。どれが正しいエネルギー？

漸近的な振る舞いの制限や「繰り込み」が必要。

アインシュタイン方程式のEMTとの関係が不明。

この講演の内容

１. 一般相対性理論のEMTを用いた正しい保存量の定義と、それを用いたエネルギーおよびその一般化。その結果に基づいた一般相対性理論の正しい理解。

物質は（一般化された）エネルギーを持つが、重力場（空間）は持たない。

したがって、重力波は（一般化された）エネルギーを持たない。

２. 連星はどのようにエネルギーを失うのか？（研究進行中）

３. 重力の量子化へのヒントは？

I. 一般化されたエネルギーの保存

S. Aoki, T. Onogi and S. Yokoyama, “Conserved charge in general relativity”,
Int. J. Mod. Phys. A36 (2021) 2150098 arXiv:2005.13233[gr-qc].
S. Aoki, T. Onogi and S. Yokoyama, “Charge conservation, Entropy, and Gravitation”, arXiv:2010.07660[gr-qc]

EMTを用いた保存カレントと保存量

保存カレント

$$J^\mu = T^\mu{}_\nu \zeta^\nu$$

保存に必要な条件

$$\boxed{\nabla_\mu J^\mu = T^\mu{}_\nu \nabla_\mu \zeta^\nu = 0} \quad \because \quad \nabla_\mu T^\mu{}_\nu = 0$$

保存量

$$\boxed{Q(\zeta) = \int_{\Sigma(x^0)} d\Sigma_0 \sqrt{-g} T^0{}_\nu \zeta^\nu}$$

$d\Sigma_0$: a hypersurface element

$\Sigma(x^0)$: a constant x^0 hypersurface

$$\because \quad \sqrt{-g}\,\nabla_\mu J^\mu = \partial_\mu(\sqrt{-g} J^\mu) = 0$$

時間座標x^0や空間的な超平面$\Sigma(x^0)$の取り方に寄らずに局所量である保存カレントの積分として保存量が定義できる。

1. 対称性による保存エネルギー

キリングベクトル $\nabla_\mu \xi_\mu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0$ が存在する場合

$\zeta^\mu = \xi^\mu$ と取る $\longrightarrow$ $T^{\mu\nu} \nabla_\mu \zeta_\nu = \frac{1}{2} T^{\mu\nu} (\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu) = 0$

例：定常的な時空　計量 $g_{\mu\nu}$ が x^0 を含まない $\longrightarrow$ $\xi^\mu = -\delta_0^\mu$ が キリングベクトル

保存するエネルギー

$$E = -\int_{\Sigma(x_0)} d\Sigma_0 \sqrt{-g}\, T^0{}_0$$

共変的で普遍的なエネルギーの定義。平坦な空間への極限で通常のエネルギーと一致。

計量を不変にするキリングベクトルの対称性による保存量

キリングベクトルを使った保存量の定義 $Q = \int_{\Sigma(x^0} d\Sigma_0 \sqrt{-g} T^0{}_\nu \xi^\nu$

この定義は古い文献で見つけることが出来る。

1. V. Fock, *TheTheory of Space, Time and Gravitation* (Pergamon Press, New York 1959)

2. A. Tautman, Kings Collage lecture notes on general relativity, May-June 1958; Gen. Res. Grav. **34** (2002), 721-762 は Fockの教科書を引用している。

3. Komarの論文(PRD127(1962)1411) がTautmanの講義録を引用。

しかしながら、これらの文献は忘れられ、この保存量の定義は、いくつかの例外をのぞいて主要な教科書 (Landau-Lifshitzなど) には載っていない。

4. R. Wald, *General Relativity* (The University of Chicago Press, Chicago, 1984), ２８６ページの脚注３。

他に、Hawking-Ellisの教科書、Blauの講義録、白水さんの教科書 (日本語)、関口さんの講義録 (日本語)など。

不思議なことに、この定義を使った計算は皆無。やってみた。

例：Schwarzschild ブラックホール

EMT $T^0{}_0 = T^r{}_r = -\frac{(d-2)}{8\pi}\frac{M\delta(r)}{r^{d-2}}$ $T^i{}_j = \delta^i_j \frac{1}{8\pi}\frac{M\delta(r)}{r^{d-2}}$ ブラックホールは真空ではない！

$\longrightarrow$ $E = M$ 宇宙項がある場合でも成り立つ。

準局所エネルギーの方法では宇宙項があると発散してしまい、別の定義が必要。

例：電荷を持つブラックホール

$\longrightarrow$ $E = M + \infty$ 点電荷のエネルギーは無限大。

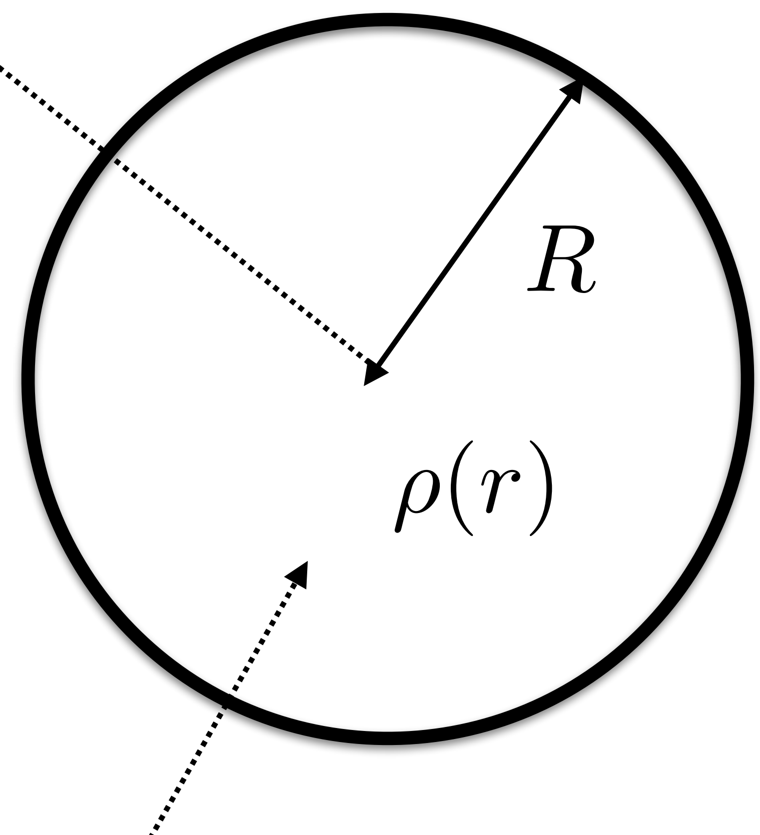
準局所エネルギーの方法では電荷によるエネルギーへの寄与はゼロ。
(発散量にはストークスの定理が成り立たない。）

例：中性子星のエネルギー

星の外部の計量　Schwarzschild 計量

$$f(r) = \frac{1}{h(r)} = 1 - \frac{2G_4 M(R)}{r}$$ Misner-Sharp 質量

r_∞



星の内部の計量　$$ds^2 = -f(r)(dx^0)^2 + h(r)dr^2 + r^2 \tilde{g}_{ij} dx^i dx^j$$

Misner Sharp 質量 $$M(R) = 4\pi \int_0^R dr\, r^2 \rho(r)$$

保存する全エネルギー $$E = -\int d^2x \int_0^\infty dr\, \sqrt{-g}\, T^0{}_0 = 4\pi \int_0^R dr\, \sqrt{f(r)h(r)} r^2 \rho(r)$$

$$E = M(R) - 4\pi G_4 \int_0^R dr\, \sqrt{f(r)h^3(r)}\, r M(r)\, (\rho(r) + P(r))$$

MS 質量　　星の内部構造からくる補正項 $:= \Delta E$

ニュートン極限 $$\Delta E \simeq -4\pi G_4 \int_0^\infty dr\, r\, M(r)\rho(r) + \cdots$$

重力ポテンシャルエネルギー（ニュートン力学）

$$U_4 := -\frac{G_4}{2} \int d^3x\, d^3y\, \frac{\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} = -4\pi G_4 \int_0^R dr\, r\, M(r)\rho(r) \longrightarrow \Delta E \le 0$$

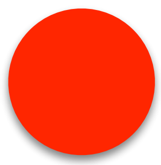
全エネルギー $$E = M(R) + \Delta E \le M(R)$$ Misner Sharp 質量

遠くから見える重力質量と内部の全エネルギーは異なる！

補正項の大きさ

定数密度 $\rho(r) = \rho_0$ の場合、$-\Delta E$ は 最大でMS質量の６８％にもなる。

観測された中性子星の質量よりその全エネルギーはかなり小さいかもしれない。

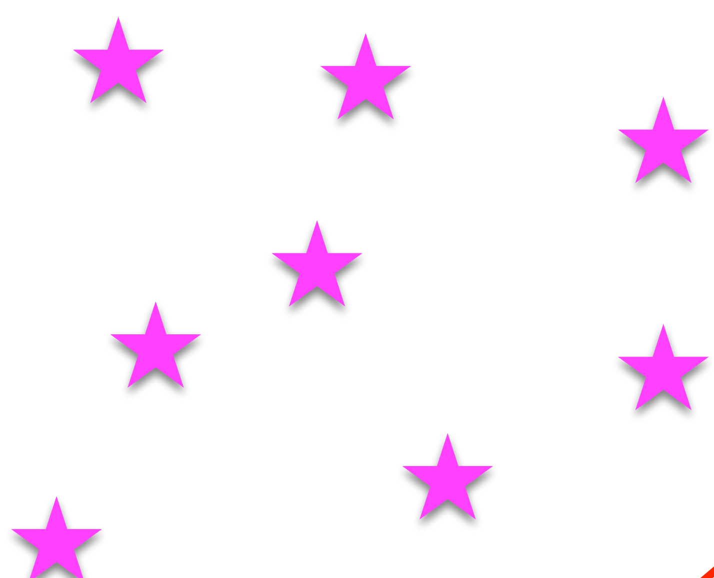


$E_{\rm NS} \simeq \frac{2}{3} M_{\rm sun}$　　　$M_{\rm NS} \simeq 2 M_{\rm sun}$

似たような状況　暗黒物質

$$E_{\rm total} = Nm = \tilde{M}_{\rm total} + \Delta E$$

光っている物質



エネルギー保存

$E_{\rm total} = M_{\rm total} = Nm$　　Misner Sharp 質量　　$\tilde{M}_{\rm total} = Nm - \Delta E \gg Nm$

重力が感じる物質

暗黒物質の総量の評価に影響を与えるかもしれない。

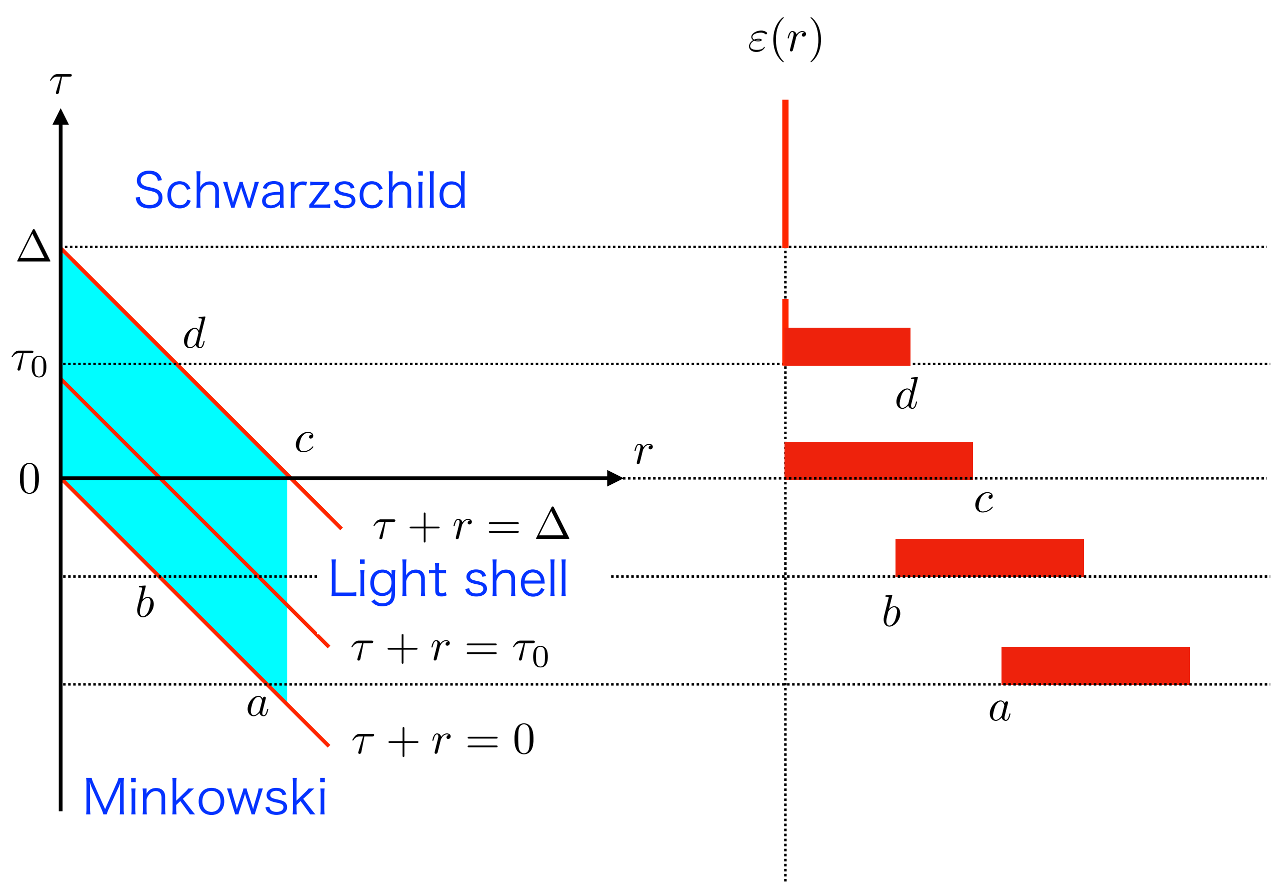
2. 対称性によらない保存エネルギー

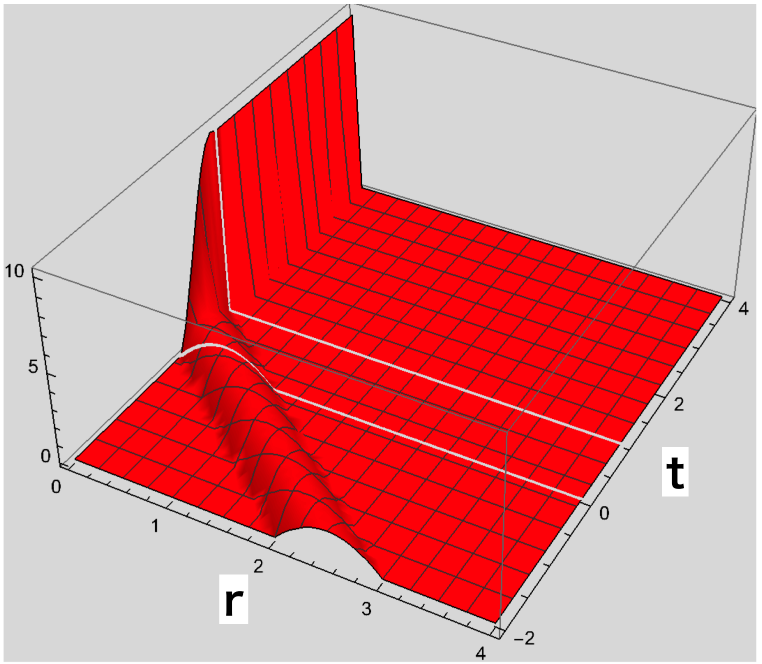
$\xi^\mu = -\delta^\mu_0$ がキリングベクトルにならない場合

保存条件 $T^\mu{}_\nu \nabla_\mu \xi^\nu = -T^\mu{}_\nu \Gamma^\nu_{\mu 0} = 0$ が満たされれば、エネルギーは保存する。

$$E = -\int_{\Sigma(x_0)} d\Sigma_0 \sqrt{-g}\, T^0{}_0$$ （対称性によらない）保存エネルギー

例. Thick light shellの重力崩壊。





Light shell領域ではキリングベクトルはないが、EMTをどこで積分しても一定になり、エネルギーは保存している。

3. エネルギーが保存しない場合の保存量

$\xi^\mu = -\delta^\mu_0$ がキリングベクトルでなく、$T^\mu{}_\nu \nabla_\mu \xi^\nu = -T^\mu{}_\nu \Gamma^\nu_{\mu 0} \neq 0$ の場合

エネルギーは保存しないが、$T^\mu{}_\nu \nabla_\mu \zeta^\nu = 0$ を満たすζ^ν は常に存在。

例：球対称な系の場合、その解として小玉ベクトルが知られている。 Kodama'80

保存量は常に存在する！

例．一様等方な膨張宇宙 $ds^2 = -(dx^0)^2 + a^2(x^0)\tilde{g}_{ij}dx^i dx^j$

$$\tilde{R}_{ij} = (d-2)k\tilde{g}_{ij} \qquad k = 1(\text{sphere}),\ 0(\text{flat}),\ \text{-}1(\text{hyperbolic})$$

EMT (完全流体) $T^0{}_0 = -\rho(x^0),\ T^i{}_j = P(x^0)\delta^i_j,\ T^0{}_j = T^i{}_0 = 0$

保存則 $\nabla_\mu T^\mu{}_\nu = 0 \longrightarrow \dot{\rho} + (d-1)(\rho + P)\dfrac{\dot{a}}{a} = 0$

エネルギー $E(x^0) := -\int d^{d-1}x\sqrt{-g}\,T^0{}_0 = V_{d-1}a^{d-1}\rho, \quad V_{d-1} := \int d^d - 1x\sqrt{\tilde{d}}$

$$\longrightarrow \frac{\dot{E}}{E} = -(d-1)\frac{\dot{a}}{a}\frac{P}{\rho} \neq 0$$

確かにエネルギーは保存しない！
（減少する）

$\zeta^\mu = -\beta(x^0)\delta^\mu_0$ と置くと、$T^\mu{}_\nu \nabla_\mu \zeta^\nu = 0$ から以下が導かれる。

$$-T^0{}_0\dot{\beta} - T^i{}_j\Gamma^j{}_{i0}\beta = \rho\dot{\beta} - (d-1)P\frac{\dot{a}}{a}\beta = 0 \longrightarrow \frac{\dot{\beta}}{\beta} = (d-1)\frac{P}{\rho}\frac{\dot{a}}{a}$$

保存量 $S(x^0) := \int d^{d-1}x\sqrt{-g}(-T^0{}_0)\beta = V_{d-1}a^{d-1}\rho\beta$

$$\frac{\dot{S}}{S} = \frac{\dot{E}}{E} + \frac{\dot{\beta}}{\beta} = -(d-1)\frac{\dot{a}}{a}\frac{P}{\rho} + (d-1)\frac{P}{\rho}\frac{\dot{a}}{a} = 0$$ 確かに保存する！

保存量の物理的意味

保存量 $S(x^0) = E(x^0)\beta(x^0)$　エネルギー $E(x^0) = \rho(x^0)V(x^0)$　体積 $V(x^0) = V_{d-1}a(x^0)^{d-1}$

時間変化 $$\frac{dS}{dx^0} = \frac{dE}{dx^0}\beta + E\frac{d\beta}{dx^0} = \left(\frac{dE}{dx^0} + P\frac{dV}{dx^0}\right)\beta \longleftrightarrow TdS = dE + PdV$$

熱力学の第１法則

このことから S をエントロピー、$\beta = \frac{1}{T}$ を逆温度と解釈する。 Jacobson'95, Verlinde'11

したがって、膨張宇宙では宇宙の全エントロピーが保存する！
（保存するように温度が決まる。）

$$\frac{\dot{\beta}}{\beta} = (d-1)\frac{P}{\rho}\frac{\dot{a}}{a} > 0$$ また、膨張の際に温度は下がる。

一般相対論の新解釈

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G_d T_{\mu\nu}$$

$$S(x^0) := \int d^{d-1}x \sqrt{-g}(-T^0{}_0)\beta$$

(1) 重力の源はエネルギー／エントロピーである。 Jacobson'95, Verlinde'11

(2) 物質はエネルギー／エントロピーを持つが、重力場は持たない。
したがって、重力波はエネルギーを持ち去らない。（等価原理を考えれば当然。）

(3) 重力から逃れることができる物質は無いので、重力系の全エントロピーは保存する。

天網恢恢疎にして漏らさず。

連星はどうして互いの距離が短くなるのか？

通常は重力波によりエネルギーが持ち去られるからと理解。

次の話題。

II. 連星の運動と保存則

S. Aoki and T. Onogi　（研究進行中）

連星の運動

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G_N T_{\mu\nu}$$

通常のやり方　　P.C. Peters, PR136(1964)B1224

1. 計量を平坦な時空でのまわりで展開して、アインシュタイン方程式を書き換える。

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \qquad \bar{h}_{\alpha\{\mu,\nu\}}{}^{\alpha} - \bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} - \eta_{\mu\nu}\bar{h}_{\alpha\beta}{}^{\beta\alpha} = 16\pi G_N S_{\mu\nu} \qquad \bar{h}_{\mu\nu} := h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^{\alpha}{}_{\alpha}$$

ただし、 $S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{8\pi G_N}\sum_{k=2}^{\infty} G^{(k)}_{\mu\nu}$ 　　 $G^{(k)}_{\mu\nu} = O(h^k_{\mu\nu})$ 　摂動に関してk次

2. 左辺の形から以下の保存則が成り立つ。

$$\partial_\mu S^{\mu}{}_{\nu} = 0$$

共変でない　　ある種の擬テンソル

3. ”エネルギー”を定義。 $E = \int S_{44} dV$

4. ”エネルギー”の時間変化を表面積分で書く。 $\frac{dE}{dt} = \int S_{i4} dS_i$

5. 時間変化（エネルギー損失）の”時間平均”を計算する。

正しく計算すれば結果は正しいが、これが”エネルギー”である保証はない。

（近似してから定義している。定義してから近似すべき。）

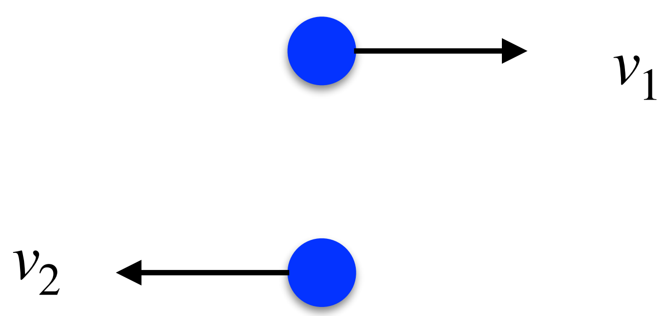
我々のやり方１　　運動方程式をニュートン定数に関する摂動で解く。

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G_N T_{\mu\nu} \qquad \ddot{z}_i^{\mu}(\tau_i) + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\dot{z}_i^{\alpha}(\tau_i)\dot{z}_i^{\beta}(\tau_i) = 0$$

０次　$G^{(0)}_{\mu\nu} = 0 \longrightarrow g^{(0)}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \longrightarrow (\Gamma^{(0)})^{\mu}_{\alpha\beta} = 0 \longrightarrow (\ddot{z}_i^{(0)})^{\mu}(\tau_i) = 0$

$$\longrightarrow (z_i^{(0)})^{\mu}(\tau_i) = v_i^{\mu}\tau_i + z_{i0} \longrightarrow T^{(0)}_{\mu\nu}(x) = \sum_i m_i (\dot{z}_i^{(0)})_{\mu}(\dot{z}_i^{(0)})_{\nu} \int d\tau_i\, \delta^{(4)}(x - z_i)$$

等速直線運動

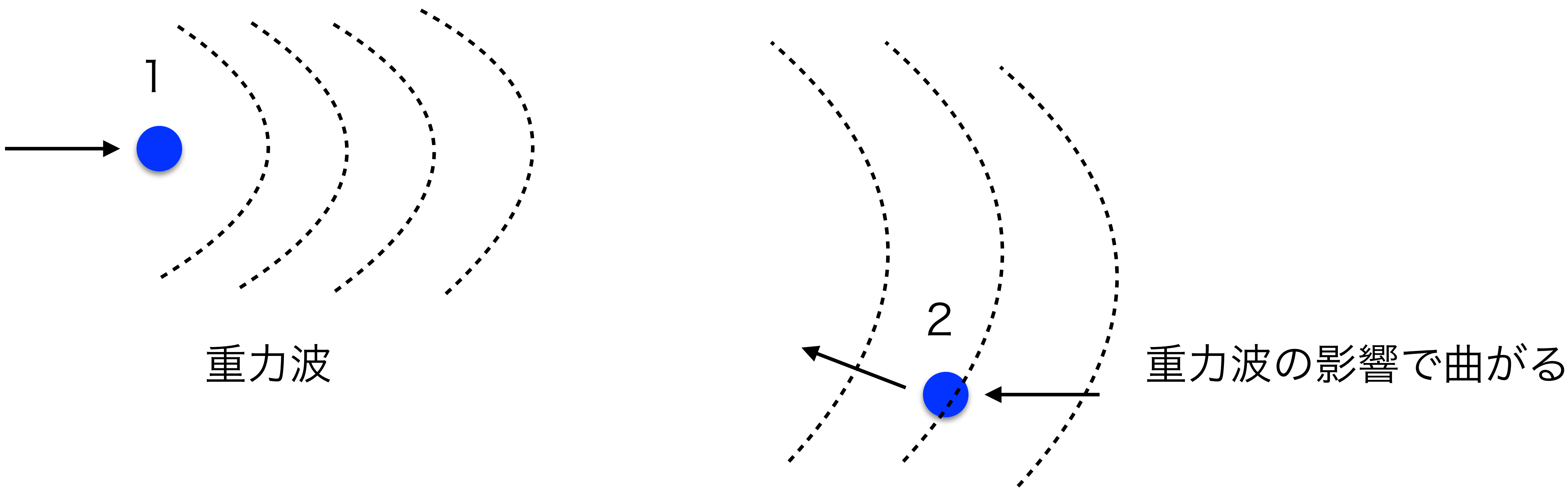


全エネルギー　$E^{(0)} = -\int d^3x \sqrt{-\eta}\,(T^{(0)})^{0}{}_{0}(x)$　保存

1次　$G^{(1)}_{\mu\nu} = 8\pi G_N T^{(0)}_{\mu\nu} \longrightarrow g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h^{(1)}_{\mu\nu} \longrightarrow \Box \bar{h}_{\mu\nu} = -8\pi G_N T^{(0)}_{\mu\nu}$　波動方程式

$\bar{h}_{\mu\nu} := h^{(1)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h^{(1)\alpha}{}_{\alpha}$　　$\bar{h}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{,\beta} = 0$

$\longrightarrow (\ddot{z}_i^{(1)})^{\mu} + \Gamma^{(1)\mu}_{\alpha\beta} v_i^{\alpha} v_i^{\beta} = 0 \longrightarrow T^{(1)}_{\mu\nu}(x)$　　$\nabla^{(0)}_{\mu} T^{(1)}_{\mu\nu}(x) = 0$



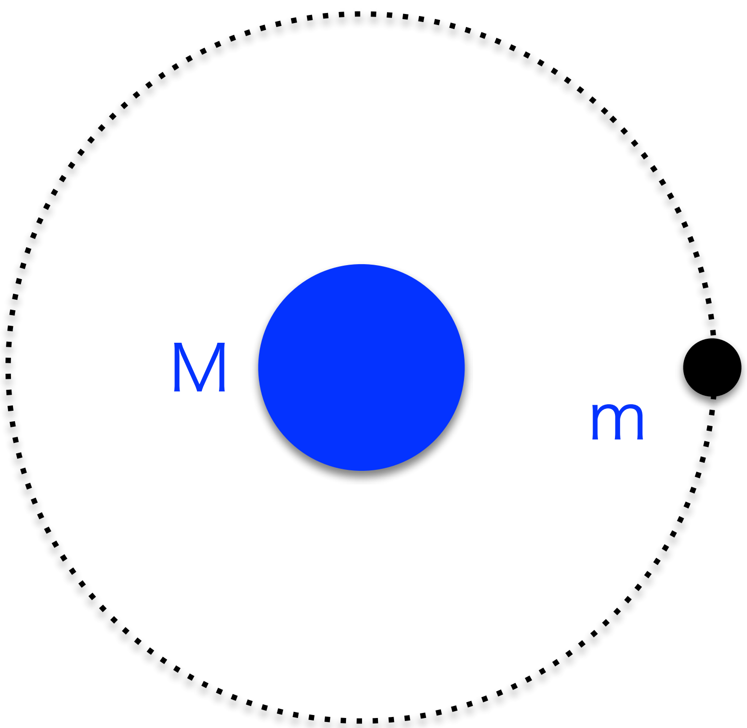
全エネルギー　$E^{(0)} + E^{(1)} = -\int d^3x \sqrt{-g}\left[(T^{(0)})^{0}{}_{0}(x) + (T^{1)})^{0}{}_{0}(x)\right]$　保存するか？

保存量（エントロピー）　$S^{(0)} + S^{(1)} = -\int d^3x \sqrt{-g}\left[(T^{(0)})^{0}{}_{0}(x) + (T^{1)})^{0}{}_{0}(x)\right](1 + \beta^{(1)}(x))$

$T^{(0)\mu}{}_{0}\partial_{\mu}\beta^{(1)} = -T^{(0)\mu}{}_{\nu}\Gamma^{(1)\nu}{}_{\mu 0}$の解

高次項も同様に逐次的に求められる。

我々のやり方２　　重い星の運動は厳密に解き、軽い星を摂動として扱う。



０次　$G^{(0)}_{\mu\nu} = 8\pi G_N T^{(0_H)}_{\mu\nu} \longrightarrow g^{(0)}_{\mu\nu}$　シュワルツシルド計量

$\longrightarrow (\ddot{z}^{(0)}_L)^\mu + \Gamma^{(0)\mu}_{\alpha\beta}(\dot{z}^{(0)}_L)^\alpha(\dot{z}^{(0)}_L)^\beta = 0$　軽い星の運動

$\longrightarrow T^{(1_L)}_{\mu\nu}(x)$　軽い星のEMT

１次　$G^{(1)}_{\mu\nu} = 8\pi G_N T^{(1_L)}_{\mu\nu} \longrightarrow g^{(1)}_{\mu\nu}$　軽い星の出す重力波

$\longrightarrow (\ddot{z}^{(1)}_L)^\mu + \left[\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\dot{z}^\alpha_L\dot{z}^\beta_L\right]^{(1)} = 0$　重い星への反作用

$\longrightarrow T^{(2_H)}_{\mu\nu}(x)$　重い星のEMTへの補正

２次　$G^{(2)}_{\mu\nu} = 8\pi G_N T^{(2_H)}_{\mu\nu} \longrightarrow g^{(2)}_{\mu\nu}$　重い星の出す重力波

$\longrightarrow (\ddot{z}^{(2)}_H)^\mu + \left[\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\dot{z}^\alpha_H\dot{z}^\beta_H\right]^{(2)} = 0$　軽い星への作用 $\longrightarrow T^{(3_L)}_{\mu\nu}(x)$　軽い星のEMTへの補正

$$g_{\mu\nu} = g^{(0)}_{\mu\nu} + g^{(1)}_{\mu\nu} + g^{(2)}_{\mu\nu} \qquad T_{\mu\nu} = T^{(O_H)}_{\mu\nu} + T^{(1_L)}_{\mu\nu} + T^{(2_H)}_{\mu\nu} + T^{(3_L)}_{\mu\nu}$$

エネルギー　$E = -\int d^3x\sqrt{-g}\,T^0{}_0(x)$　エントロピー　$S = -\int d^3x\sqrt{-g}\,T^0{}_0(x)\beta(x)$

これからやるべきこと

２つのやり方について、詳細な計算を進め、エネルギー保存／非保存やエントロピーの保存を具体的にチェックする。

III. 結論として
量子重力？

量子重力

重力を量子化する必要はあるか？

重力場はエネルギー／エントロピーは持たない。

したがって、物質と重力場の間にエネルギー／エントロピーの交換はない。

物質のみを量子化し、重力を古典的に扱うのは不自然ではない。

「時空は物質により変形する容器であり、物質はそれにしたがって運動する」

量子化をするとしても、重力場のエネルギーの期待値はゼロになる必要がある。

$$\langle \mathrm{gravity} \,|\, T_{\mu\nu} \,|\, \mathrm{gravity} \rangle = 0$$

Backup

例. シュワルツシルドブラックホール

Eddington-Finkelstein coordinates

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) d\tau^2 + \frac{2r_g}{r} d\tau dr + \left(1 + \frac{r_g}{r}\right) dr^2 + r^2 d\Omega^2 \qquad r_g = 2G_4 M\theta(r)$$

horizon

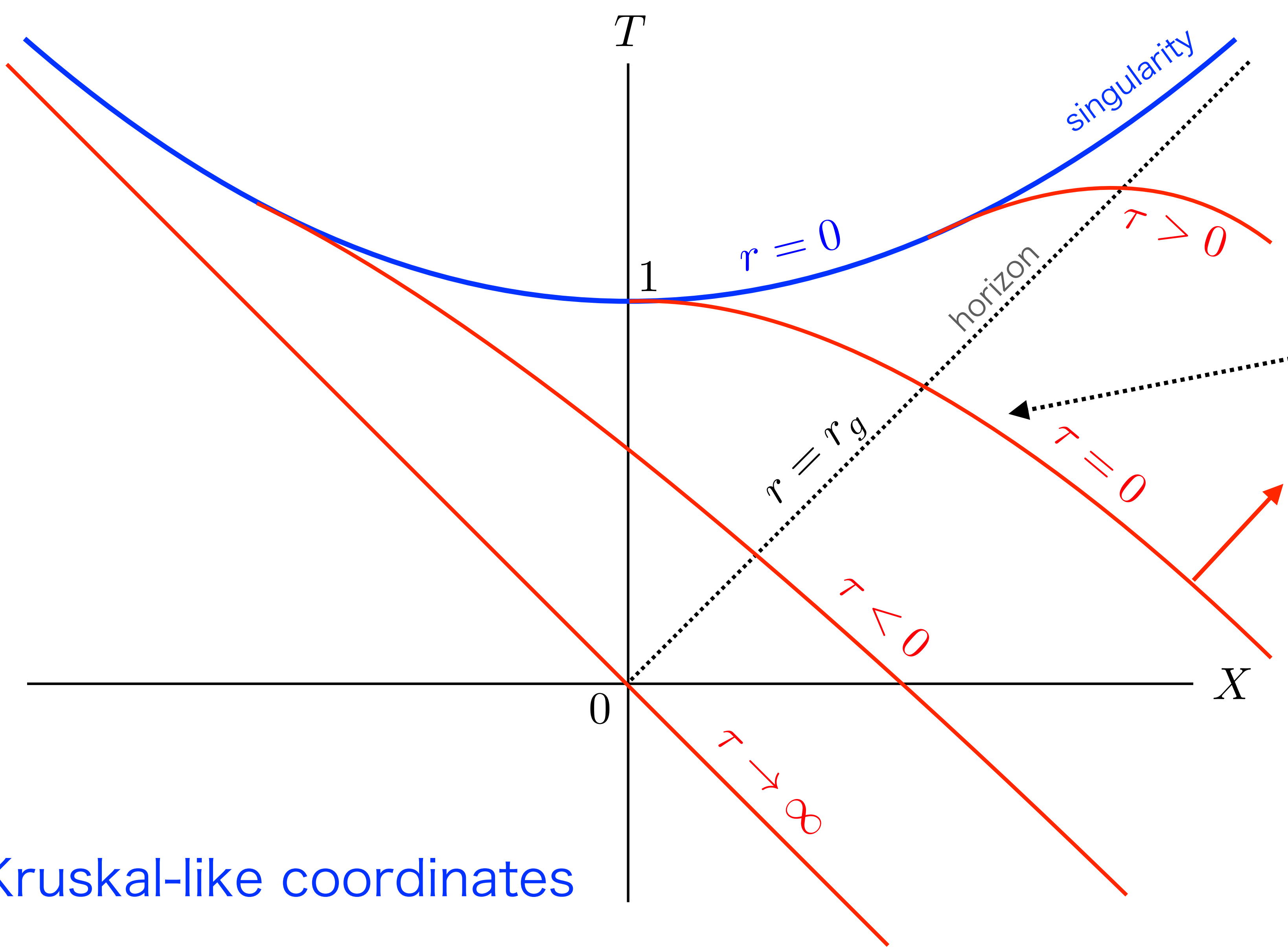
EMT $T^{\tau}{}_{\tau} = -\frac{M}{4\pi}\frac{\partial_r\theta(r)}{r^2} = \frac{M\delta(r)}{4\pi r^2}$ ブラックホールは真空でない

Balasin-Nachbagauer’93

c.f. Geroch-Traschen’86

$$E = \int d^3x\sqrt{-g}T^{\tau}{}_{\mu}(-\delta^{\mu}_{\tau}) = \frac{M}{4\pi}\int d\Omega \int r^2 dr \frac{\partial_r\theta(r)}{r^2} = M[\theta(\infty) - \theta(0)] = M$$

キリングベクトル



Kruskal-like coordinates

τ 一定平面。n_μ に垂直

$$n_\mu = -\left(1 + \frac{r_g}{r}\right)^{-1/2} \delta^{\tau}_{\mu}, \qquad n_\mu n^\mu = -1,$$

したがって、ホライゾンの内側でも空間的である