

物性系を用いた 軽い暗黒物質の直接探索

S. Chigusa, T. Moroi, K. Nakayama

Phys. Rev. D 101, 096013 (2020) [2001.10666]

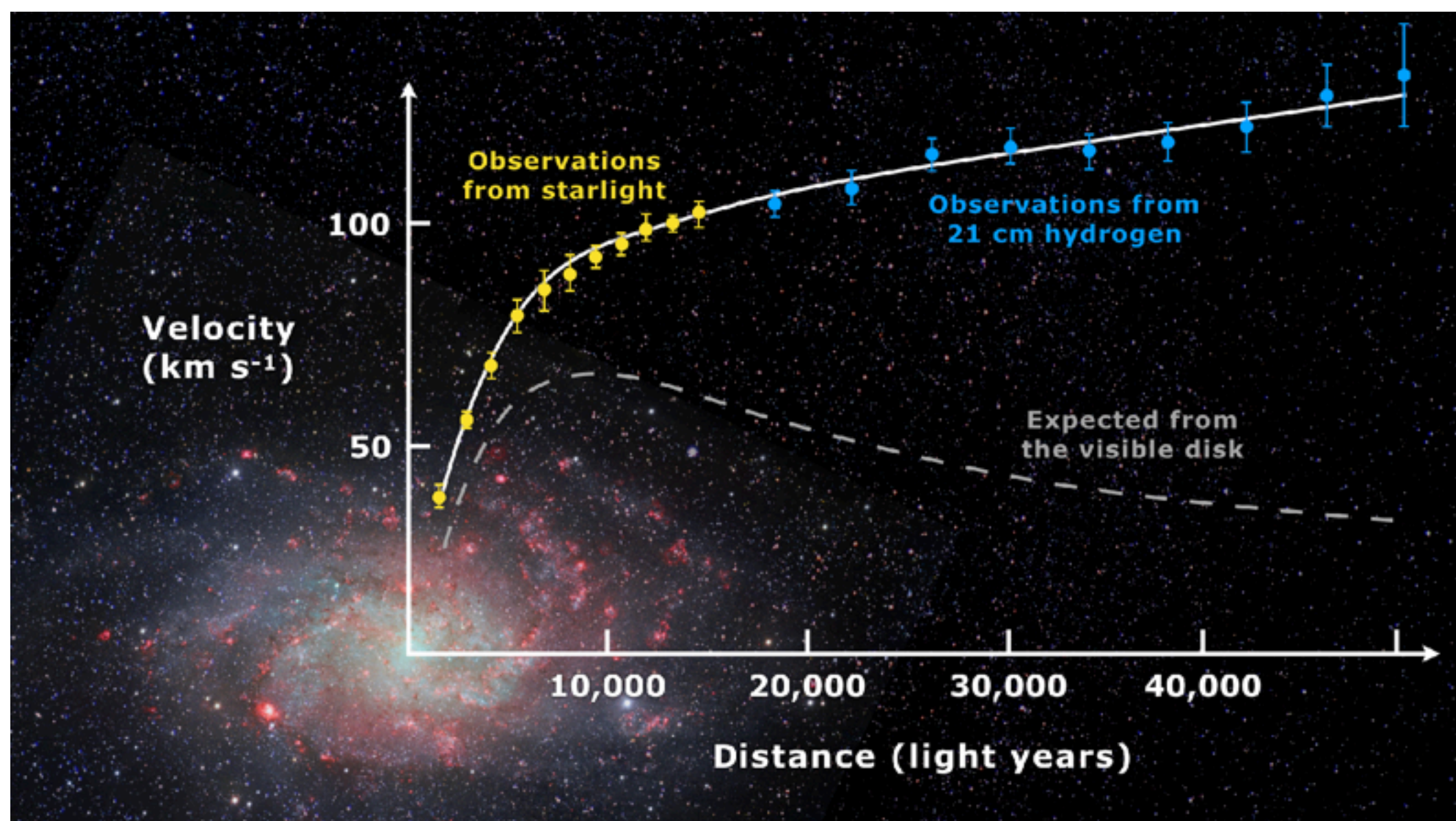
JHEP 8 (2021) 74 [2102.06179]

+ some works in progress

2021/9/9 千草 颯 (LBNL/UC Berkeley) @PPP2021



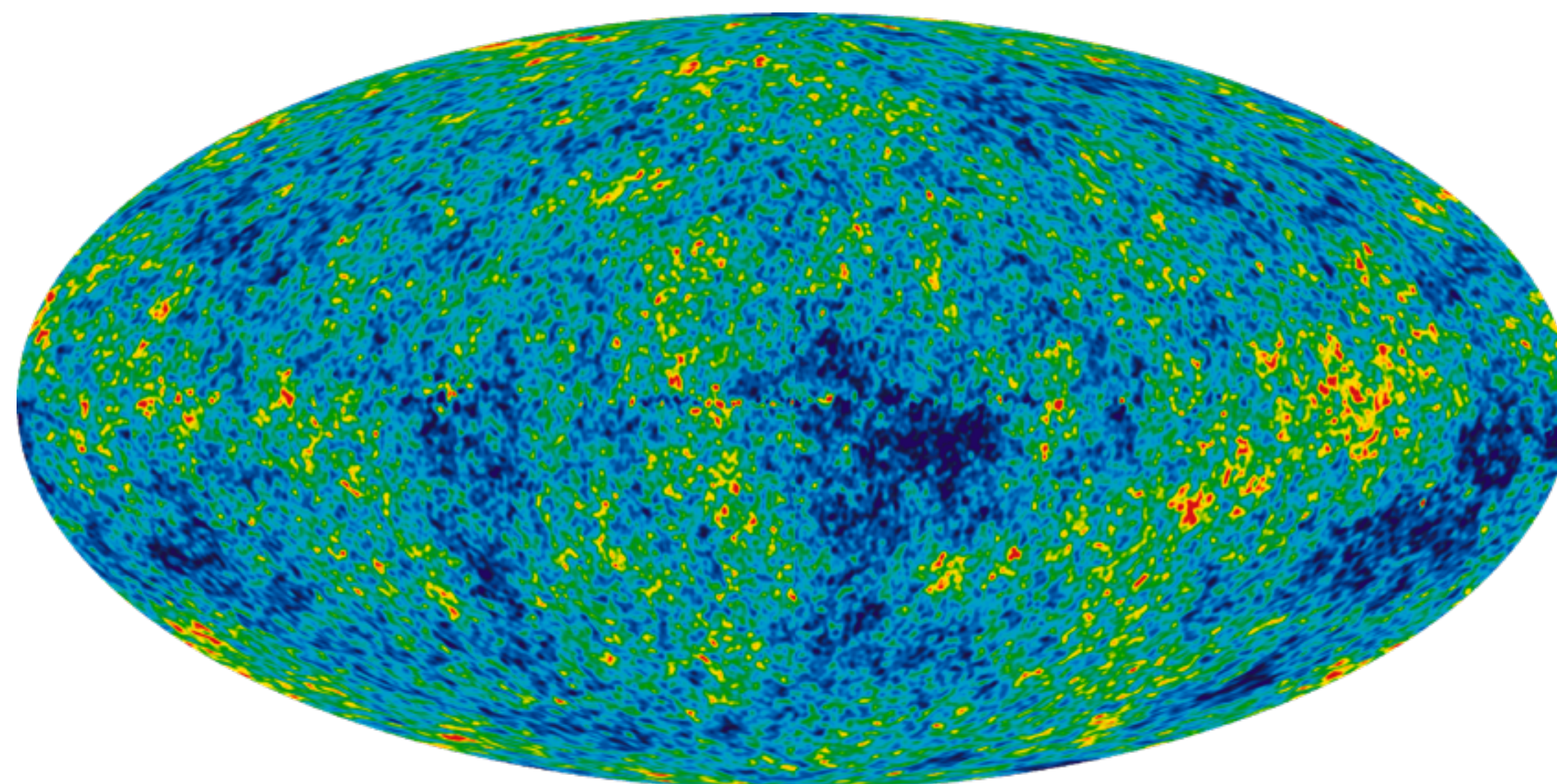
新物理のヒントとしての暗黒物質



Wikipedia "Galaxy rotation curve", E. Corbelli, P. Salucci (2000)

知ってる

- ✓ 暗黒物質の存在、存在量(25%)
- ✓ 暗黒物質が重力相互作用すること

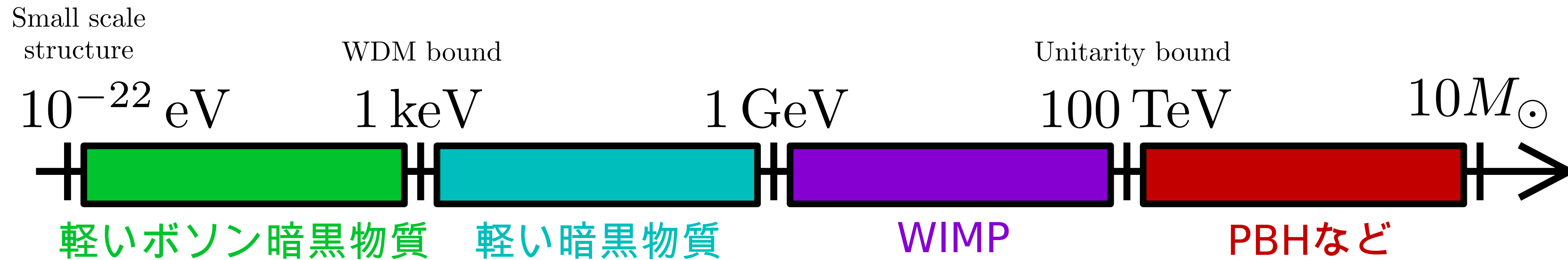


Wikipedia "Cosmic microwave background", 9 years of WMAP data

知らない

- ✓ 暗黒物質の質量
- ✓ 暗黒物質の重力以外の相互作用

様々な暗黒物質模型

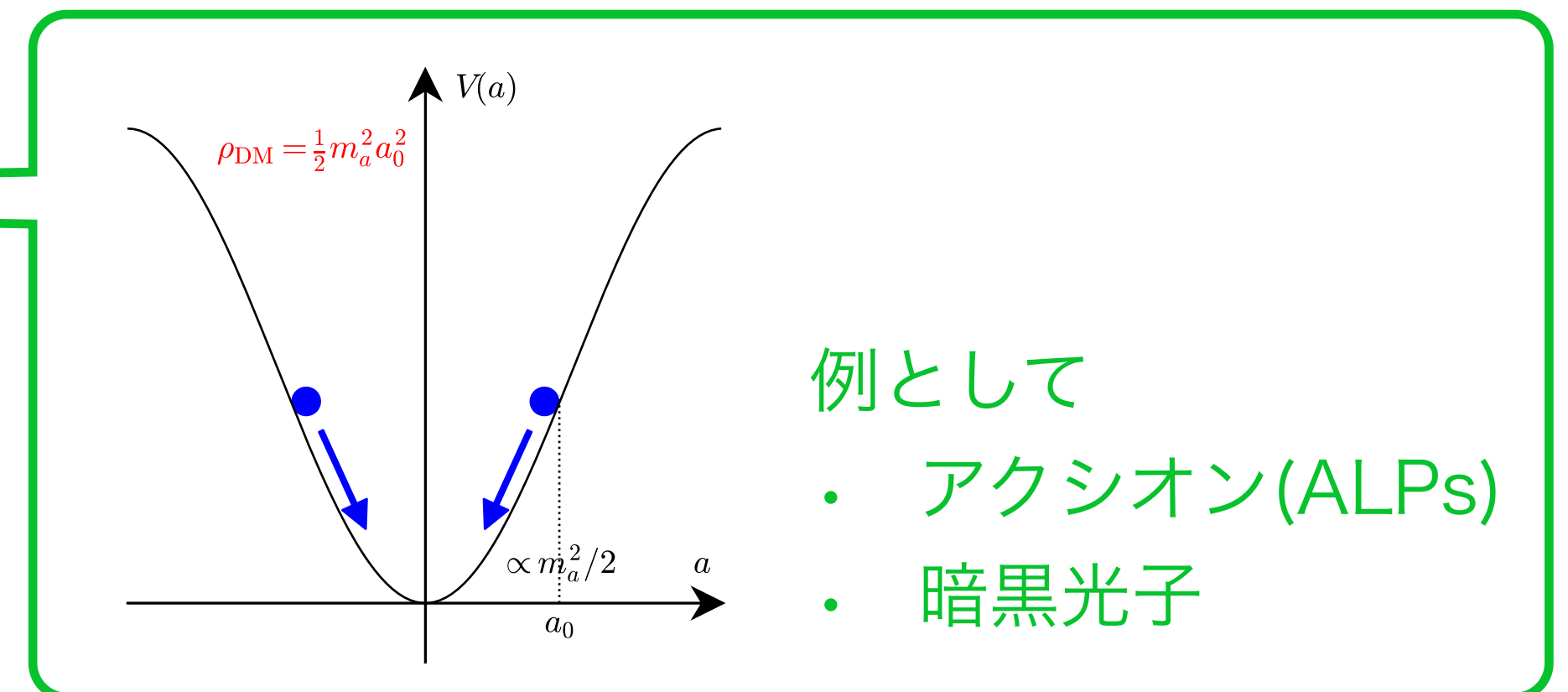


✓ WIMP miracle: $\mathcal{O}(1)$ TeV, 熱的生成により正しい残存量

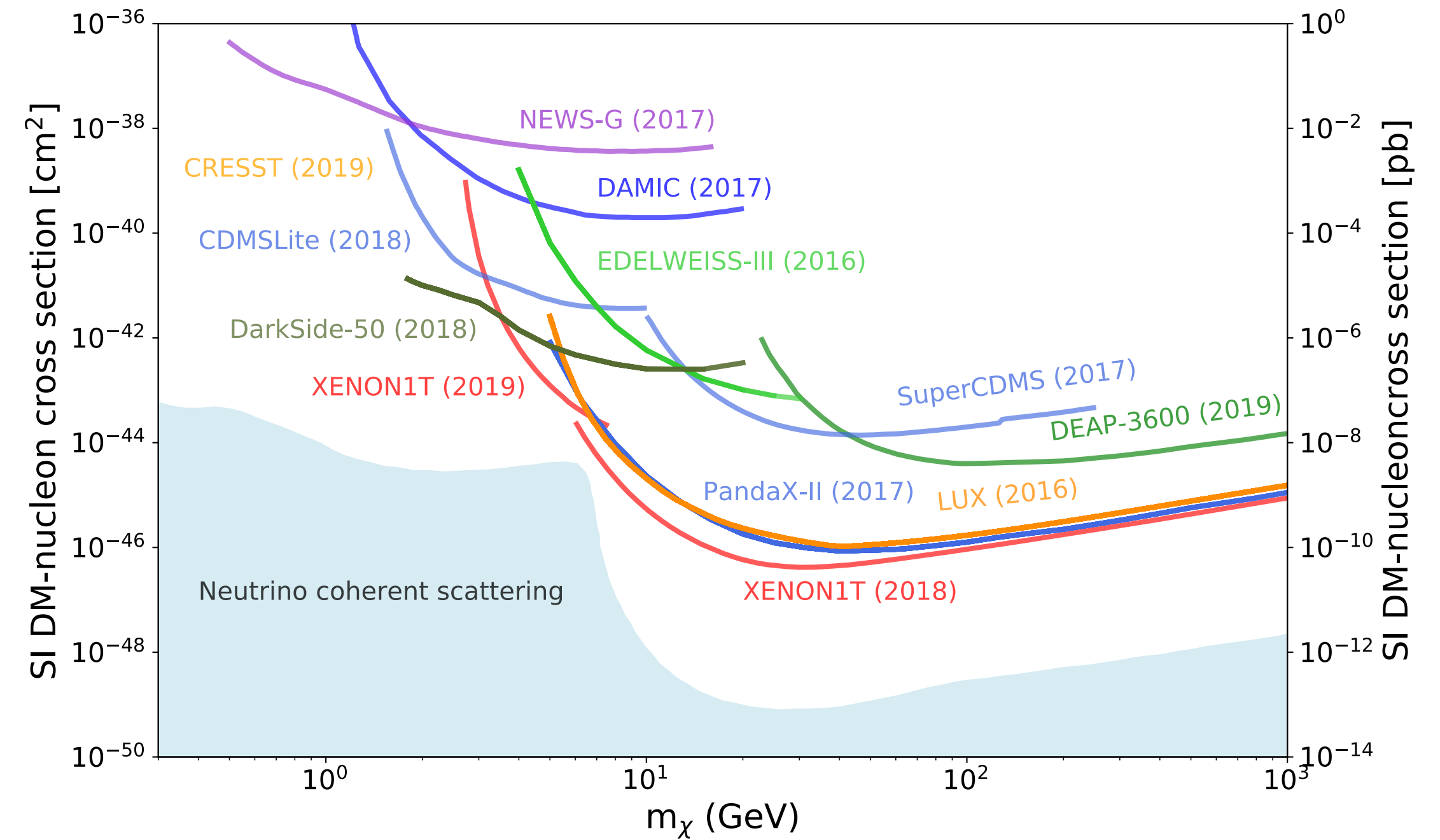
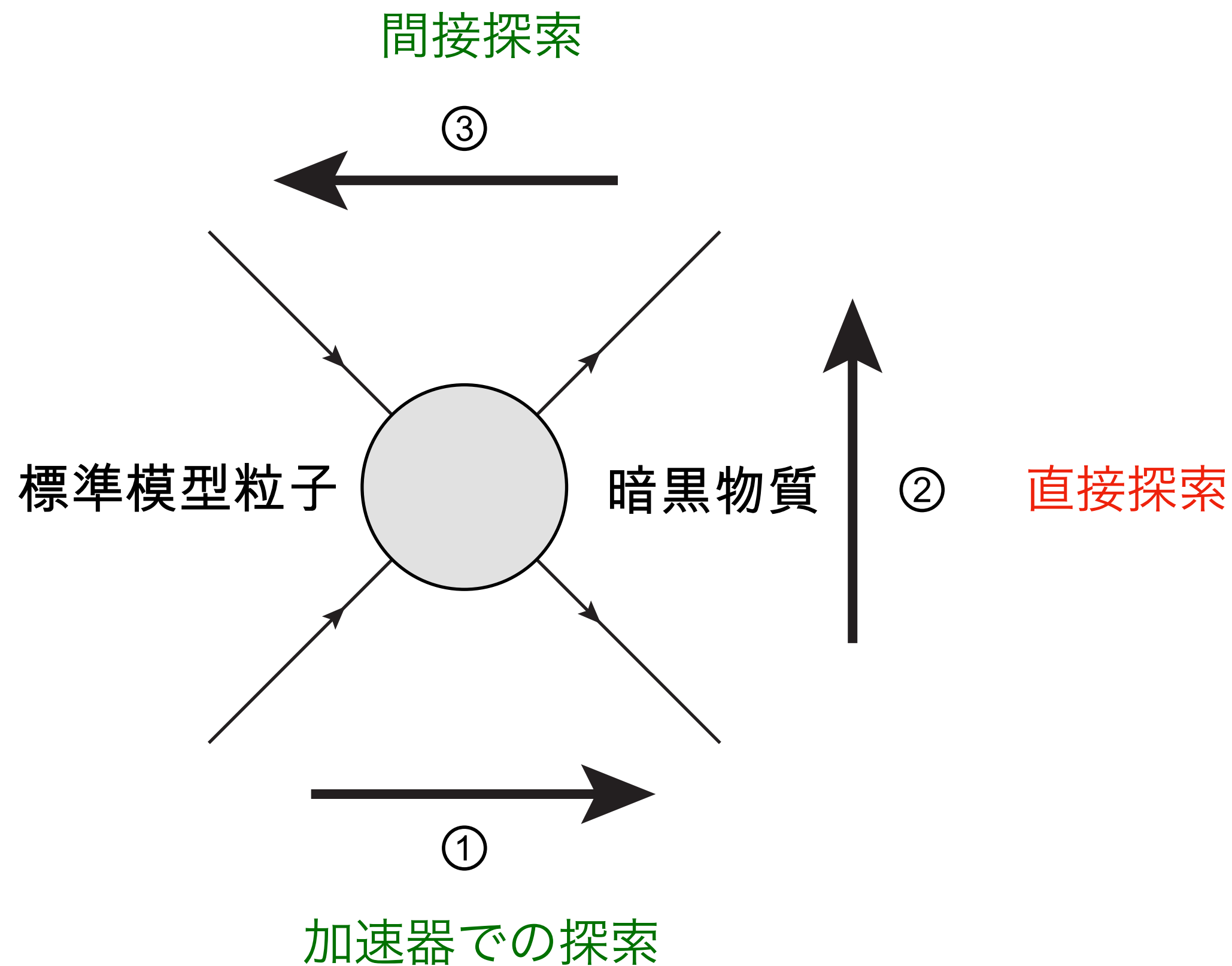
✓ 他の生成メカニズムや複合粒子などを考えると、他の質量領域でもOK

- freeze-in
- coherent oscillation

✓ 軽い暗黒物質の探し方は？



暗黒物質の直接探索



PDG (2019) 26. Dark Matter

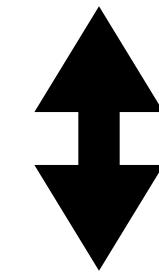
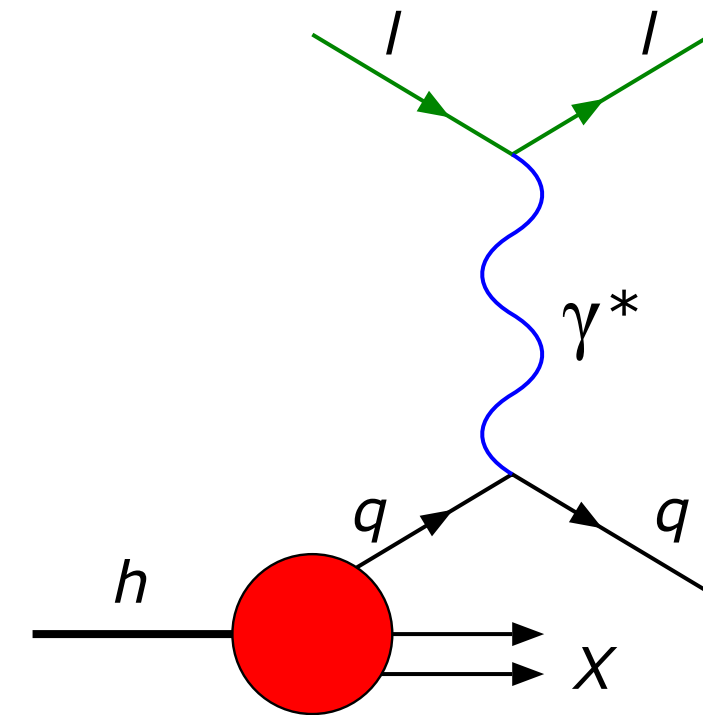
✓ より軽い領域に焦点を当てた直接探索手法を考えたい

低いエネルギースケールの面白さ

✓ 素粒子：高エネルギーに行くほど小さいスケールの面白い物理が見えてくる

- 例：Deep Inelastic Scattering

高エネルギーのレプトンをぶつければ
陽子の中のクォークが「見える」



= 多体系の

✓ 検出器：低エネルギーに行くほど大きなスケールの面白い物理が見えてくる

- 原子核の束縛エネルギー $\mathcal{O}(10)$ eV

- 電子の束縛エネルギー $\mathcal{O}(10)$ eV

- 半導体での電子の励起エネルギー（例：1.1 eV for silicon）

- 超伝導体の電子の励起エネルギー $\mathcal{O}(\text{meV})$

これらの物理を軽い暗黒物質の直接探索に応用できる！

cf. [中山さんのトーク @ PPP2020](#)

軽い暗黒物質検出のための
固体物理入門

中山和則（東京大学）

2020/9/3 @ PPP2020

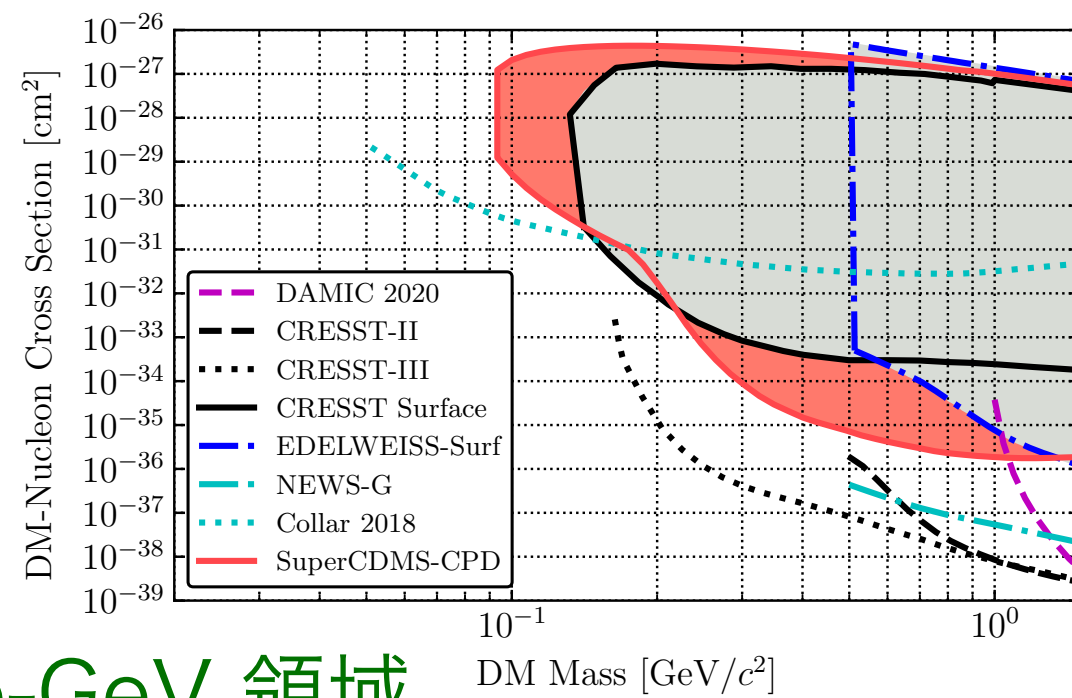
軽い暗黒物質の直接探索：概観

『自由』

物質中の

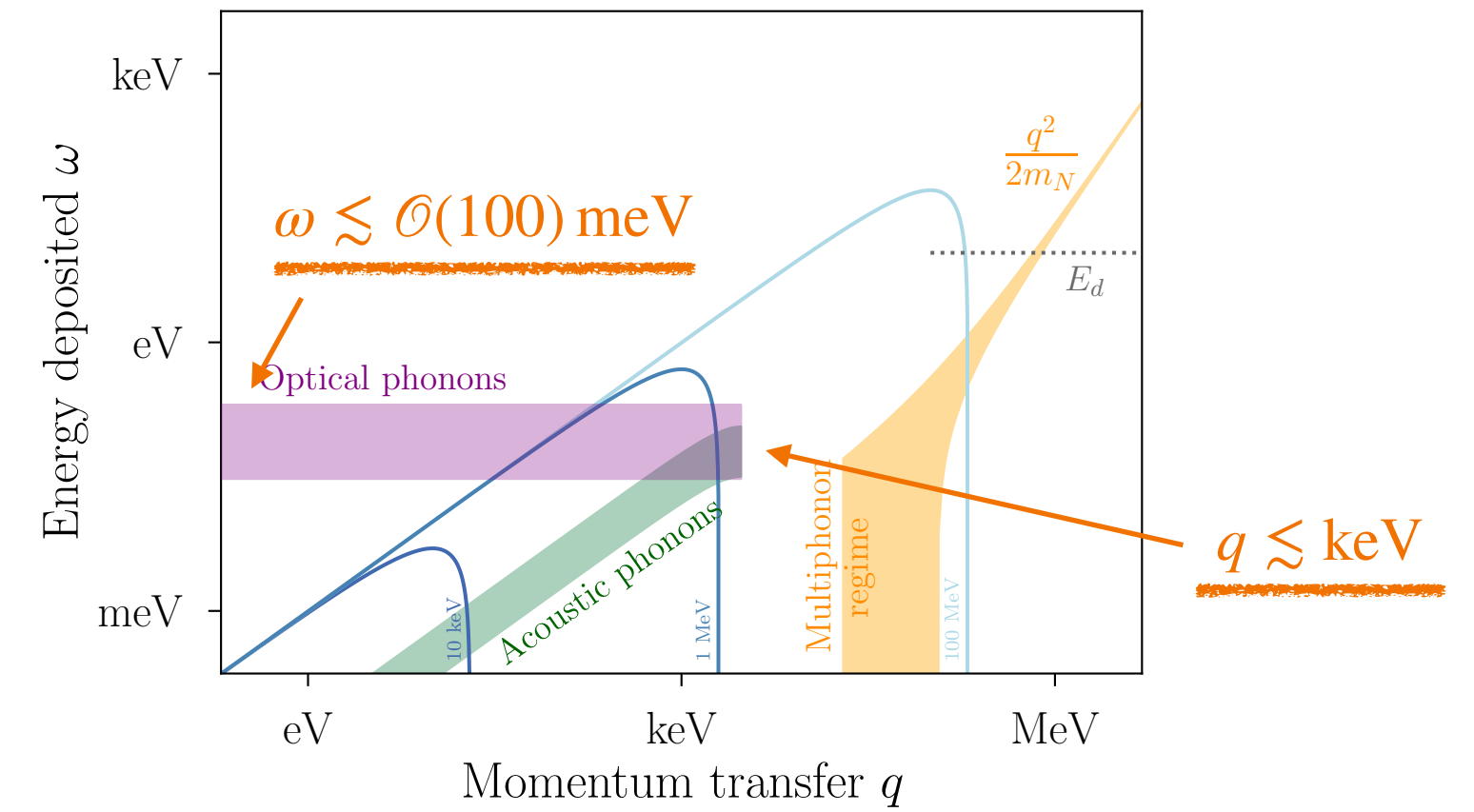
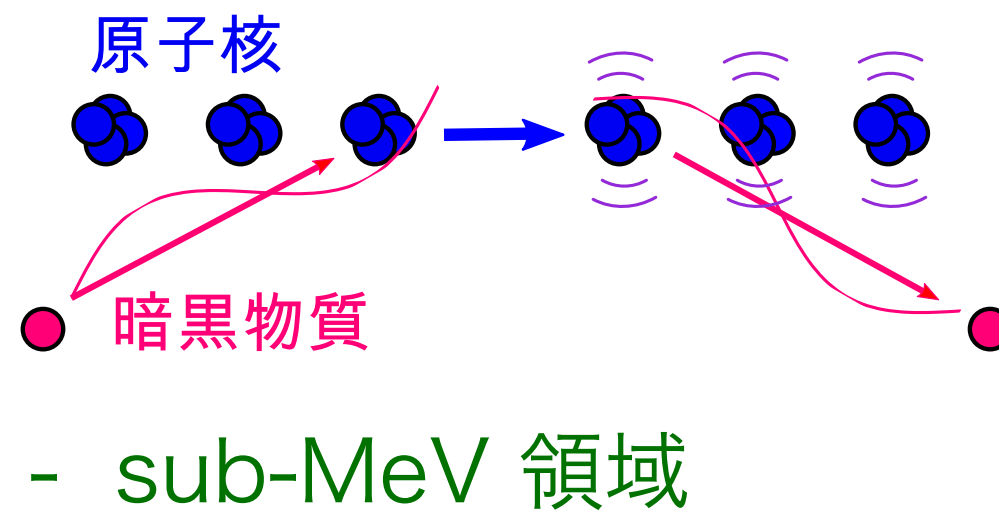
原子核

- エネルギーしきい値を下げる



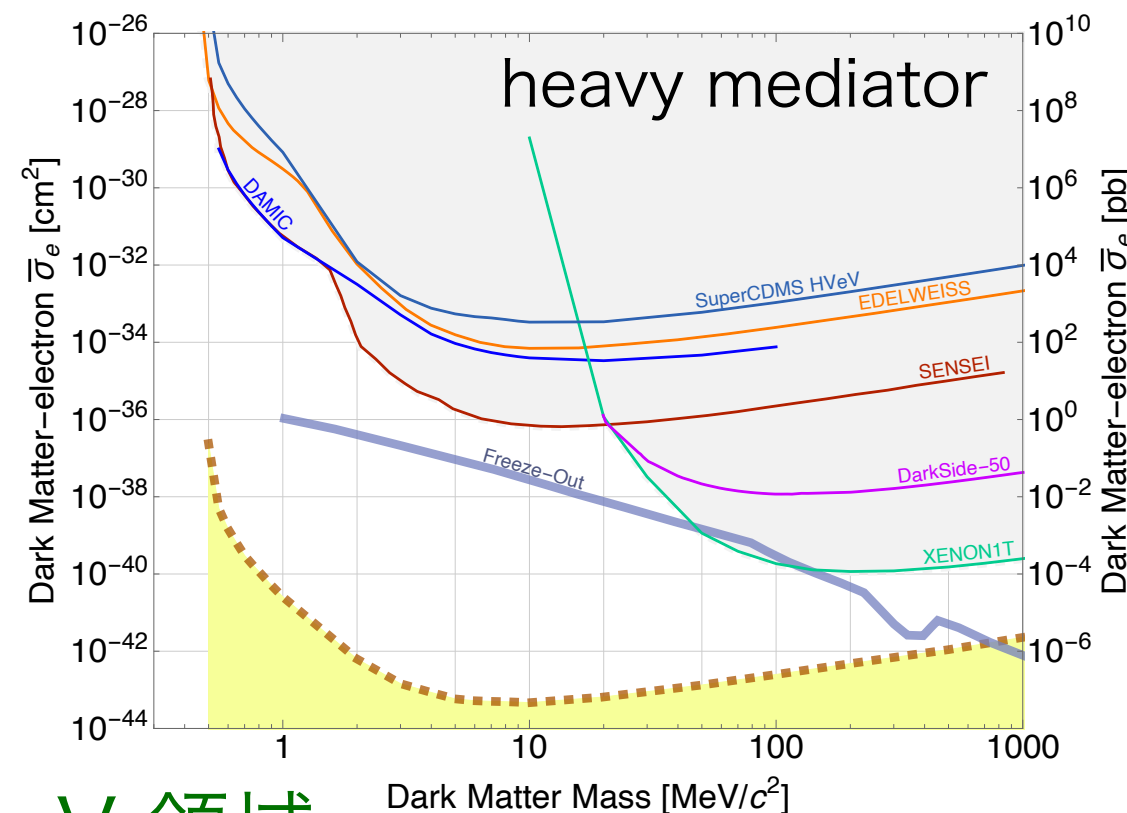
sub-GeV 領域

- フォノン (格子振動)



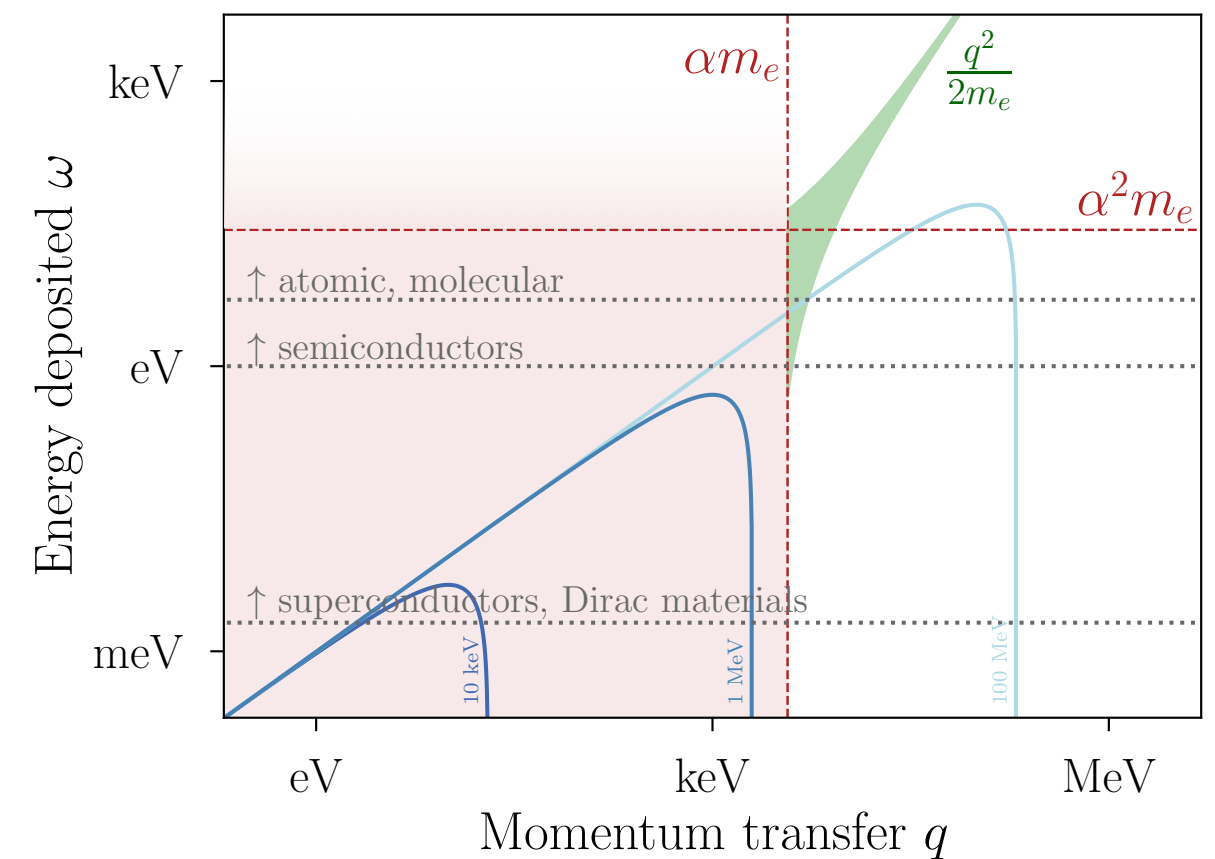
電子

- 軽いターゲット質量



~MeV 領域

- 電子の励起エネルギー
 - イオン化 $\mathcal{O}(10)$ eV
 - 半導体ギャップ $\mathcal{O}(1)$ eV
 - 超伝導体ギャップ $\mathcal{O}(\text{meV})$
- マグノン (スピン波)
 - 今日のメイン



Figures from “Searches for light dark matter using condensed matter systems” Y. Kahn, T. Lin [2108.03239]

トークの構成

✓ 軽い暗黒物質の直接探索：概観

✓ done!

✓ 電子スピンの集団励起モードを用いた手法

- 固体中の“アクシオン”モード
- マグノン（スピン波）、その他の手法との比較

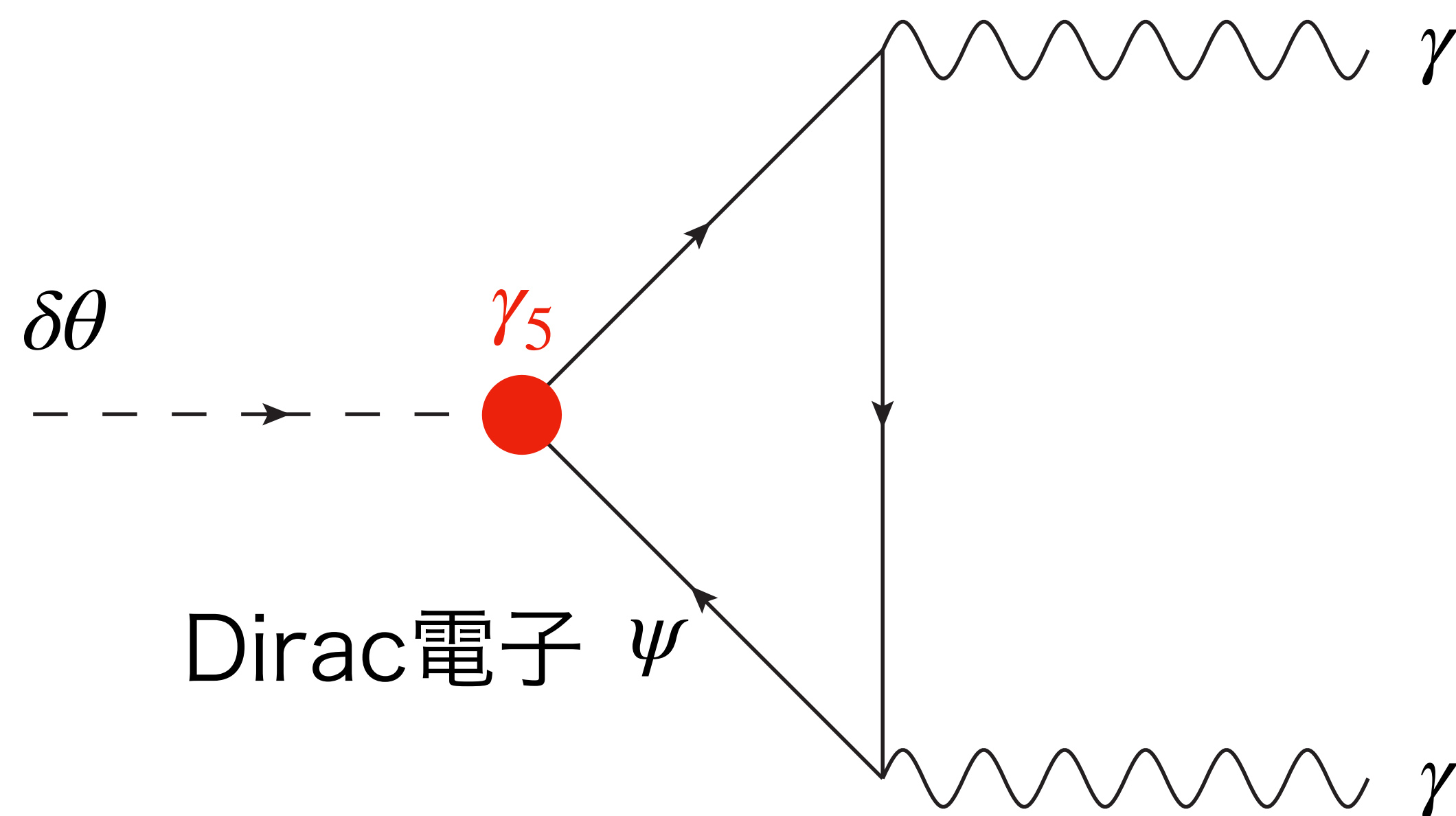
✓ 物質内の励起のより系統的な取り扱い

- スピン依存相互作用への応用
- 微妙なエネルギーでの原子核散乱への応用

✓ まとめ

固体中の「アクシオン」とは？

✓ 実態は磁性体中のスピンのゆらぎ $\delta\theta$



$$\propto \delta\theta F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}$$

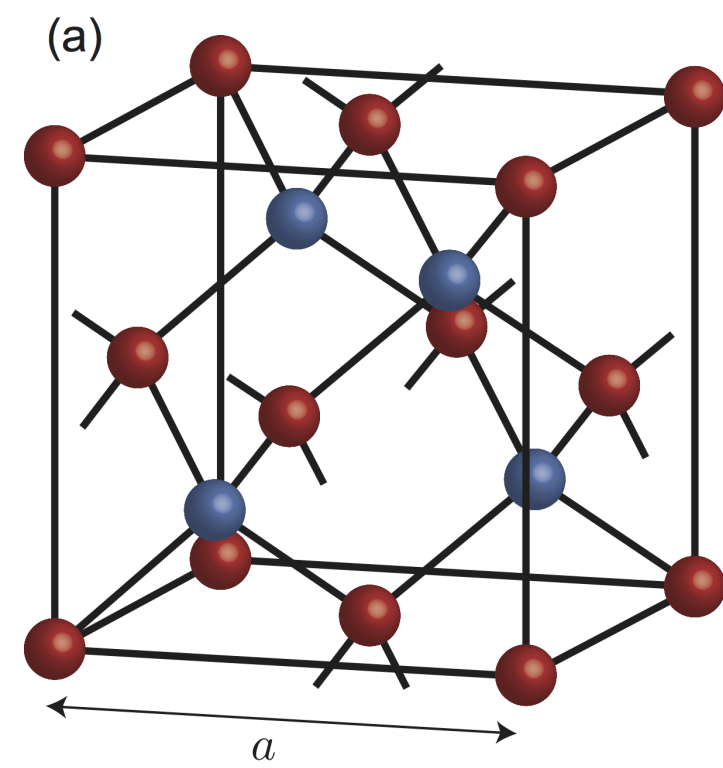
(素粒子アクシオンと類似)

R. Li, J. Wang, X. Qi, S. Zhang Nature Physics 6, 284–288 (2010)

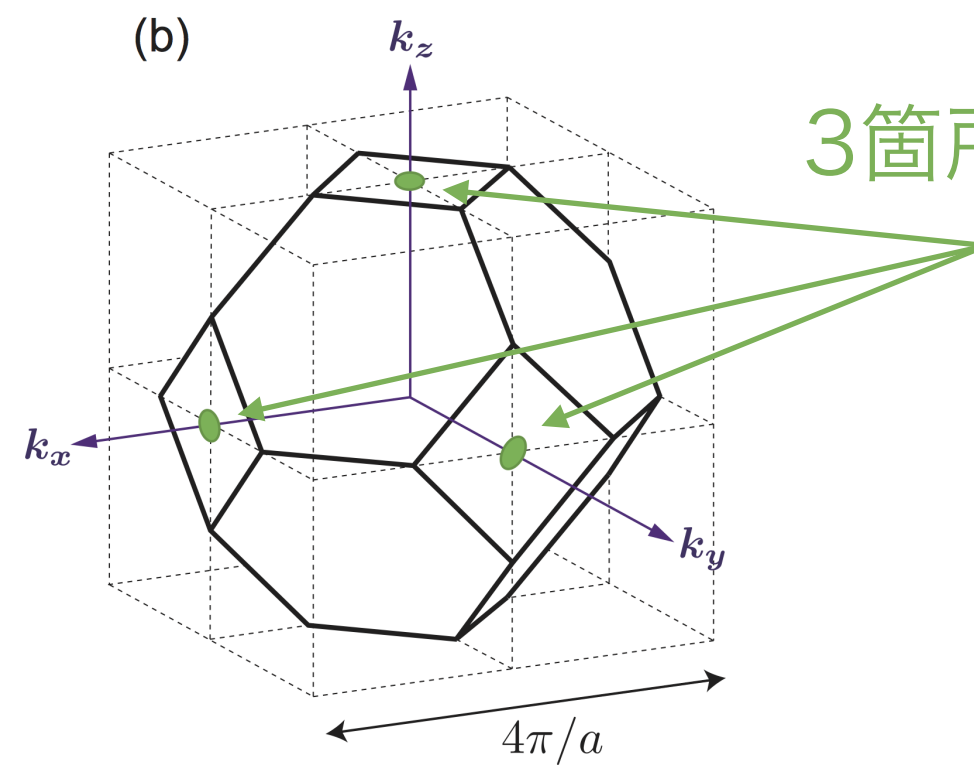
- 磁性を持ったトポロジカル絶縁体などで実現される

トポロジカル絶縁体からアキュシオン相互作用へ

✓ Fu-Kane-Mele模型 (3次元トポロジカル絶縁体の模型)



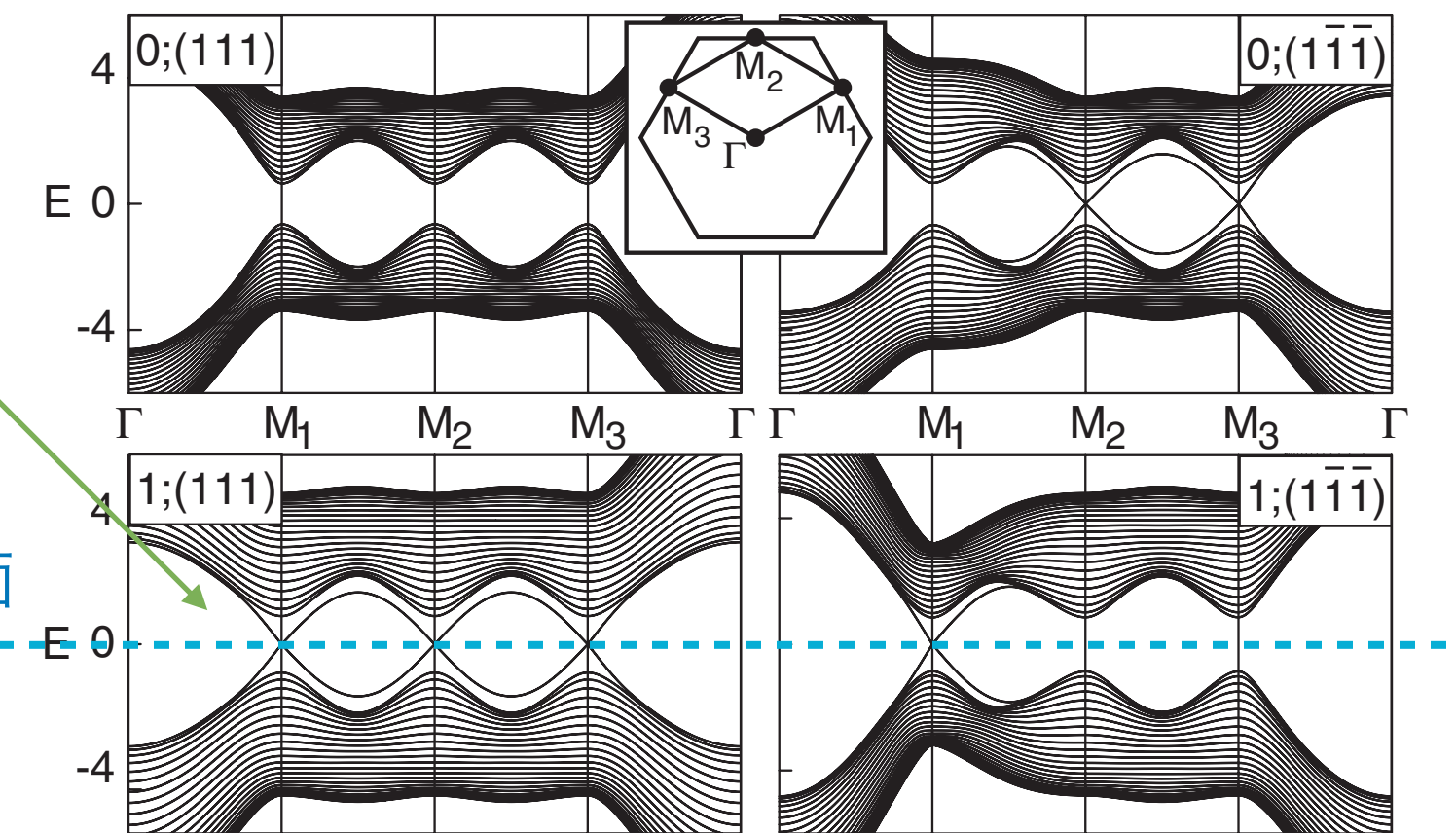
結晶構造



ブリルアン・ゾーン

3箇所のDirac点が特徴

フェルミ面



[1] A. Sekine, K. Nomura J. Phys. Soc. Jpn. 83, 104709 (2014)

L. Fu, C. L. Kane, E. J. Mele, PRL 98, 106803 (2007)

✓ 電子相関を入れる：Fu-Kane-Mele-Hubbard模型 [1]

- 同一軌道内のスピン上下の電子間に働く反発力

$$H_U = U \sum_i c_{i\uparrow}^\dagger c_{i\uparrow} c_{i\downarrow}^\dagger c_{i\downarrow} \quad (U > 0)$$



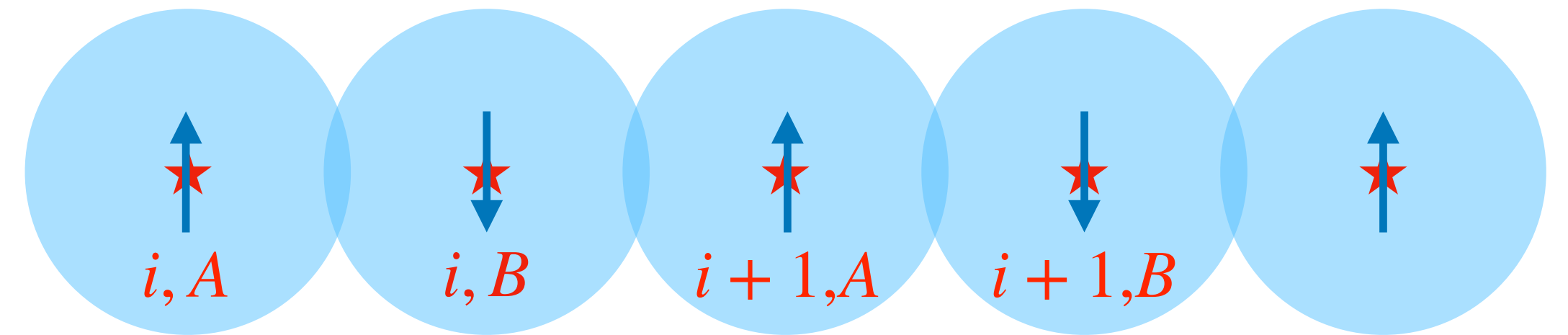
FKMH模型における電子相関の役割

✓ 反強磁性秩序をうむ

$$H = -t \sum_{\langle i,j \rangle} \sum_{\sigma} c_{i\sigma}^{\dagger} c_{j\sigma} + U \sum_i n_{i\uparrow} n_{i\downarrow}$$

$$\rightarrow H_{\text{eff}} = \frac{t^2}{U} \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$$

$$\langle \vec{S}_{i,A} \rangle = - \langle \vec{S}_{i,B} \rangle \equiv \vec{m}$$



✓ 電子スピンと電子の相互作用を記述する

$$H_U \simeq U \sum_i \left(\underbrace{\langle n_{i\uparrow} \rangle}_{1/2 + \langle S_i^z \rangle} n_{i\downarrow} + \underbrace{\langle n_{i\downarrow} \rangle}_{1/2 - \langle S_i^z \rangle} n_{i\uparrow} - \langle n_{i\uparrow} \rangle \langle n_{i\downarrow} \rangle \right. \\ \left. - \underbrace{\langle c_{i\uparrow}^{\dagger} c_{i\downarrow} \rangle}_{\langle S_i^x + iS_i^y \rangle} c_{i\downarrow}^{\dagger} c_{i\uparrow} - \underbrace{\langle c_{i\downarrow}^{\dagger} c_{i\uparrow} \rangle}_{\langle S_i^x - iS_i^y \rangle} c_{i\uparrow}^{\dagger} c_{i\downarrow} + \langle c_{i\uparrow}^{\dagger} c_{i\downarrow} \rangle \langle c_{i\downarrow}^{\dagger} c_{i\uparrow} \rangle \right)$$

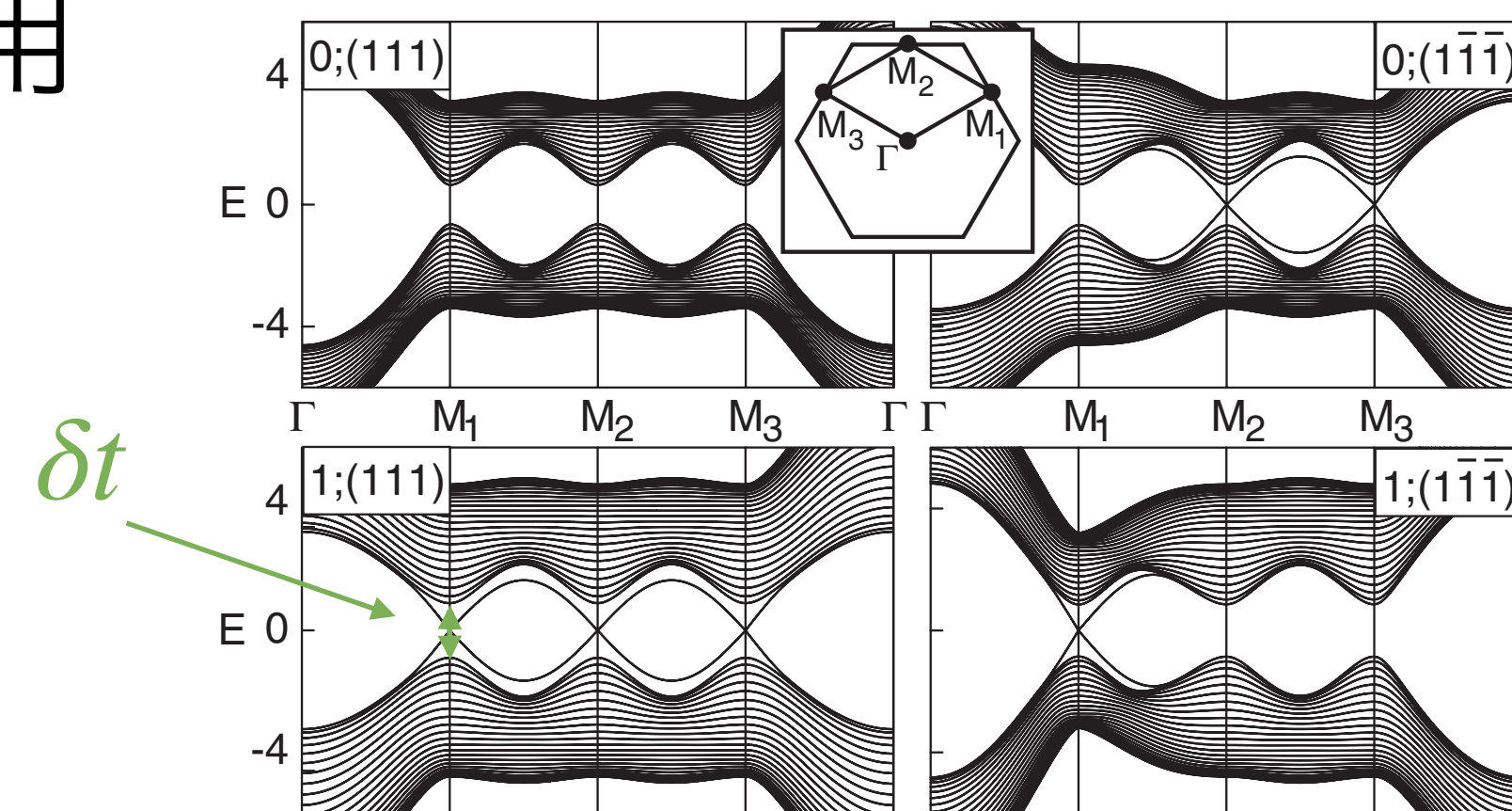
- 電子スピン $\vec{m} \times$ 電子2つ

カイラルアノマリーからのアクシオン項の導出

✓ 相対論的な分散関係を持つDirac電子の有効作用

$$S = \int d^4x \sum_{r=1,2,3} \bar{\psi}_r \left[i\gamma^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu) - \delta t - \underline{i\gamma_5 U m_r} \right] \psi_r$$

✦ $\psi_r \sim (c_{A\uparrow}, c_{A\downarrow}, c_{B\uparrow}, c_{B\downarrow})$

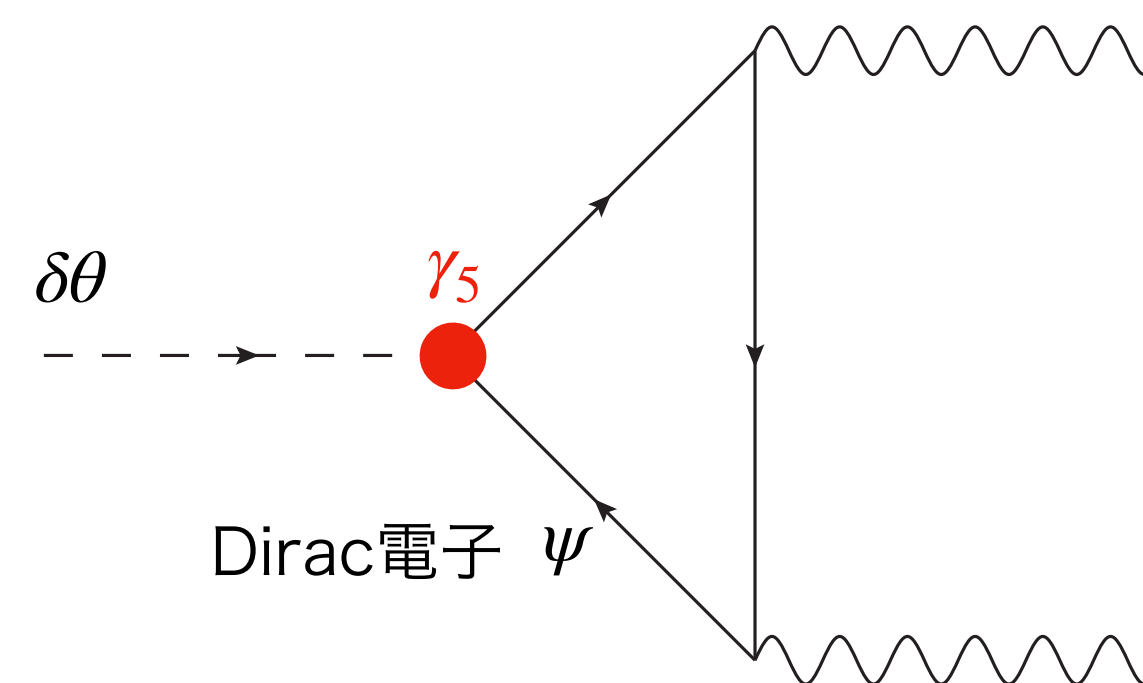


A. Sekine, K. Nomura J. Phys. Soc. Jpn. 83, 104709 (2014)

✓ Fujikawa method でDirac電子を積分

$$S_\theta \sim \frac{\alpha_e}{4\pi} \int d^4x \theta F_{\mu\nu} \widetilde{F}^{\mu\nu} \quad \theta \equiv \sum_r \theta_r = \sum_r \tan^{-1} \left(\frac{U m_r}{\delta t} \right) \quad \text{with } U/\delta t \sim \mathcal{O}(1)$$

- 電子スピン $\vec{m} \times$ 電磁場



スピンのゆらぎの量子化=マグノン

✓ スピンのゆらぎ=スピン波

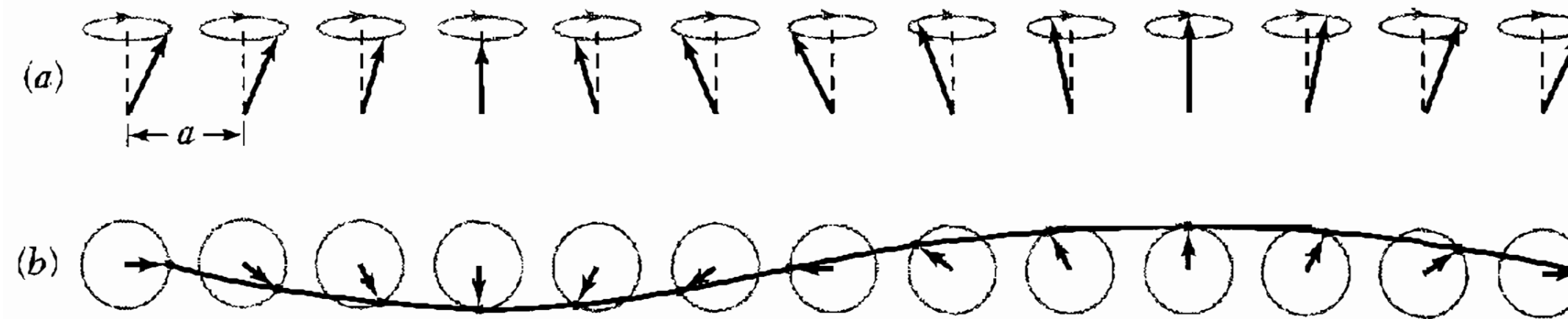


Figure 9 A spin wave on a line of spins. (a) The spins viewed in perspective. (b) Spins viewed from above, showing one wavelength. The wave is drawn through the ends of the spin vectors.

C. Kittel "Introduction to Solid State Physics [8th ed]"

✓ 反強磁性体のHolstein-Primakoff変換

$$S_{\ell}^{+} = \sqrt{2s - a_{\ell}^{\dagger} a_{\ell}} a_{\ell}$$

$$S_{\ell'}^{+} = b_{\ell'}^{\dagger} \sqrt{2s - b_{\ell'}^{\dagger} b_{\ell'}}$$

$$S_{\ell}^{-} = a_{\ell}^{\dagger} \sqrt{2s - a_{\ell}^{\dagger} a_{\ell}}$$

$$S_{\ell'}^{-} = \sqrt{2s - b_{\ell'}^{\dagger} b_{\ell'}} b_{\ell'}$$

$$S_{\ell}^{z} = s - a_{\ell}^{\dagger} a_{\ell}$$

$$S_{\ell'}^{z} = -s + b_{\ell'}^{\dagger} b_{\ell'}$$

副格子A

副格子B

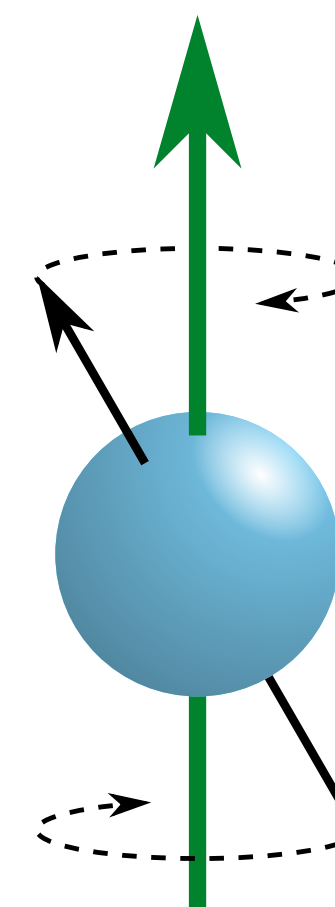
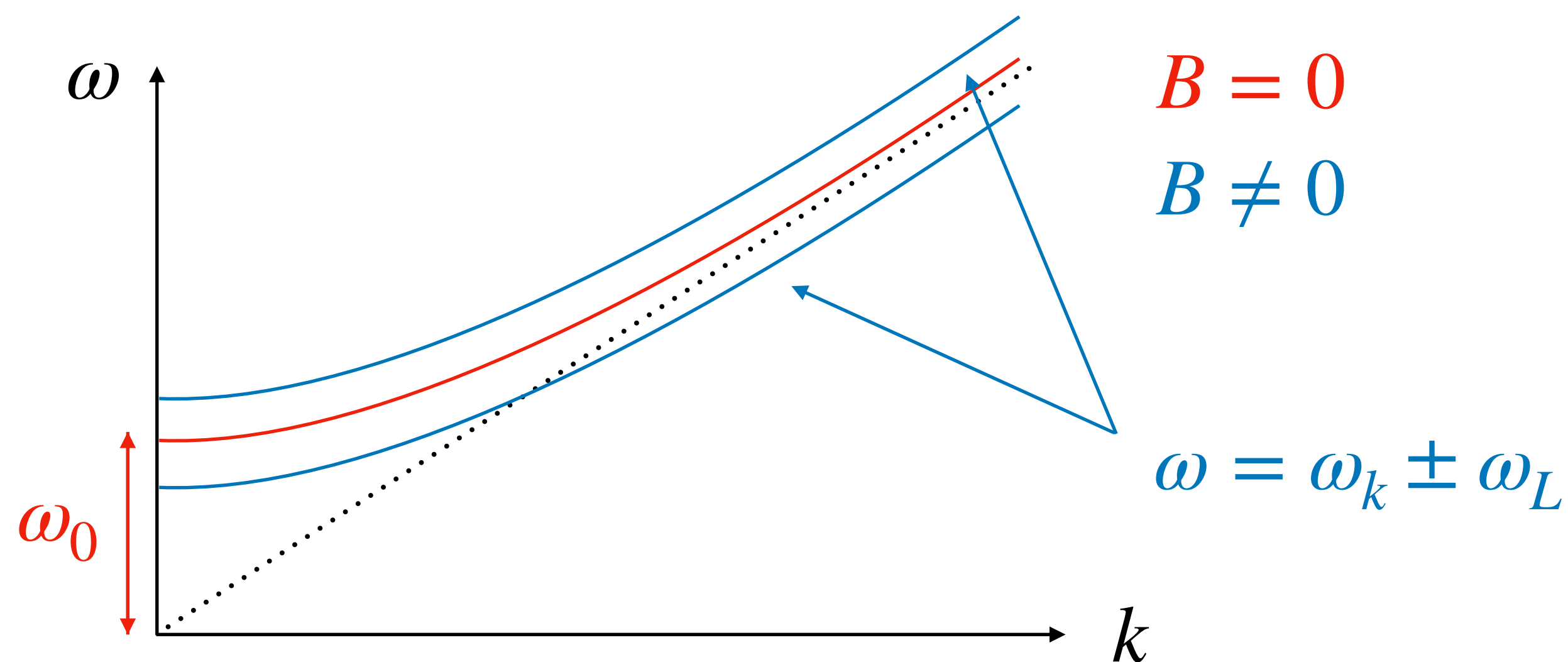
ポイントはボソンの演算子（マグノン）とスピンの演算子を結びつけること

$$[a_{\ell}, a_{m}^{\dagger}] = \delta_{\ell m} \Rightarrow [S_{\ell}^i, S_{m}^j] = i\epsilon^{ijk} S_{\ell}^k \delta_{\ell m}$$

$$[b_{\ell'}, b_{m'}^{\dagger}] = \delta_{\ell' m'} \Rightarrow [S_{\ell'}^i, S_{m'}^j] = i\epsilon^{ijk} S_{\ell'}^k \delta_{\ell' m'}$$

反強磁性体マグノンの性質

✓ 2種類の生成消滅演算子 a, b に対応して、マグノンも2種類



Wikipedia "Larmor Precession"

✓ マグノン励起状態は全体でスピン $\pm 1/2$

- 外部磁場の影響でLarmor周波数 $\omega_L = g\mu_B B_0$ の質量変化

✓ 空間回転対称性の自発的破れ $SO(3) \rightarrow SO(2)$ に対応する (Type I) NGボソン

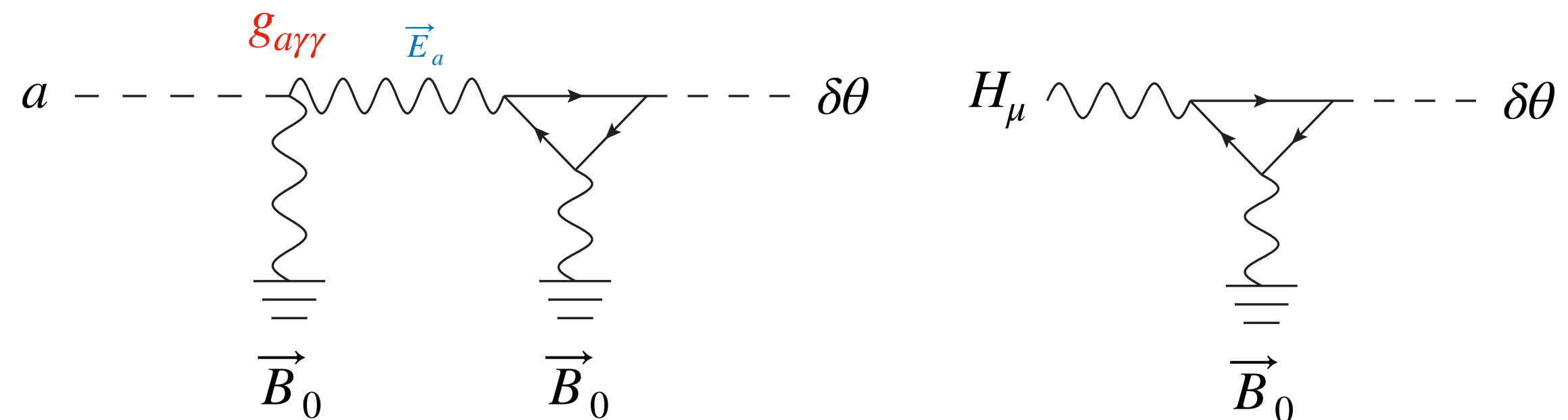
- ギャップの大きさ ω_0 は物質の非等方性の大きさに対応

アクシオン/暗黒光子を「アクシオン」で探す

✓ 暗黒物質のコヒーレントな振動は実効的に振動電場 $\vec{E}(t, \vec{x})$ として働く

$$H_{\text{int}} = \frac{\alpha_e}{\pi} \delta\theta \vec{E} \cdot \vec{B}_0 \text{ W/}$$

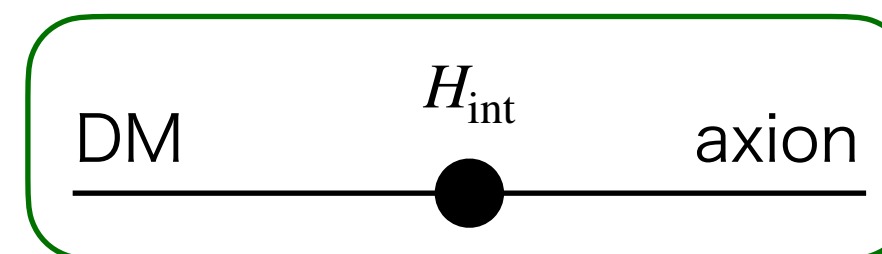
$$\vec{E}(t, \vec{x}) = \begin{cases} -\frac{1}{\epsilon} g_{a\gamma\gamma} a(t, \vec{x}) \vec{B}_0 & (\text{axion}) \\ -\epsilon_H \partial_t \vec{H}(t, \vec{x}) & (\text{dark photon}) \end{cases}$$



$\delta\theta = D^* \alpha^\dagger - D \beta^\dagger + \text{h.c.}$ (「アクシオン」はマグノンの重ね合わせ)

✓ 性質

- 暗黒物質がアクシオンに変換される
- 暗黒物質の運動量は十分小さいので $\vec{k} = 0$ モードを励起
- $m_{\text{DM}} \simeq \omega_0 \pm \omega_L$ のとき共鳴変換により反応率向上

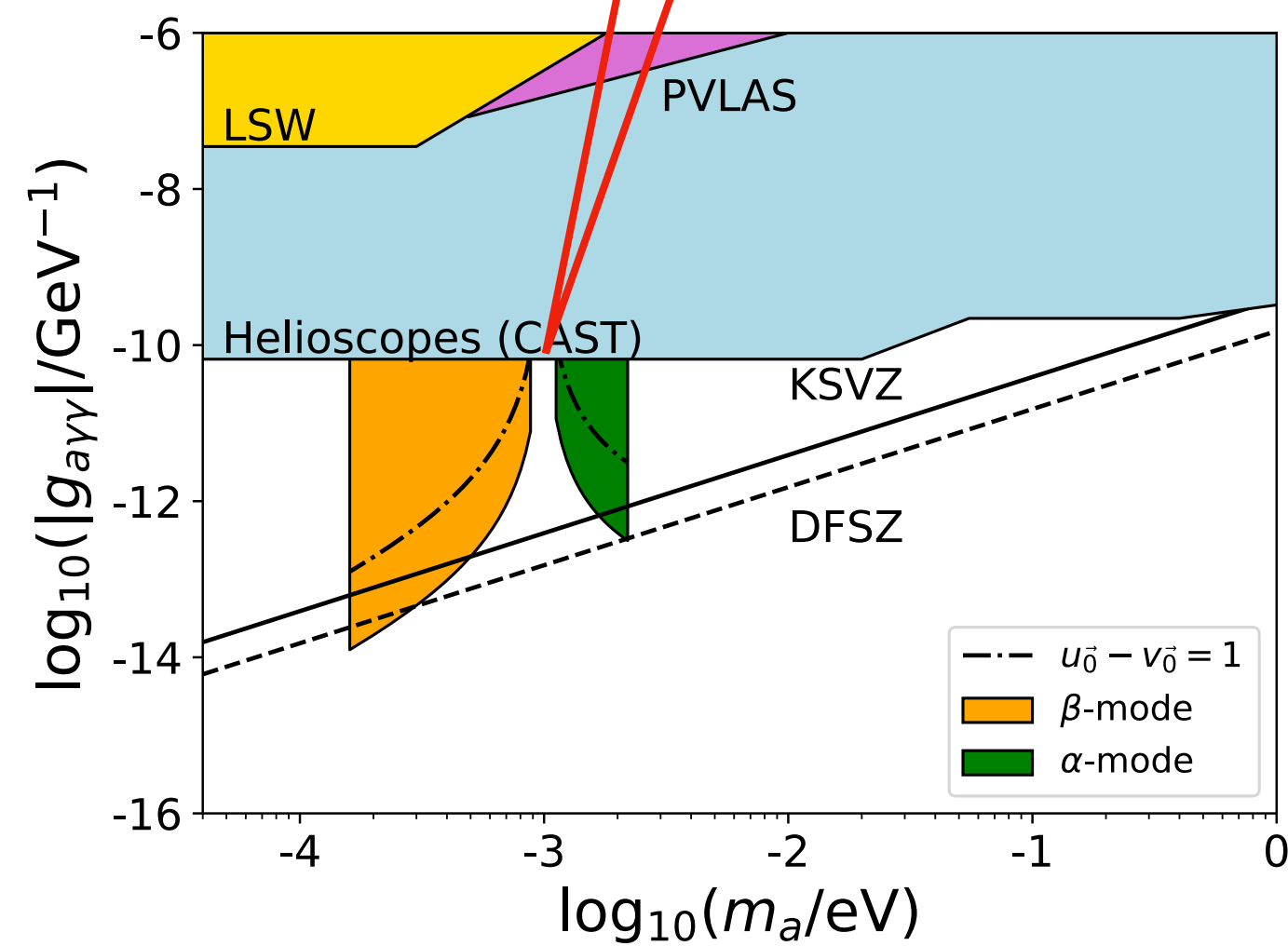


➔ 外部磁場 B_0 をスキャンして ω_L を調整し、広い範囲の m_{DM} を探索

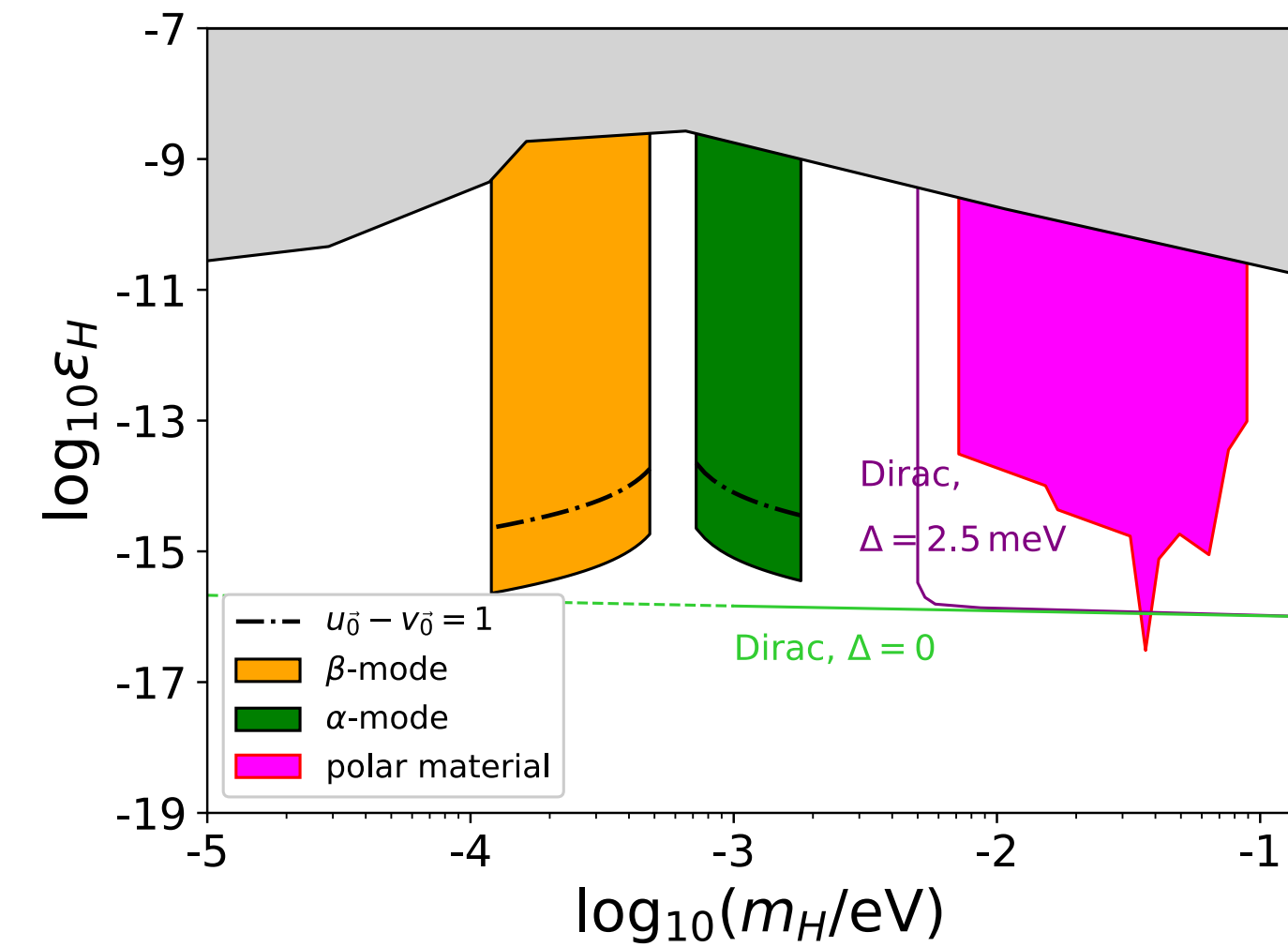
アクシオン/暗黒光子を「アクシオン」で探す

✓ ターゲット物質のパラメータは妥当な値を仮定

- $\omega_0 = 1 \text{ meV}$, $V = (10 \text{ cm})^3$, $T_{\text{total}} = 1 \text{ yr}$
- $B_0 = 1 \text{ T} \sim 10 \text{ T}$ をスキャン、各磁場の値で $T_{\text{obs}} = 10^{3-4} \text{ s}$ の観測時間
- それぞれの磁場の値 B_0 につき 2つの共鳴点がある



S. Chigusa, T. Moroi, K. Nakayama [2102.06179]



- TOORAD experiment proposal (ちょっと違う模型)
- アクシオンの質量項について (理論)

D. J. E. Marsh+ '19, J. Schütte-Engel+ '21
K. Ishiwata '21

ターゲット励起モードの比較

アクシオン / 暗黒格子 DM の場合

	ν_χ suppression ナシ アクシオン	方向感度アリ マグノン	フォノン (格子振動) phonon-polariton	電子散乱
エネルギー移行	$\sim \mathcal{O}(100)$ meV 等? 物質の非等方性に依る 磁場で調整可	$\sim \mathcal{O}(100)$ meV 物質の非等方性に依る 磁場で調整可	$\sim \mathcal{O}(100)$ meV	meV ~
ターゲットとなる結合	$\chi - \gamma$ $\chi - e$	$\chi - e$ ($\chi - n$ は弱い)	$\chi - \gamma$ $\chi - n$	$\chi - e$
ターゲット物質	反強磁性トポロジカル 絶縁体、等 $(\text{Bi}_{1-x}\text{Fe}_x)_2\text{Se}_3, \text{Mn}_2\text{Bi}_2\text{Te}_5$	磁性体 YIG, NiPS ₃	Polar Material $\text{Al}_2\text{O}_3, \text{GaAs}$ 超流動ヘリウム、等	半導体 超伝導体 Dirac物質
参考文献の例	D. Marsh+ [1807.08810] J. Schütte-Engel+ [2102.05366] S. Chigusa+ [2102.07910] K. Ishiwata [2103.02848]	R. Barbieri+ [1606.02201] S. Chigusa+ [2001.10666] A. Mitridate+ [2005.10256]	S. Knapen+ [1712.06598] A. Mitridate+ [2005.10256] K. Schutz+ [1604.08206]	Y. Hochberg+ [1608.01994] Y. Hochberg+ [1604.06800] Y. Hochberg+ [1708.08929]

トークの構成

✓ 軽い暗黒物質の直接探索：概観

✓ done!

✓ 電子スピンの集団励起モードを用いた手法

- マグノン（スピン波）
- 固体中の“アクシオン”モード

✓ done!

✓ 物質内の励起のより系統的な取り扱い

- スピン依存相互作用への応用
- 微妙なエネルギーでの原子核散乱への応用

✓ まとめ

より系統的な取り扱い

✓ 電子-ホール対、フォノン、マグノン、プラズモン、マクソン、ロトン、……



わけわからん！ もっと系統的な取り扱いは？

✓ (粒子 f の密度 n_f の) 動的構造因子

$$S_f(\omega, \mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi} \int dt d^3x \langle n_f(t, \mathbf{x}) n_f(0, \mathbf{0}) \rangle e^{-i(\omega t - \mathbf{q} \cdot \mathbf{x})}$$

✓ メリット

- 物質内の電子励起や電子密度の集団励起を系統的に扱える
- 複雑な物質でも可
- 密度汎関数法 (DFT) を用いた第一原理計算手法が確立している
- 物性実験の結果からの読み取りが容易

動的構造因子 (Dynamic structure factor)

✓ 線形応答理論を用いて以下の揺動散逸関係式が得られる

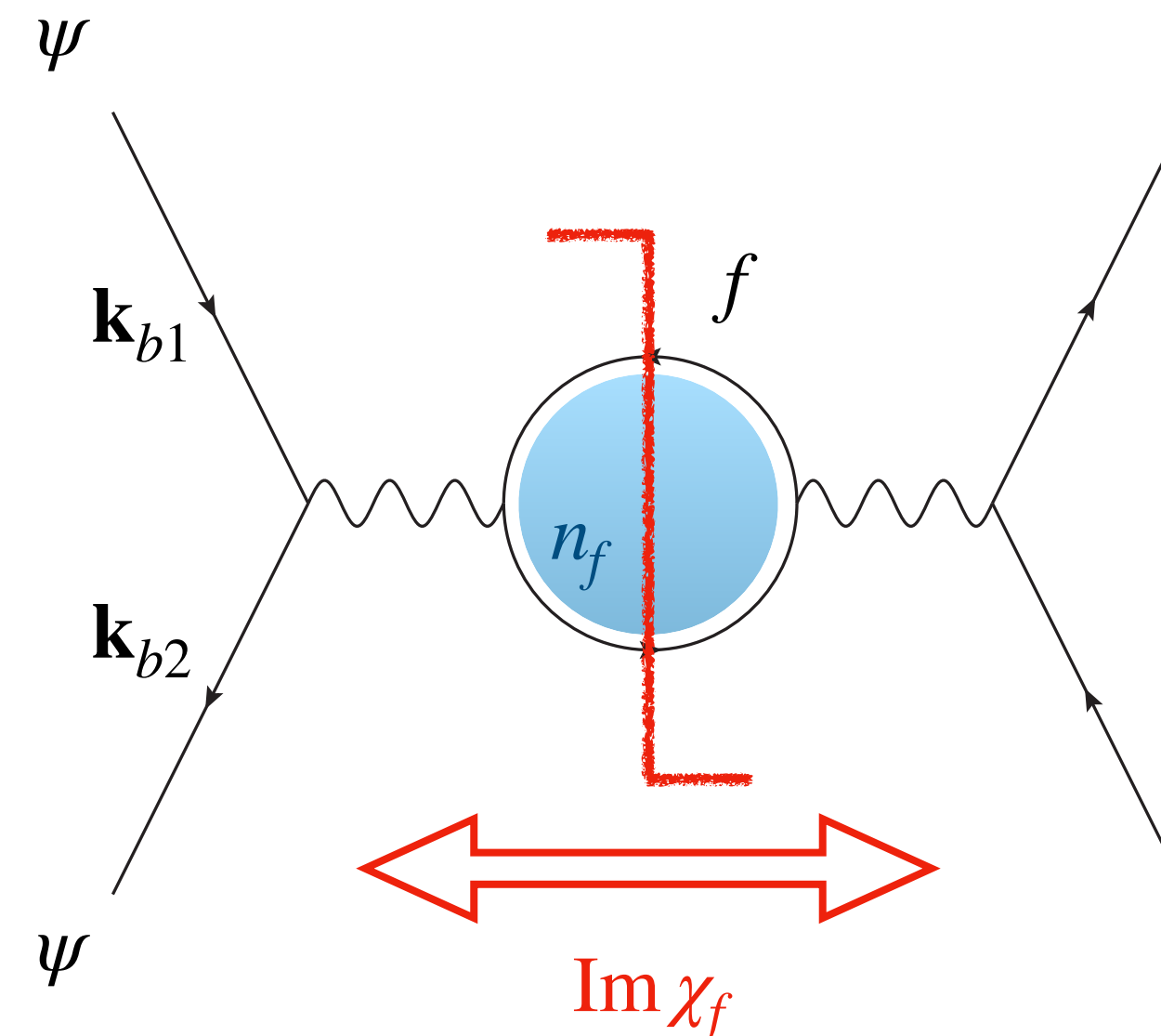
$$S_f(\omega, \mathbf{q}) = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega}} \text{Im} \chi_f(\omega, \mathbf{q}) \quad \text{w/} \quad \frac{1}{\epsilon_f(\omega, \mathbf{q})} = 1 + \frac{4\pi e^2}{\mathbf{q}^2} \chi_f(\omega, \mathbf{q})$$

↑
↑
 χ_e : 電気感受率
誘電率: $\mathbf{P} = \epsilon_e \mathbf{E}$

✓ ボルン近似の範囲で (スピン非依存の) 散乱断面積が次のように書ける

$$\frac{d\sigma}{d\omega d\Omega} = \underbrace{F_\psi(\{\mathbf{k}_b\})}_{\text{入射ビームの情報}} \underbrace{S_f(\omega, \mathbf{q})}_{\text{検出器の応答}} \propto \text{Im} \chi_f(\omega, \mathbf{q})$$

- ψ = 電子、X線、暗黒物質、等
- f = 物質内の原子核、電子



暗黒物質の直接探索への応用例

✓ 超流動 ^4He を用いた直接探索 [Schutz, Zurek \[1604.08206\]](#) & [Knapen, Lin, Zurek \[1611.06228\]](#)

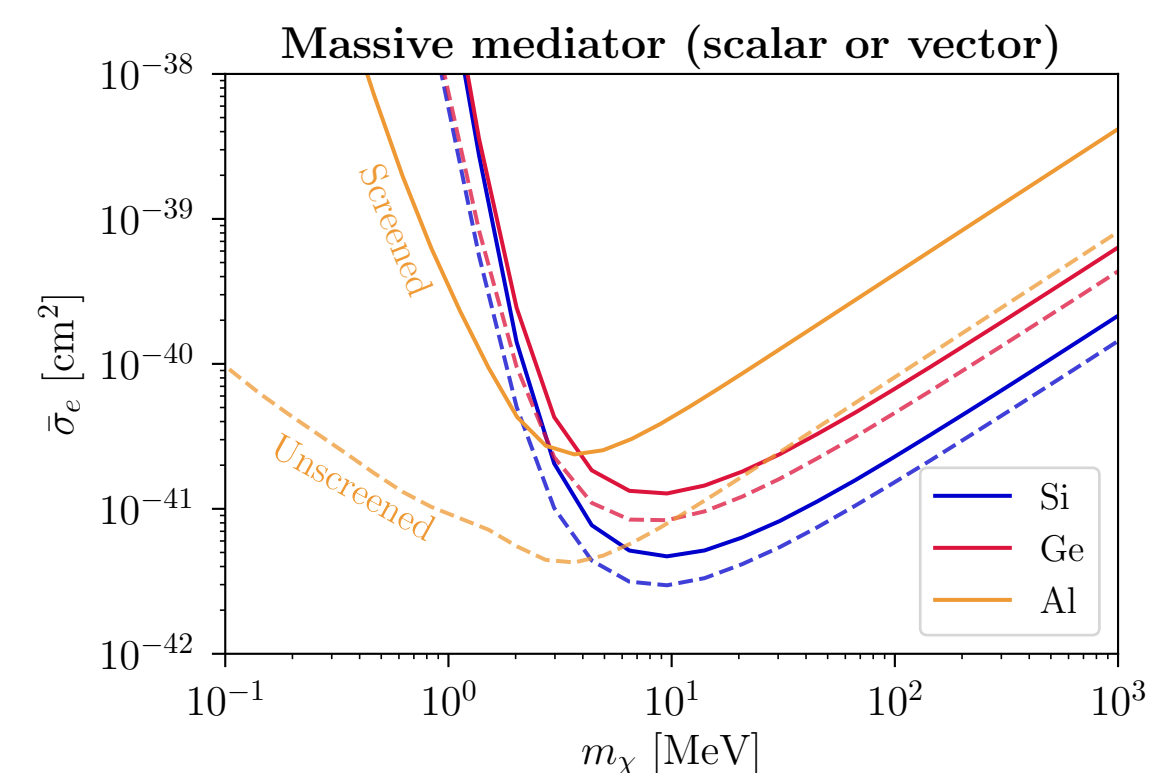
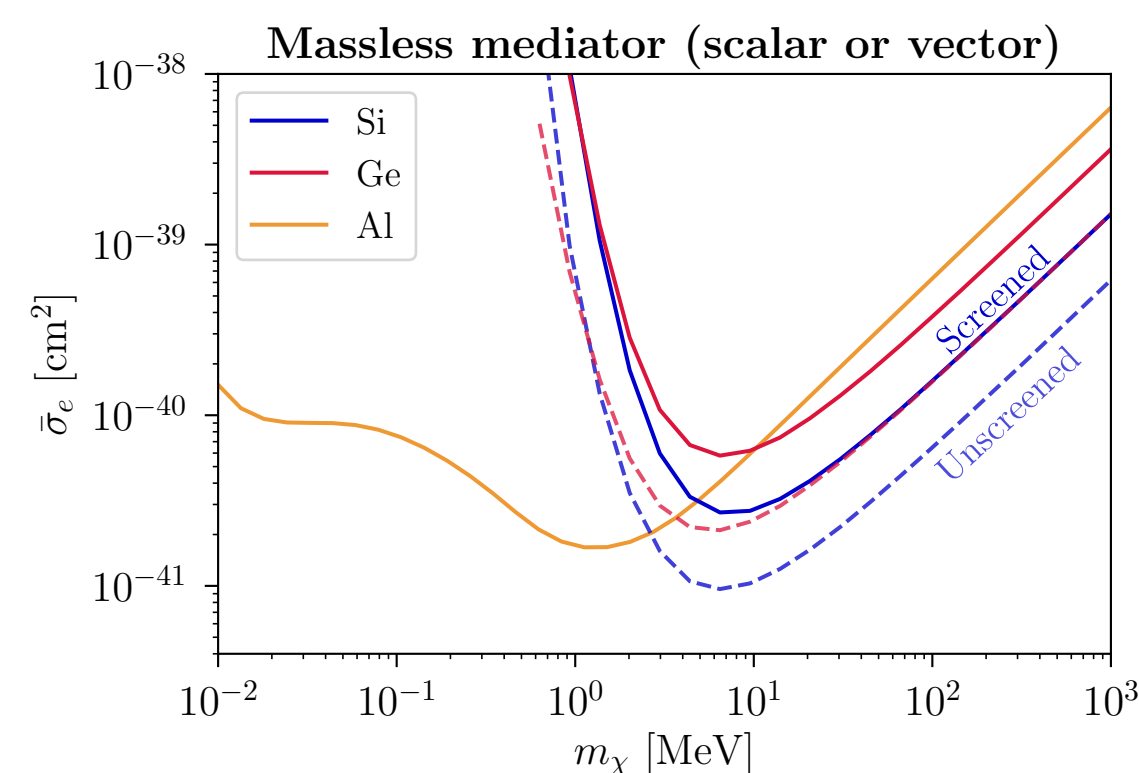
- 数値シミュレーション & 中性子散乱のデータ → 暗黒物質由来の複数フォノン励起

✓ 極性を持った物質を用いた直接探索 [Knapen, Lin, Pyle, Zurek \[1712.06598\]](#)

- $T=0$ での計算結果 & 光子吸収のデータ → 暗黒光子由来のフォノン励起、など

✓ 半導体内の電子との散乱を用いた直接探索 [Knapen, Kozaczuk, Lin \[2101.08275\]](#)

- 第一原理計算 (DFT) → スクリーニング、プラズモンの効果 [Hochberg, Kahn, Kurinsky, Lehmann, Yu, Berggren \[2101.08263\]](#)



✓ 半導体内のミグダル効果 [Knapen, Kozaczuk, Lin \[2011.09496\]](#) 等

1. 電子スピンとの相互作用への応用

✓ 電子スピンの動的構造因子

$$S_e^{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi} \int dt d^3x \langle S_e^\alpha(t, \mathbf{x}) S_e^\beta(0, \mathbf{0}) \rangle e^{-i(\omega t - \mathbf{q} \cdot \mathbf{x})}$$

✓ この場合の揺動散逸関係式

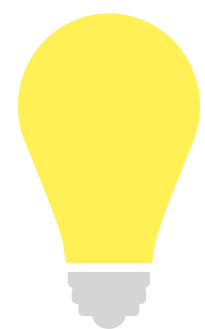
$$S_e^{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{q}) = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega}} \text{Im} \chi_e^{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{q})$$

← 磁気感受率

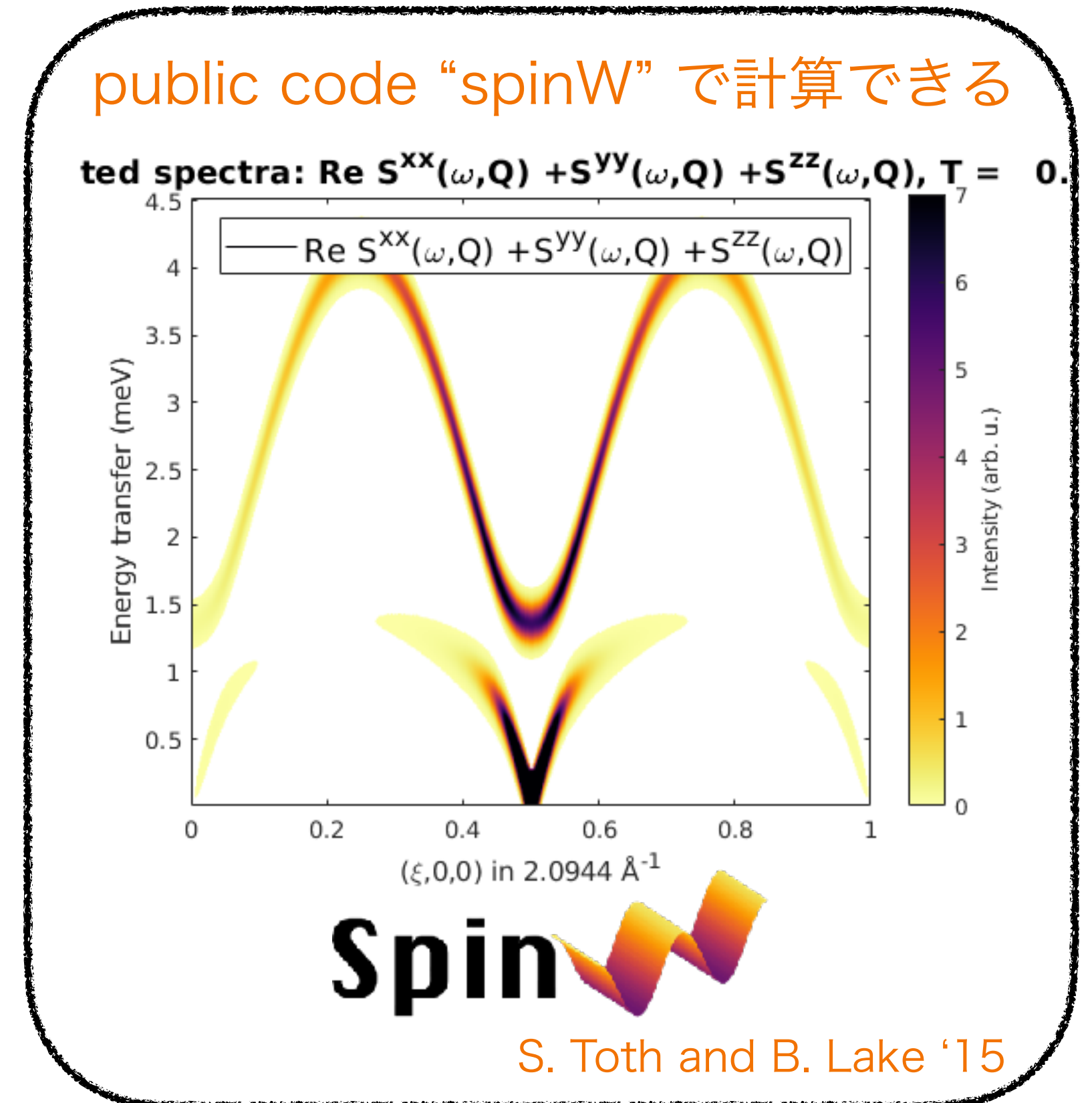
✓ 散乱断面積の表式 $G(\mathbf{q})$: 電子の空間分布に由来する形状因子

$$\frac{d\sigma}{d\omega d\Omega} = F_\psi(\{\mathbf{k}_b\}) G(\mathbf{q}) (\delta_{\alpha\beta} - \hat{q}_\alpha \hat{q}_\beta) S_e^{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{q})$$

✓ マグノン励起などを系統的に扱える



なにか面白い物理、ない？



2. Lindhard の発展方程式への応用

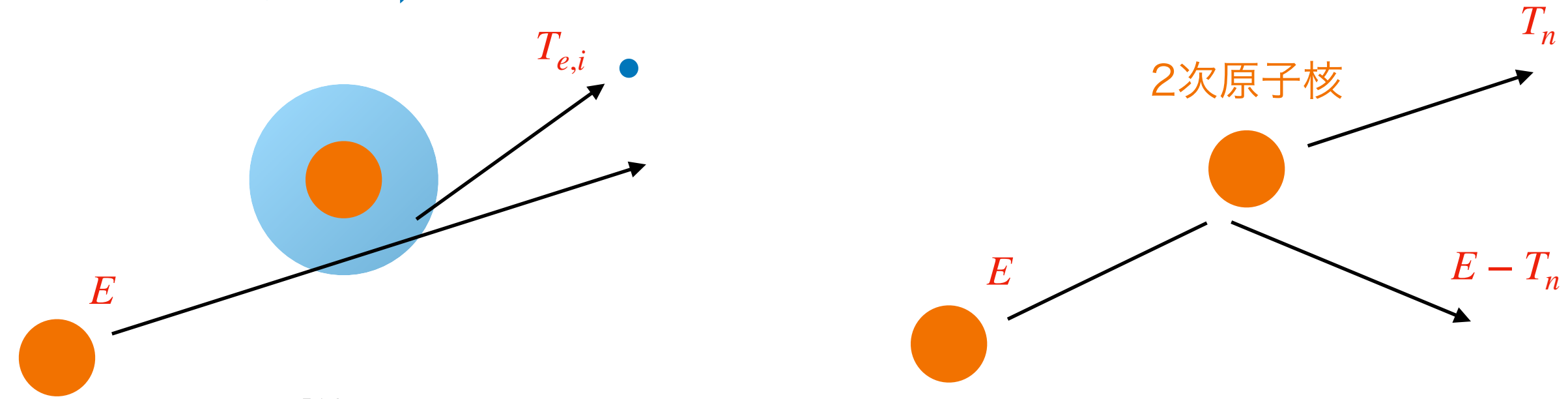
✓ 物質中の原子核との散乱で原子核が持ち出すエネルギーを求める方程式

Lindhard, et al. '63

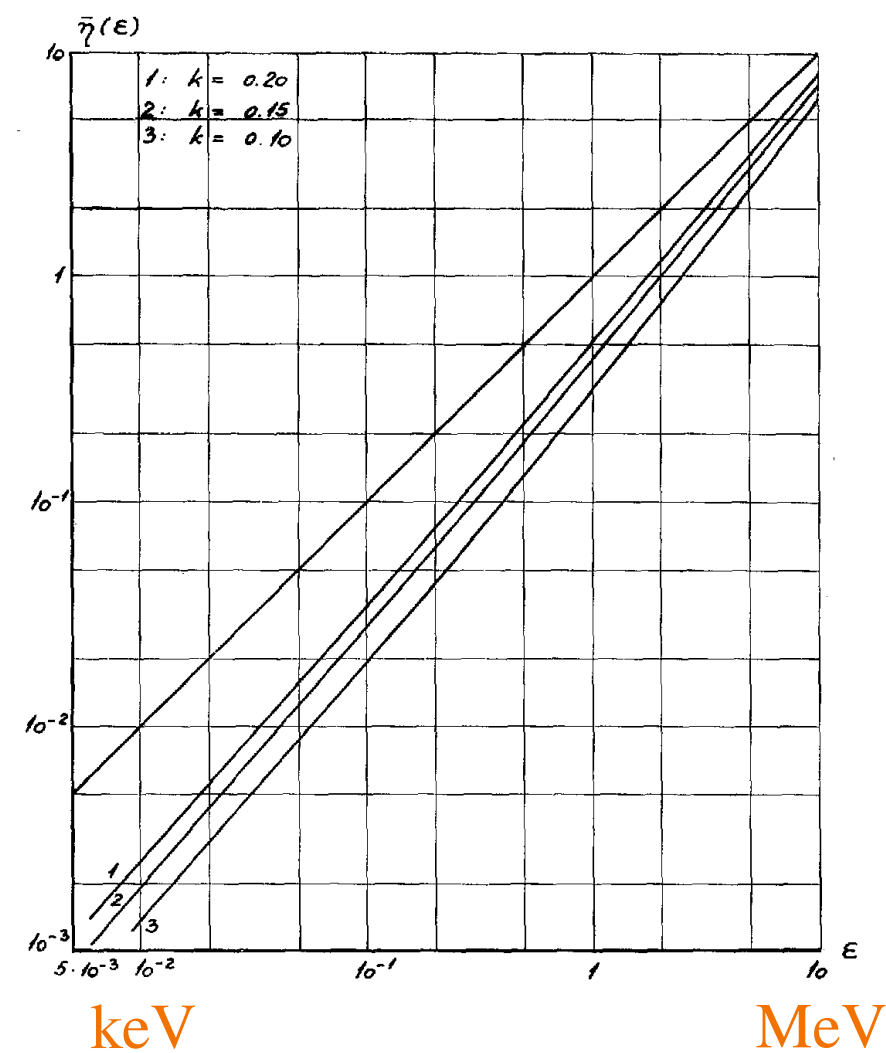
$$E = \bar{\nu}(E) + \bar{\eta}(E)$$

↑ ↑ ↑
 エネルギー移行 原子核が持ち出す分 電子が持ち出す分

$$\left(\int dT_{e,i} \frac{d\sigma_e}{dT_{e,i}} \sum_i T_{e,i} \right) \bar{\nu}'(E) = \int dT_n \frac{d\sigma_n}{dT_n} [\bar{\nu}(E - T_n) + \bar{\nu}(T_n) - \bar{\nu}(E)]$$



✓ 高エネルギー領域 ($E \gtrsim \text{keV}$) では
 実験とよく合う
 - $E \lesssim \text{keV}$ ではどうか?



1次原子核

2次原子核

§ 5. Numerical and Asymptotic Solutions for $Z_1 = Z_2$

Numerical results.

The analytical solutions in § 4 give merely some guidance in the problem, because they are based on the power law scattering, which has quite limited applicability. A fairly complete and reasonably accurate solution of the case $Z_1 = Z_2$ may be obtained from representative values of the electronic stopping constant, k , together with the universal cross section given by (1.4) and Fig. 2. It is convenient to use the $\epsilon - t$ variables in (1.4). The electronic stopping is then assumed to be $(d\epsilon/d\varrho)_e = k \cdot \epsilon^{1/2}$ in regions I and II. The homogeneous integral equation for $\bar{\nu}$ is

$$\left(\frac{d\epsilon}{d\varrho} \right)_e \cdot \bar{\nu}'(\epsilon) = \int_0^{\epsilon} \frac{dt}{2t^{3/2}} \cdot f(t^{1/2}) \left\{ \bar{\nu}\left(\epsilon - \frac{t}{\epsilon}\right) - \bar{\nu}(\epsilon) + \bar{\nu}\left(\frac{t}{\epsilon}\right) \right\}, \quad (5.1)$$

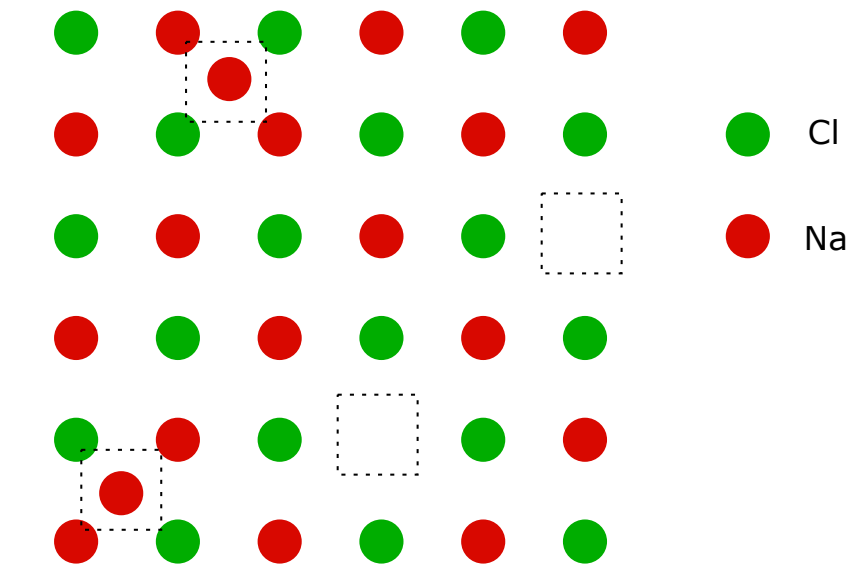
where $f(t^{1/2})$ is shown in Fig. 2. Note that (5.1) is equivalent to approximation (D).

The integral equation (5.1), with $(d\epsilon/d\varrho)_e = k \cdot \epsilon^{1/2}$, was solved by numerical methods on the electronic computer DASK. Actually, a slight modification of (5.1) was advantageous in the numerical computations; it gives a

2. Lindhard の発展方程式への応用

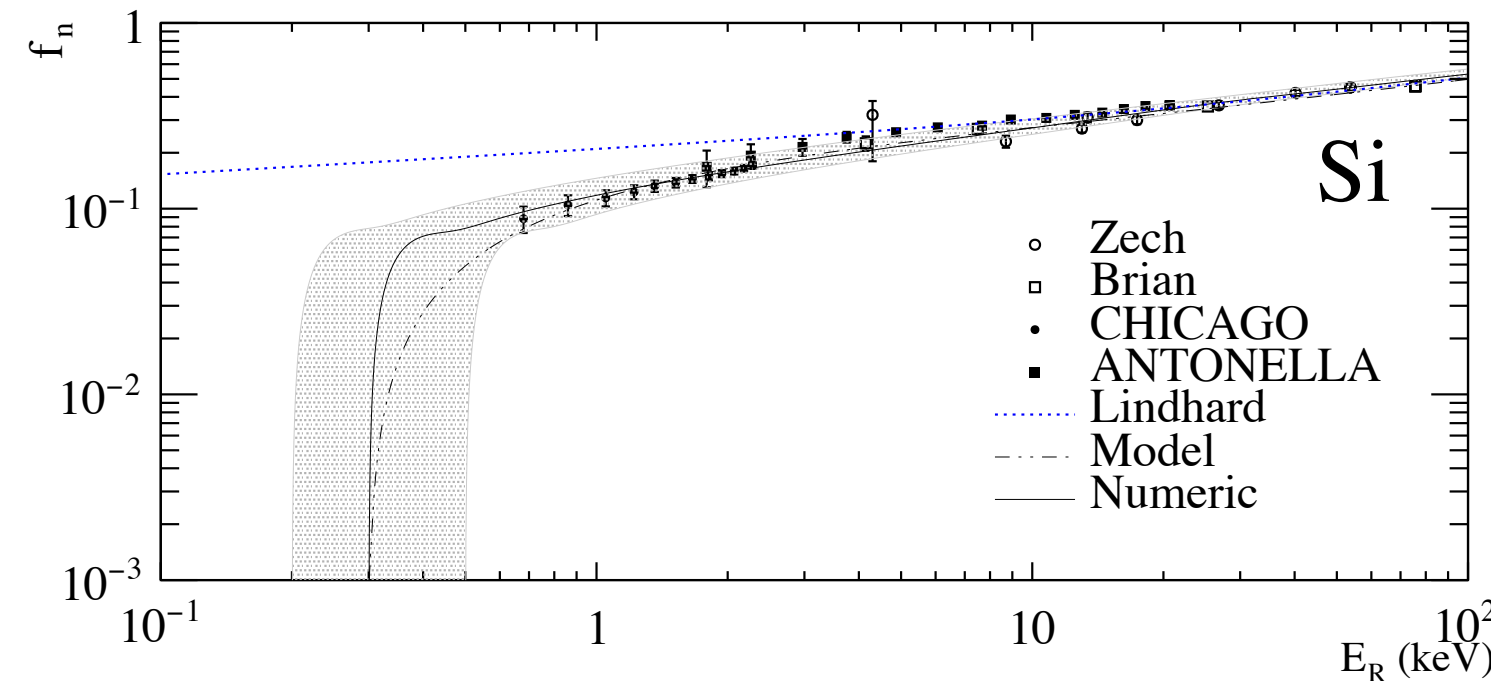
✓ $E \lesssim \text{keV}$ では物質内特有の原子核/電子の性質が見えてくる

- 原子核の束縛エネルギー $\mathcal{O}(10) \text{ eV}$ 格子欠陥 (フレンケル欠陥) の生成
- 電子の束縛エネルギー $\mathcal{O}(10) \text{ eV}$
- 電子の励起 / イオン化エネルギー $\mathcal{O}(1 - 100) \text{ eV}$



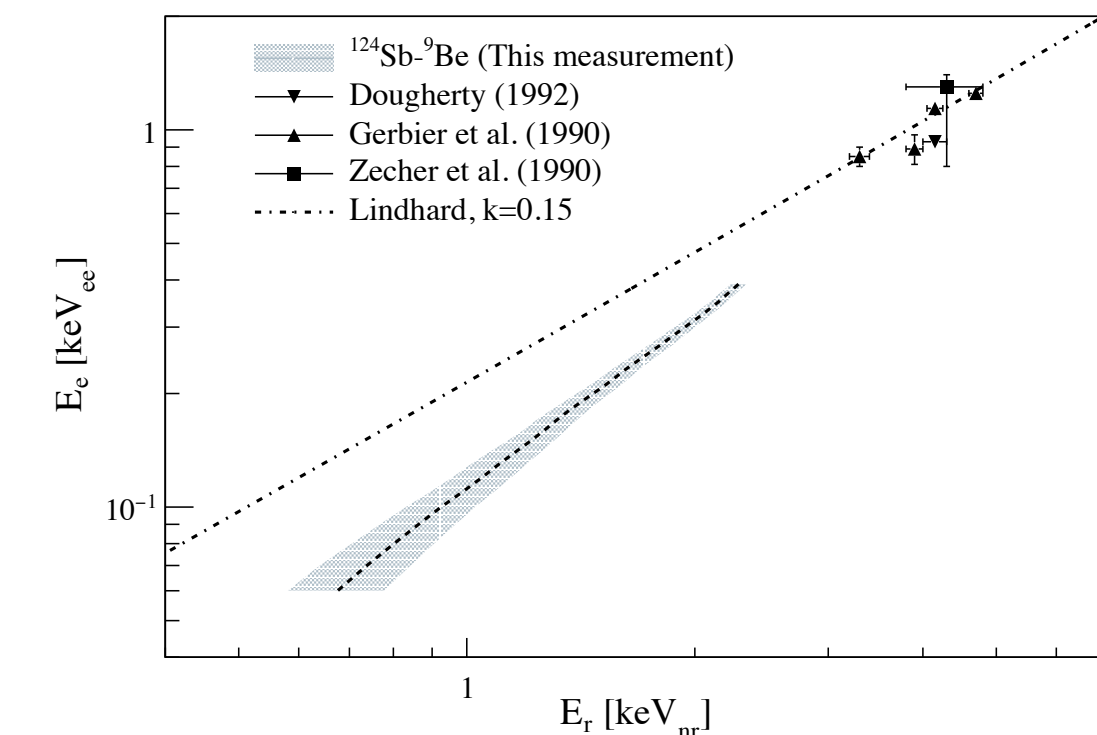
✓ 原子核の束縛エネルギーを取り入れる試み

$$\left(\int dT_{e,i} \frac{d\sigma_e}{dT_{e,i}} \sum_i T_{e,i} \right) \bar{\nu}'(E) = \int dT_n \frac{d\sigma_n}{dT_n} \left[\bar{\nu}(E - T_n) + \bar{\nu}(T_n - U) - \bar{\nu}(E) \right]$$



Sarkis, et al. [2001.06503]

▶ Lindhard からズレてるっぽいデータ



Chavarria, et al. [1608.00957]
(DAMIC collaboration)

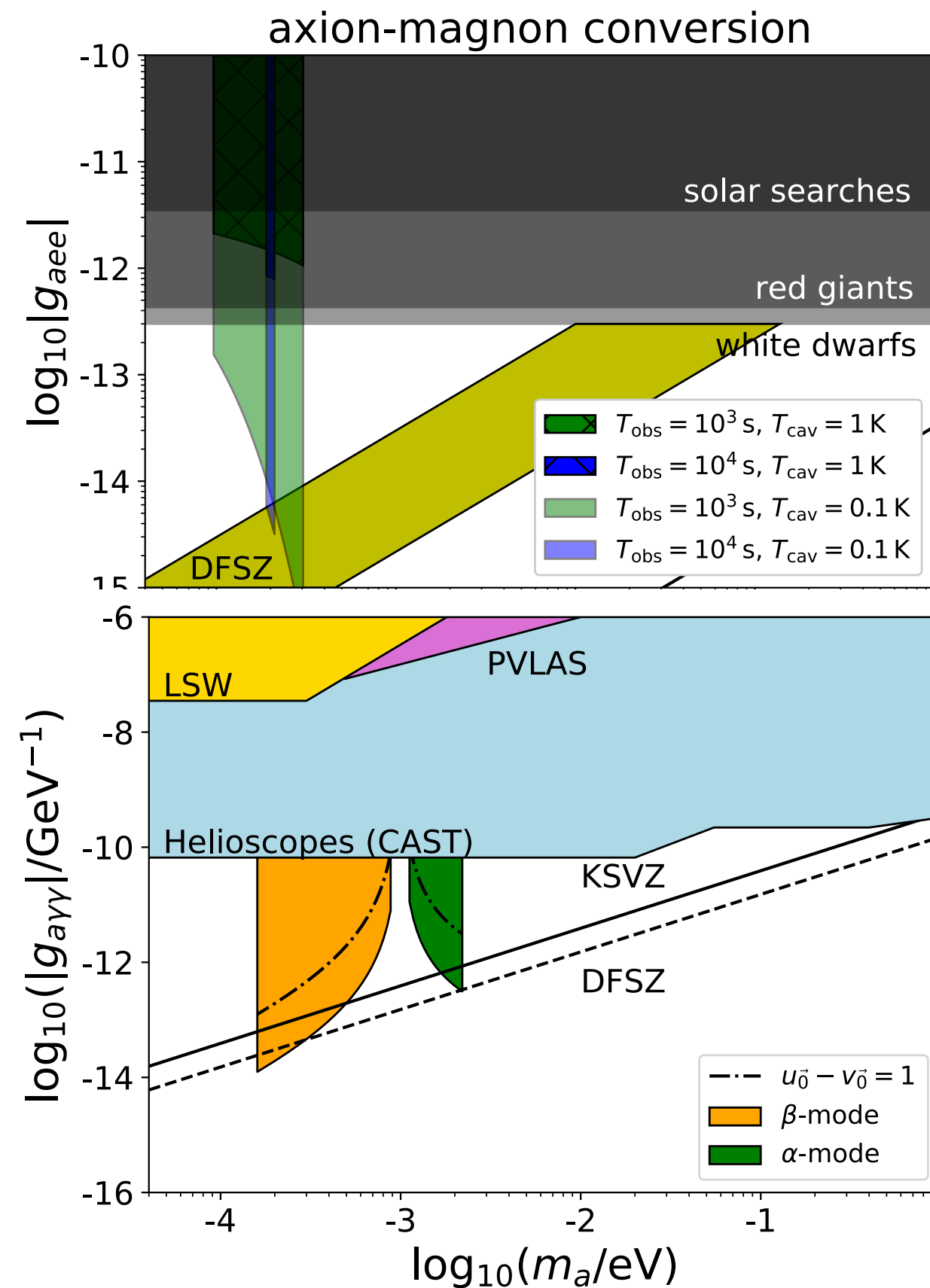
✓ 系統的な取り扱いで議論の精密化・結果の改善

Chigusa, Knapen, Langhoff, Lin ????

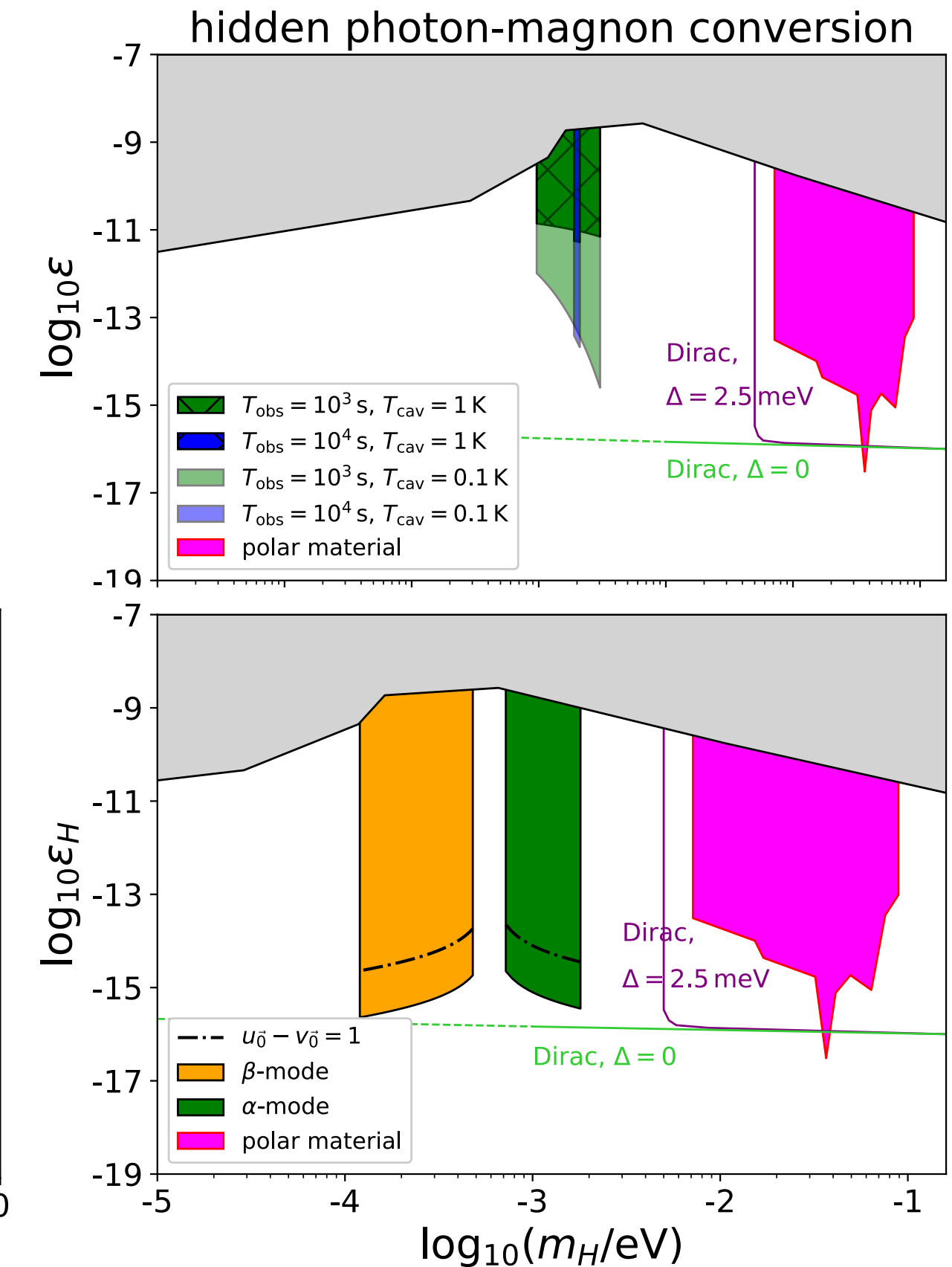
まとめ

✓ とても軽い暗黒物質を集団励起モードを用いて直接探索する手法

- マグノンは電子との相互作用を感知できる



- アクシオンは光子との相互作用も



✓ 系統的な取り扱いを模索したり、微妙な質量領域をもっと詰めたり

- できることはたくさん残されていると思われ

バックアップ

マグノンとは？

✓ 磁性体中の「スピン波」の励起状態

cf: 電子スピン vs. 核子スピン

$$\gamma_\psi \equiv \frac{eQ}{m_\psi} : \text{磁気回転比}$$

➔ 電子スピンの方が感度が高いことが多い

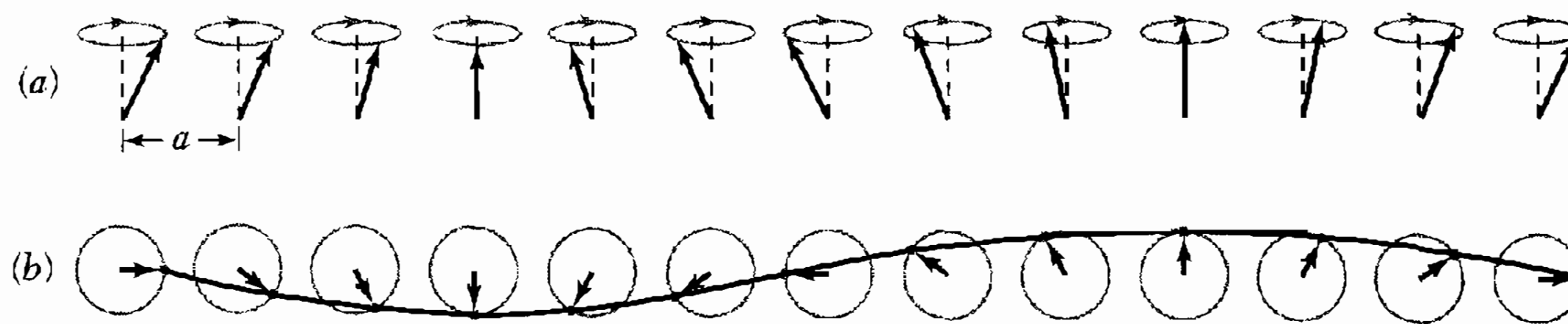


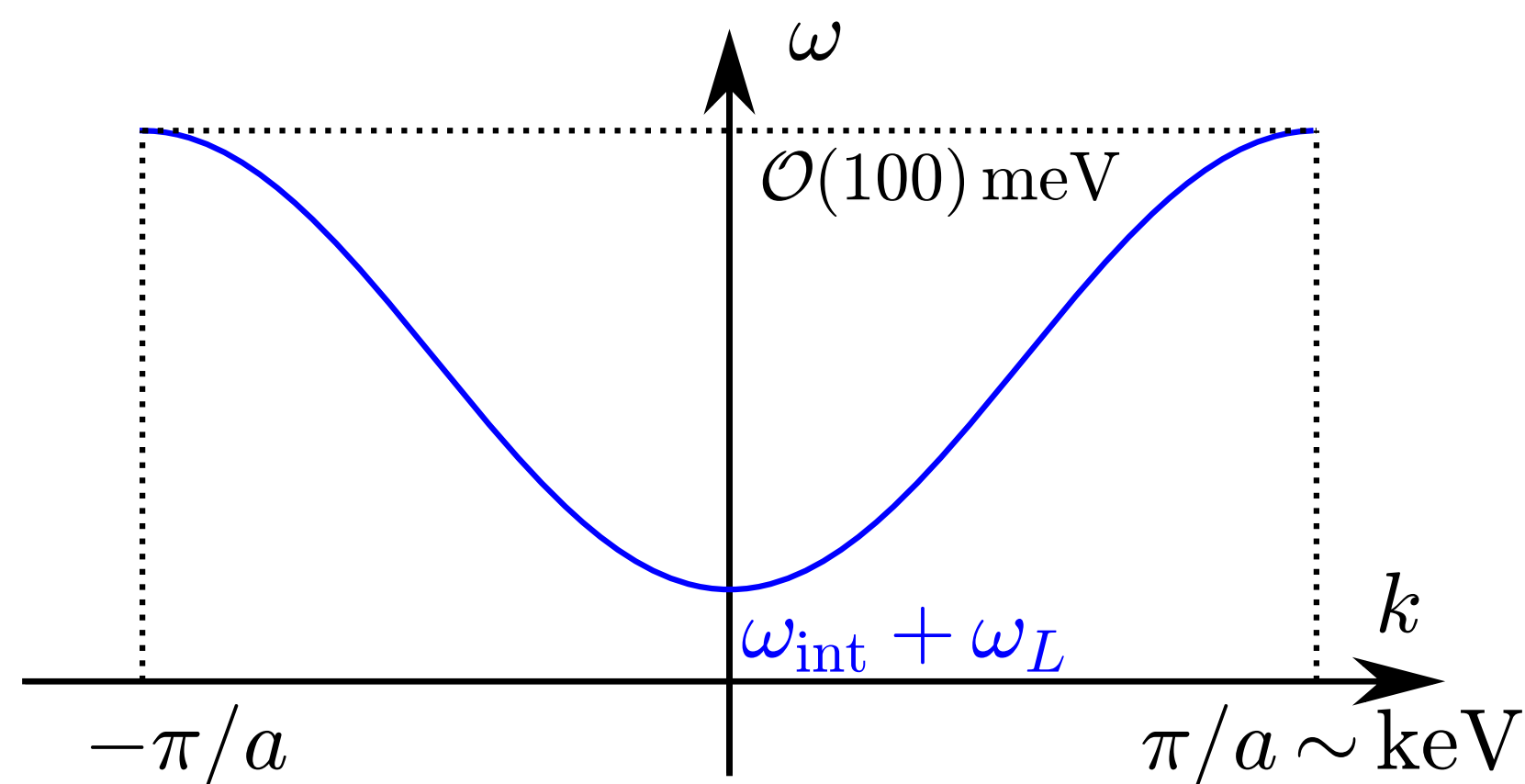
Figure 9 A spin wave on a line of spins. (a) The spins viewed in perspective. (b) Spins viewed from above, showing one wavelength. The wave is drawn through the ends of the spin vectors.

C. Kittel "Introduction to Solid State Physics [8th ed]"

✓ スピン波を量子化したものはボソン準粒子

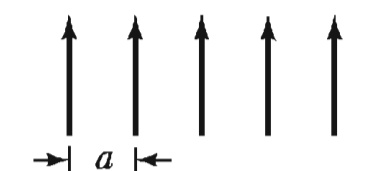
マグノン！

- 分散関係



- 性質

- (音響) マグノンは空間回転 $SO(3)$ が磁性体の基底状態によって破られた際のNGB
- マグノンのギャップ (質量) は $SO(3)$ の破れに関係
- ✦ 結晶構造の非等方性に起因するギャップ ω_{int}
- ✦ 外磁場 \vec{B}_0 もギャップを作る: $\omega_L \sim 0.1 \text{ meV} \left(\frac{B_0}{1\text{T}} \right)$



アクシオン/暗黒光子をマグノンで探す

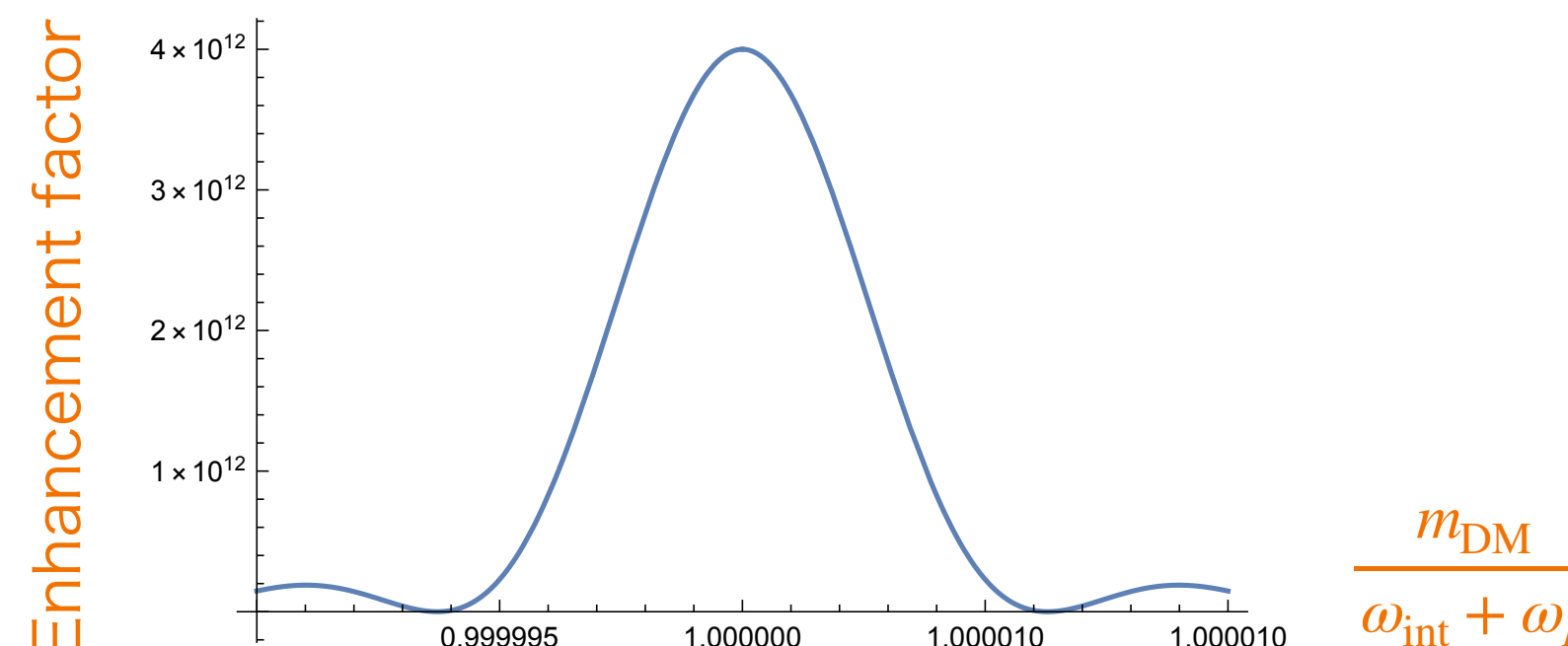
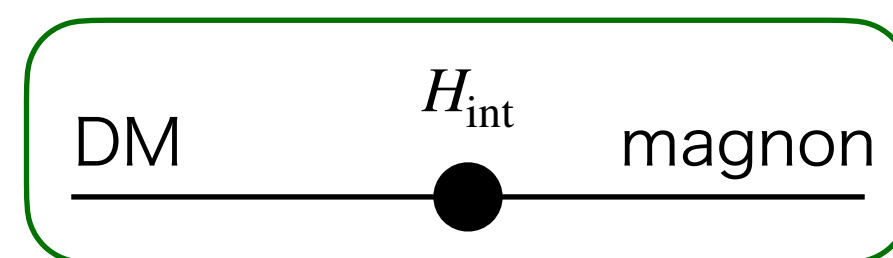
✓ アクシオン/暗黒光子のコヒーレントな振動は実効的に

電子スピンの相互作用する振動磁場 $\vec{B}(t, \vec{x})$ とみなせる

$$H_{\text{int}} = \gamma_e \vec{B} \cdot \vec{S}_e \quad \text{w/} \quad \vec{B}(t, \vec{x}) = \begin{cases} \frac{2}{m_e} g_{aee} \vec{\nabla} a(t, \vec{x}) & (\text{axion}) \\ \frac{1}{m_e} \epsilon_H \vec{\nabla} \times \vec{H}(t, \vec{x}) & (\text{dark photon}) \end{cases}$$

✓ 性質

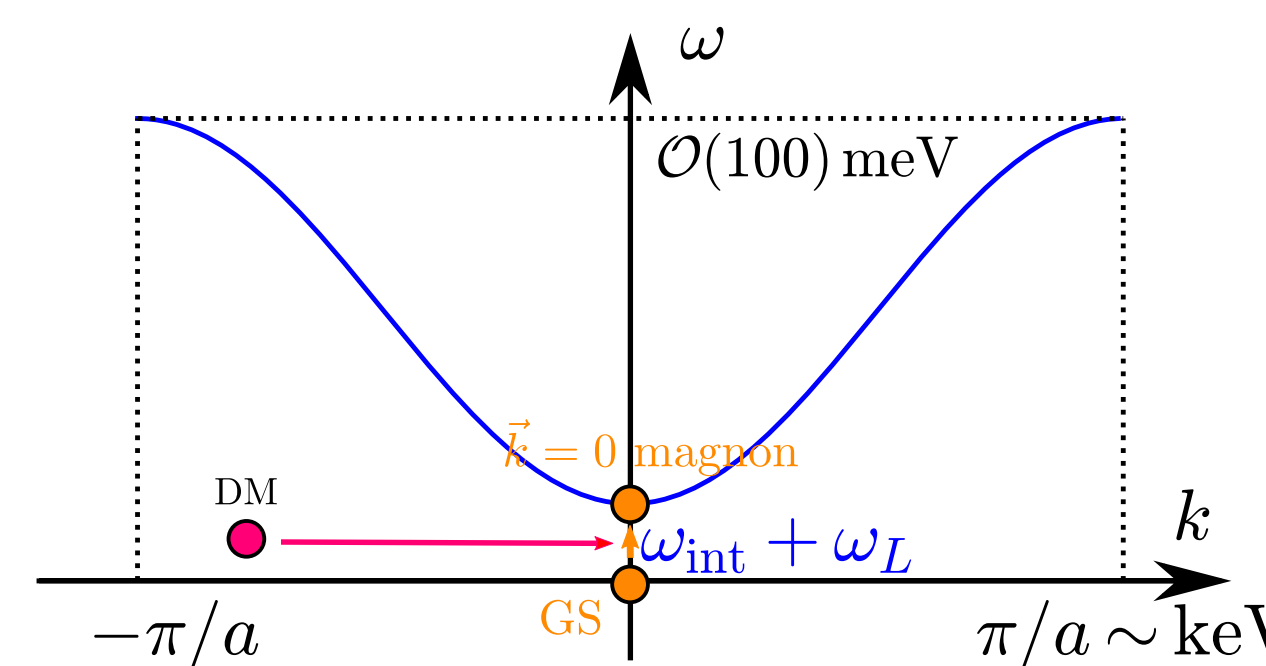
- 暗黒物質がマグノンに変換される過程



- 暗黒物質のドブロイ波長 $\lambda_{\text{de Broglie}} \sim 1 \text{ m} \left(\frac{1 \text{ meV}}{m_{\text{DM}}} \right)$ は試料サイズより大きい $\rightarrow \vec{k} = 0$ マグノンモードを励起

- $m_{\text{DM}} \simeq \omega_{\text{int}} + \omega_L$ のとき共鳴により反応率が向上

\rightarrow 外部磁場 B_0 をスキャンして ω_L を調整し、広い範囲の m_{DM} を探索



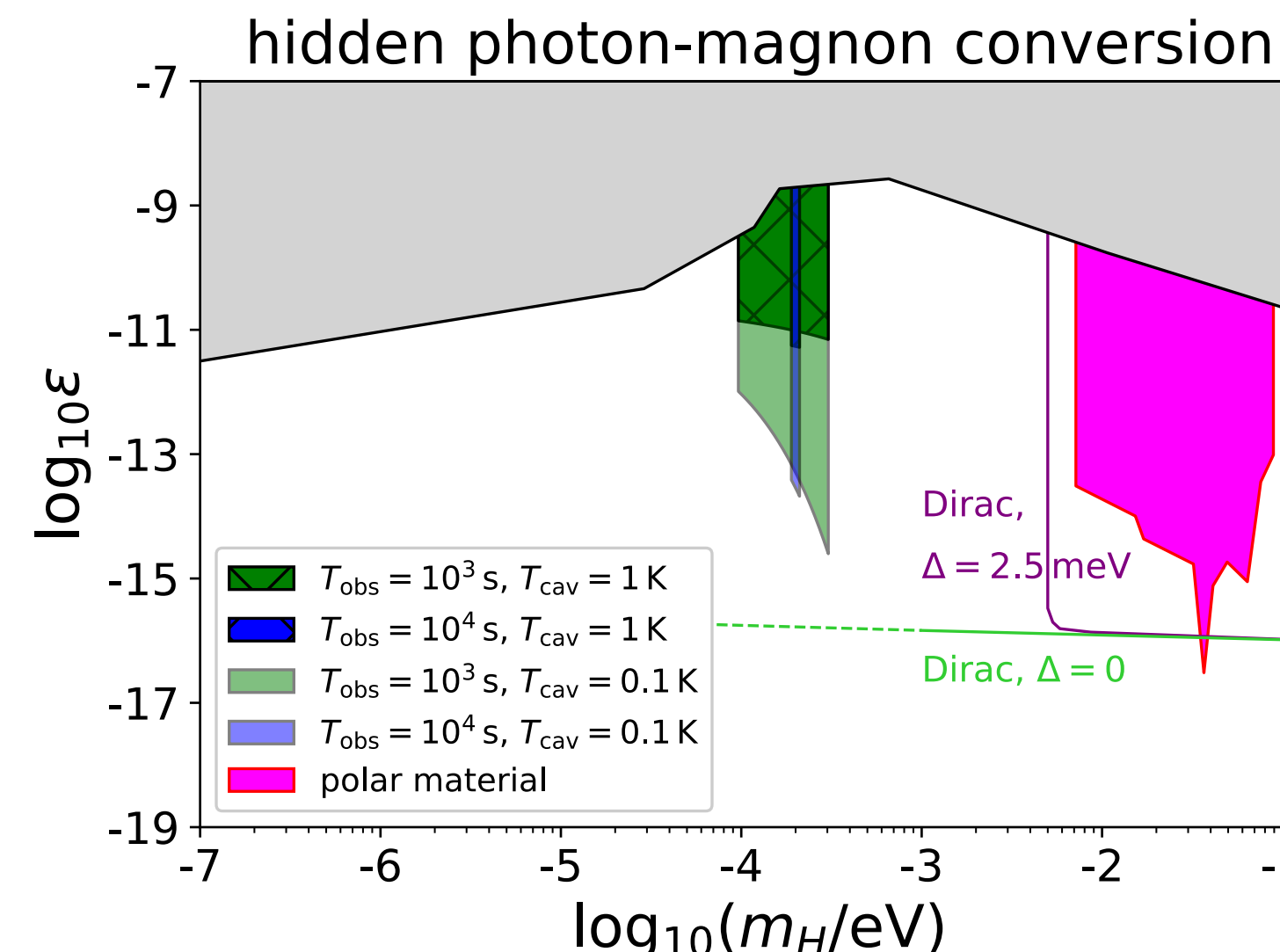
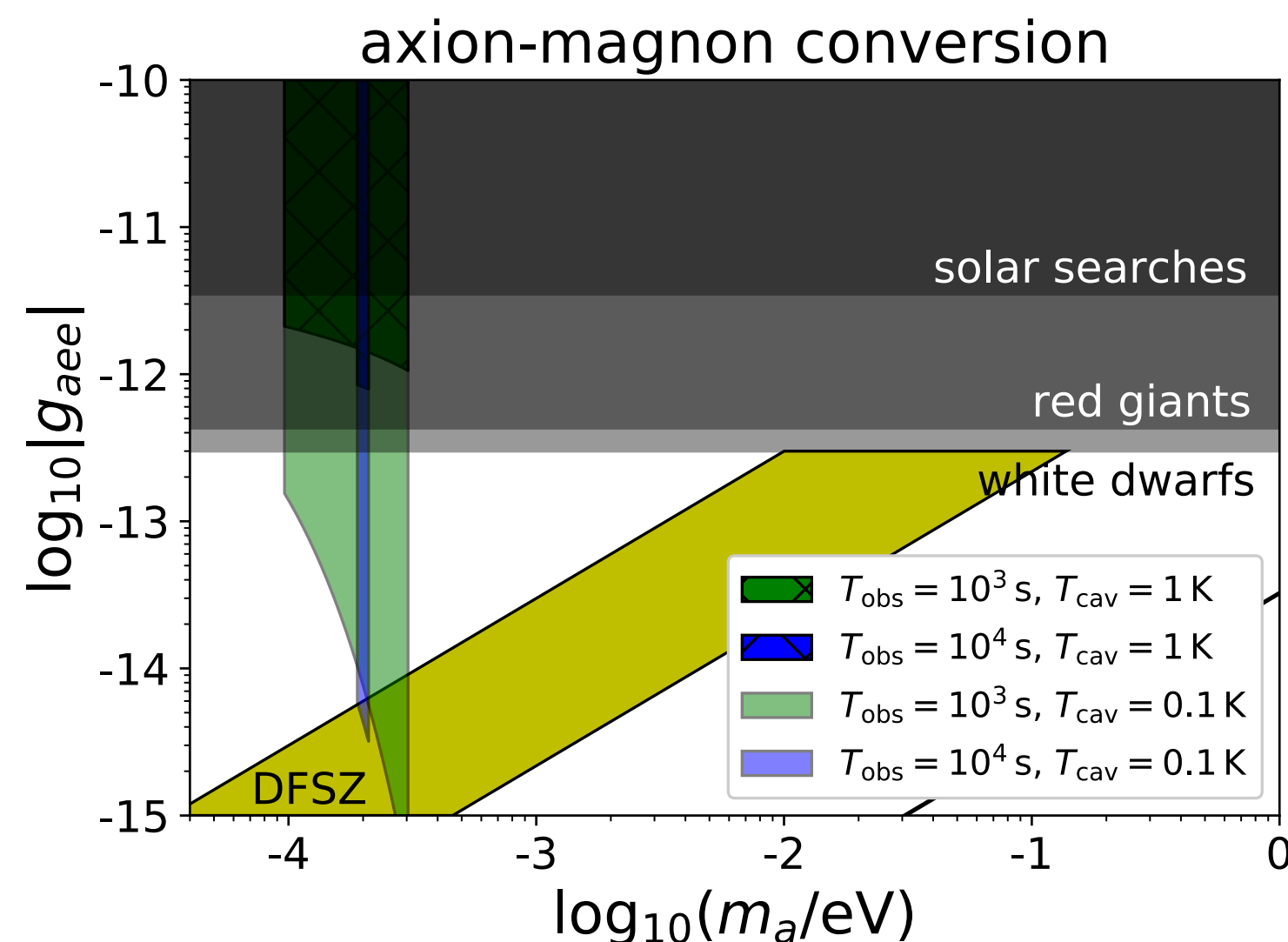
アクシオン/暗黒光子をマグノンで探す

✓ 強磁性体 YIG を使用 (マグノンが安定)

- $T_{\text{total}} = 10 \text{ yr}$, $M_{\text{target}} = 1 \text{ kg}$, 熱雑音が支配的な状況
- $B_0 \sim \mathcal{O}(1) \text{ T}$ でスキャン、各磁場の値で $T_{\text{obs}} = 10^3\text{--}10^4 \text{ s}$ の観測を行う

$$\omega_L \sim 0.1 \text{ meV} \left(\frac{B_0}{1 \text{ T}} \right) \gg \omega_{\text{int}}$$

SC, T. Moroi, K. Nakayama [2001.10666]



✓ 実際に走っている実験

- QUAX 実験
- Univ. of Western Australia
- 神戸大の人びと

$$m_a \sim 40 - 60 \mu\text{eV}$$

$$m_a \sim 33.8 \mu\text{eV}$$

$$m_a \sim 33.1 \mu\text{eV}$$

R. Barbieri+ '89, R. Barbieri+ '16, N. Crescini+ '20

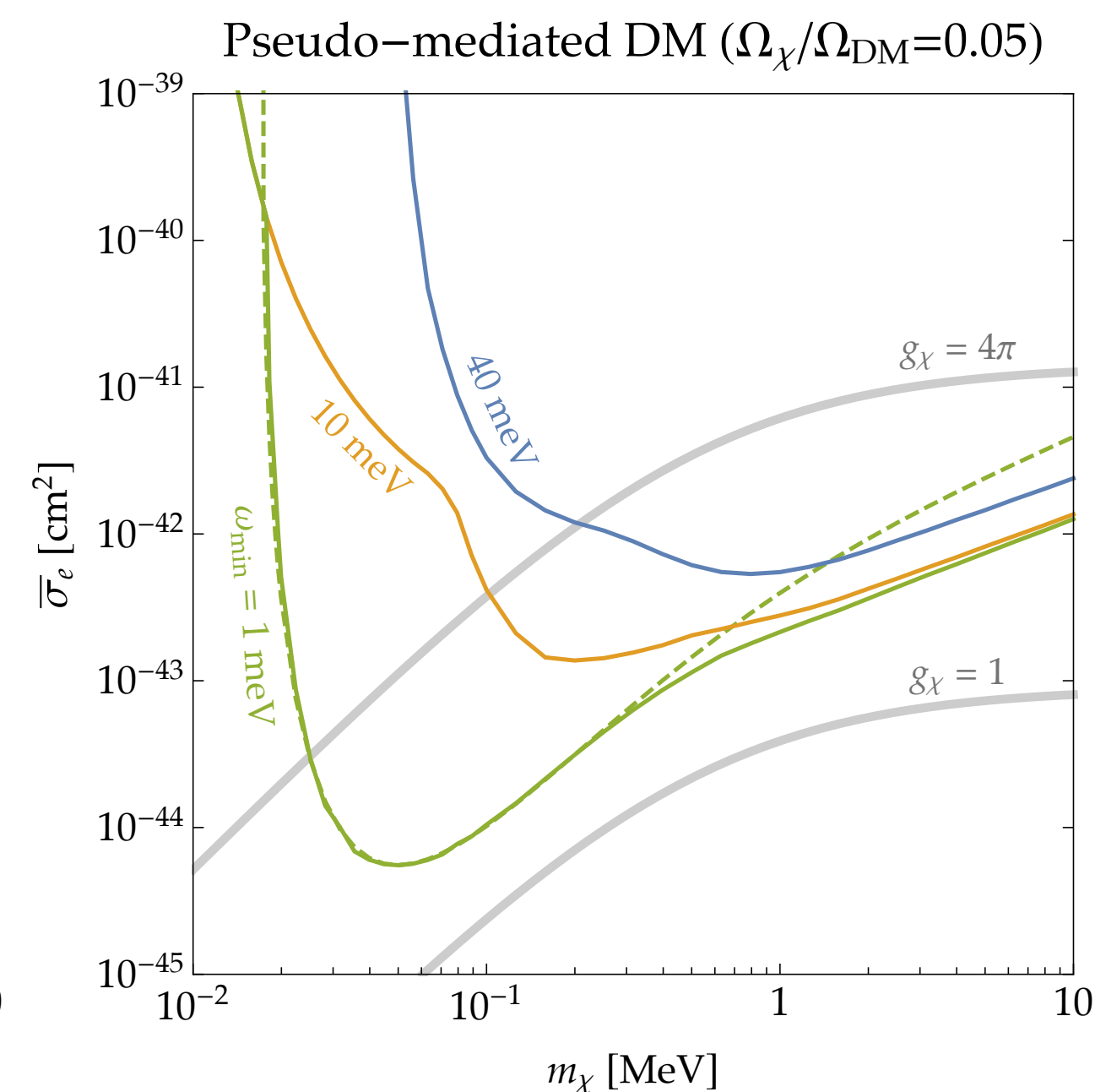
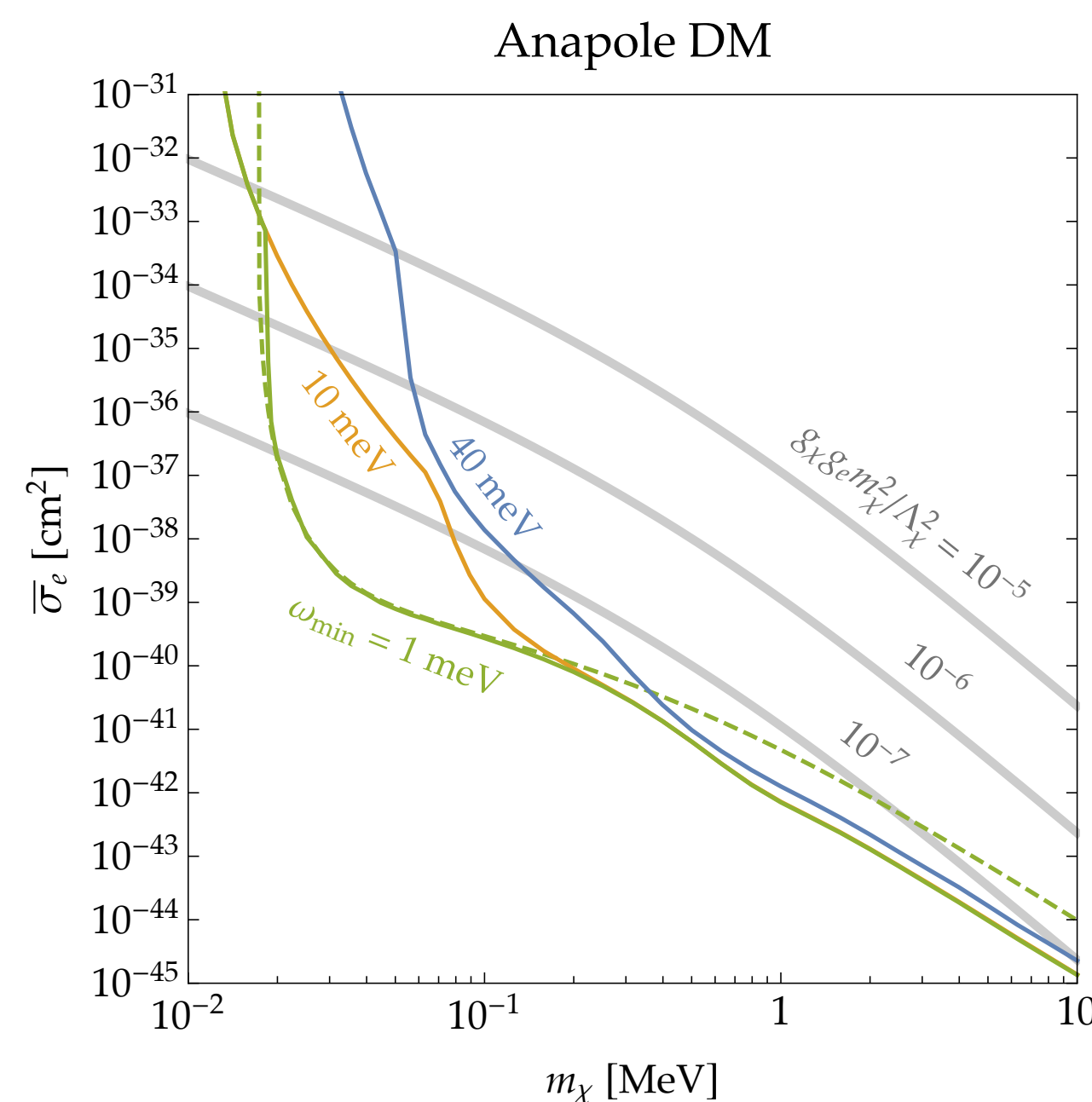
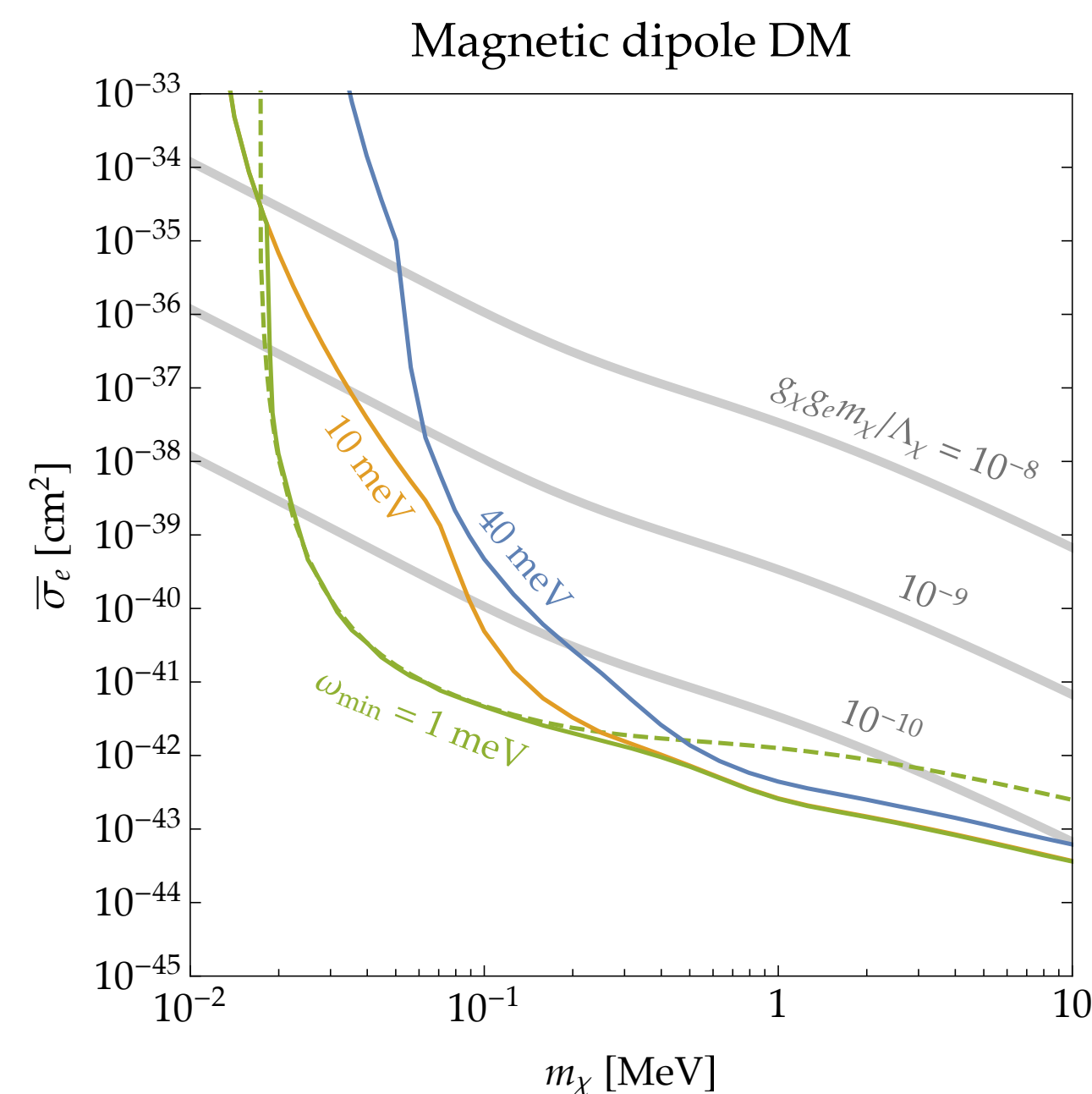
G. Flower+ '18

T. Ikeda+ '21

暗黒物質の散乱過程 × マグノン

✓ マグノンの励起エネルギー $\mathcal{O}(10 - 100) \text{ meV}$

✓ 暗黒物質のターゲット質量 $\sim \text{MeV}$



Trickle, Zhang, Zurek [1905.13744]

- 暗黒物質 × 電子スピンの相互作用を検出可能

ハミルトニアン

中山さんのPPP2020の 슬라이드

Tight-binding 模型の拡張

$$H = -t \sum_{\langle i,j \rangle, \sigma} c_{i\sigma}^\dagger c_{j\sigma}$$

Tight-binding模型

→ バンド金属、バンド絶縁体

$$+U \sum_i n_{i\uparrow} n_{i\downarrow}$$

電子間斥力 (ハバード模型)

→ Mott絶縁体、(反)強磁性体

$$+\lambda \sum_{(i,j)} c_i^\dagger (\vec{\sigma} \cdot \vec{L}) c_j$$

スピン軌道相互作用

→ トポロジカル絶縁体

~~$$+ \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{k}'} g_{\vec{k}} c_{\vec{k}+\vec{k}'}^\dagger c_{\vec{k}'} (b_{\vec{k}} + b_{-\vec{k}}^\dagger)$$~~

~~電子-フォノン相互作用~~

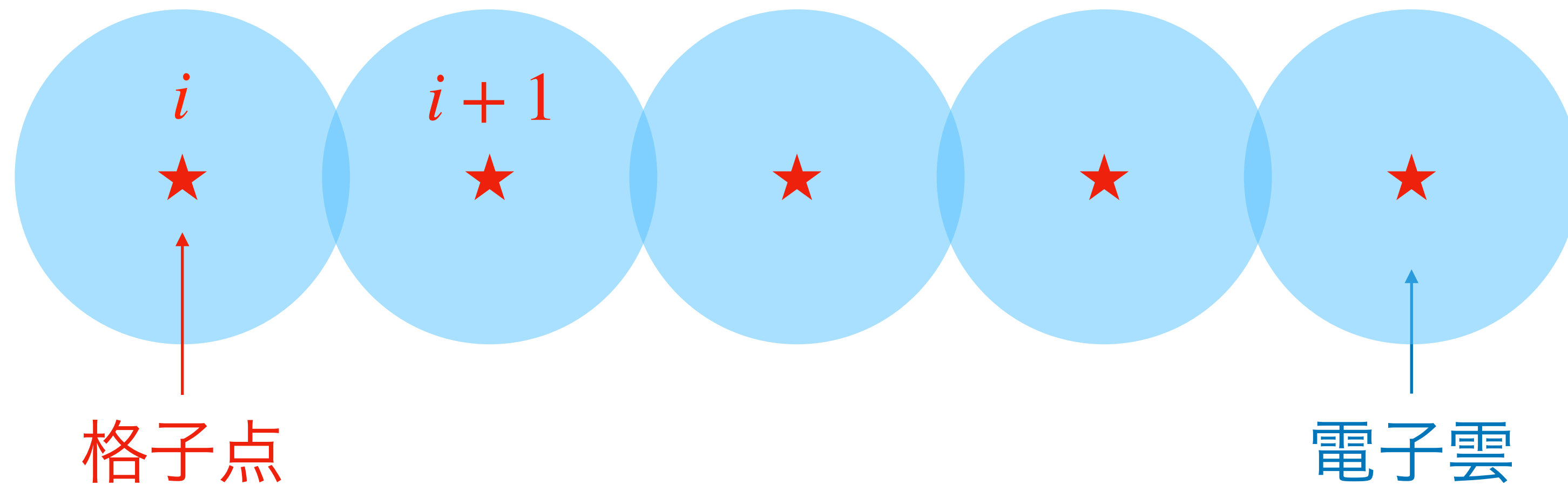
~~→ 超伝導体~~

様々な物性を理解する模型としてよく応用されている

✓ 上から3行で「アクション」を理解できる

Tight-binding模型

✓ 格子上に並んだ原子核に強く束縛された電子を考える



✓ 各原子はエネルギー ϵ の電子軌道を持つ : $\langle i | H | i \rangle = \epsilon$

✓ 軌道がわずかに重なっている効果 : $\langle i | H | i+1 \rangle = -t$ ($|t| \ll \epsilon$)

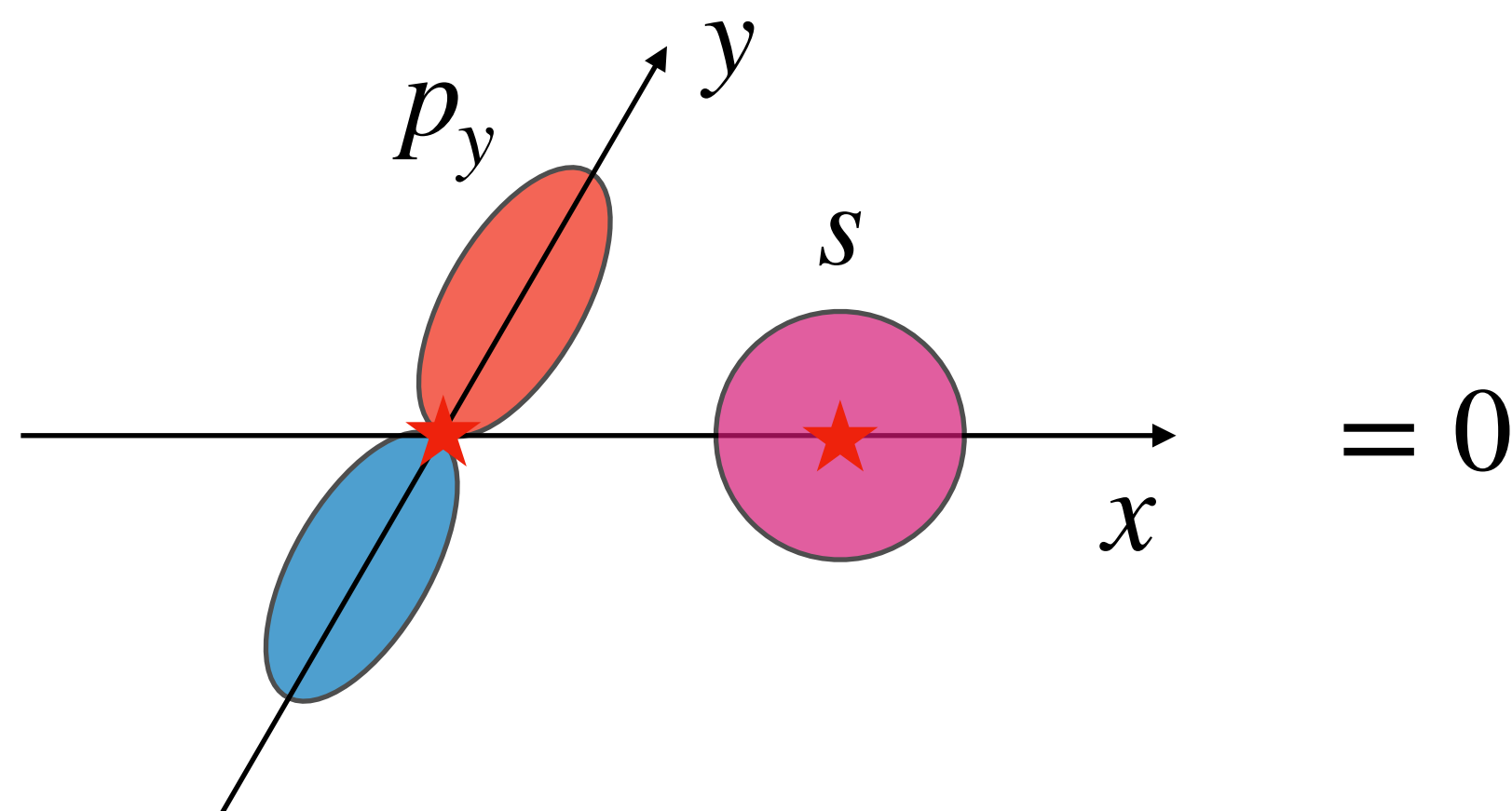
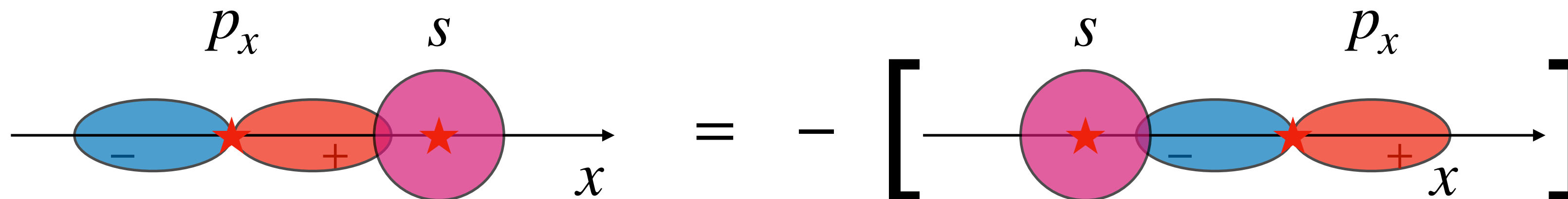
$$H = \epsilon \sum_i c_i^\dagger c_i - t \sum_{\langle i,j \rangle} c_i^\dagger c_j$$

Hopping項

和は隣り合う格子点(i,j)で取る

Hopping項の評価

✓ Hopping項の評価には電子軌道の形、性質が重要



Slater-Kosterの関係式

TABLE I. Energy integrals for crystal in terms of two-center integrals.

$E_{s,s}$	$(ss\sigma)$	
$E_{s,x}$	$l(sp\sigma)$	
$E_{x,x}$	$l^2(pp\sigma) + (1-l^2)(pp\pi)$	
$E_{x,y}$	$lm(pp\sigma) - lm(pp\pi)$	
$E_{x,z}$	$ln(pp\sigma) - ln(pp\pi)$	
$E_{s,xy}$	$\sqrt{3}lm(sd\sigma)$	
E_{s,x^2-y^2}	$\frac{1}{2}\sqrt{3}(l^2-m^2)(sd\sigma)$	
$E_{s,3z^2-r^2}$	$[n^2 - \frac{1}{2}(l^2+m^2)](sd\sigma)$	
$E_{x,xy}$	$\sqrt{3}l^2m(pd\sigma) + m(1-2l^2)(pd\pi)$	
$E_{x,yz}$	$\sqrt{3}lmn(pd\sigma) - 2lmn(pd\pi)$	
$E_{x,zz}$	$\sqrt{3}l^2n(pd\sigma) + n(1-2l^2)(pd\pi)$	etc.

$$\vec{r}_j - \vec{r}_i = (l, m, n)$$

J. C. Slater, G. F. Koster (1954)

✓ Hopping項に方向依存性

- 格子の形の情報がここに含まれている

電子相関(Hubbard相互作用)

✓クーロン斥力の影響で、同じ軌道に2つの電子は入りにくい

$$H = -t \sum_{\langle i,j \rangle} \sum_{\sigma} c_{i\sigma}^{\dagger} c_{j\sigma} + U \sum_i n_{i\uparrow} n_{i\downarrow}$$

Hubbard相互作用

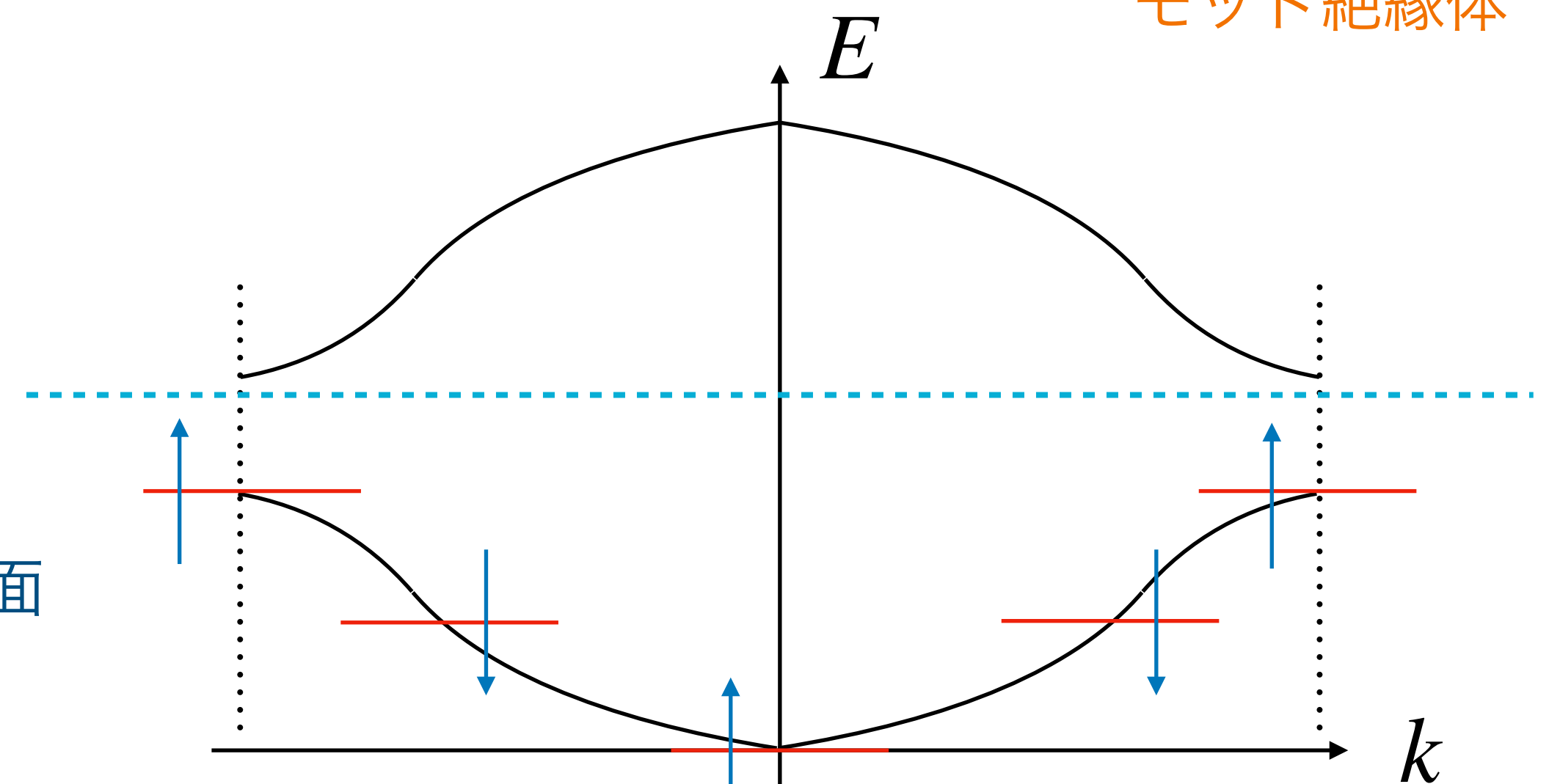
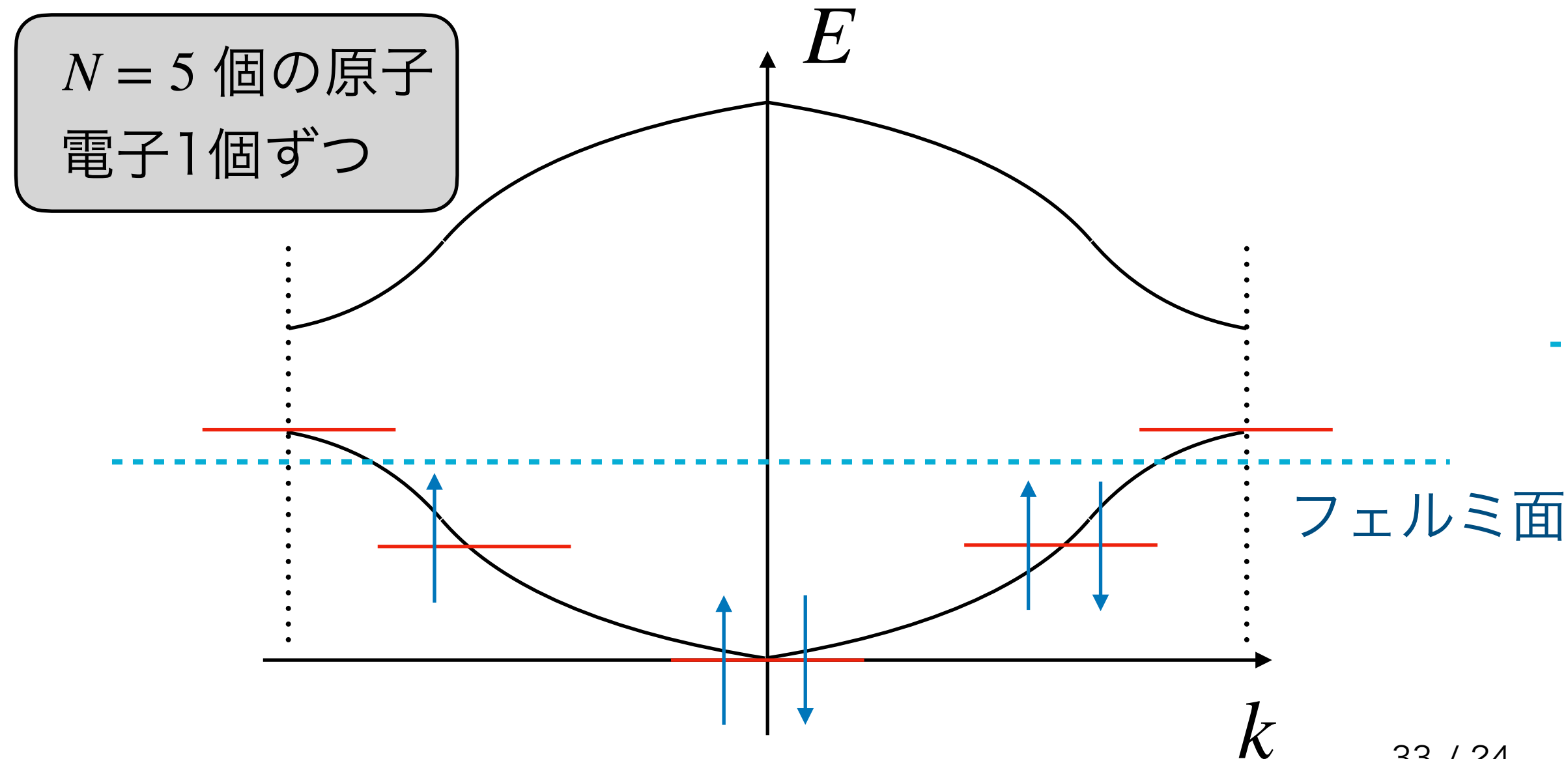
$$n_{i\sigma} = c_{i\sigma}^{\dagger} c_{i\sigma}$$

$\sigma \in \{\uparrow, \downarrow\}$ は電子のスピン

✓固体のバンド理論では、各原子が奇数個の電子を持つと金属だったが……

✓ U が大きいと絶縁体になり得る

モット絶縁体



スピン軌道相互作用とトポロジカル絶縁体

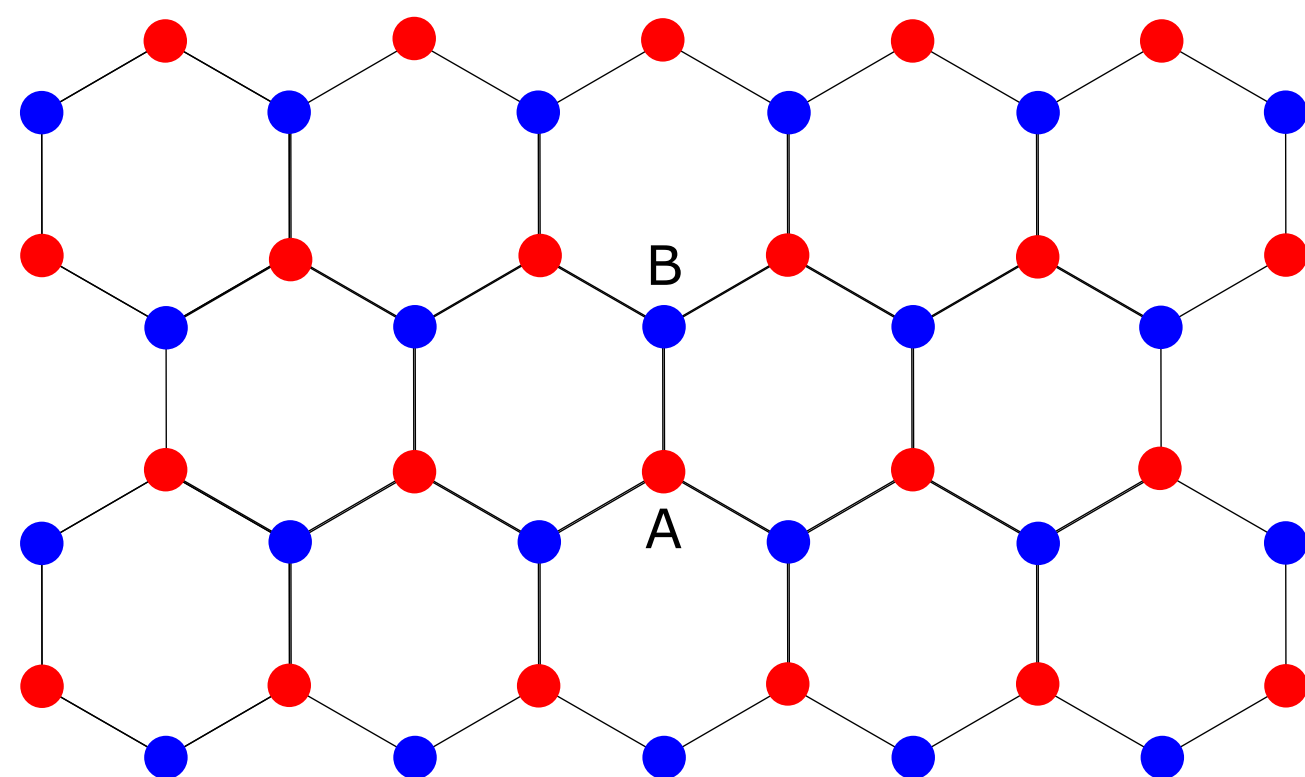
$$H = -t \sum_{\langle i,j \rangle} \sum_{\sigma} c_{i\sigma}^{\dagger} c_{j\sigma} + i\lambda \sum_{\langle\langle i,j \rangle\rangle} c_i^{\dagger} \vec{\sigma} \cdot (\vec{d}_{ij}^1 \times \vec{d}_{ij}^2) c_j$$

✓ トポロジカル絶縁体の実現にはスピン軌道相互作用の効果が重要

Kane-Mele模型

C. L. Kane, E. J. Mele PRL 95 (2005) 226081 & PRL 95 (2005) 146802

✓ 最初の（時間反転対称な）トポロジカル絶縁体の模型



2次元ハニカム格子上で実現

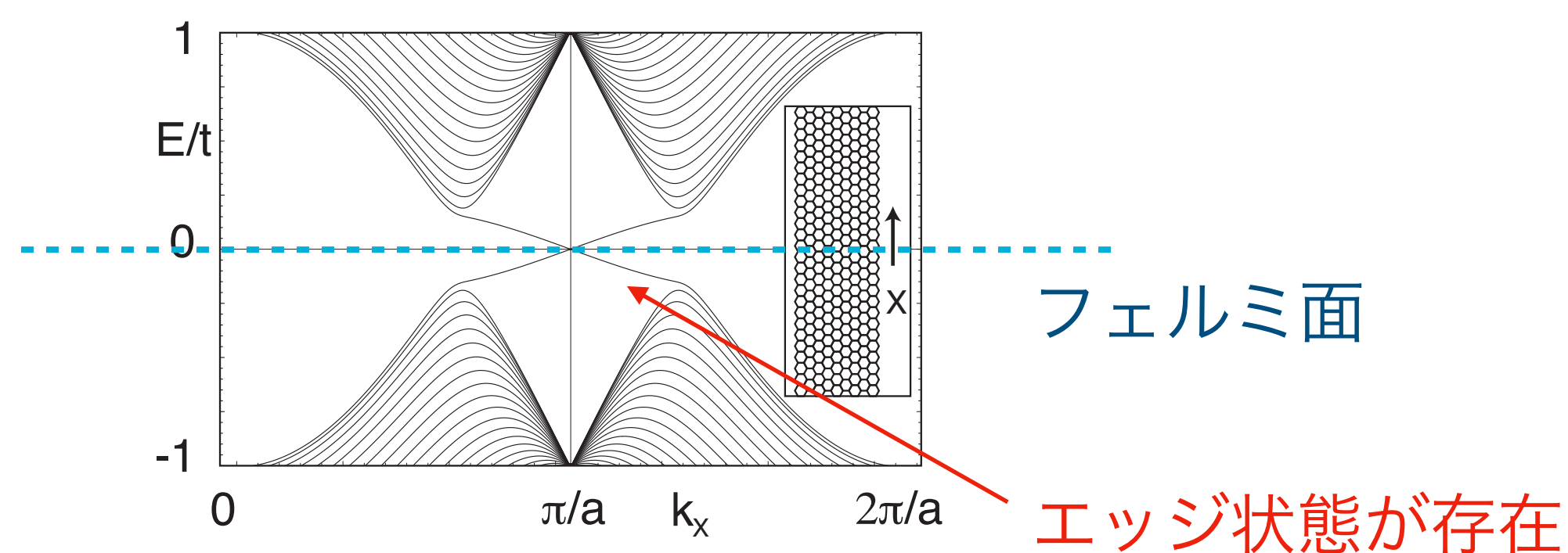
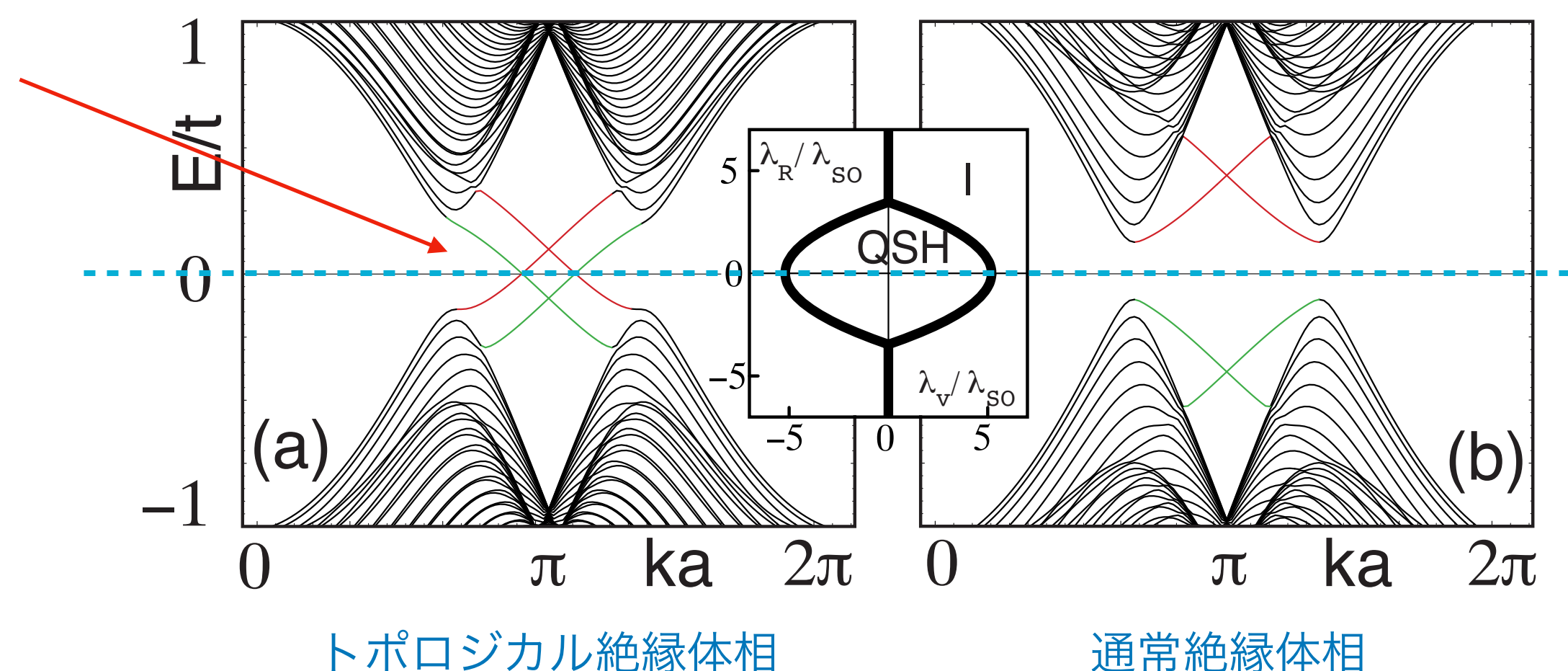


FIG. 1: (a) One dimensional energy bands for a strip of graphene (shown in inset) modeled by (7) with $t_2/t = .03$. The bands crossing the gap are spin filtered edge states.

トポロジカル絶縁体？

✓ 内部では絶縁体、表面では金属となっているような物質 cf)バルク-エッジ対応

- 表面だけに局在するエッジ状態のおかげで電流が流れる



✓ 物性分野でのHot Topicsで、Kane-Meleの後も様々な発展

- Bernevig-Hughes-Zhang(BHZ)模型 B. A. Bernevig, T. L. Hughes, S. Zhang, Science, 314, 1757 (2006)
- HgTe/CdTeの量子井戸構造によるBHZ模型の実験的実現

トポロジカル絶縁体の初の実験的観測(2次元)

M. König, et al. Science, Scienceexpress 318, 766 (2007)

- 3次元トポロジカル絶縁体：Fu-Kane-Mele模型、 $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x$

L. Fu, C. L. Kane, E. J. Mele, PRL 98, 106803 (2007)

D. Hsieh, Nature 452, 970 (2008)

トポロジーとの関係と静的アクシオン

✓ トポロジカル絶縁体は通常の絶縁体とトポロジーが異なる (連続変形不可能)

- Berry接続を用いてトポロジカル不変量 θ を計算できる

$$\mathcal{A}_i^{\alpha\beta} = -i \langle u_k^\alpha | \frac{\partial}{\partial k_i} | u_k^\beta \rangle$$

Berry接続
Bloch状態↔エネルギー固有状態
ブリルアン・ゾーン積分

$$\theta \equiv \frac{1}{4\pi} \int_{\text{BZ}} d^3k \epsilon^{ijk} \text{Tr} \left[\mathcal{A}_i \partial_j \mathcal{A}_k + i \frac{2}{3} \mathcal{A}_i \mathcal{A}_j \mathcal{A}_k \right]$$

- 時間反転対称な系だと θ は以下の値しか取れない

- $\theta = 0$ (通常絶縁体)
- $\theta = \pi$ (トポロジカル絶縁体)

- θ は「静的」アクシオン項
- 磁場が電気分極 $\vec{P} \propto \theta \vec{B}$ を
- 電場が磁化 $\vec{M} \propto \theta \vec{E}$ を誘起する

✓ トポロジカルな電磁応答

$$S = \frac{\alpha}{4\pi} \int dt d^3x \theta \underbrace{F_{\mu\nu} \widetilde{F}^{\mu\nu}}_{= 4 \vec{E} \cdot \vec{B}} ; \quad \widetilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$$

静的アクシオン項 θ

✓ 「トポロジカルな」電磁応答を記述する

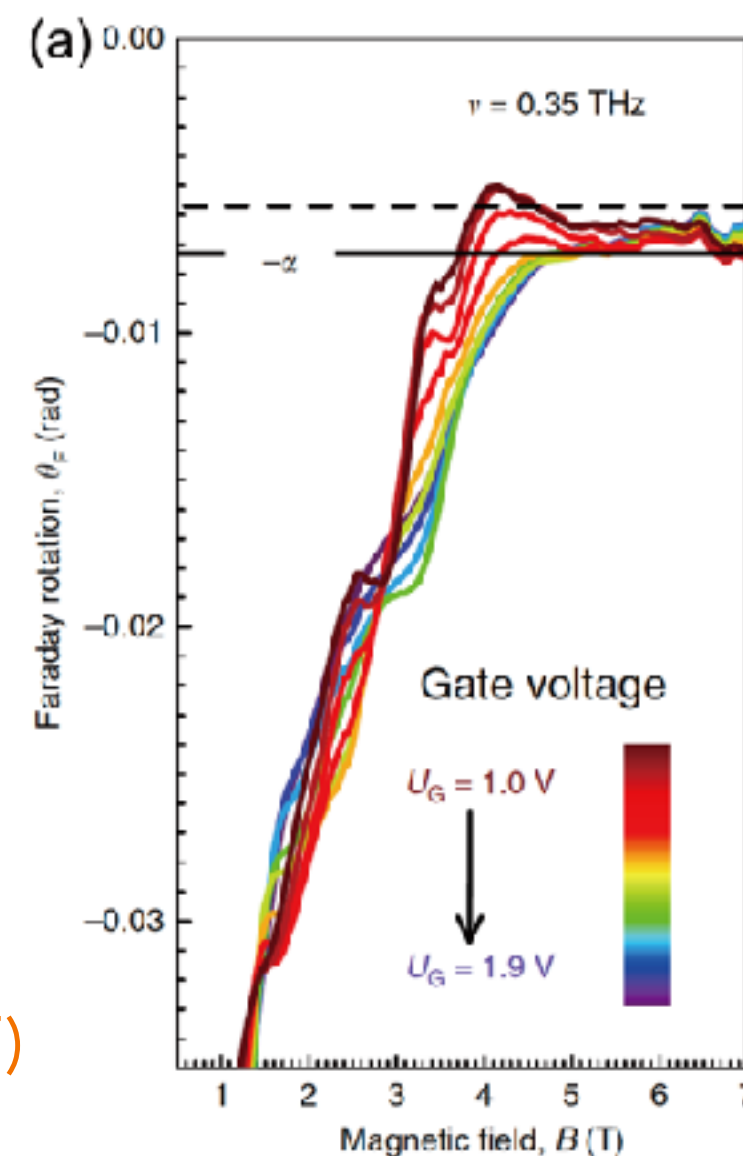
$$S = \frac{\alpha}{4\pi} \int dt d^3x \theta \underbrace{F_{\mu\nu} \widetilde{F}^{\mu\nu}}_{= 4\vec{E} \cdot \vec{B}} ; \quad \widetilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$$

✓ 様々な現象が生じる

- ファラデー回転

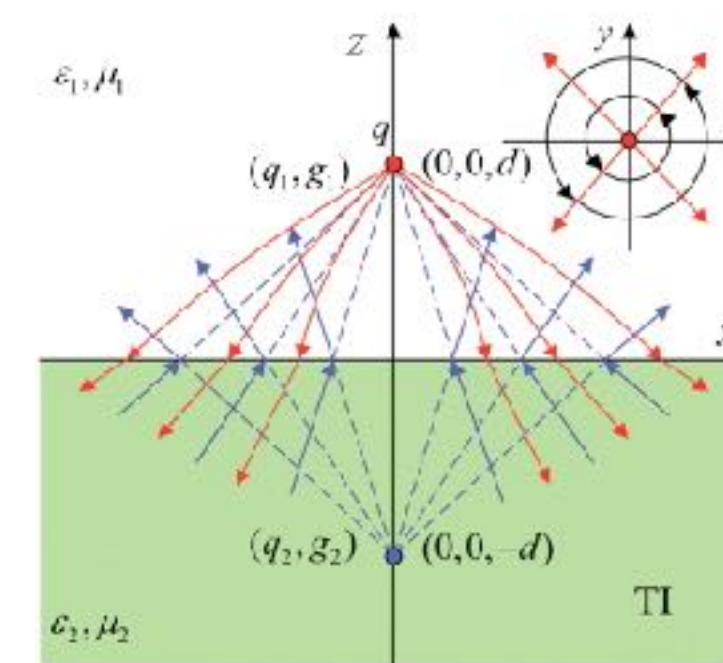
cf. cosmic birefringence
南さん、山田さんのトーク

V. Dziom+ Nat. Commun. 8, 15197 (2017)



- θ は静的なアクシオン項
- \vec{B} が誘電分極を誘起 $\vec{P} \propto \theta \vec{B}$
- \vec{E} が磁化を誘起 $\vec{M} \propto \theta \vec{E}$

- 鏡像モノポール効果



X. Qi+ Science 323, 1184 (2009)

まるでモノポールが存在するかの
ような磁場が顕出