フレーバー物理とハドロンの不定性

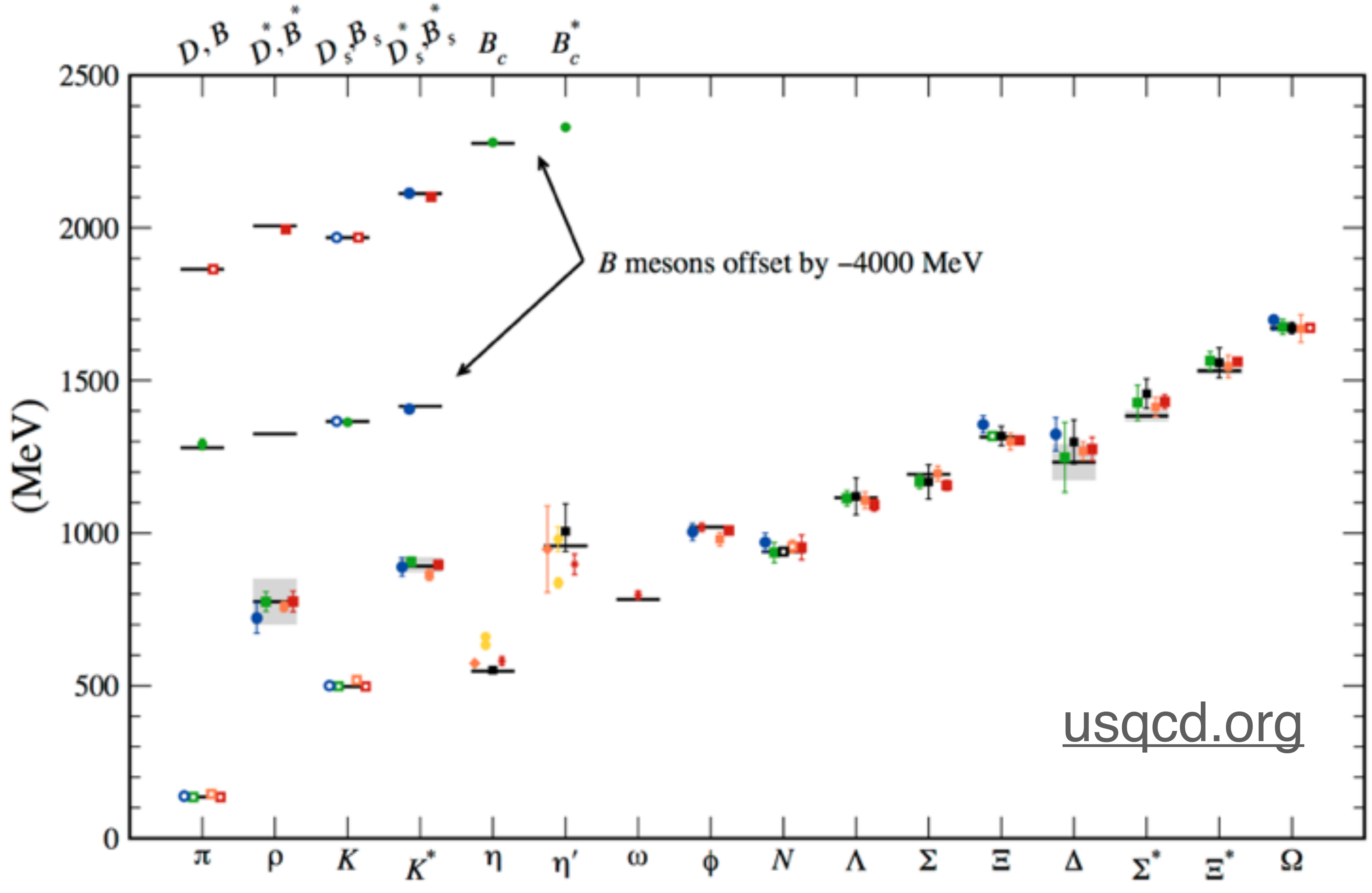
～格子QCDでは何ができて何ができないのか

橋本省二（KEK, 総研大）

@ 基研研究会　素粒子物理学の進展２０２１

2021年9月7日

格子QCD：量子色力学の「第一原理計算」

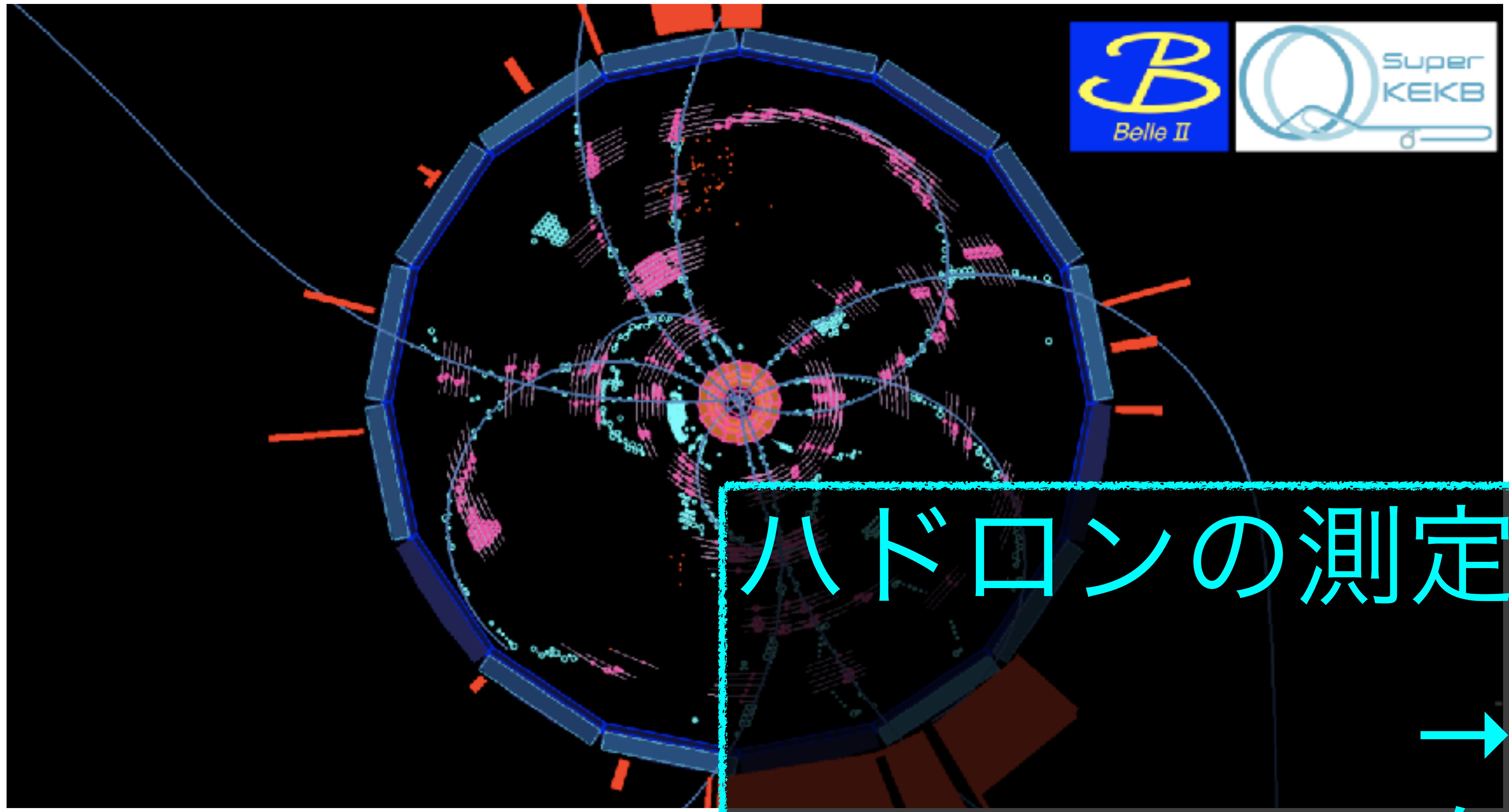


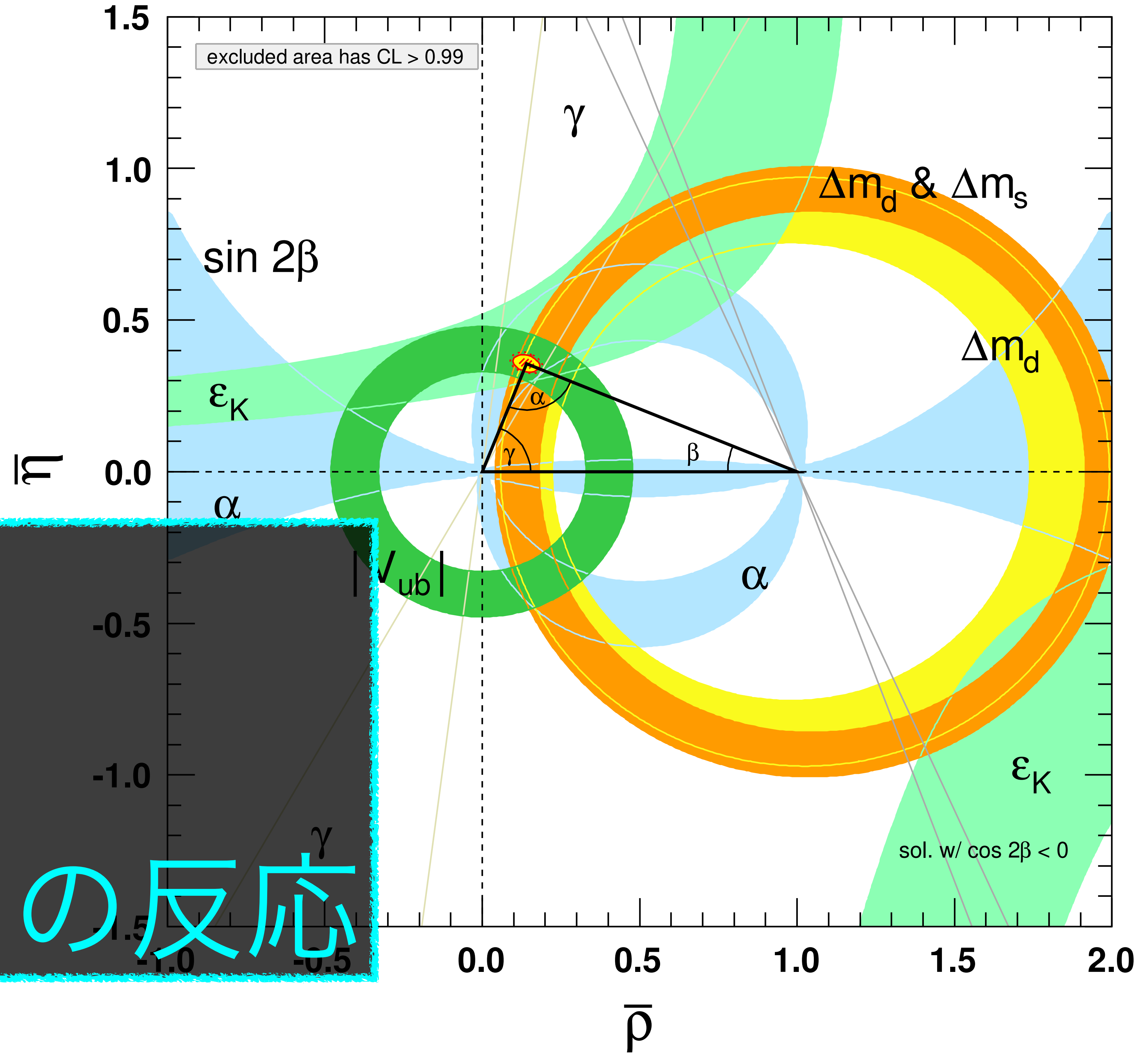
usqcd.org

ハドロン質量

さまざまな系統誤差を制御した精密計算が可能になった。実験値を再現。

フレーバー物理での要求：

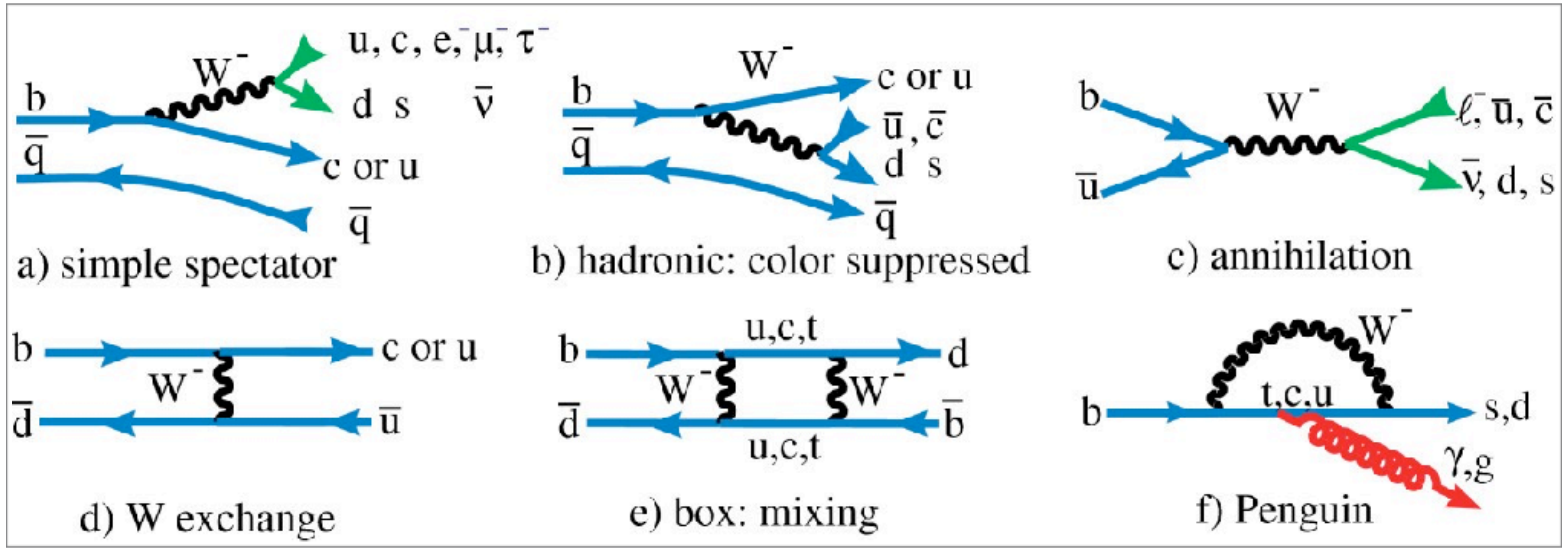




ハドロンの測定

→

クォークの反応



格子QCD の役割＝（精密な）翻訳

ハドロンの不定性：あらゆるところにある。

格子QCDでは何ができて何ができないのか

レビューではありません。

最新の数値等のレビューはこちら

- FLAG 2019: http://flag.unibe.ch/2019/

FLAG 2019 Flavour Lattice Averaging Group

アップデート (2021) 作業中

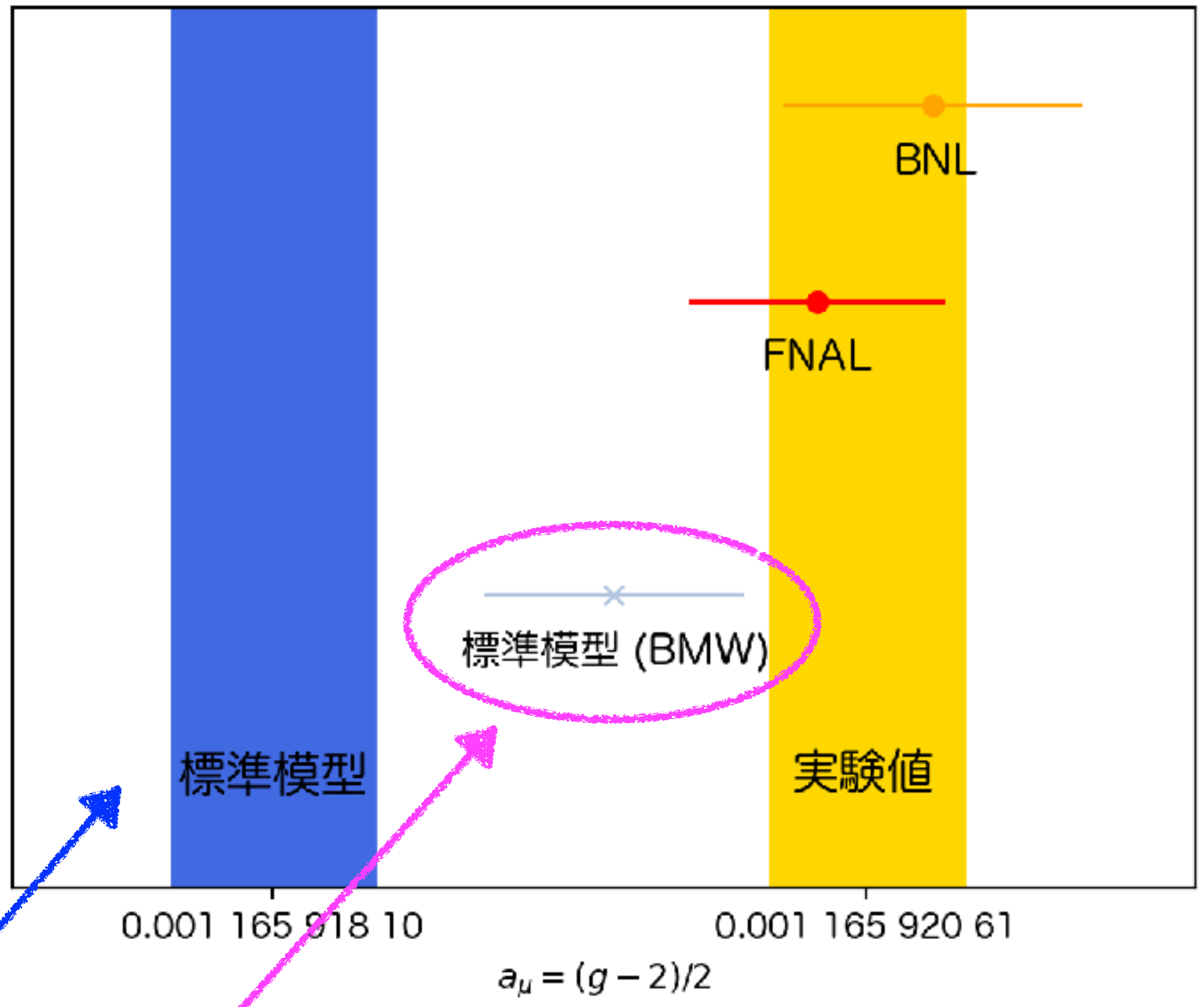
目次

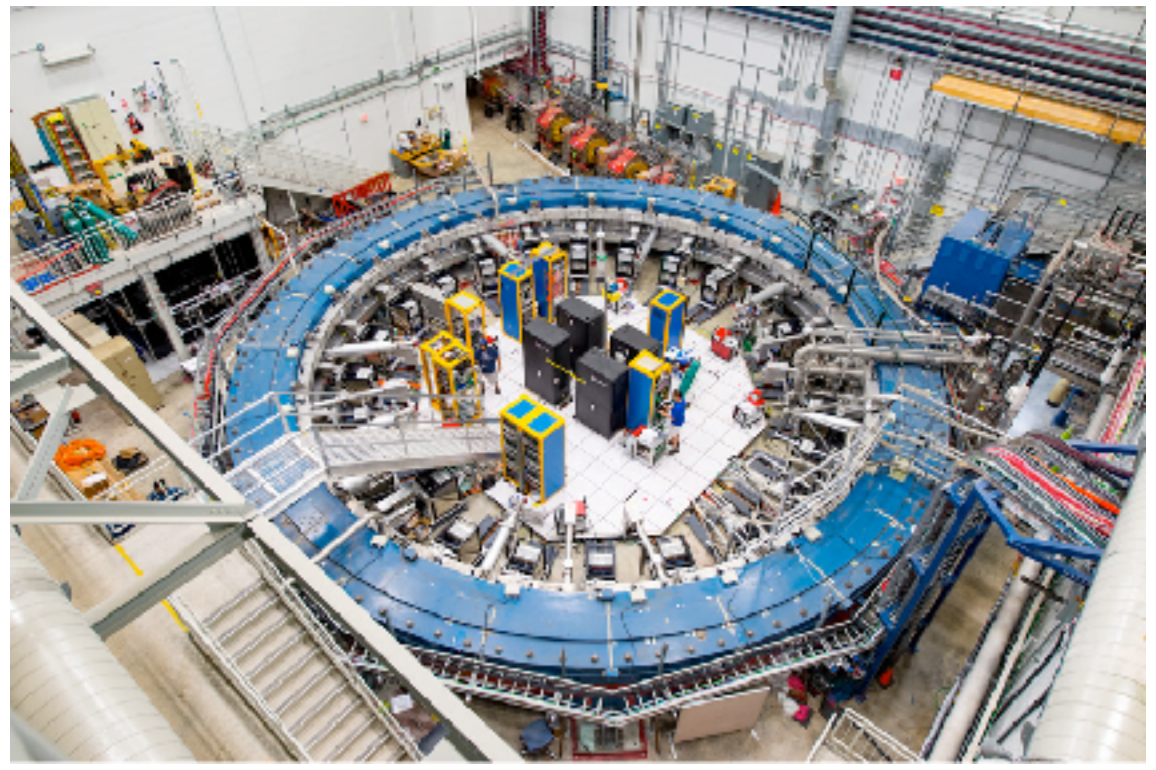
1. ミューオン *g*–2
2. K中間子崩壊 ε’/ε
3. 符号問題 or スペクトル関数
4. 包括的過程

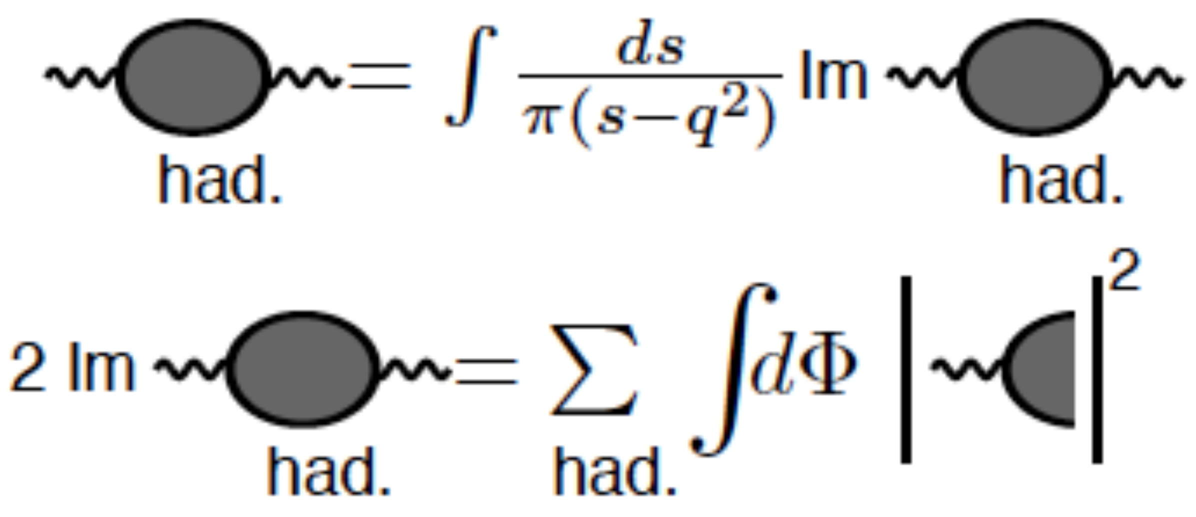
ミューオン g–2

ミューオン *g*–2

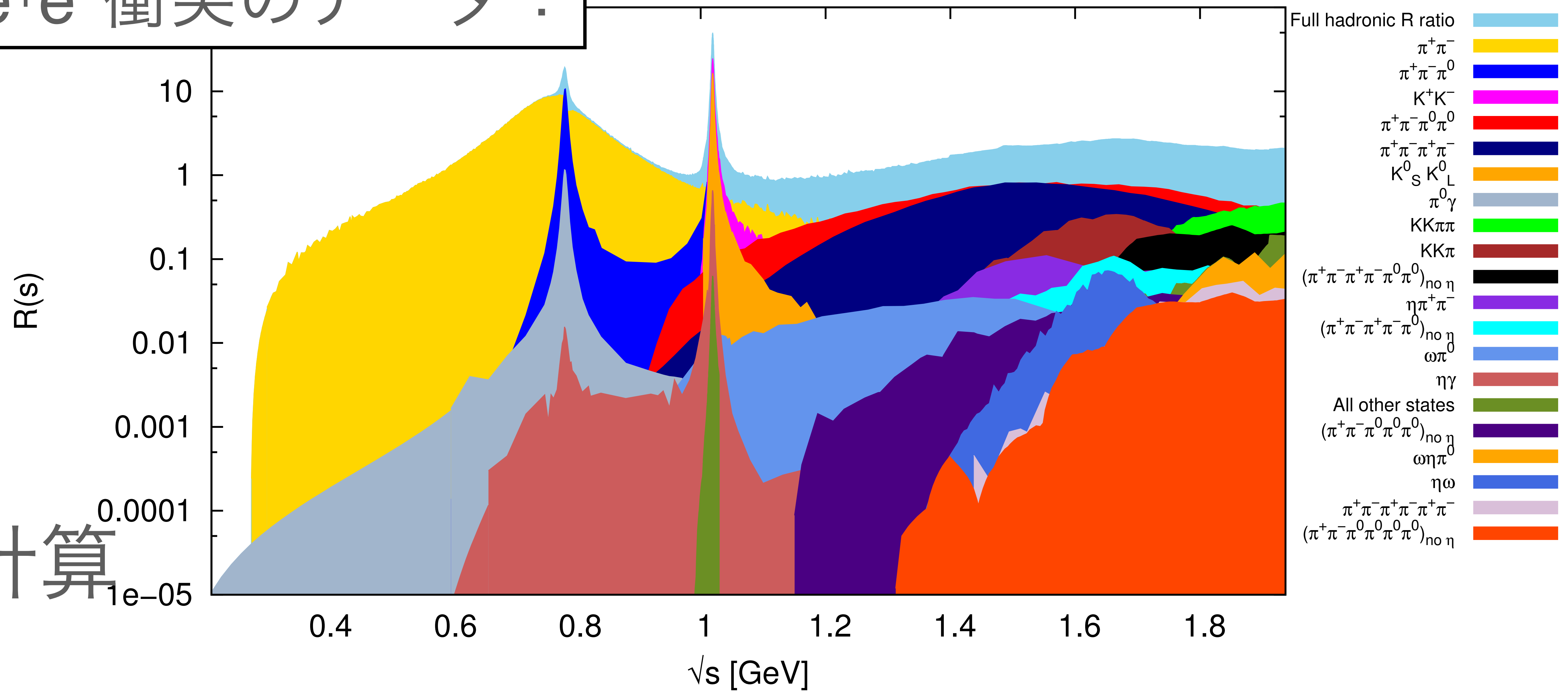
2021年4月







e+e−衝突のデータ：

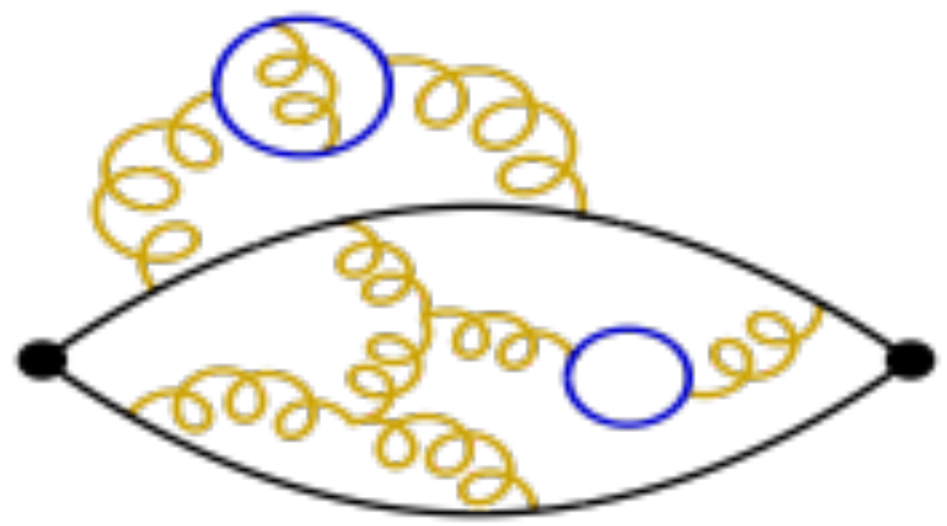


Muon g-2 Theory Initiative: 2006.04822
（分散関係を用いた評価）

BMW (2021) 初めて 1% を切った格子QCD計算

真空偏極

$$\Pi_{\mu\nu}(x) = \langle 0|T\{J_\mu(x)J_\nu(0)\}|0\rangle$$

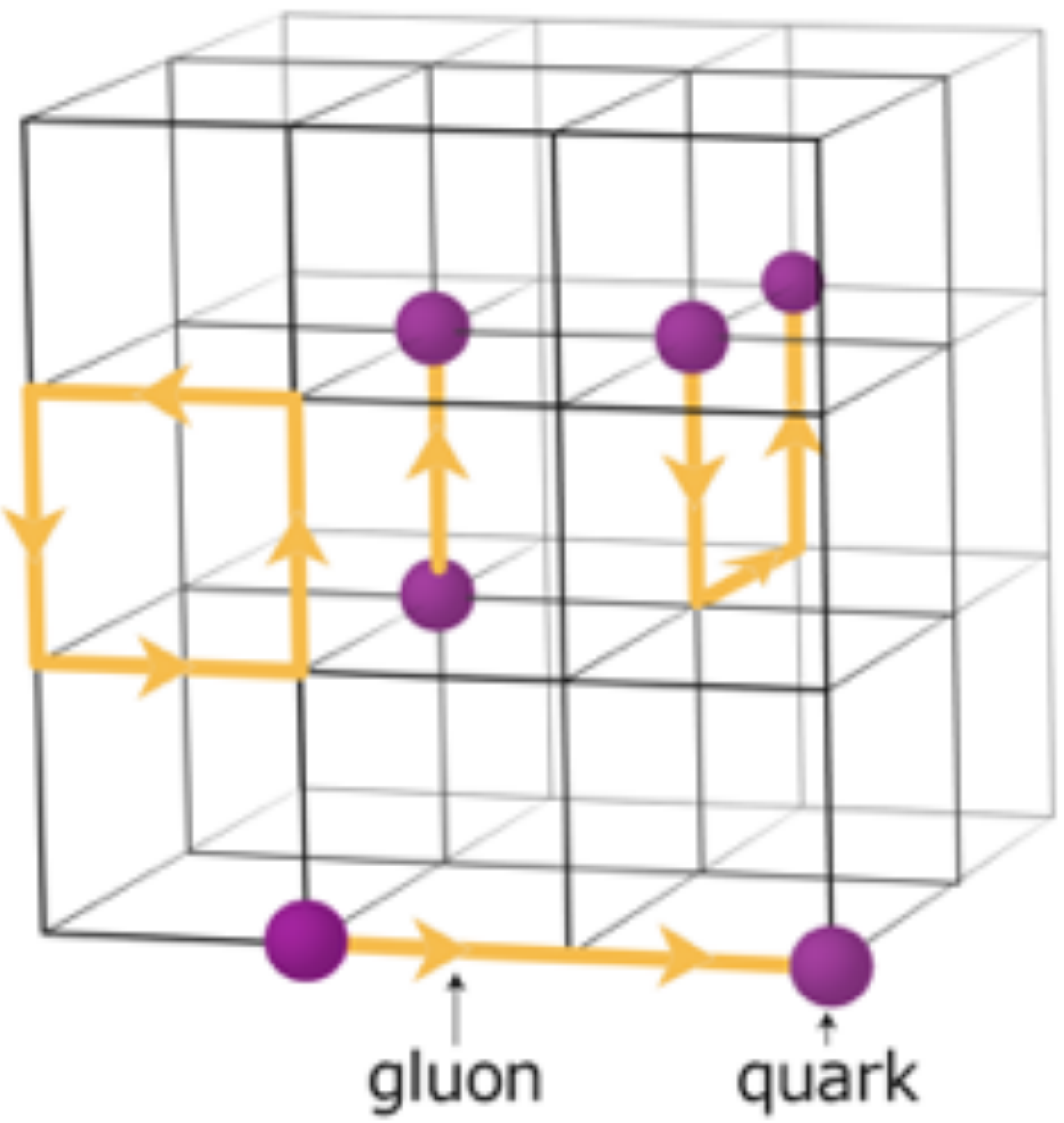


格子QCD計算は難しくない。（g-2 で必要なのは「空間的」に離れた相関）

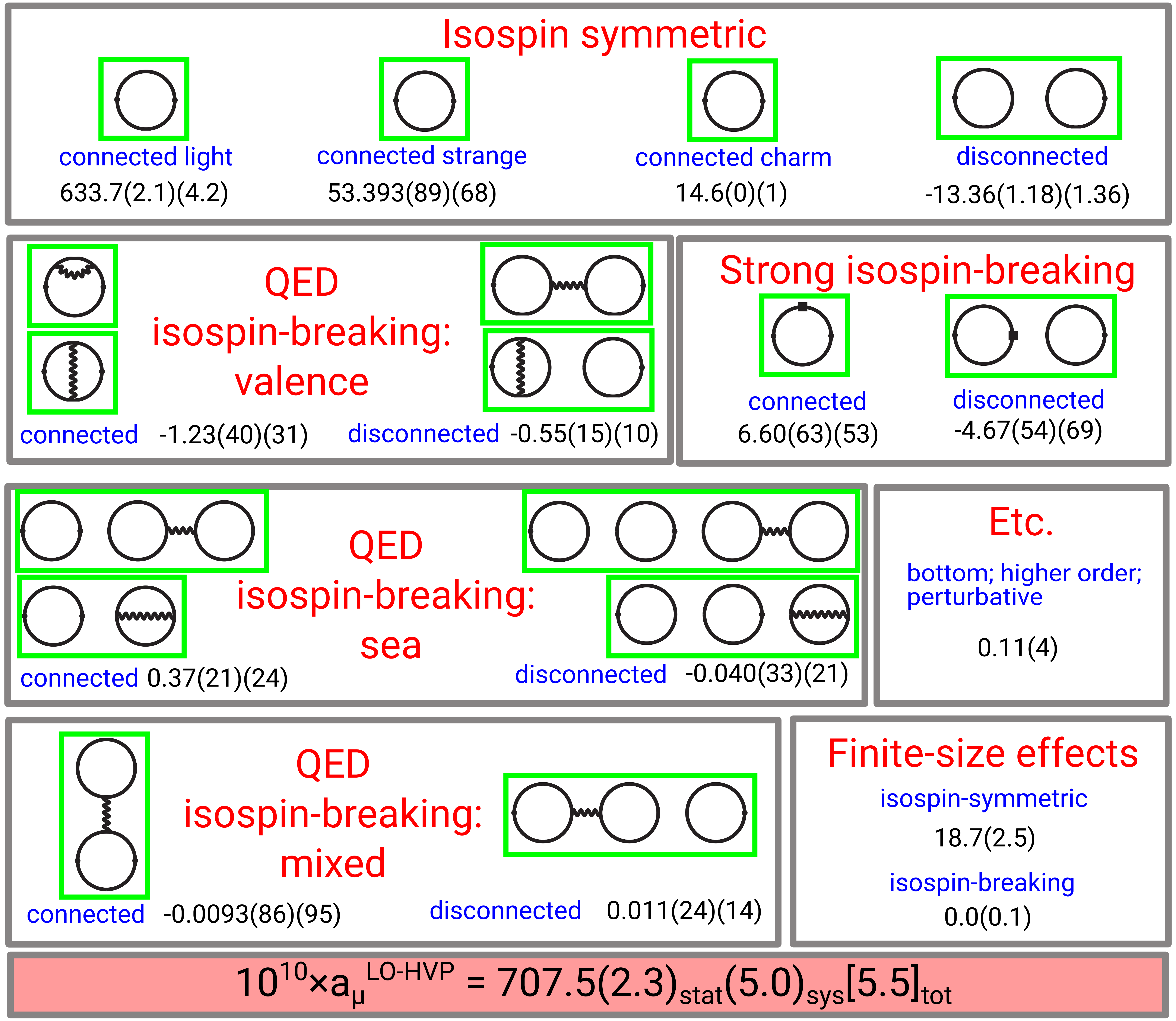
ただし、精密計算のためには

- 十分小さな格子間隔
- 十分大きな格子体積
- QED 効果 , アイソスピンの破れ
- すべてのダイアグラム

が必要。

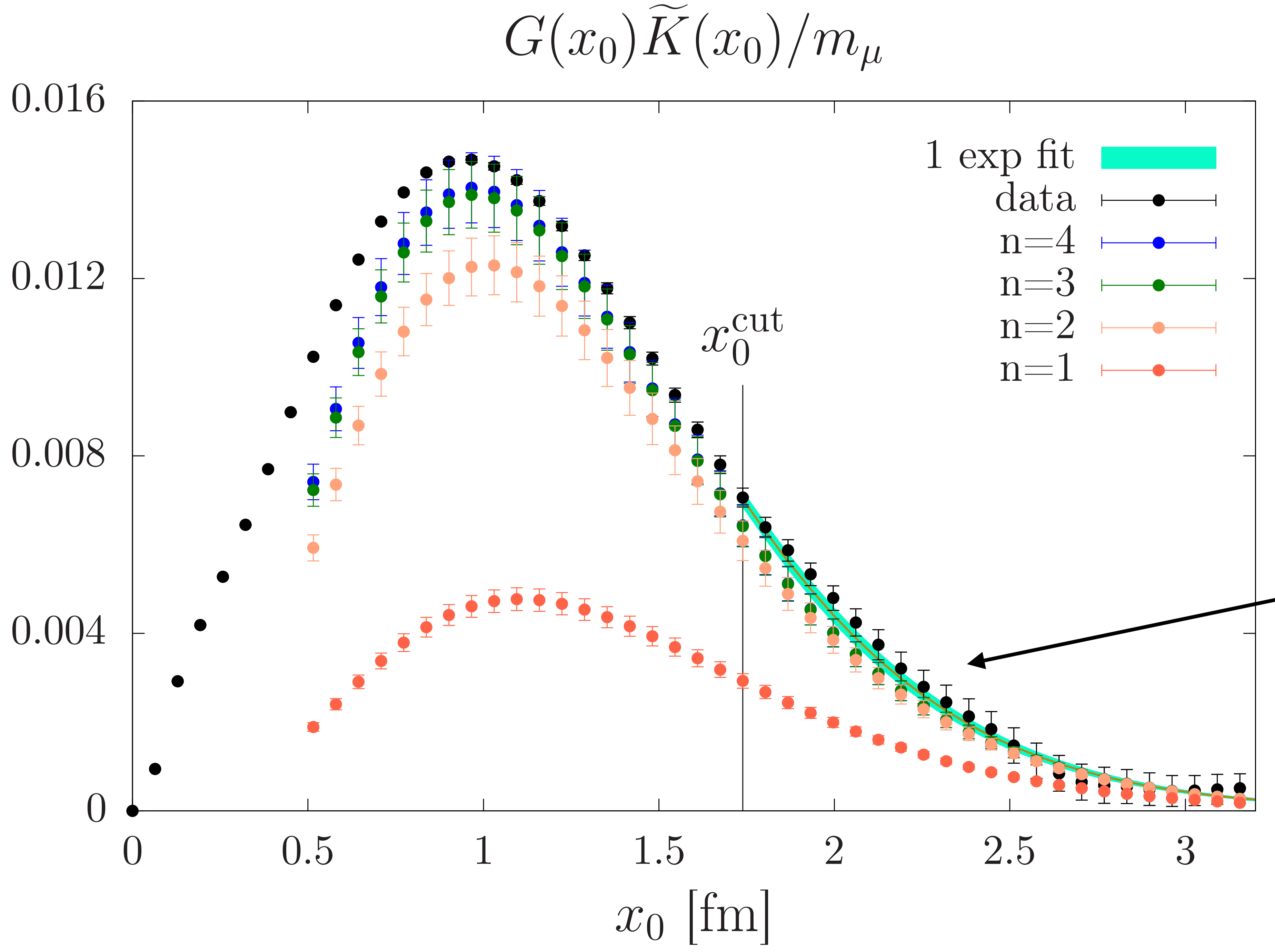


BMW collab., 2002.12347



最終的にもっとも誤差に寄与するのは “connected light” および 有限体積効果

座標空間表示 $$a_\mu^{\mathrm{HVP,LO}} = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \int_0^\infty dx_0 C(x_0)\tilde{K}(x_0)$$



Mainz (2008)
$m_\pi \sim 200$ MeV

（ある体積で ππ 状態を下から積み上げると）

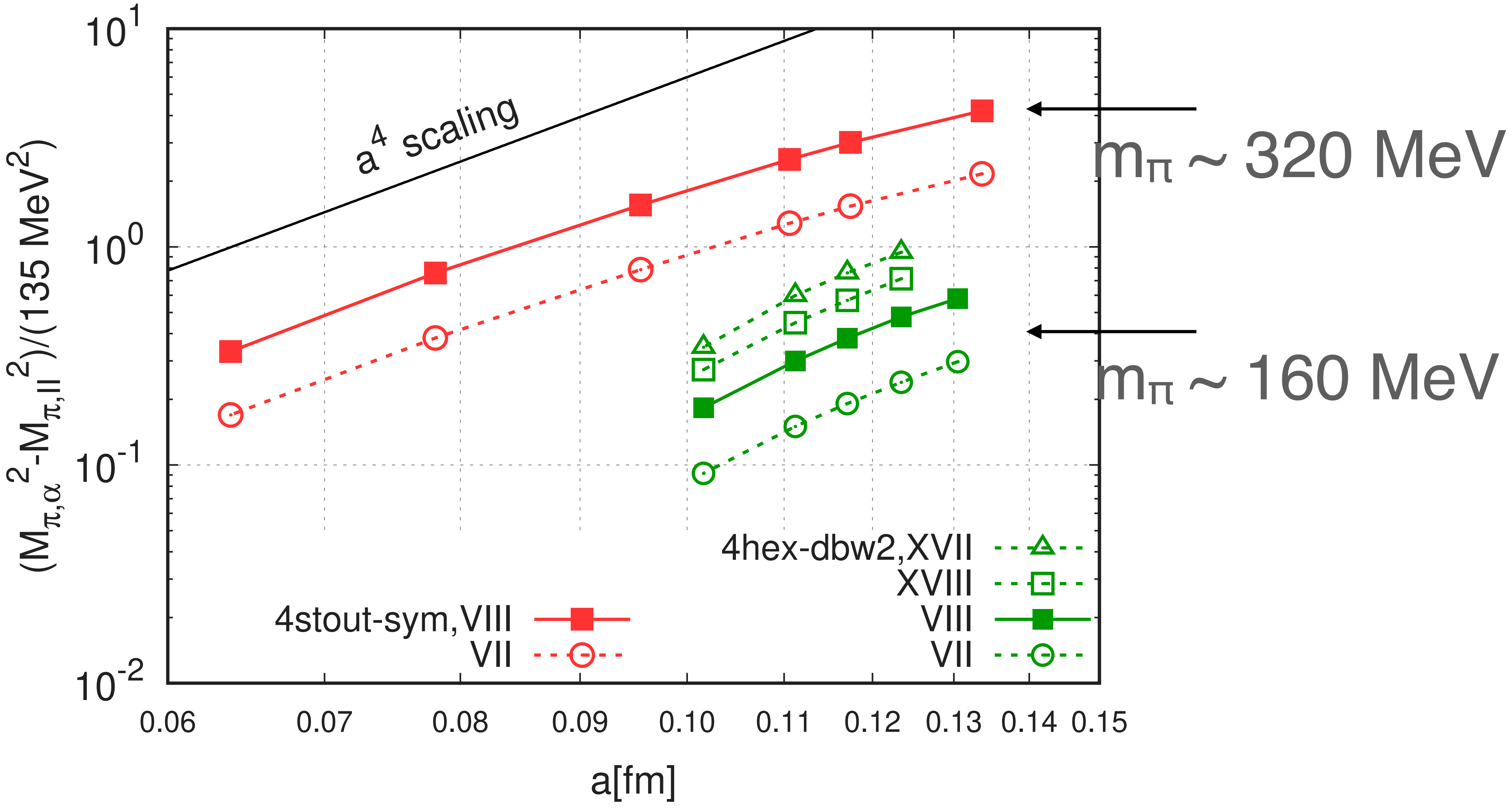
- 最大の寄与は 1 fm 近辺から。
- 対応する状態は ππ

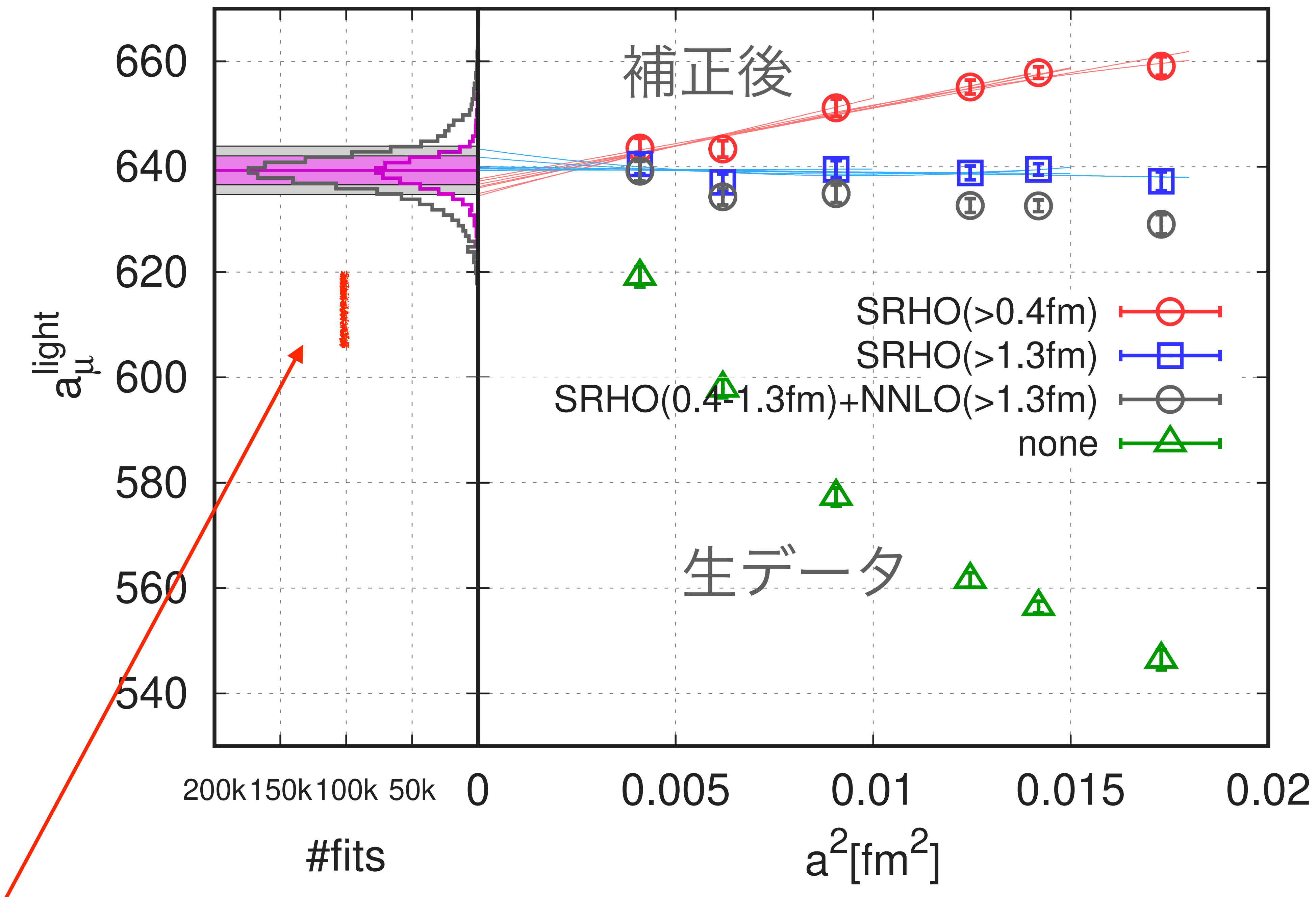
最大の問題は、有限体積効果。
ただし、離散化誤差と絡まる。

交互 (staggered) フェルミオンの問題

- １つのフレーバーに対して４つの「テイスト」。15 個の π 中間子。
- 離散化誤差があると縮退しない。m_π = 135 MeV のはずが …

BMW, 2002.12347





これに応じて有限体積効果の大きさも変わる。模型を使って補正。

従来の方法との食い違いの大きさ

El-Khadra @ Lattice 2021

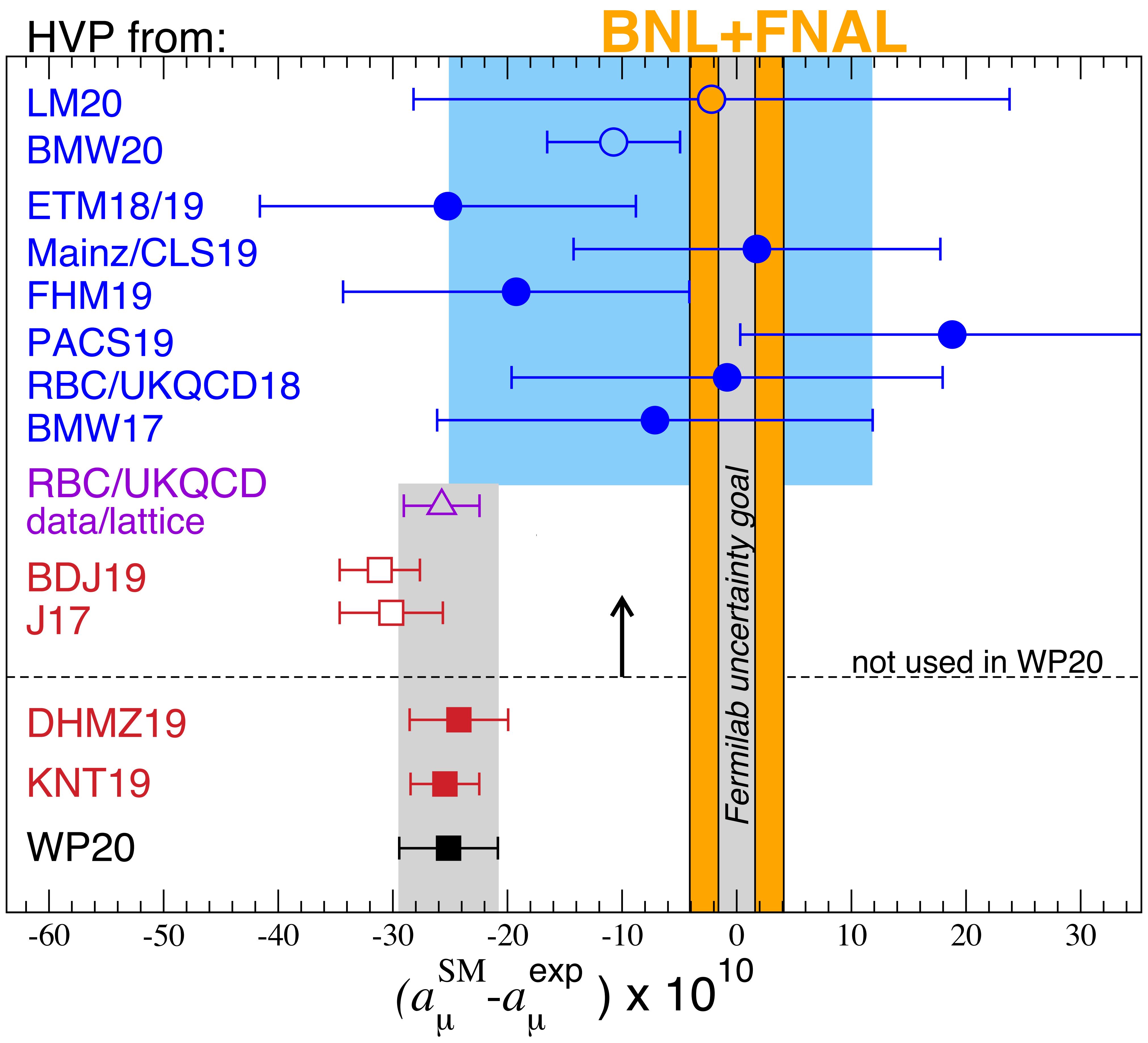
$$a_\mu^{\mathrm{SM}} \quad a_\mu^{\mathrm{HVP}} + \left[a_\mu^{\mathrm{QED}} + a_\mu^{\mathrm{Weak}} + a_\mu^{\mathrm{HLbL}}\right]$$

Lattice QCD + QED

hybrid: combine data & lattice

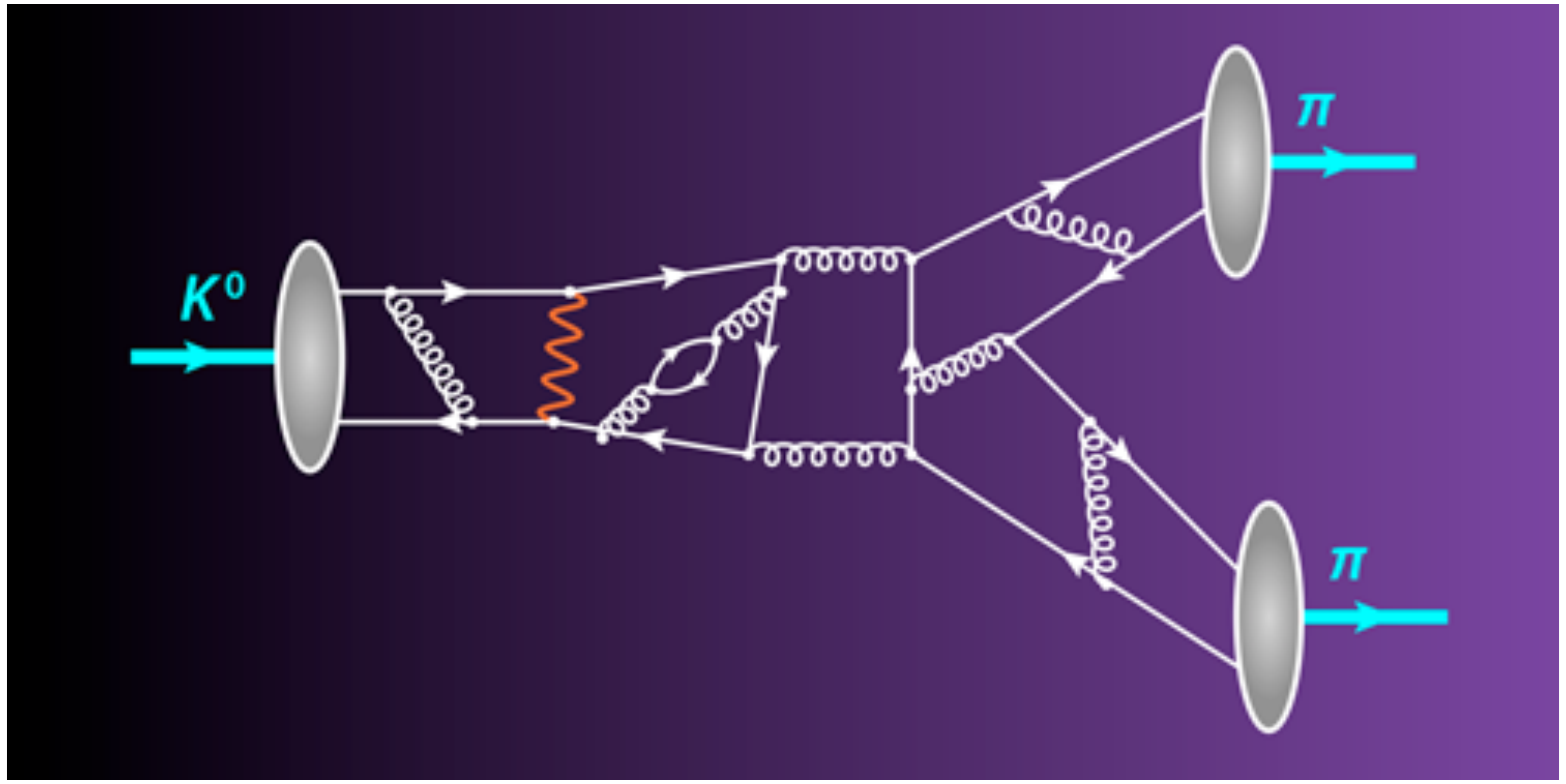
data driven

+ unitarity/analyticity constraints



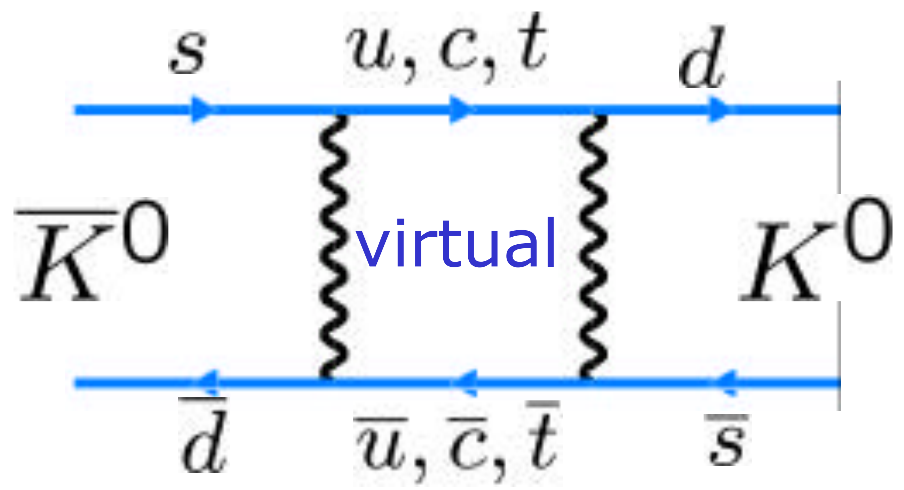
数年で他グループも追いつく見込み

K中間子崩壊 ε’/ε



K中間子崩壊における CP の破れ

間接的 : ε

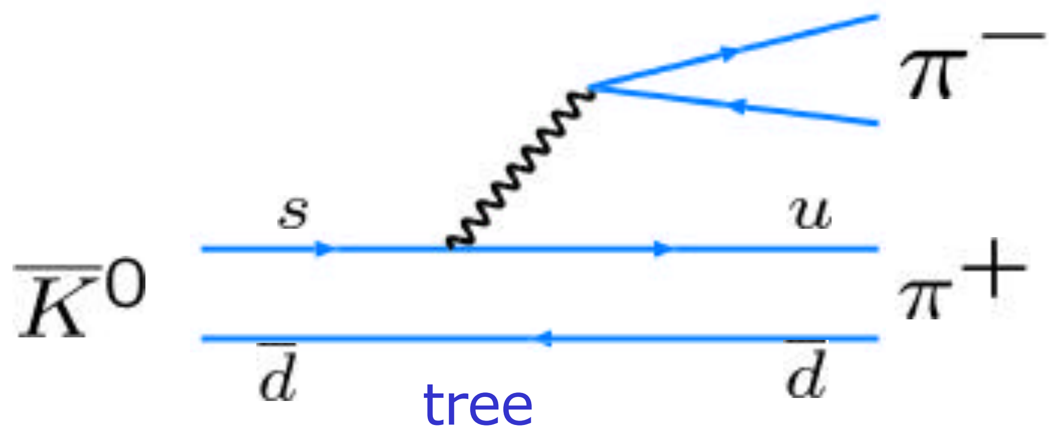


B_K

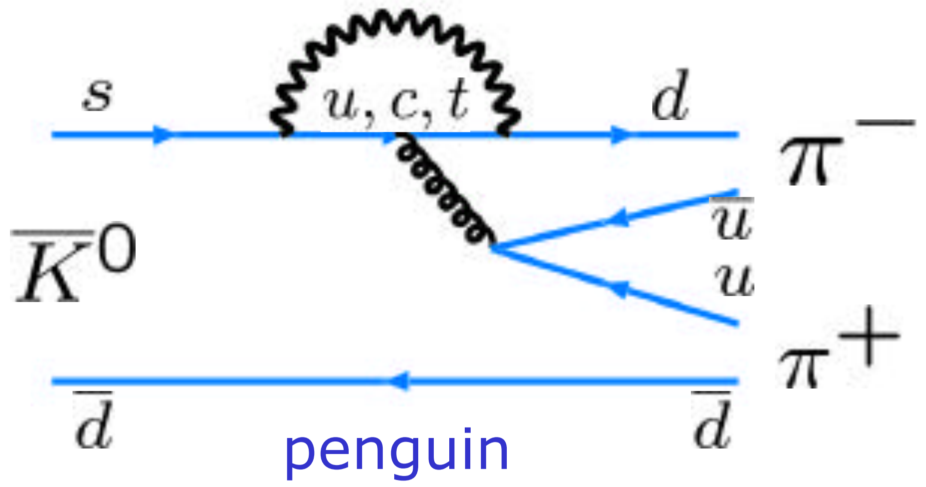
干渉

$$\overline{K}^0 \to \pi\pi \to K^0$$

直接的 : ε'/ε



干渉



複素位相：

1. 弱い相互作用
   - 小林益川行列
2. 強い相互作用
   - 散乱位相差

ππ 状態 (CP=+)

- アイソスピン I = 0, 2 の重ね合わせ

$$A_{K^0\to\pi^+\pi^-} = |A_0|e^{i\xi_0}e^{i\delta_0} + \frac{|A_2|}{\sqrt{2}}e^{i\xi_2}e^{i\delta_2},$$

$$A_{\bar{K}^0\to\pi^+\pi^-} = -|A_0|e^{-i\xi_0}e^{i\delta_0} - \frac{|A_2|}{\sqrt{2}}e^{-i\xi_2}e^{i\delta_2},$$

- 強い相互作用に起因する位相差 δ_0, δ_2
- 再散乱の効果も含む。

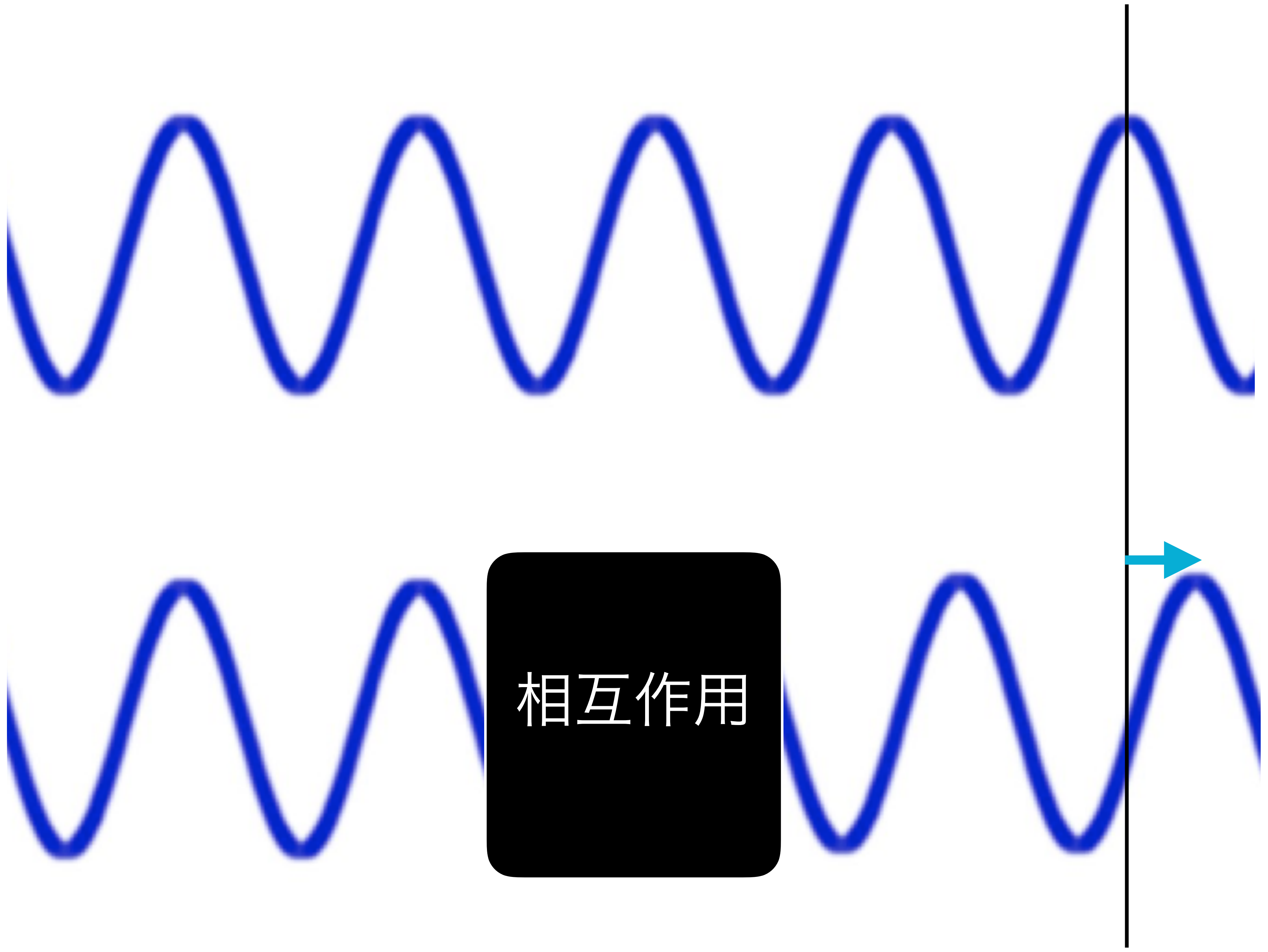
格子計算への要求

- I=0, 2 の状態両方について、tree, penguin など、H_W のすべての項の寄与を含むこと。
- 散乱位相差 δ_0, δ_2 を計算できること。

結果的に、ΔI = 1/2 則 ($|A_0/A_2| >> 1$) も再現できるはず。

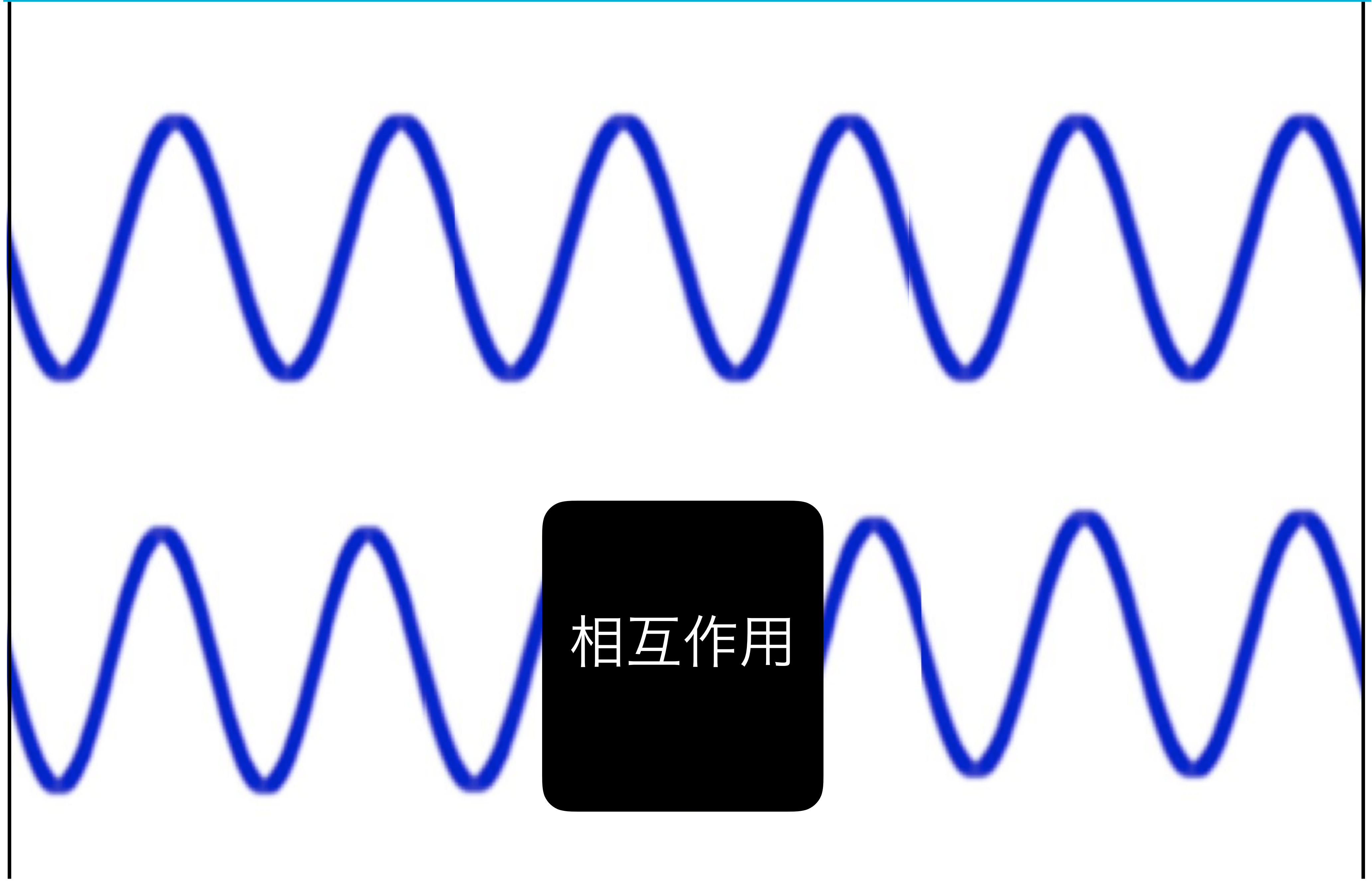
散乱位相差の格子計算？

- そもそも有限体積格子では漸近状態を作れないが …



Lüscher の方法

位相のずれ：周期的境界条件を満たすには、波長がずれる必要がある。エネルギーの変化から位相差を読み取る。



$$E_{\pi\pi} \gtrless E_{\pi} + E_{\pi} \quad ?$$

立入禁止定理 (Maiani-Testa)

虚時間の格子計算

$$C(t_f, t_i) = \langle \mathcal{O}_{\pi\pi}(t_f) H_W(0) \mathcal{O}_K(t_i) \rangle$$

$$\Downarrow$$

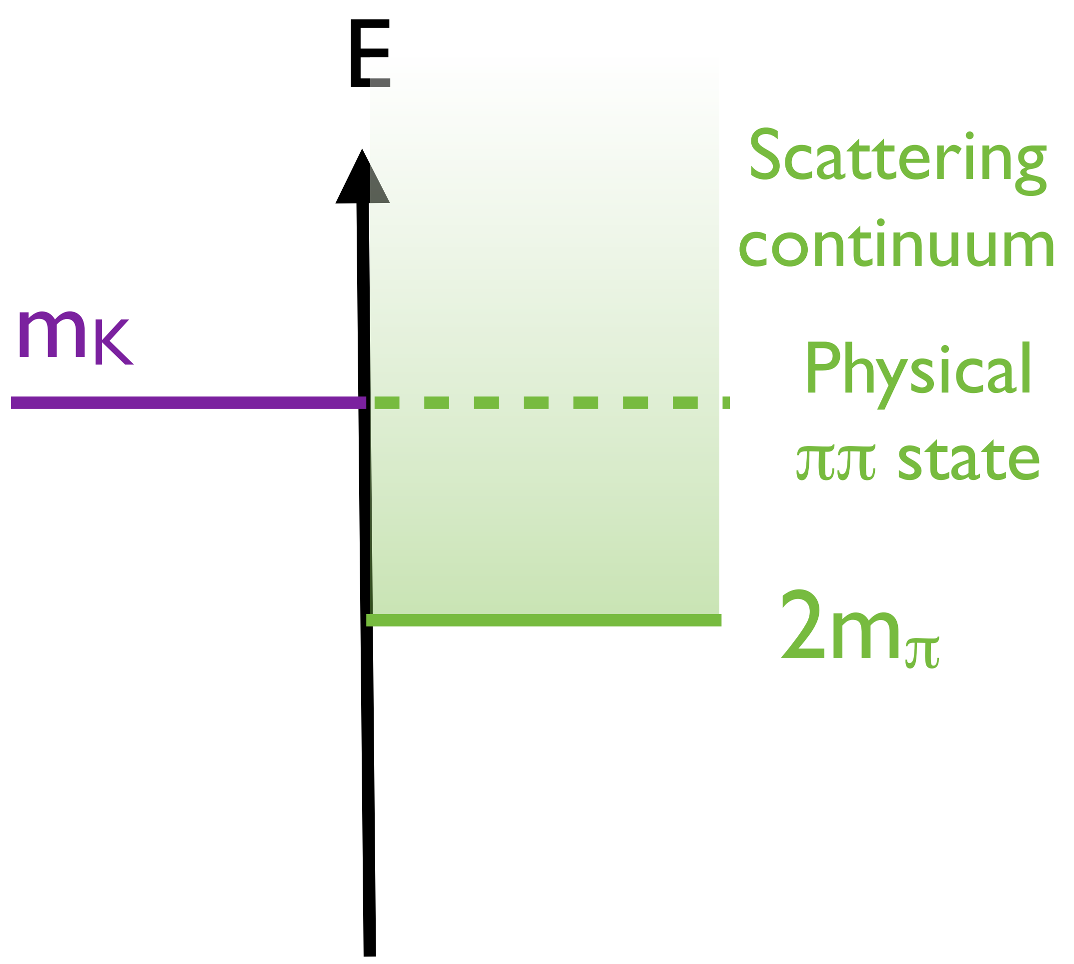
$$\langle \pi(\boldsymbol{p}) \pi(-\boldsymbol{p}) | H_W | K(\boldsymbol{0}) \rangle$$

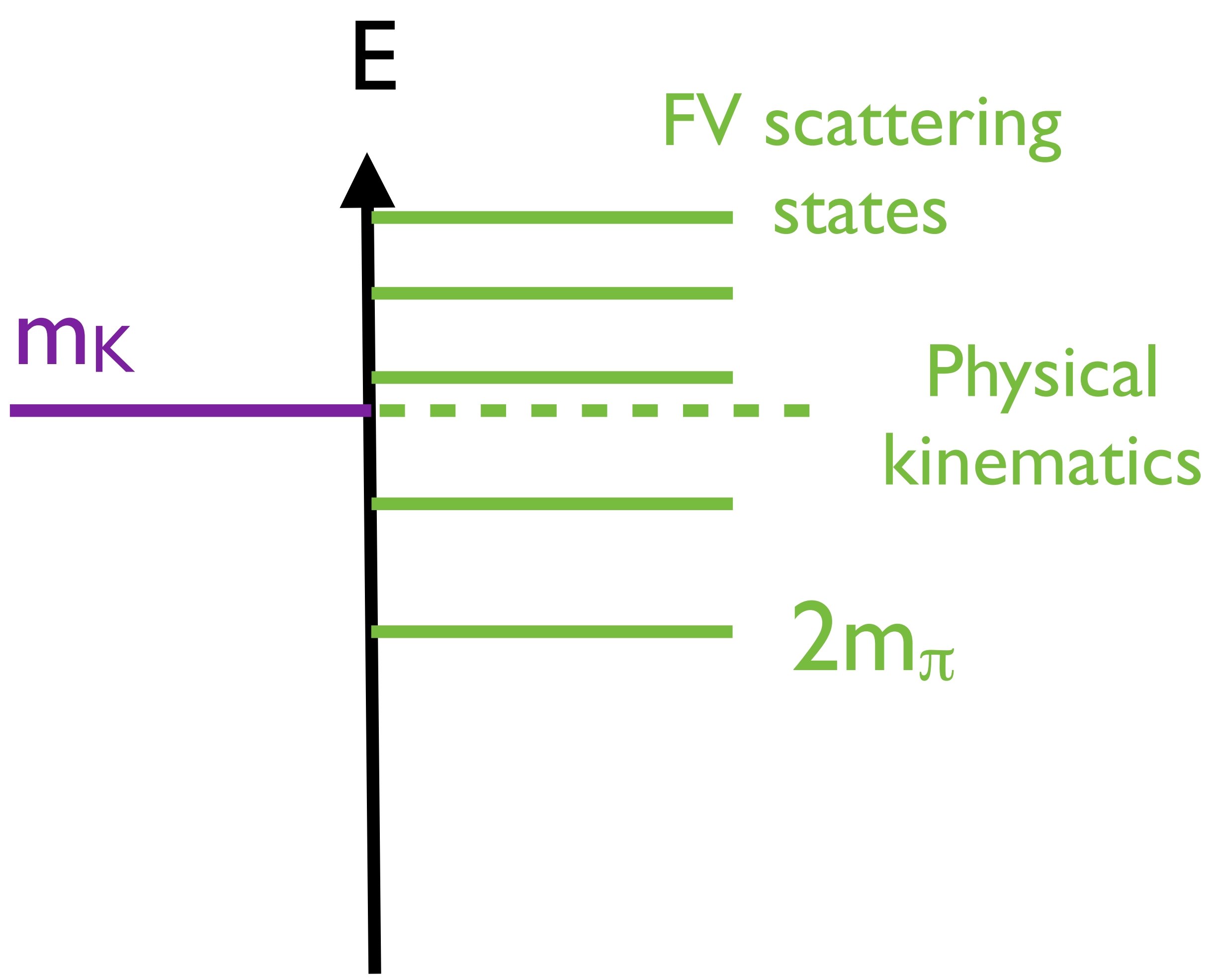
とはならない。他に運動量の小さい（したがってエネルギーの小さい）状態が多数あるから。

$$\langle \pi(\boldsymbol{0}) \pi(-\boldsymbol{0}) | H_W | K(\boldsymbol{0}) \rangle$$

有限体積で、始状態のエネルギー m_K に合わせるには、

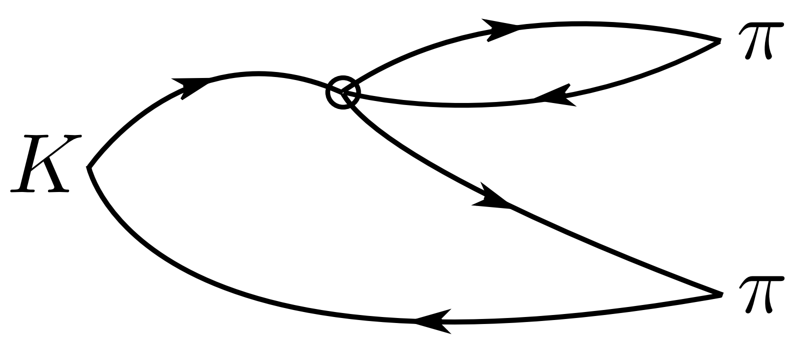
- 体積を調節する。
- 境界条件を工夫して、運動量の小さい状態が出ないようにする。

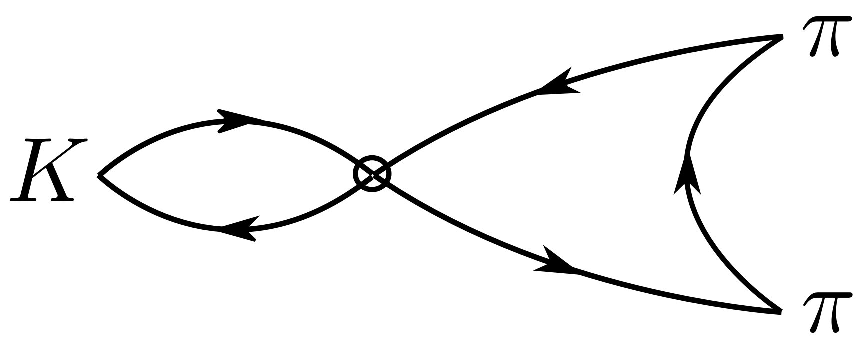


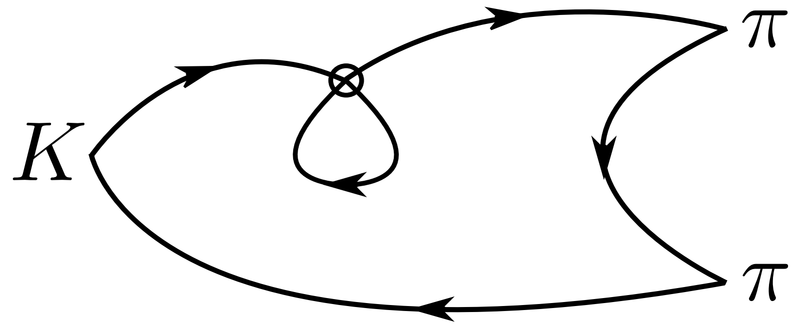


RBC-UKQCD collab. (2004.09440)

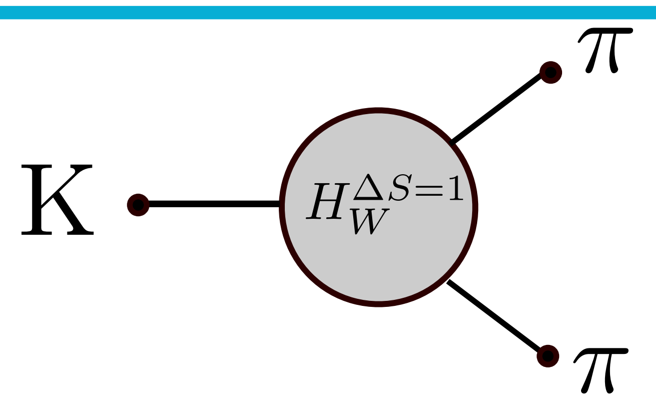
- u, d, s クォークを含む
- 一辺 4.6 fm の格子
- Gパリティ境界条件 ($m_K = E_{\pi\pi}$)







Kelley @ Lattice 2021



renormalization matrix (mixing)
Use RI-SMOM
convert to MSbar perturbatively

LL finite-volume correction

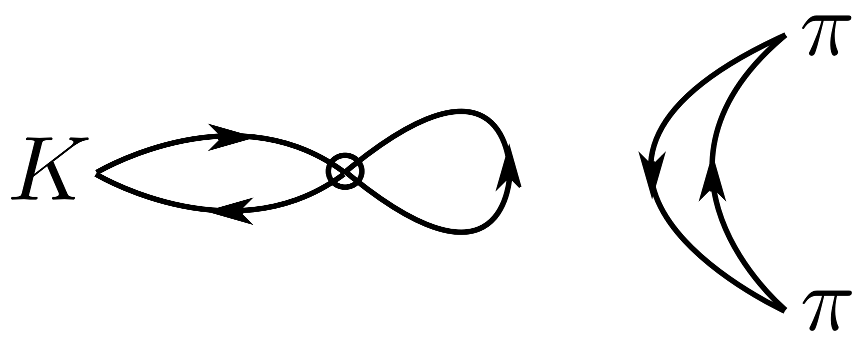
$$A^I = F\frac{G_F}{\sqrt{2}}V_{ud}^* V_{us}\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{7}\left[\left(z_i(\mu)+\tau y_i(\mu)\right) Z_{ij}^{\mathrm{lat}\to\overline{\mathrm{MS}}} M_j^{I,\,\mathrm{lat}}\right]$$

perturbative Wilson coeffs.

$M_j^{I,lat} = \langle(\pi\pi)_I|Q_j|K\rangle$ (lattice)

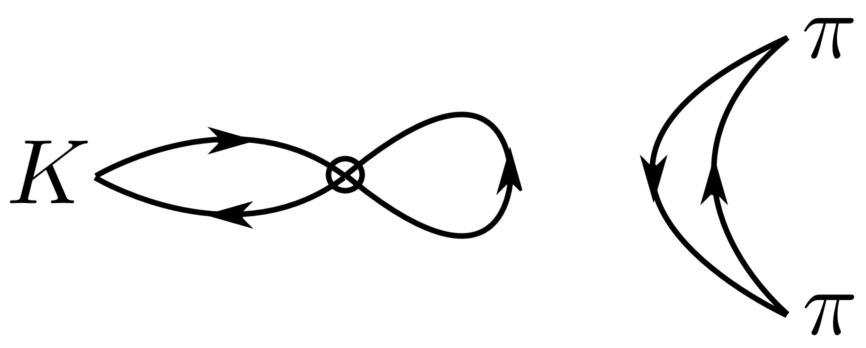
10 effective four-quark operators

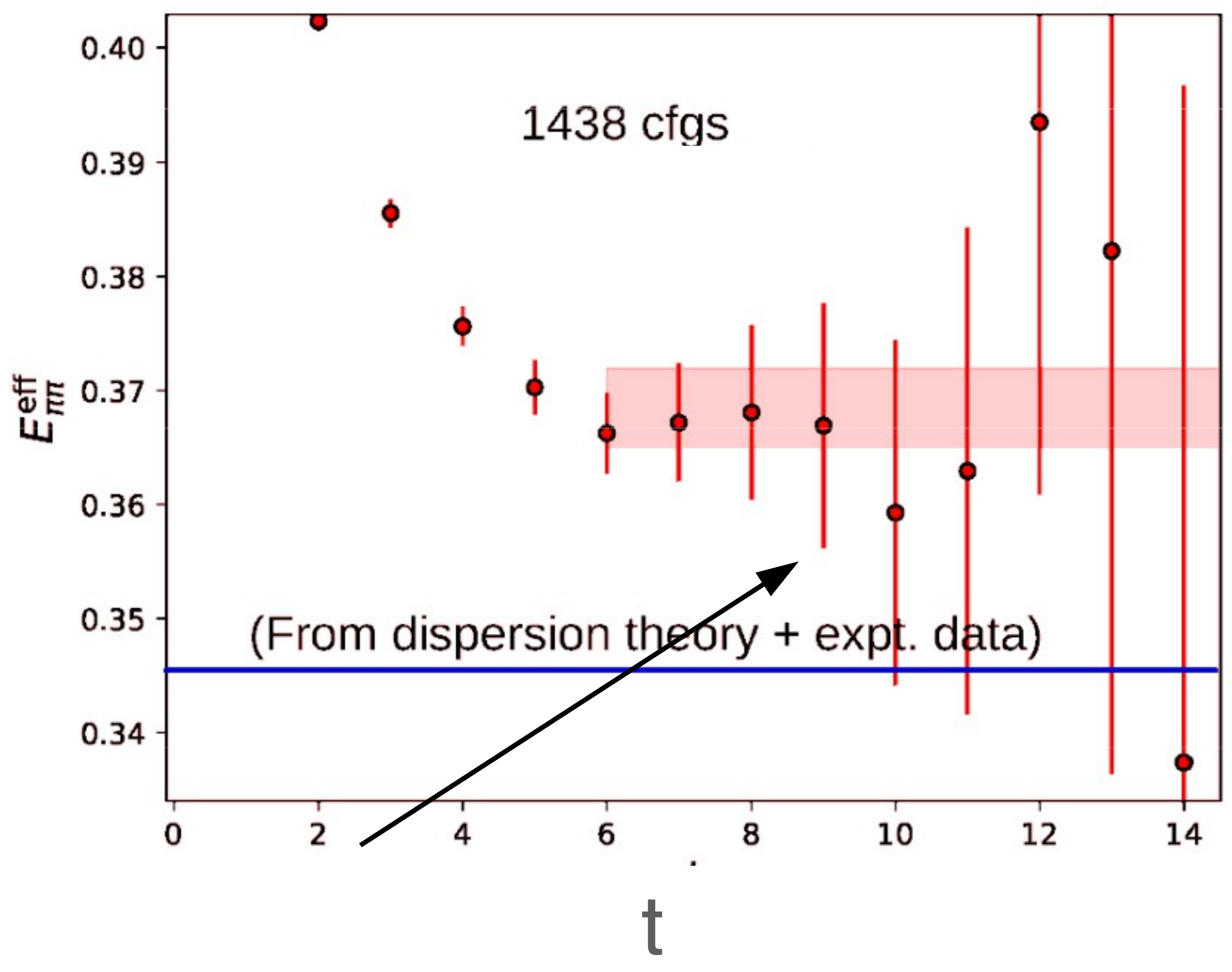
$$\tau = -\frac{V_{ts}^* V_{td}}{V_{us}^* V_{ud}} = 0.0014606 + 0.00060408i$$



I = 0 にのみ寄与

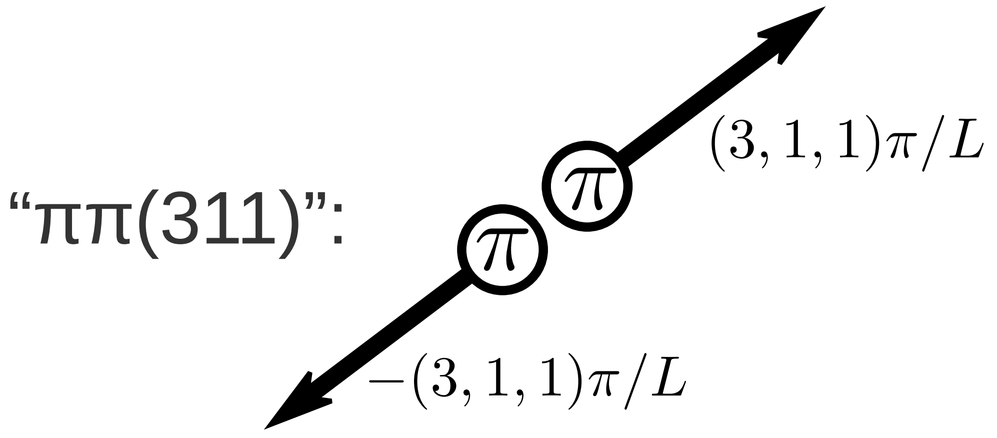
I = 0 の問題：統計誤差が大きい



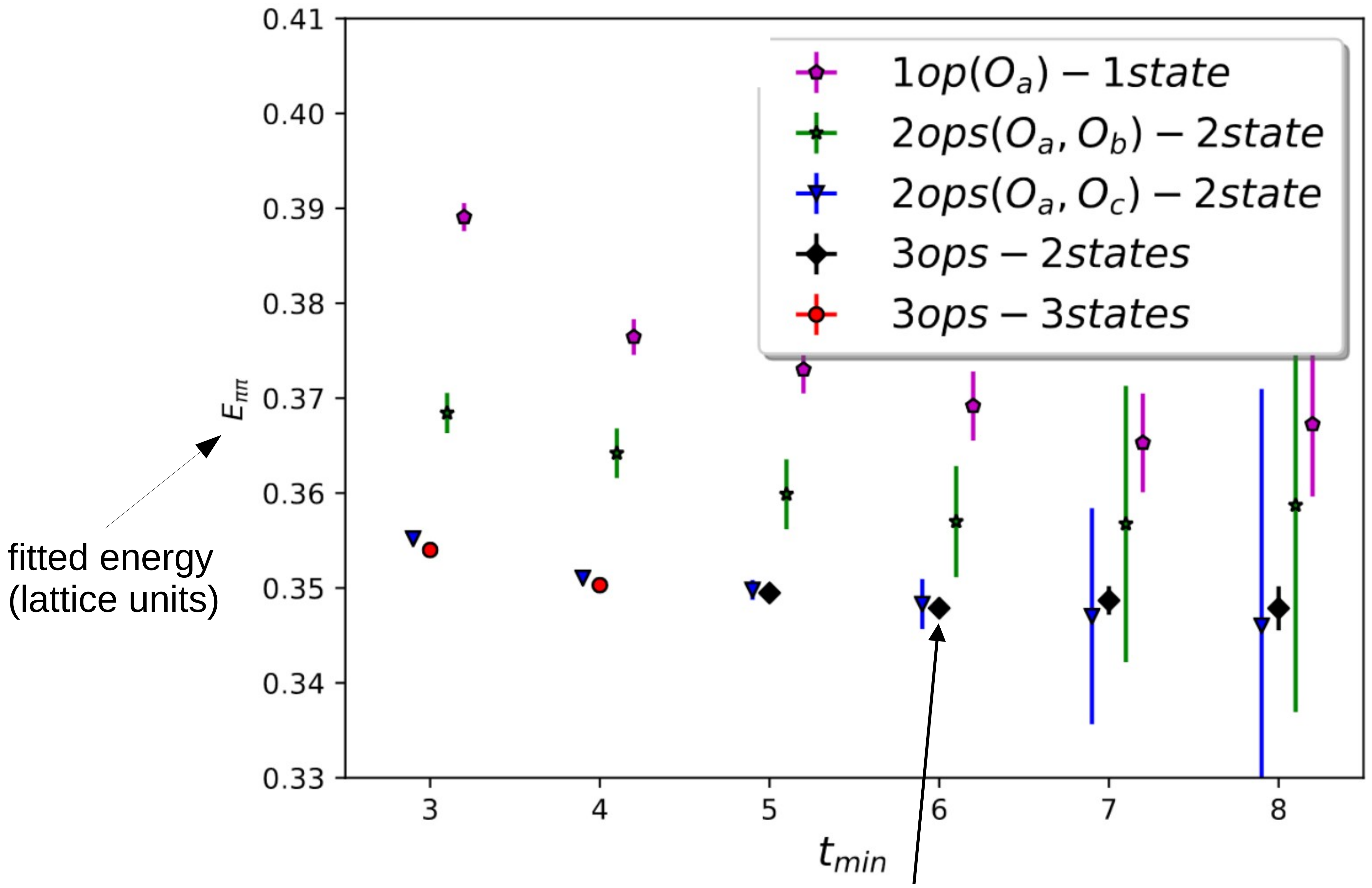


散乱位相差の実験値と合わない (2015)

演算子を追加して状態の同定を改善 (2021)



$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}u + \bar{d}d)$$

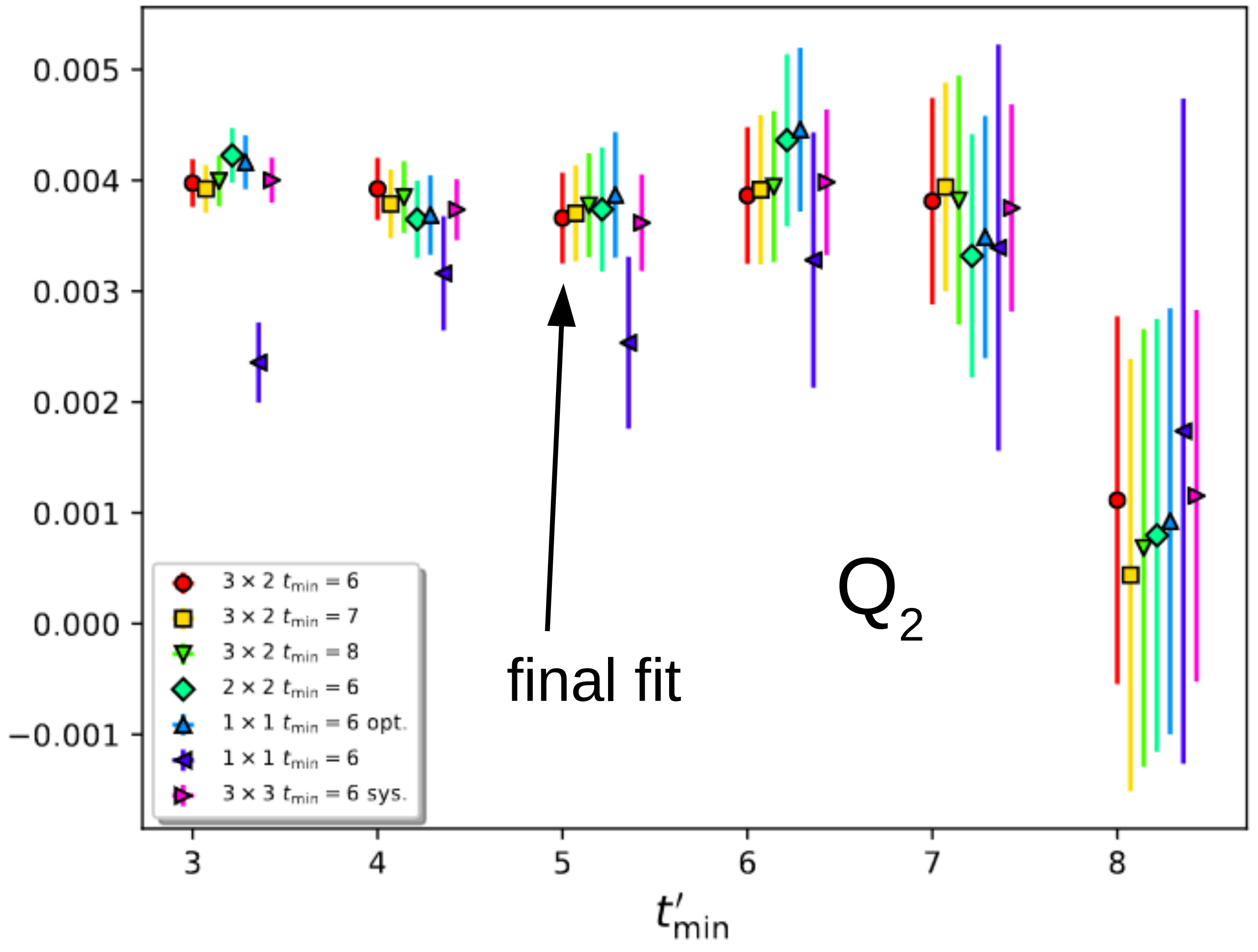


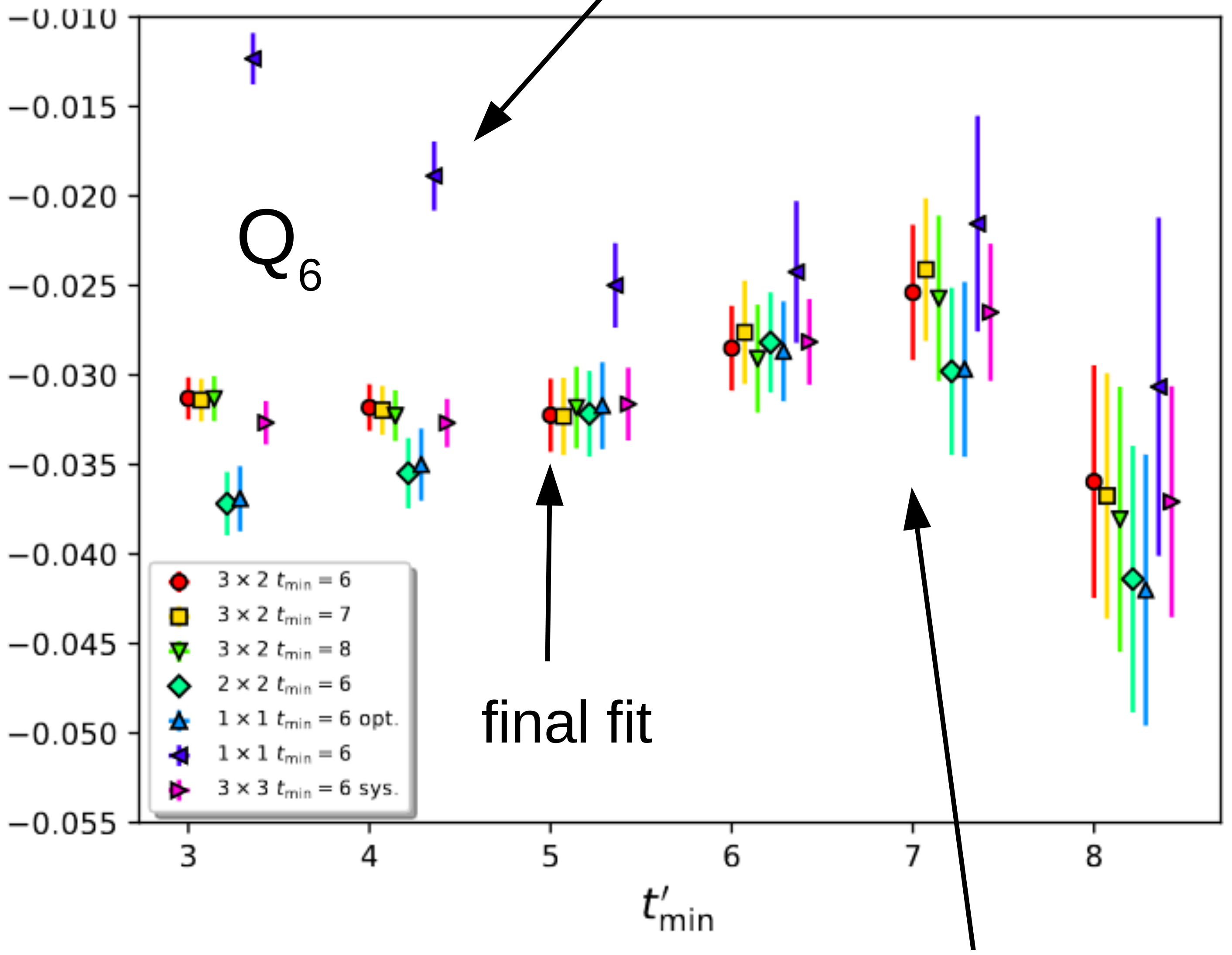
大幅に改善 (2021)

行列要素 $\langle \pi(\boldsymbol{p})\pi(-\boldsymbol{p})|H_W|K(\mathbf{0})\rangle$

little indication of exc. stat. cont. for Q_2

exc. state contam. with 1op (this was t'_{min} for 2015 work)

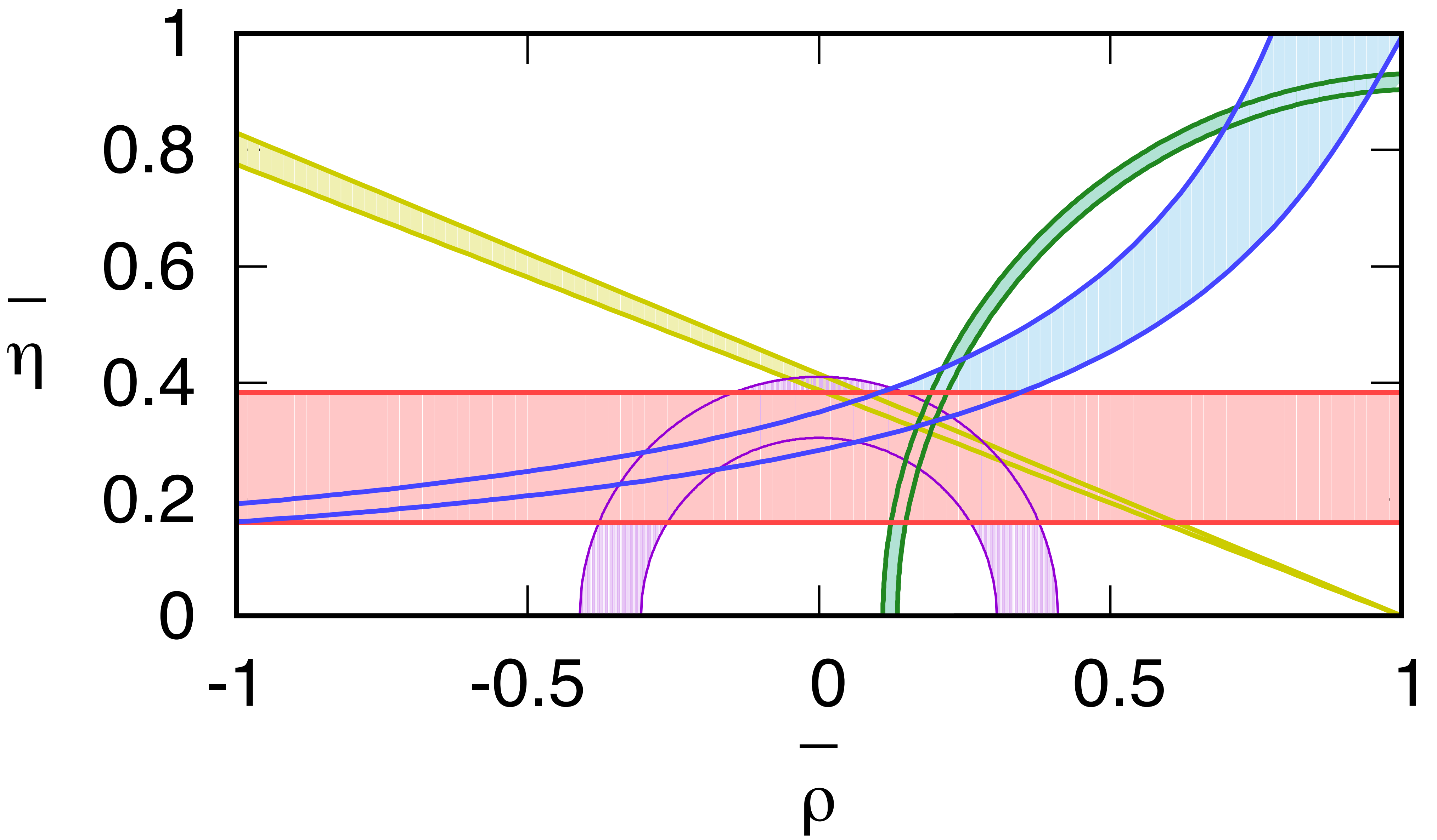




$$\mathrm{Re}\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right) = \mathrm{Re}\left\{\frac{i\omega e^{i(\delta_2-\delta_0)}}{\sqrt{2}\varepsilon}\left[\frac{\mathrm{Im}A_2}{\mathrm{Re}A_2} - \frac{\mathrm{Im}A_0}{\mathrm{Re}A_0}\right]\right\}$$

$$= 0.00217(26)(62)(50)$$

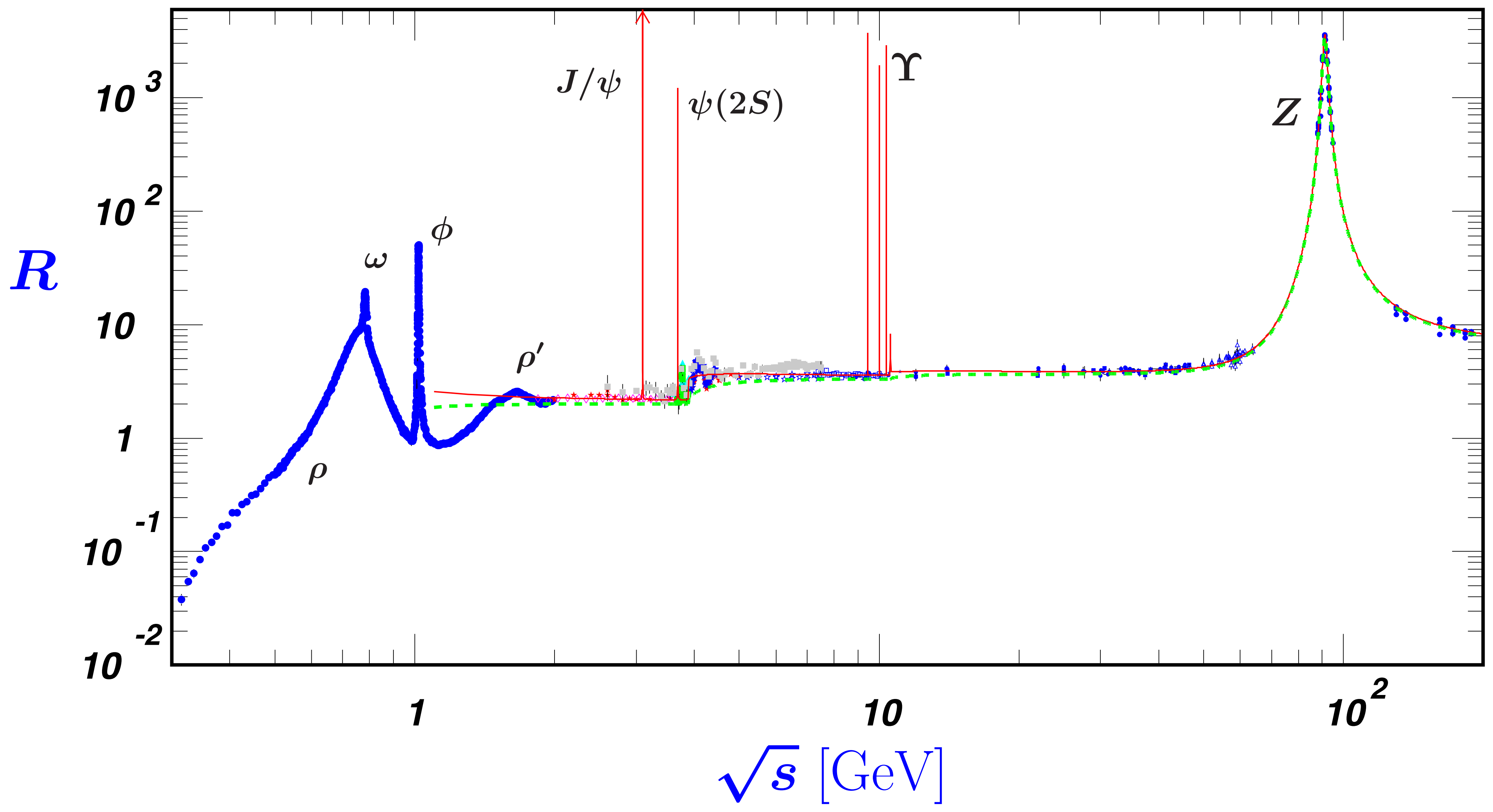
stat sys IB + EM



Consistent with experimental result:

$$\mathrm{Re}(\epsilon'/\epsilon)_{\mathrm{expt}} = 0.00166(23)$$

符号問題 or スペクトル関数

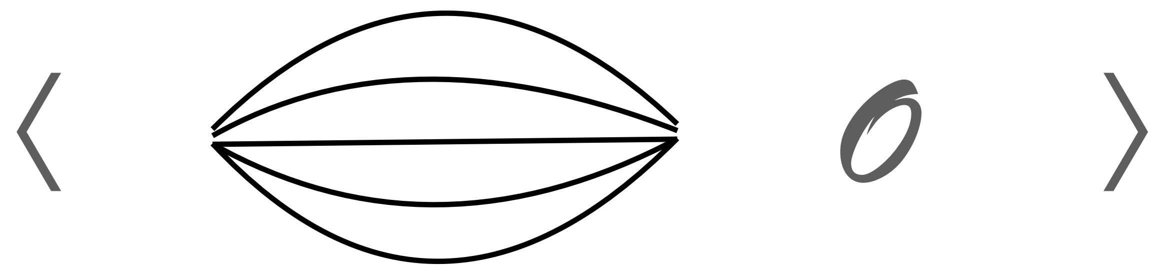


有限密度QCDは難しい。なぜなら符号問題が ...

$$Z = \int [dA_\mu] e^{-S_g - \int \bar{\psi} D(A) \psi}$$
$$= \int [dA_\mu] \det D(A) e^{-S_g}$$

- det D(A) が負、もしくは複素数になることがあると、確率分布とみなせなくなり、モンテカルロ法が破綻する。有限化学ポテンシャルがあるとそうなる。
- 実時間のシミュレーションも同様の問題（より一般にはスペクトル関数の再構成の問題）。

別の見方：粒子数一定



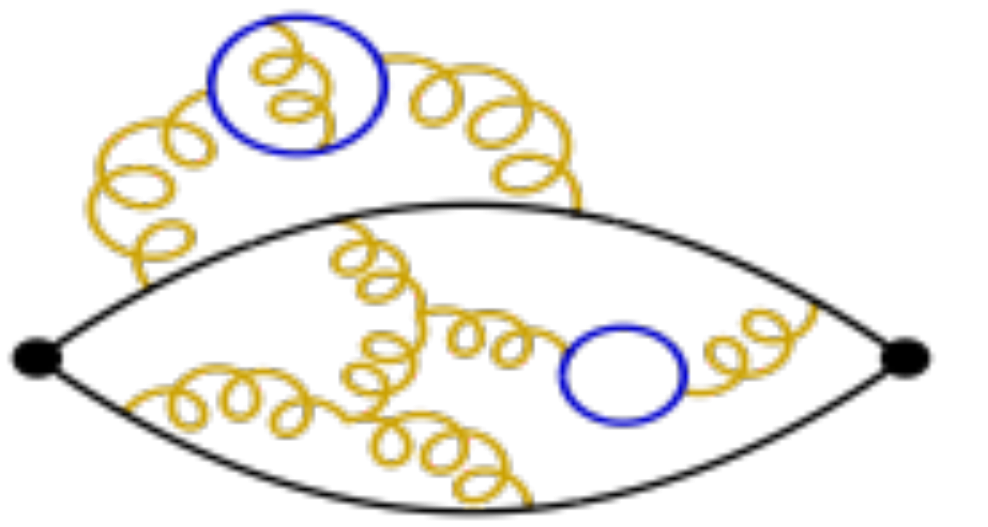
- N個のクォーク伝搬関数との相関を見よ。これができるなら解決。ところが、

$$S_q \sim e^{-(m_\pi/2)|x|}$$
$$S_N \sim e^{-m_N |x|} \ll S_q^3$$

- 非常に強い相殺が起こるので、ノイズに埋もれてしまう。

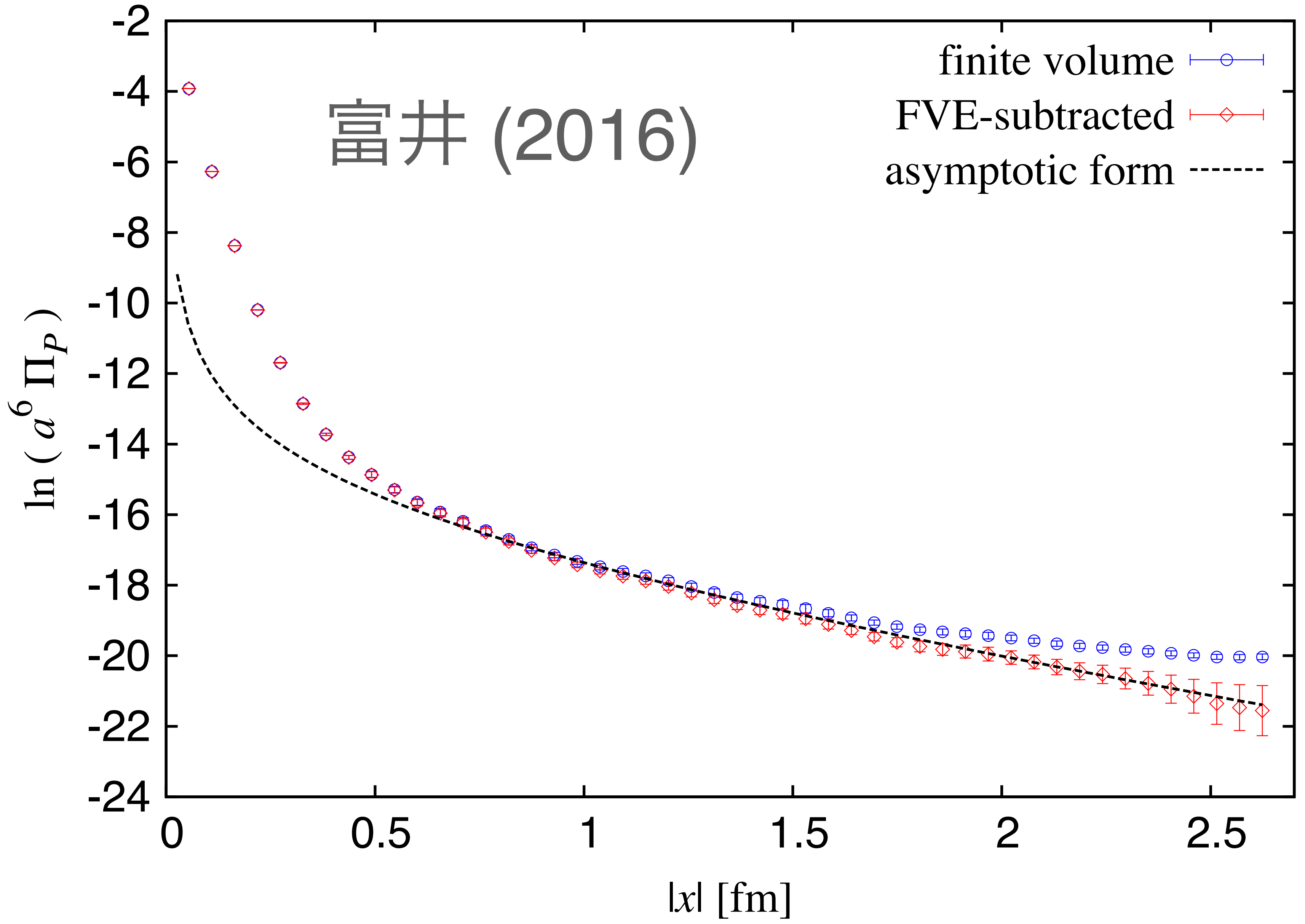
問題はノイズ

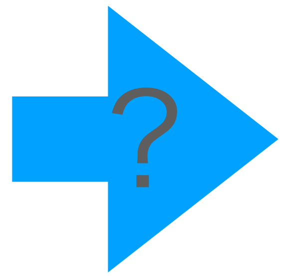
スペクトル関数の再構成

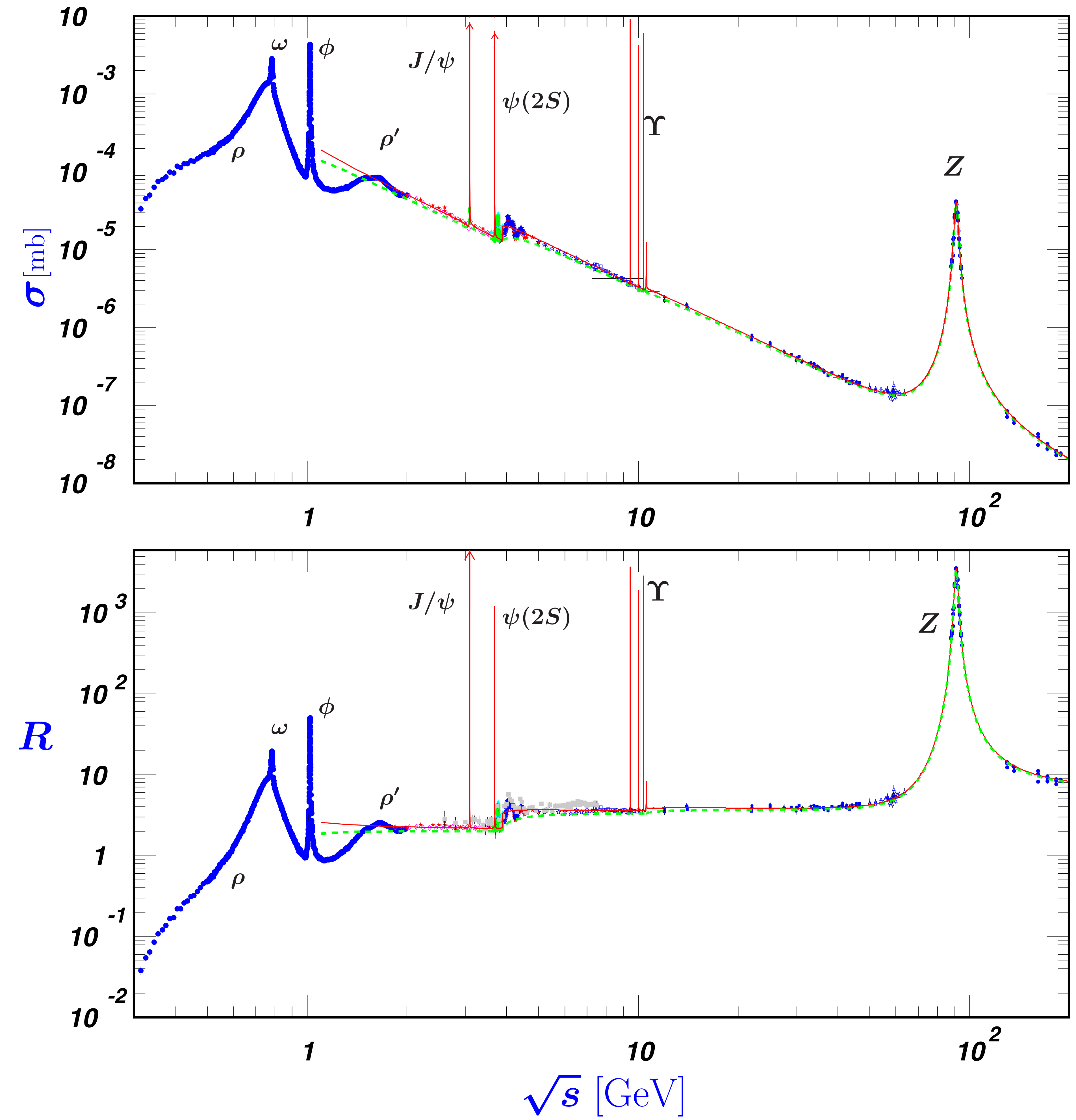


格子上の相関関数からスペクトルを読み取りたい。

$$\Pi_{\mu\nu}(x) = \langle 0|T\{J_\mu(x)J_\nu(0)\}|0\rangle$$



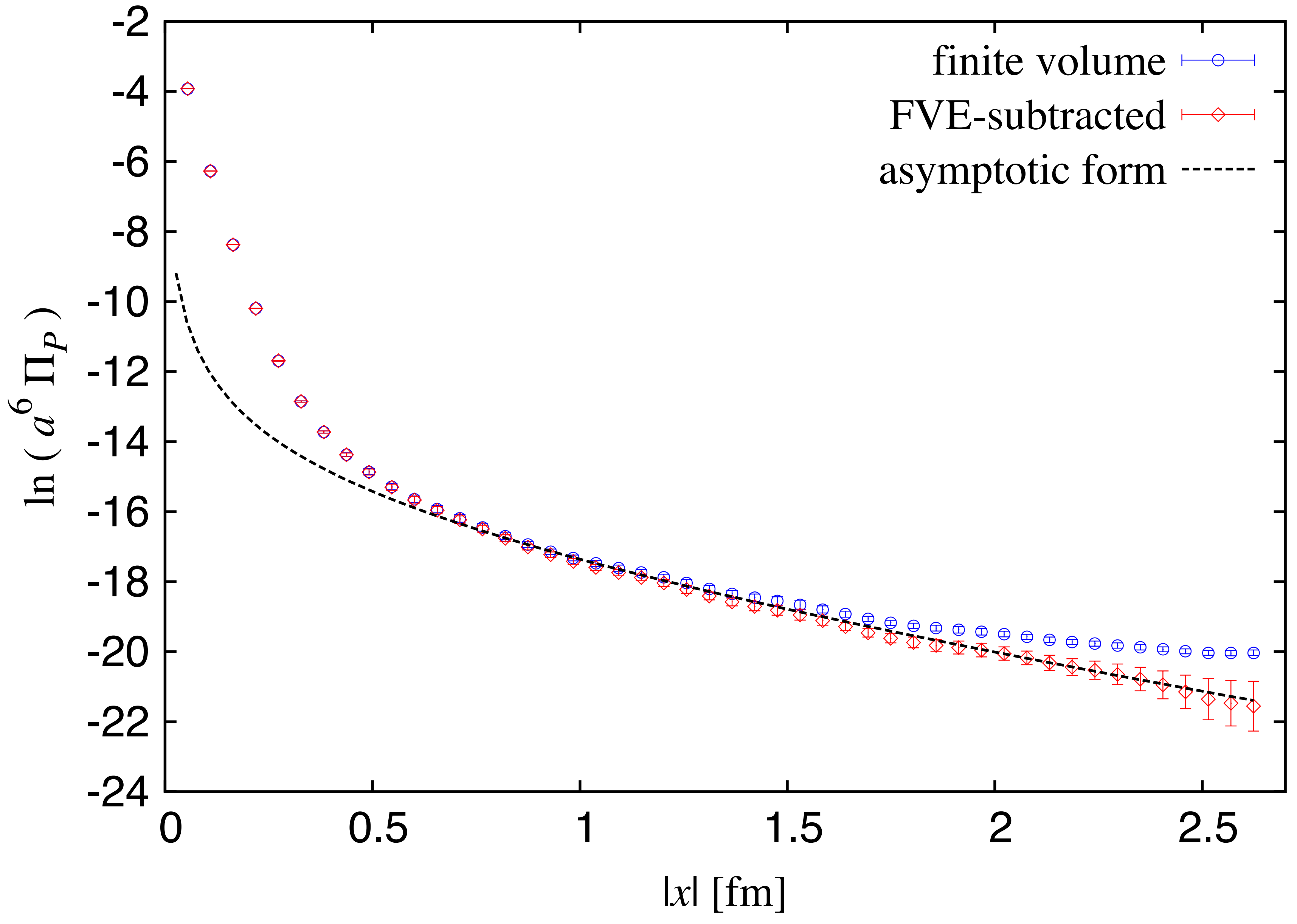




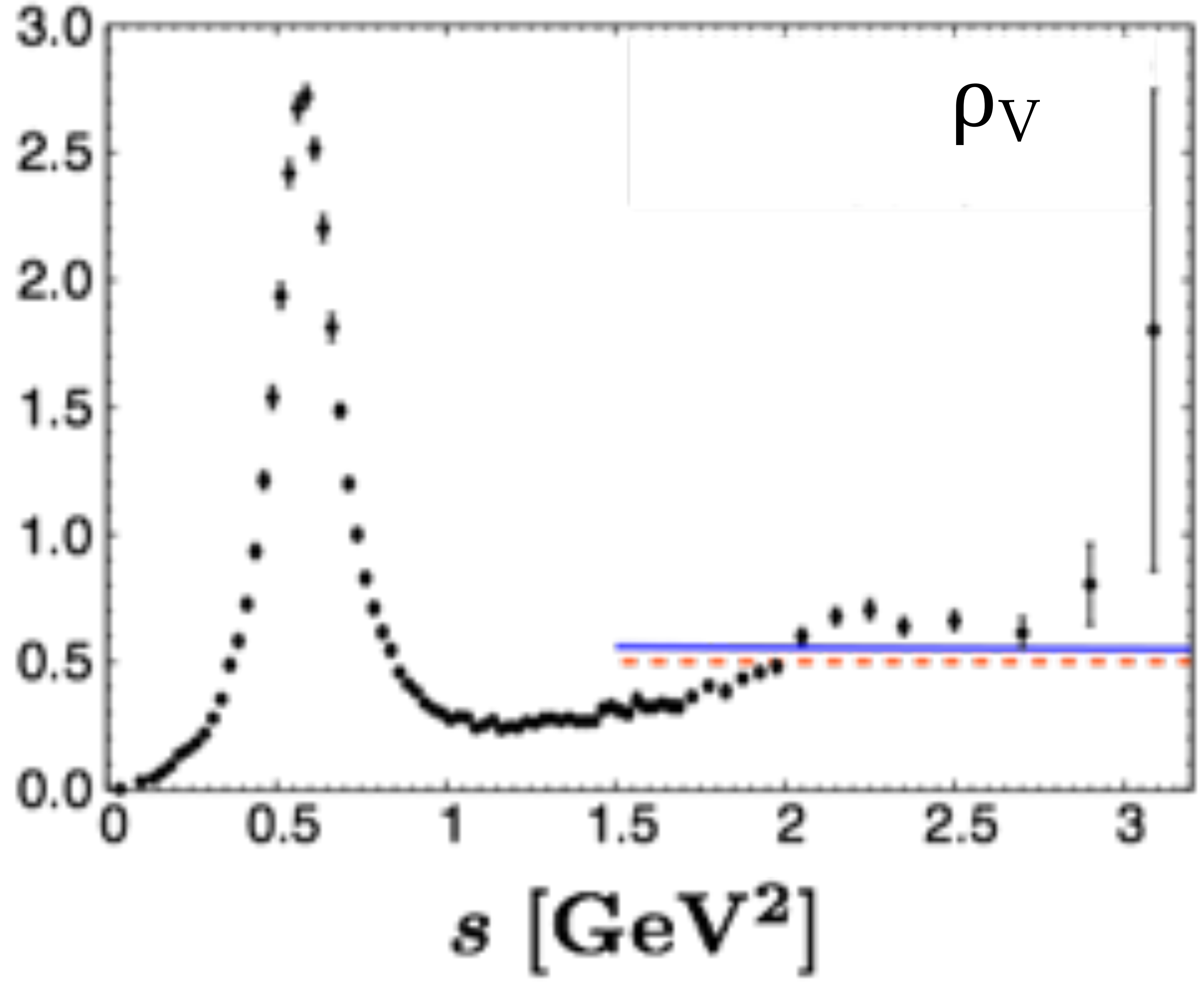
格子データ

$$C(t) = \int_0^\infty d\omega\, \rho(\omega) e^{-\omega t}$$

実験データ



ALEPH



不良設定問題

× もっとよい統計精度があれば、あるいは…

○ 無限によい精度が必要（10^{-30} とか）

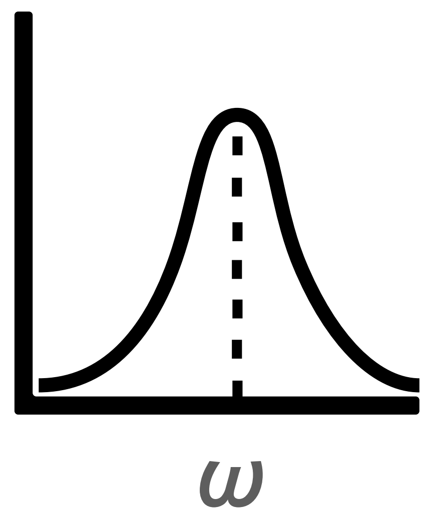
「現実的に可能なこと」

Bailas, SH, Ishikawa, PTEP 2020, 4, 043B07 (2000); arXiv:2001.11779

相関関数: $$C(t) = \int_0^\infty d\omega\, \rho(\omega) e^{-\omega t} \qquad \sim \langle 0| J\, e^{-\hat{H}t}\, J|0\rangle$$

スペクトル関数: $$\rho(\omega) \propto \sum_X \delta(\omega - E_X) |\langle X|J|0\rangle|^2 \qquad \sim \langle 0|J\, \delta(\omega - \hat{H})\, J|0\rangle$$

ぼかし: $$\bar{\rho}_\Delta(\omega) = \int_0^\infty d\omega'\, S_\Delta(\omega, \omega') \rho(\omega) \qquad \sim \langle 0|J\, S_\Delta(\omega, \hat{H})\, J|0\rangle$$

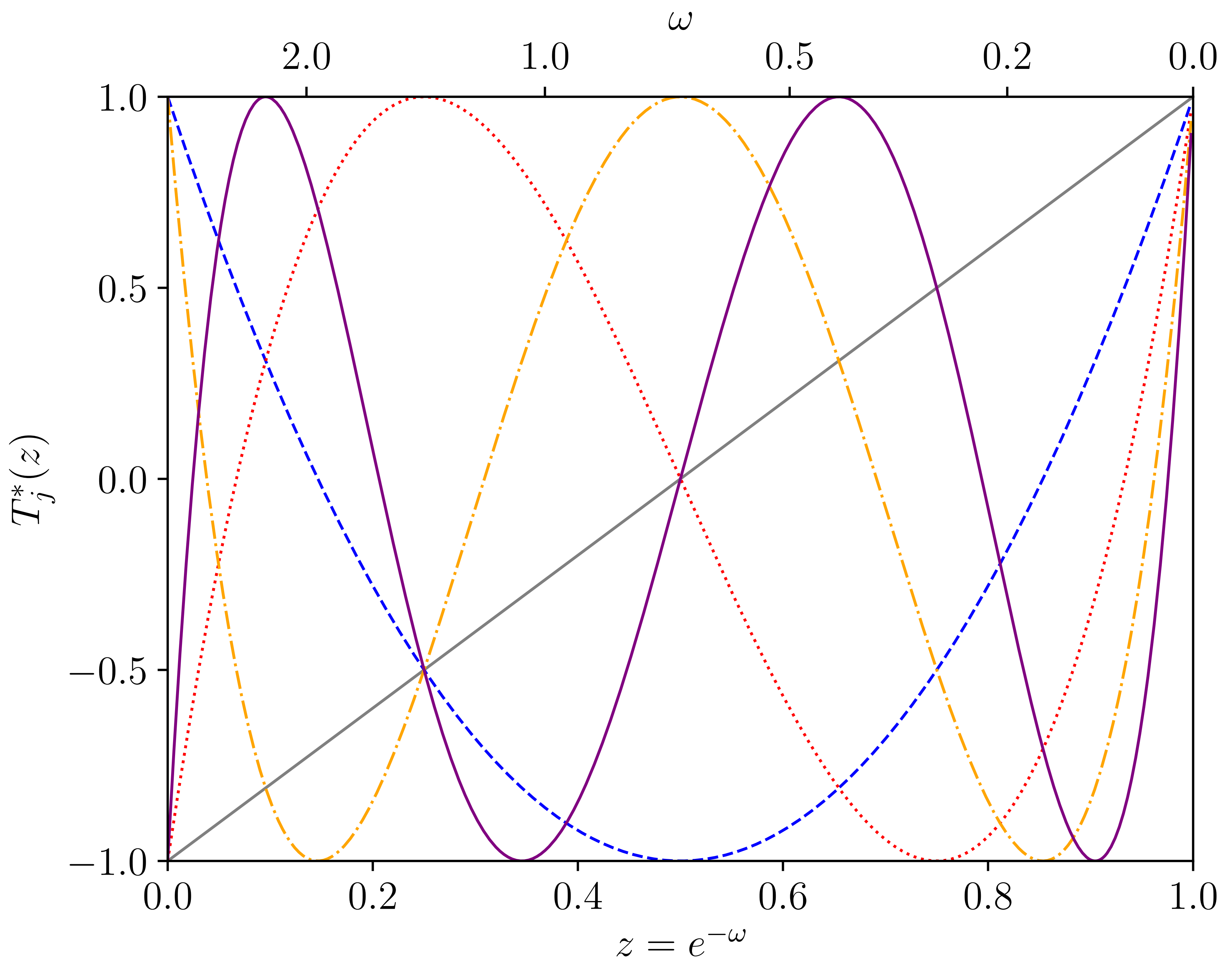


近似: $S_\Delta(\omega, \hat{H})$ by $e^{-\hat{H}t}$?

チェビシェフ多項式近似：　$$S_\Delta(\omega, \hat{H}) \simeq \sum_{j=0}^{N} c_j(\omega) T_j(e^{-\hat{H}})$$

(shifted) Chebyshev polynomials

$$T_0^*(x) = 1$$
$$T_1^*(x) = 2x - 1$$
$$T_2^*(x) = 8x^2 - 8x + 1$$
$$\vdots$$
$$T_{j+1}^*(x) = 2(2x-1)T_j^*(x) - T_{j-1}^*(x)$$



“Best” approximation can be obtained with

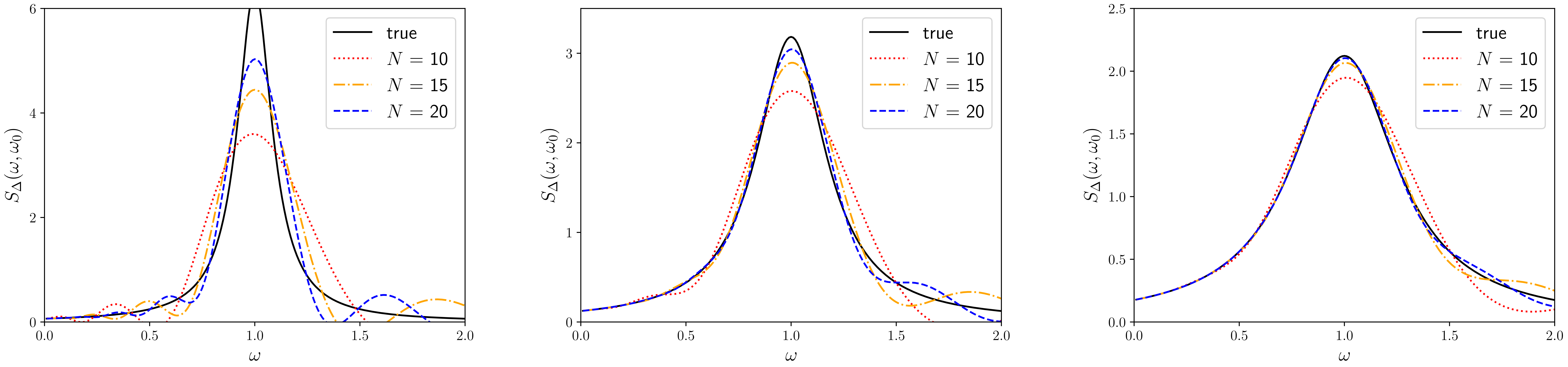
$$c_j^* = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi d\theta\, S\left(-\ln\frac{1+\cos\theta}{2}\right)\cos(j\theta)$$

“best” = maximal deviation is minimal

チェビシェフ多項式近似：

$$S_\Delta(\omega, \hat{H}) \simeq \sum_{j=0}^{N} c_j(\omega) T_j(e^{-\hat{H}})$$

狭い 広い

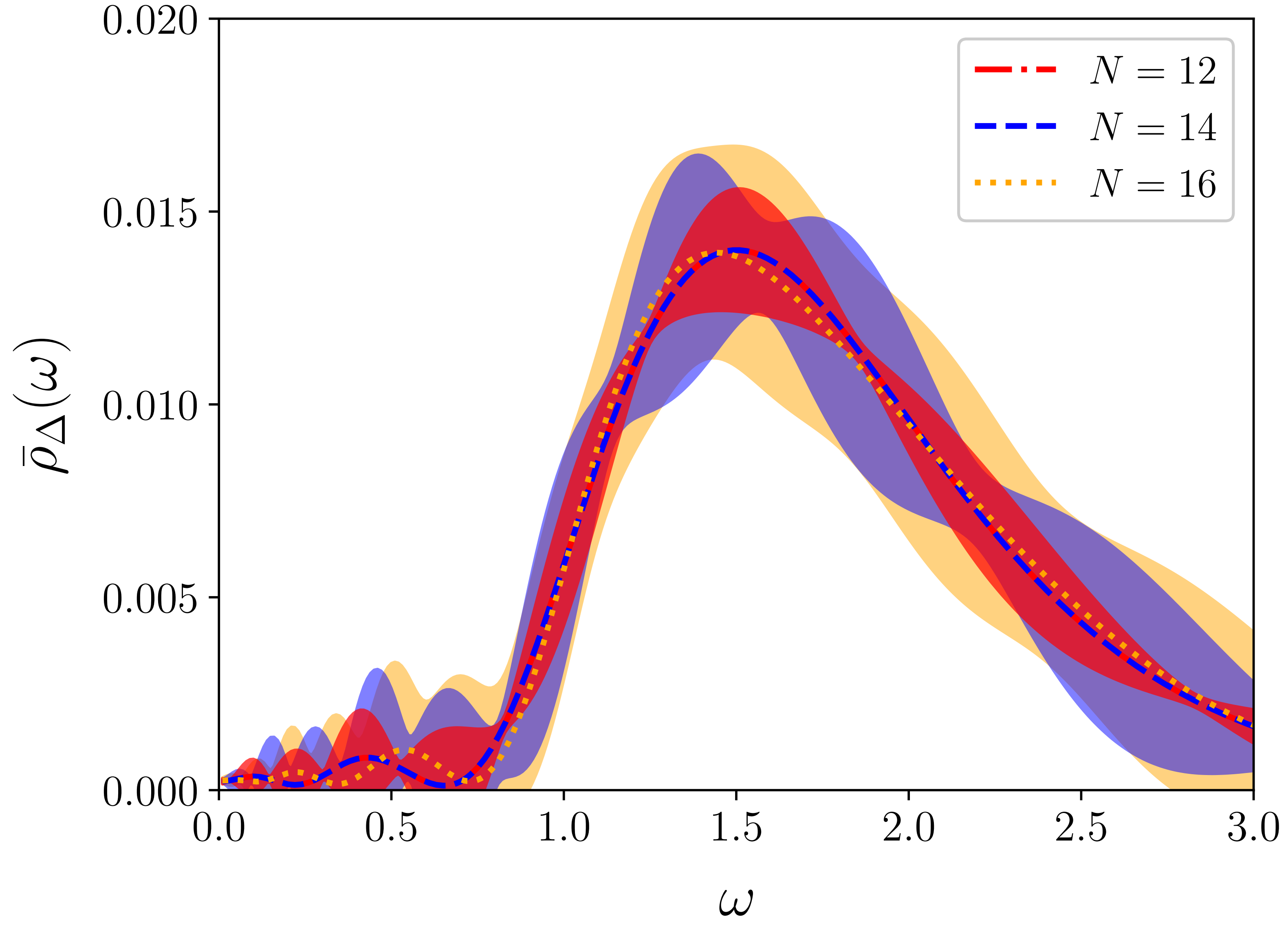


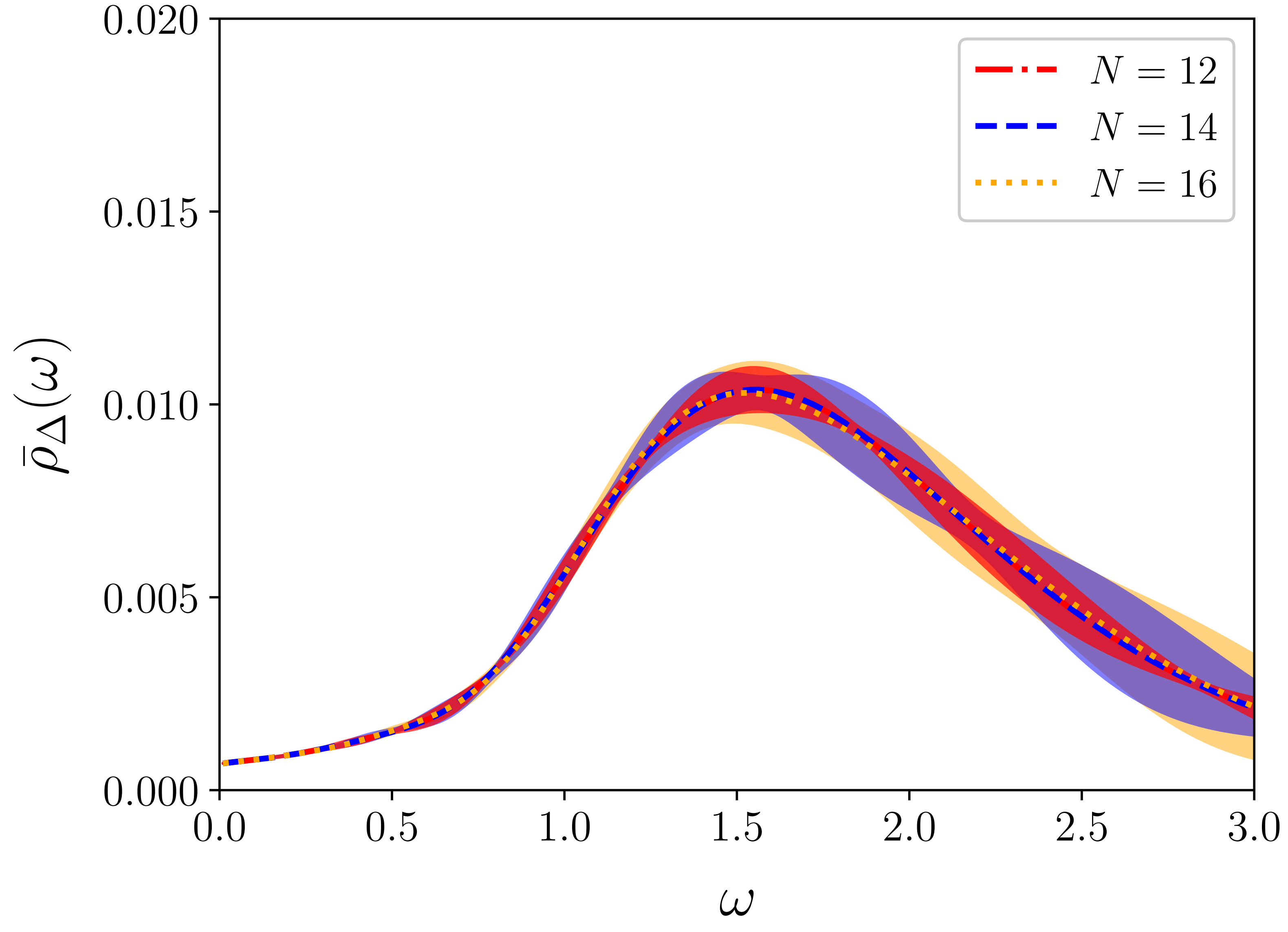
十分に「ぼかし」ておけば、よい精度で近似できる。

ぼかしたスペクトル：チャーモニウムの場合

Bailas, SH, Ishikawa, PTEP 2020, 4, 043B07 (2000); arXiv:2001.11779

狭い ⟷ 広い



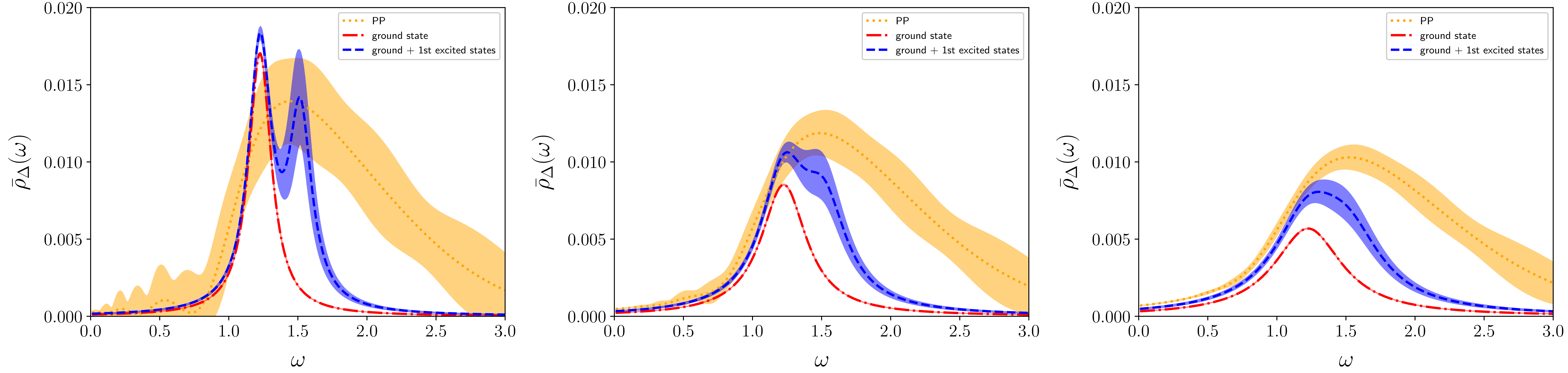


十分に「ぼかし」ておけば、誤差も制御可能

ぼかしたスペクトル：チャーモニウムの場合

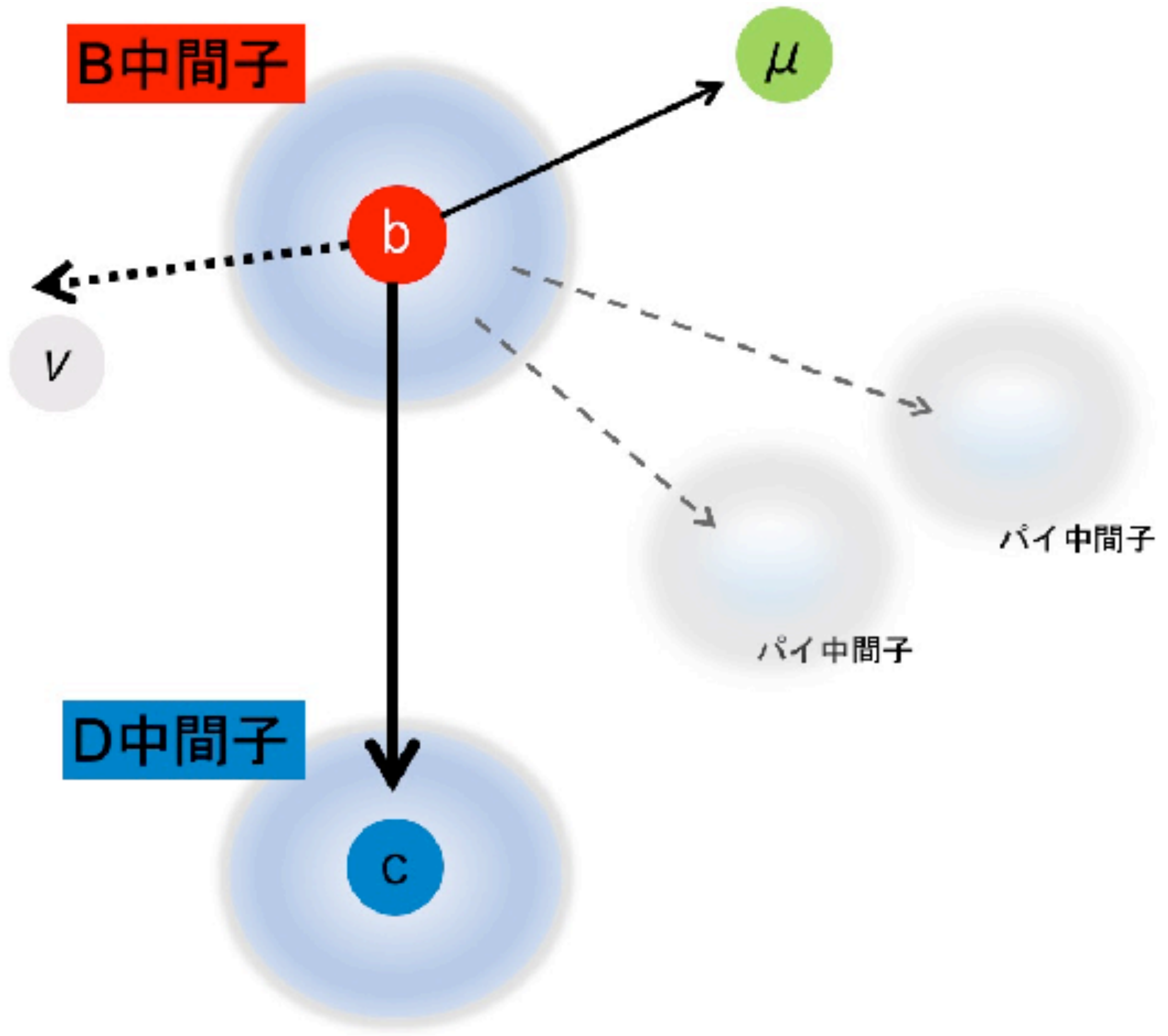
Bailas, SH, Ishikawa, PTEP 2020, 4, 043B07 (2000); arXiv:2001.11779

狭い　　　　　　　　　　　　　　　　　　広い

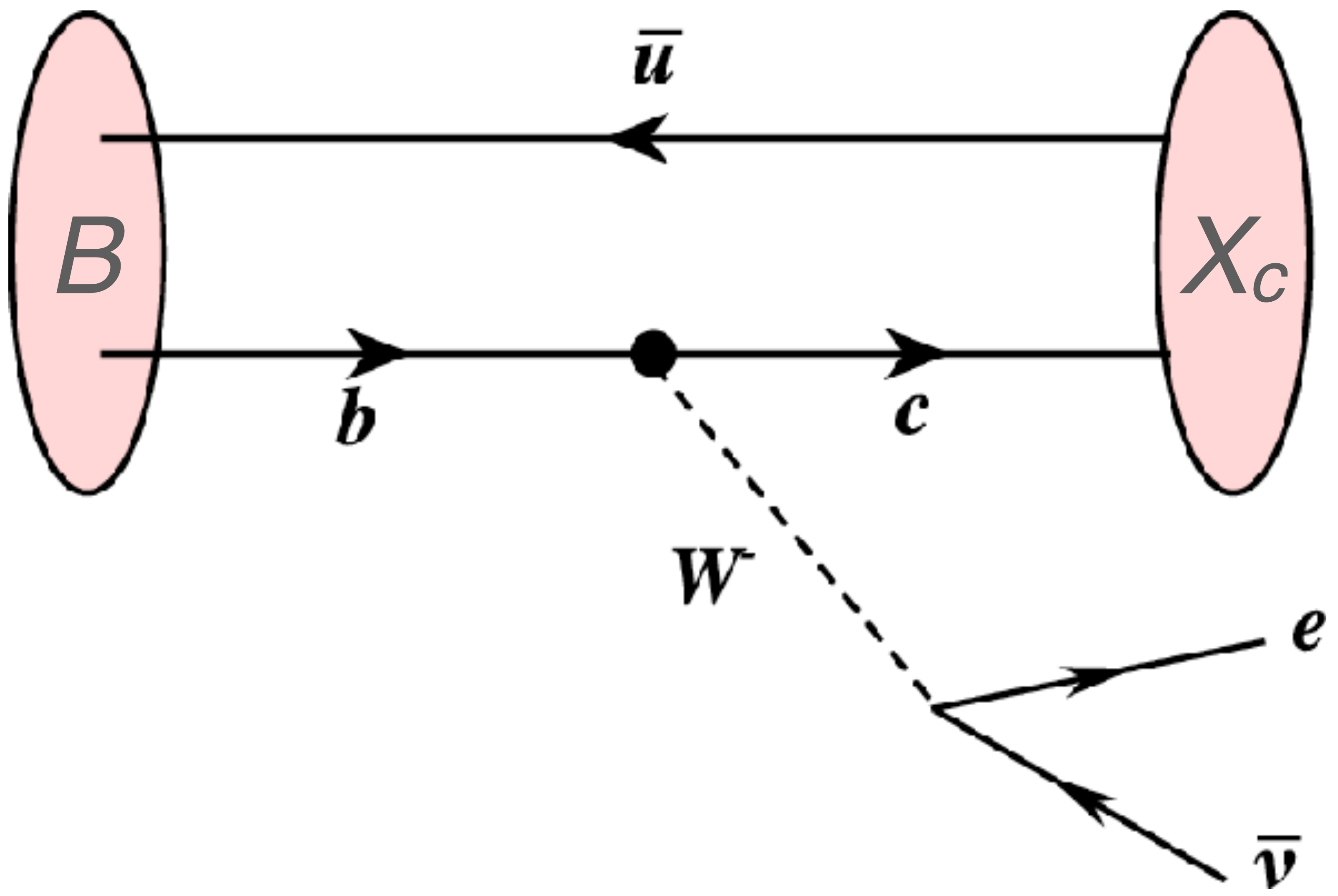


基底状態と第一励起状態の寄与（青）

包括的過程



B中間子のセミレプトニック崩壊



限定的: 指定した終状態 (D, D*, …)

包括的: 終状態に関する和

摂動論で計算できる (or OPE)

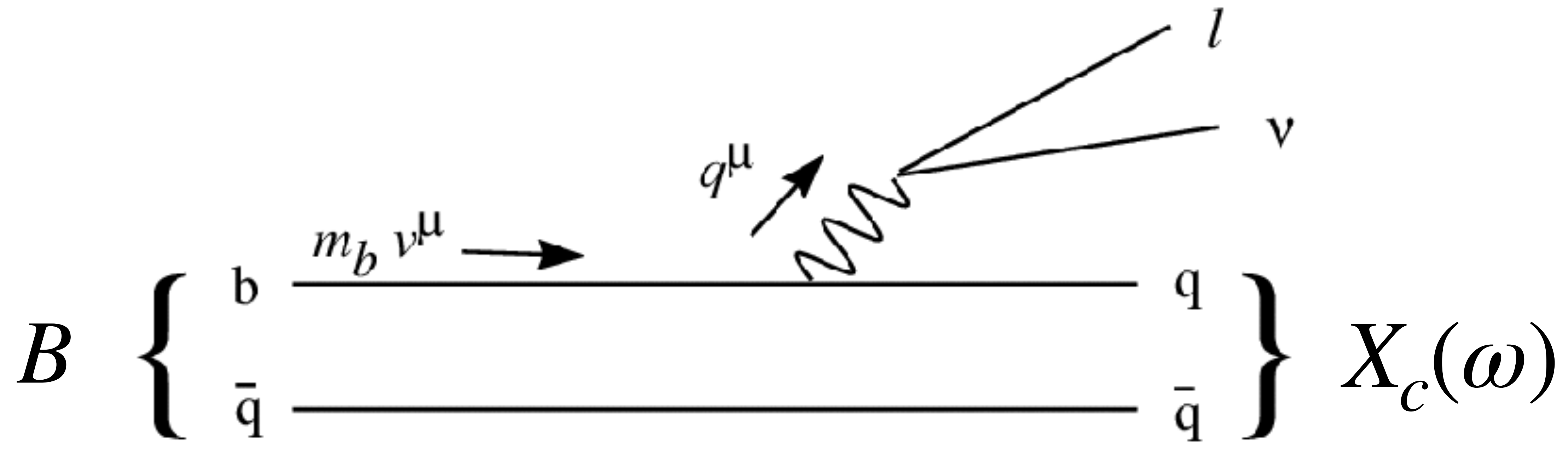
Gambino and SH, arXiv:2005.13730

格子計算の新手法：

$$\langle B(\mathbf{0})|\tilde{J}^{\dagger}_{\mu}(-\boldsymbol{q};t) \;\vdots\; \tilde{J}_{\nu}(\boldsymbol{q};0)|B(\mathbf{0})\rangle$$

すべての可能な終状態が現れる

B中間子のセミレプトニック崩壊



微分崩壊率:

$$d\Gamma \sim |V_{cb}|^2 l^{\mu\nu} W_{\mu\nu}$$

構造関数:

$$W_{\mu\nu} = \underline{\sum_X (2\pi)^2 \delta^4(p_B - q - p_X) \frac{1}{2M_B} \langle B(p_B)|J_\mu^\dagger(0)|X\rangle\langle X|J_\nu(0)|B(p_B)\rangle}$$

$$\Rightarrow \langle B(\mathbf{0})|\tilde{J}_\mu^\dagger(-\boldsymbol{q};t)\ \delta(\omega - \hat{H})\ \tilde{J}_\nu(\boldsymbol{q};0)|B(\mathbf{0})\rangle$$

崩壊率:

$$\Gamma \propto \int_0^{\boldsymbol{q}^2_{\max}} d\boldsymbol{q} \int_{\sqrt{m_D^2+\boldsymbol{q}^2}}^{m_B-\sqrt{\boldsymbol{q}^2}} d\omega\, K(\omega;\boldsymbol{q}^2)\langle B(\mathbf{0})|\tilde{J}^\dagger(-\boldsymbol{q})\delta(\omega - \hat{H})\tilde{J}(\boldsymbol{q})|B(\mathbf{0})\rangle$$

既知の関数

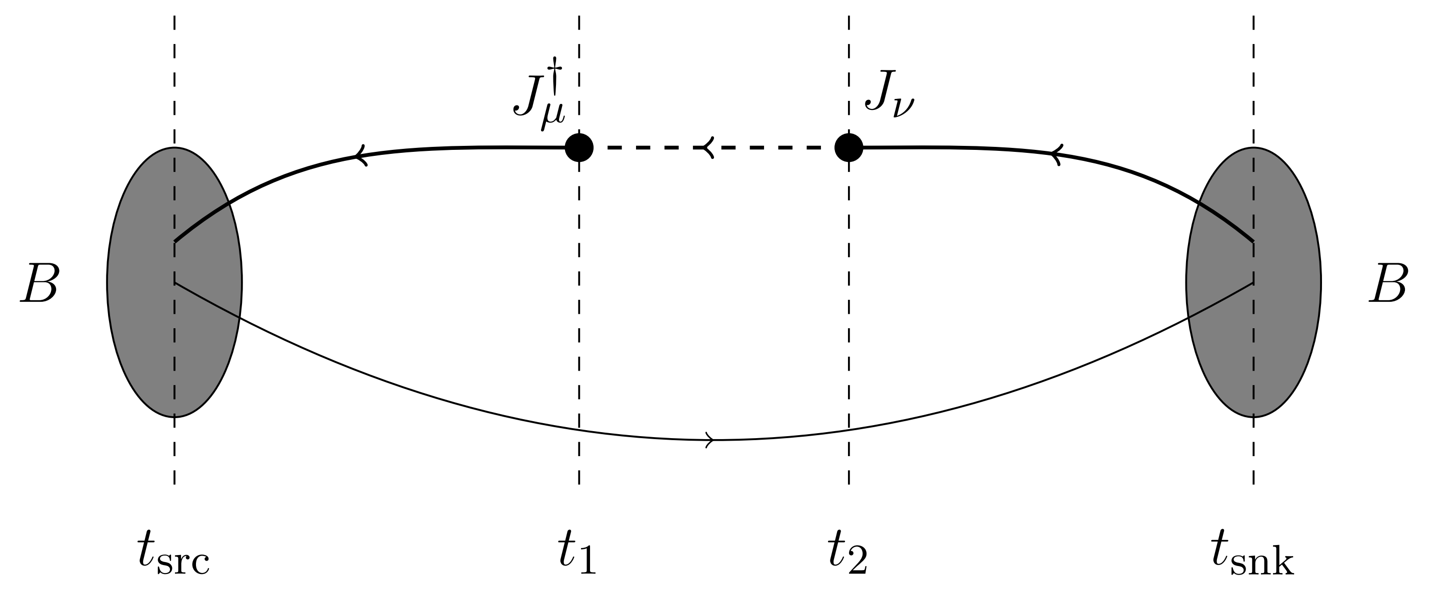
すべての状態の和 = エネルギー積分

$$\Gamma \propto \int_0^{\boldsymbol{q}^2_{\max}} d\boldsymbol{q} \int_{\sqrt{m_D^2+\boldsymbol{q}^2}}^{m_B-\sqrt{\boldsymbol{q}^2}} d\omega\, K(\omega;\boldsymbol{q}^2)\langle B(\mathbf{0})|\tilde{J}^\dagger(-\boldsymbol{q})\delta(\omega-\hat{H})\tilde{J}(\boldsymbol{q})|B(\mathbf{0})\rangle$$

$$= \langle B(\mathbf{0})|\tilde{J}^\dagger(-\boldsymbol{q})K(\hat{H};\boldsymbol{q}^2)\tilde{J}(\boldsymbol{q})|B(\mathbf{0})\rangle$$

格子計算で求めたコンプトン振幅:

$$\langle B(\mathbf{0})|\tilde{J}^\dagger_\mu(-\boldsymbol{q};t)\ \tilde{J}_\nu(\boldsymbol{q};0)|B(\mathbf{0})\rangle \longrightarrow \langle B(\mathbf{0})|\tilde{J}^\dagger(-\boldsymbol{q})e^{-\hat{H}t}\tilde{J}(\boldsymbol{q})|B(\mathbf{0})\rangle$$



近似：

$$K(\hat{H}) = k_0 + k_1 e^{-\hat{H}} + k_2 e^{-2\hat{H}} + \cdots + k_N e^{-k_N\hat{H}}$$

近似すべき係数

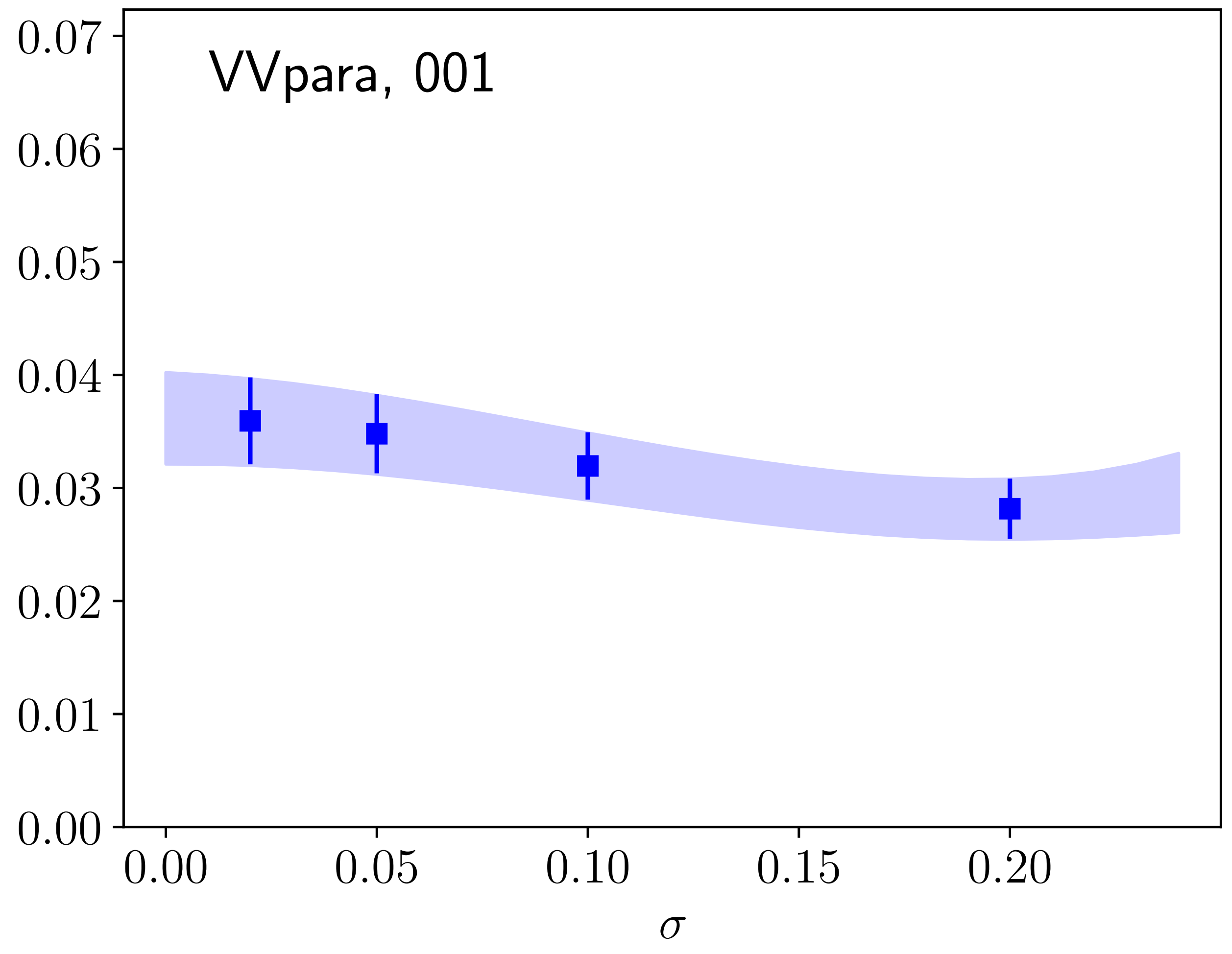
積分上限

$$K(\omega) \sim e^{2\omega t_0} \underline{(m_B - \omega)^l} \boxed{\theta(m_B - |\mathbf{q}| - \omega)}$$

力学的係数

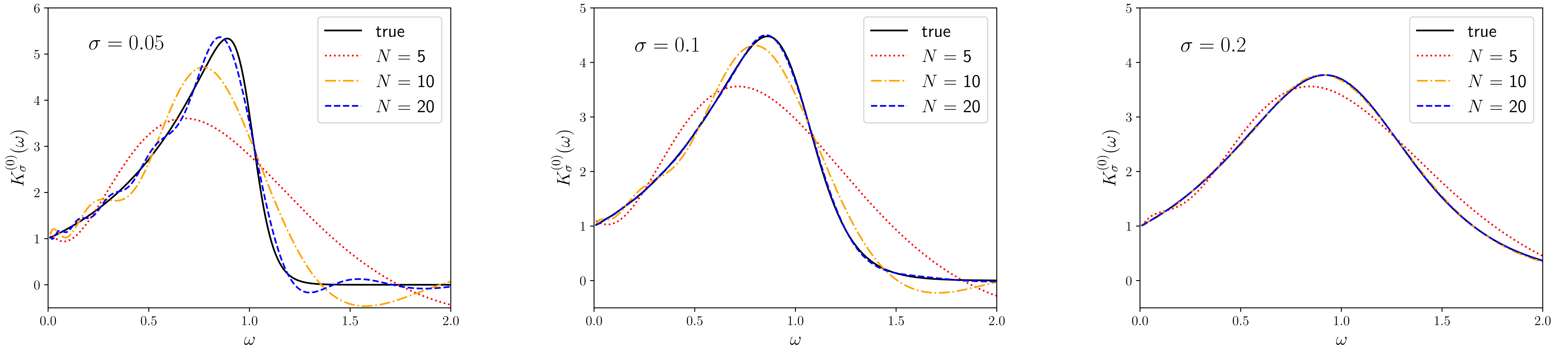
シグモイド関数でぼかす

σ→ 0 の極限を取る必要がある。



狭い

広い

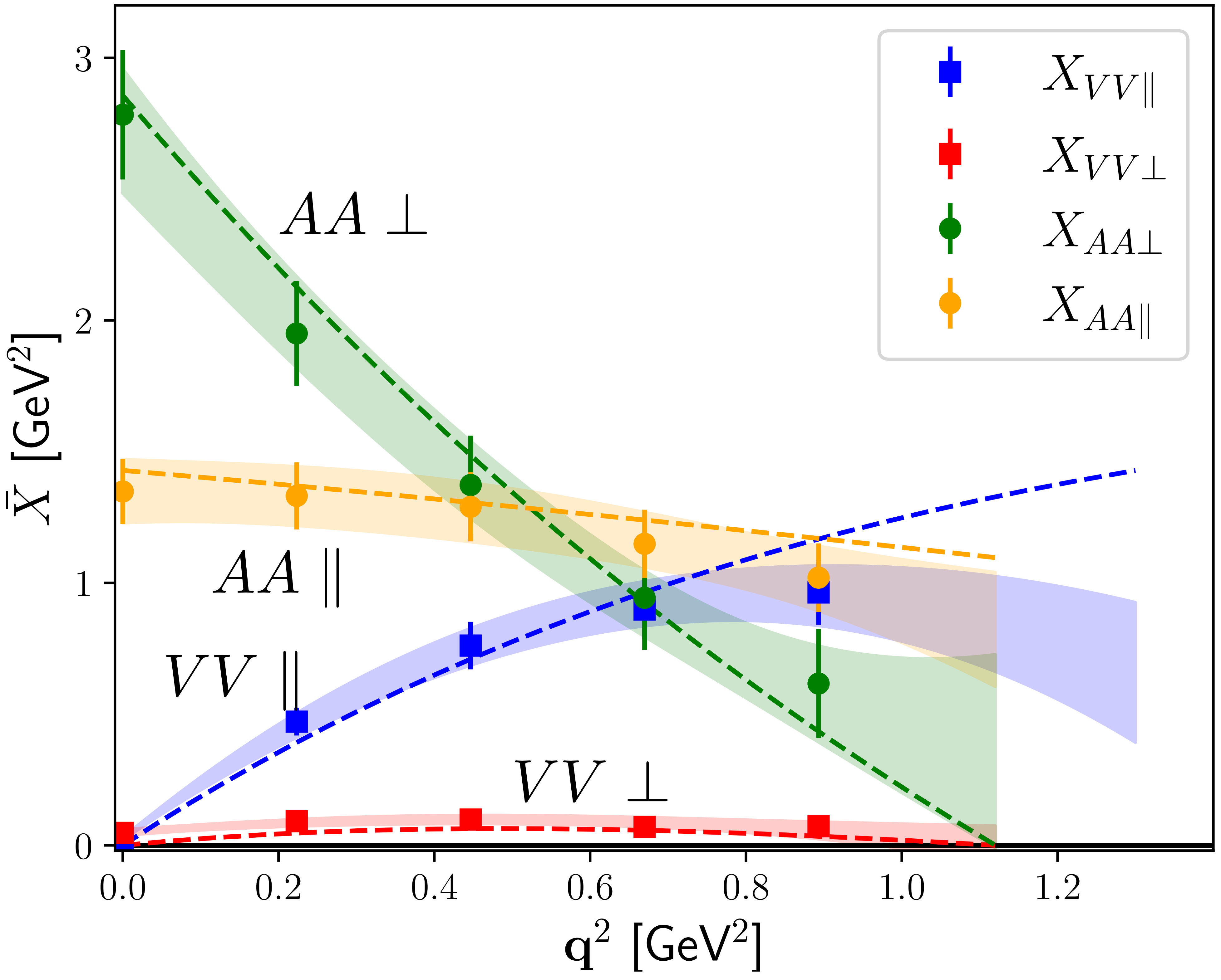


包括的崩壊確率

- テスト的な格子計算
  - Bs → Xc
  - ただし、ボトムクォークは現実よりも軽い。
- 成分ごとの微分崩壊確率
  - VV と AA
  - 反跳運動量に「平行」と「垂直」
  - 崩壊モードに限定した場合との比較

  - $VV_{\parallel}$ はほとんど B→D
  - 他はすべて B→D*

微分崩壊確率 / |q|



できること：いっぱいある

✓ 精密計算：g-2 の進歩を見よ

✓ 散乱、崩壊：$K \to \pi\pi$ も計算できる

困っていること：やっぱりある

✓ 大きな壁はノイズ

✓ D中間子混合、$B \to \pi\pi$ が難しいのも同根