フーリエ変換を用いたリノーマロン除去法

：定式化と応用

林 祐輝 (東北大学D2)

Based on PLB 819 (2021) 136414　YH, Yukinari Sumino, Hiromasa Takaura
arXiv : 2106.03687　YH, Yukinari Sumino, Hiromasa Takaura

Table of contents

【Introduction】

- **摂動QCD計算**

$$[X(Q)]_{\mathrm{PT}} = c_0\alpha_s + c_1\alpha_s^2 + \cdots$$

$X(Q)$: dimensionless observable　　Q : typical scale of X

・漸近的自由性　　$\alpha_s(\mu) \to 0 \quad \text{as} \quad \mu \to \infty$

・計算技術の進展による高次補正計算

→ 高エネルギー領域ではQCD効果を摂動論でsystematicに計算できる？

$Q \gg \Lambda_{\mathrm{QCD}}$

【Introduction】

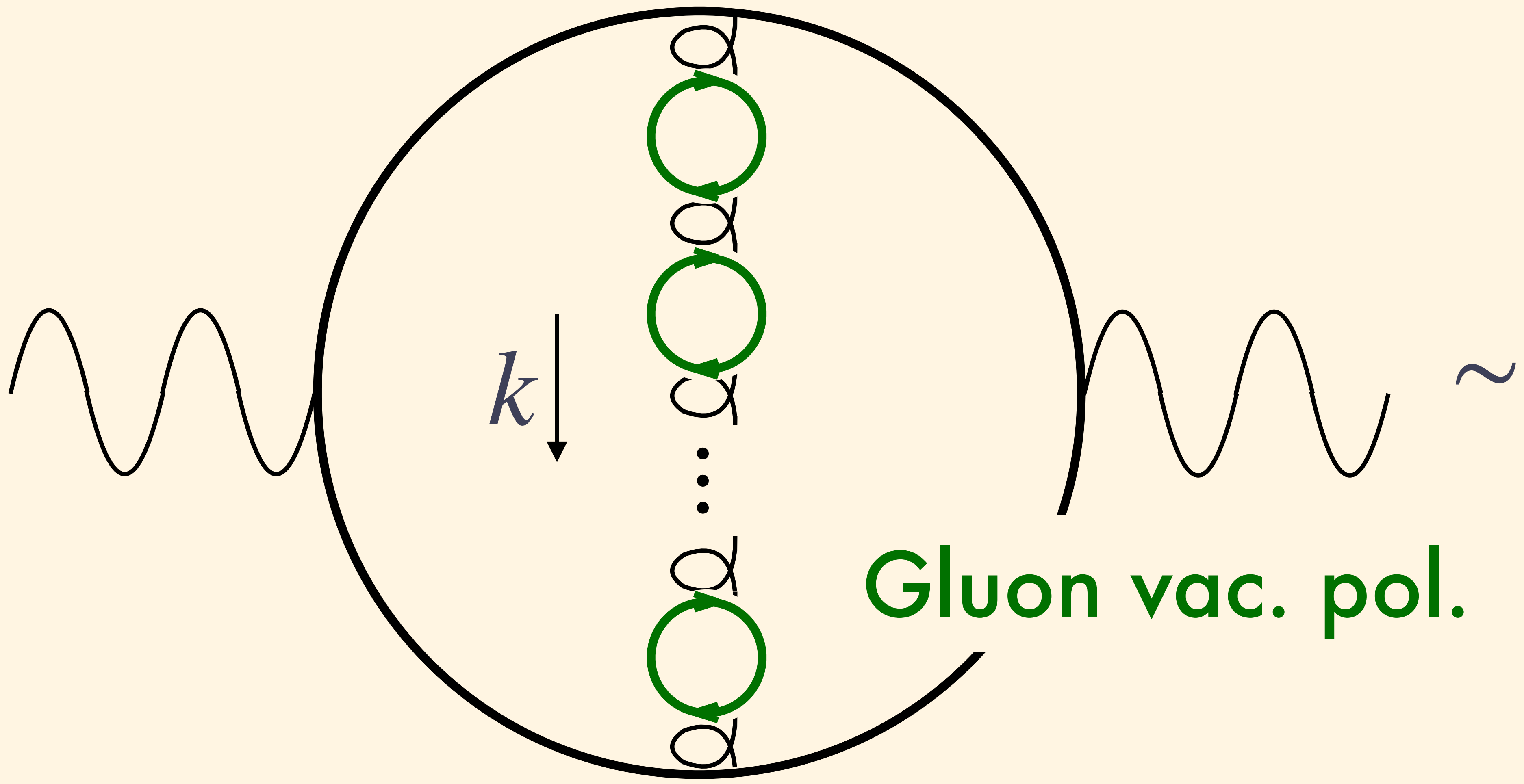
- **リノーマロン問題**　　摂動QCD計算 → **全次数を足し上げると発散する**

$$[X(Q)]_{\mathrm{PT}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \alpha_s^{n+1} \xrightarrow[(n \gg 1)]{\text{Asymptotic behavior}} \boxed{c_n^{as} \sim n!(b_0/u_0)^n}$$

$\beta(\alpha_s) = -(b_0\alpha_s^2 + b_1\alpha_s^3 + \ldots),$

u_0：XのIR構造から決まる定数

リノーマロン：特定のタイプのdiagramに起因



$$\sim \int_{\mathrm{IR}} dk_E^2 \underbrace{(k_E^2)^{u_0-1}}_{\text{IR構造}} \underbrace{\left[-\log(k_E^2)\right]^n b_0^n \alpha_s^{n+1}}_{\text{n loops}} \sim n!\left(b_0/u_0\right)^n \alpha_s^{n+1}$$

【Introduction】

- リノーマロン問題　　摂動QCD計算 → **全次数を足し上げると発散する**

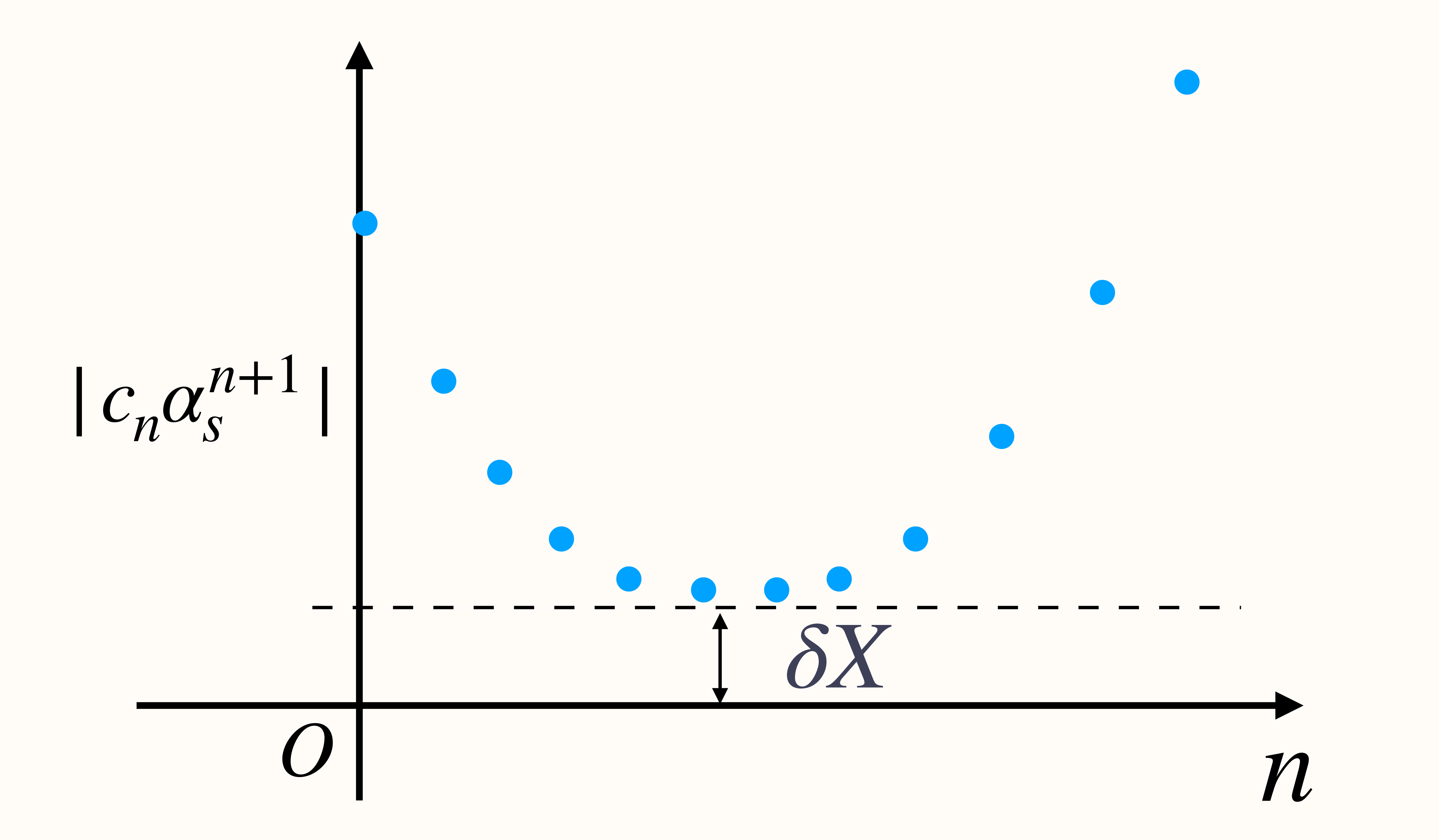
$$c_n^{as} \sim n!(b_0/u_0)^n$$

$n \gg 1$ で $n!\alpha_s^n \gg 1$ だから,

摂動級数はある次数から発散し始める.

→ 予言精度に限界がある.

(不可避な不定性)



$$\delta X \approx \left(\Lambda_{\rm QCD}/Q\right)^{2u_0}$$

(α_s補正は無視)

($\Lambda_{\rm QCD}$: QCDの非摂動スケール)

【Introduction】

- 現代的なリノーマロン問題の解決策：演算子積展開(OPE)

摂動論をうまく使ってQCD予言を高精度化できないか？

→ **演算子積展開(OPE)**：物理量を局所演算子を基底にして展開する.

$$[X(Q)]_{\mathrm{OPE}} = [X(Q)]_{\mathrm{PT}} \langle \mathbf{1} \rangle + \frac{\langle \mathcal{O}_d \rangle}{Q^d} + \cdots$$

$$[X(Q)]_{\mathrm{PT}} = c_0 \alpha_s + c_1 \alpha_s^2 + \cdots$$

$X(Q)$: dimensionless observable

Q : typical scale of X

d : dimension of $\mathcal{O}_d$

$\langle \mathcal{O}_d \rangle$ ：gauge inv.な局所演算子の期待値 $\propto \Lambda_{\mathrm{QCD}}^d$ (α_s補正は無視)

非摂動効果が$1/Q$展開の形で取り入れられる.

【Introduction】

- **OPEとリノーマロン除去**

$$\boxed{\delta X \approx \left(\Lambda_{\rm QCD}/Q\right)^{2u_0}}$$

OPEの$O(\Lambda_{\rm QCD}^d)$の非摂動行列要素が$u_0 = d/2$のリノーマロンと同じ大きさの不定性を持っている.

1985 Mueller

$$[X(Q)]_{\rm OPE} = \underbrace{[X(Q)]_{\rm PT} + \frac{\langle \mathcal{O}_d \rangle}{Q^d}}_{\delta X\text{を吸収}} + \cdots = [X(Q)]_{\rm RF} + \frac{\langle \mathcal{O}_d \rangle_{\rm RF}}{Q^d} + \cdots$$

RF : renormalon free

リノーマロンを除去することで，収束する摂動予言(α_s展開) + 非摂動効果($1/Q$展開)による高精度な予言を達成できる.

【Introduction】

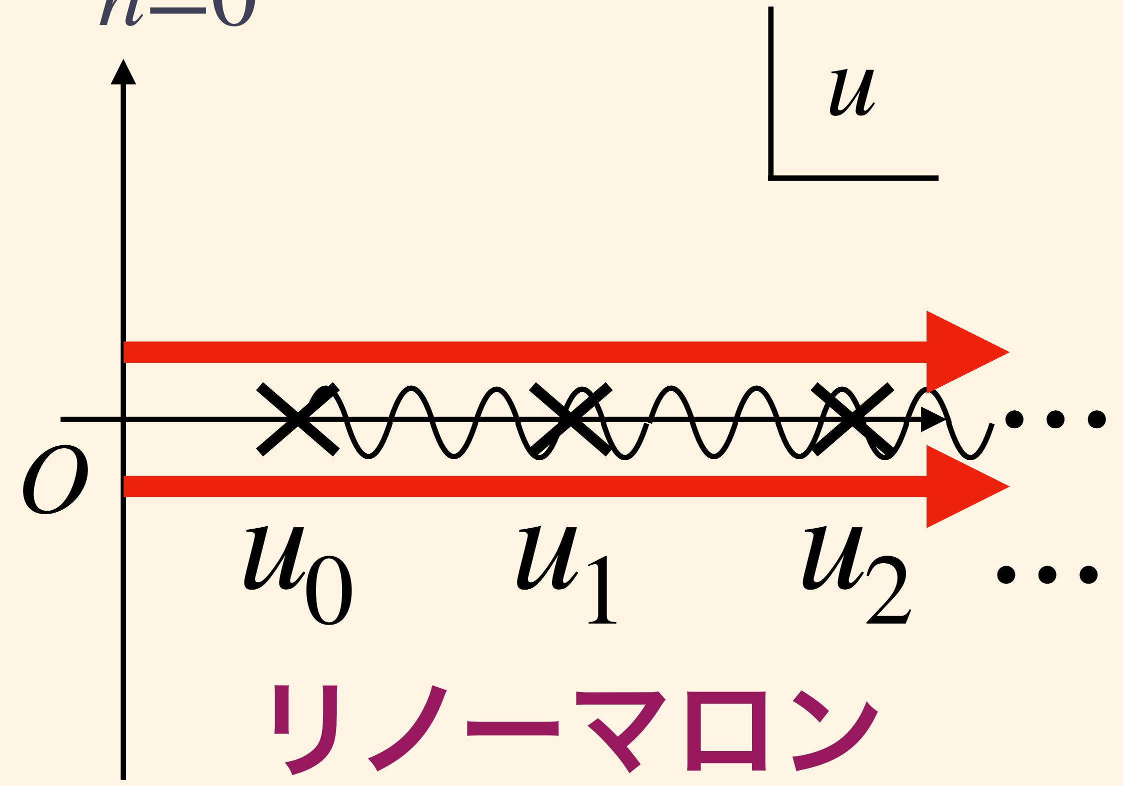
- **Borel integral**

漸近級数から意味のある予言を抜き出す一般的な手法：Borel integral

$$[X(Q)]_{\rm PT} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \alpha_s^{n+1} \longrightarrow \frac{1}{b_0}\int_0^{\infty} du\, e^{-\frac{u}{b_0\alpha_s}} B_X(u), \quad B_X(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!}(u/b_0)^n$$

リノーマロンがある場合，singularityによって積分が**発散**

→ 発散を避けるように積分路を変形：不定性が分離



$$\frac{1}{b_0}\int_{0\pm i\epsilon}^{\infty\pm i\epsilon} du\, e^{-\frac{u}{b_0\alpha_s}} B_X(u) = \underbrace{\frac{1}{b_0}\int_{0,{\rm PV}}^{\infty} du\, e^{-\frac{u}{b_0\alpha_s}} B_X(u)}_{\text{finite}} \underbrace{\pm i\left(\frac{N_0}{Q^{2u_0}} + \frac{N_1}{Q^{2u_1}} + \cdots\right)}_{\text{リノーマロン起因の不定性 → OPEで除去}}$$

【Introduction】

- **Principal-Value (PV) prescription**

Borel integralで

リノーマロンを除去

$$[X(Q)]_{\mathrm{OPE}} = [X(Q)]_{\mathrm{PV}} + \frac{\langle \mathrm{NP} \rangle_{\mathrm{PV}}}{Q^d} + \cdots$$

$$\left[X(Q)\right]_{\mathrm{PV}} = \frac{1}{b_0}\int_{0,\mathrm{PV}}^{\infty} du\, e^{-\frac{u}{b_0 \alpha_s}} B_X(u), \quad B_X(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!}(u/b_0)^n$$

問題点：Borel変換は無限次数の摂動展開が必要 → practicalには使えない

本研究：有限次数の摂動展開から$\left[X(Q)\right]_{\mathrm{PV}}$を近似的に構成する

・フーリエ変換によるリノーマロンの除去

・systematicに近似精度を上げられる計算手法

【Method】

- **フーリエ変換とリノーマロンの関係**

仮定：リノーマロンがOPEの非摂動項に吸収される. $\to \delta X(Q) = \dfrac{K}{Q^{2u_0}}$

(α_s補正は無視)

次のフーリエ変換を計算してみる.

$$\boxed{\delta\tilde{X}(\tau) = \int d^3\vec{x}\, e^{i\vec{\tau}\cdot\vec{x}} r^{2au'}\delta X(r^{-a}) \ \propto \sin(\pi a(u_0 + u'))}$$

$$(r = |\vec{x}| = Q^{-1/a})$$

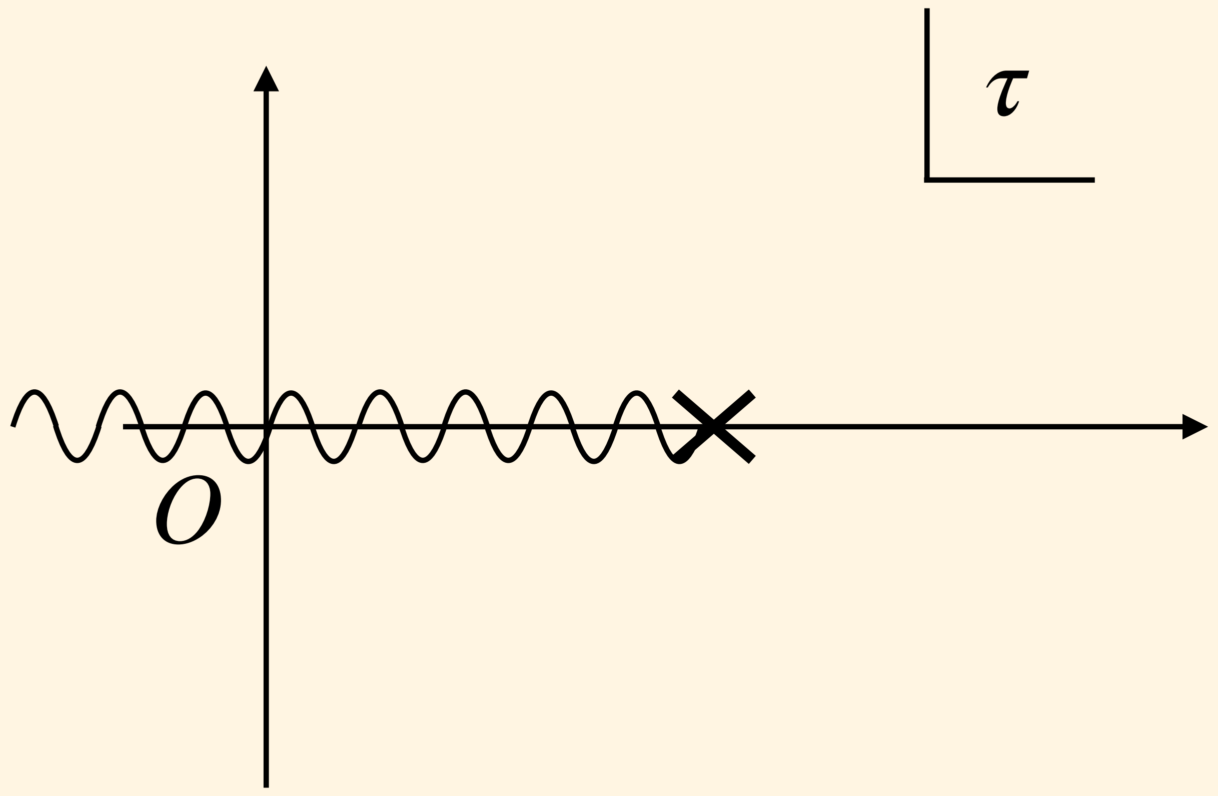
・a, u'はフーリエ変換を定義するパラメータ

・うまくa, u'を選ぶことで, （同時に複数の）$\tilde{X}$のリノーマロンを0にできる.

→ 発散級数から，収束する級数を生成できる.

【Method】

- フーリエ変換に基づくリノーマロン除去法



$$[X(Q)]_{\mathrm{PT}} = c_0\alpha_s(Q) + c_1\alpha_s(Q)^2 + \cdots$$

発散級数

❶フーリエ変換

$$\tilde{X}(\tau) = \tilde{c}_0\alpha_s(\tau^a) + \tilde{c}_1\alpha_s(\tau^a)^2 + \cdots$$

収束級数

：$\alpha_s(\tau^a)$に起因するsingularity

→ 逆フーリエ変換は発散

(運動量積分によってリノーマロンが再生産)

❷逆フーリエ変換の主値積分を評価

$$\boxed{\frac{r^{-2au'-1}}{2\pi^2}\int_{0,\mathrm{PV}}^{\infty} d\tau\,\tau\sin(\tau r)\tilde{X}(\tau) \to \big[X(Q)\big]_{\mathrm{PV}}}$$

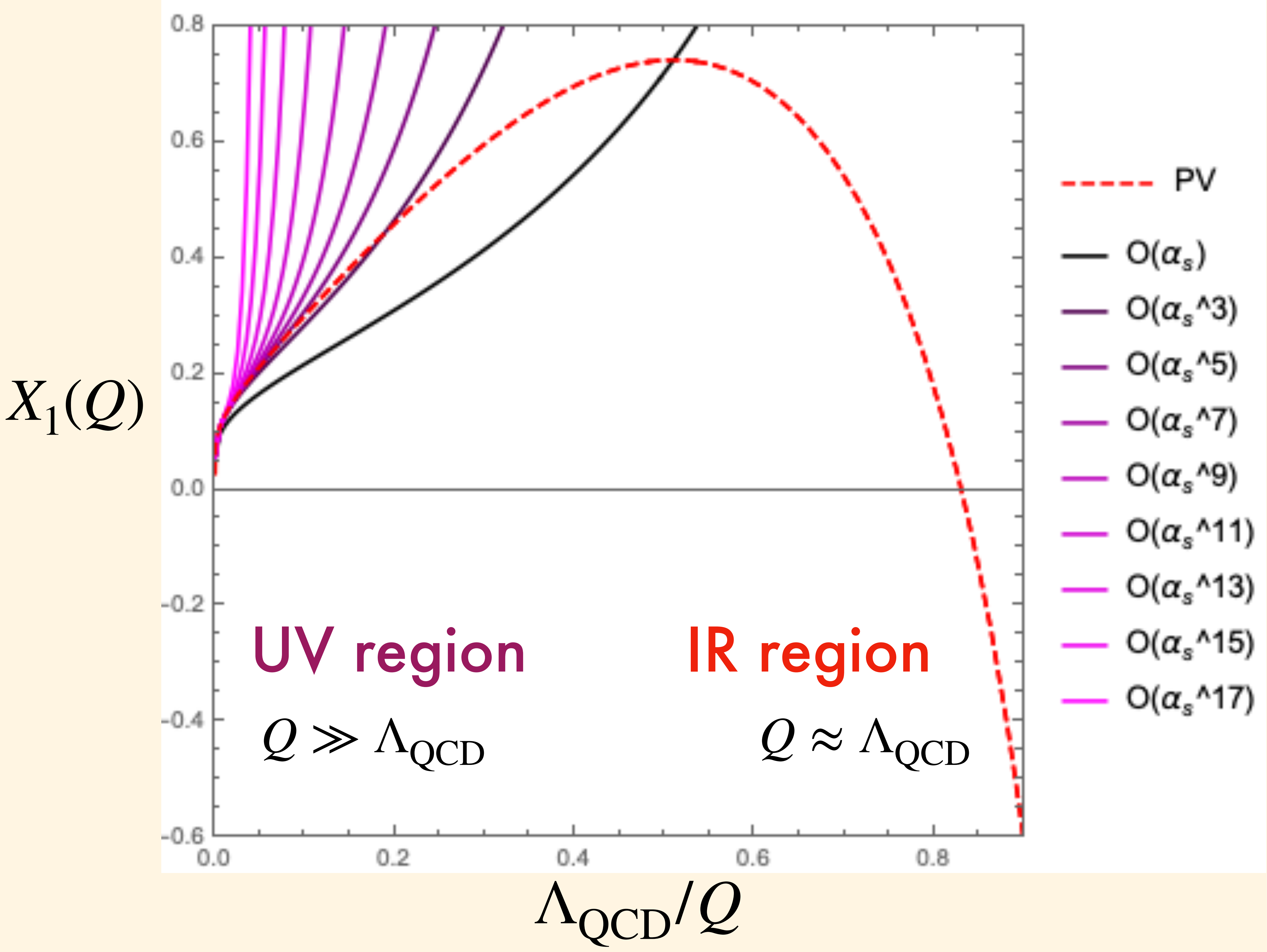
$\tilde{X}(\tau)$の摂動展開の高次を取り入れるにつれ,

$\big[X(Q)\big]_{\mathrm{PV}}$に漸近する.

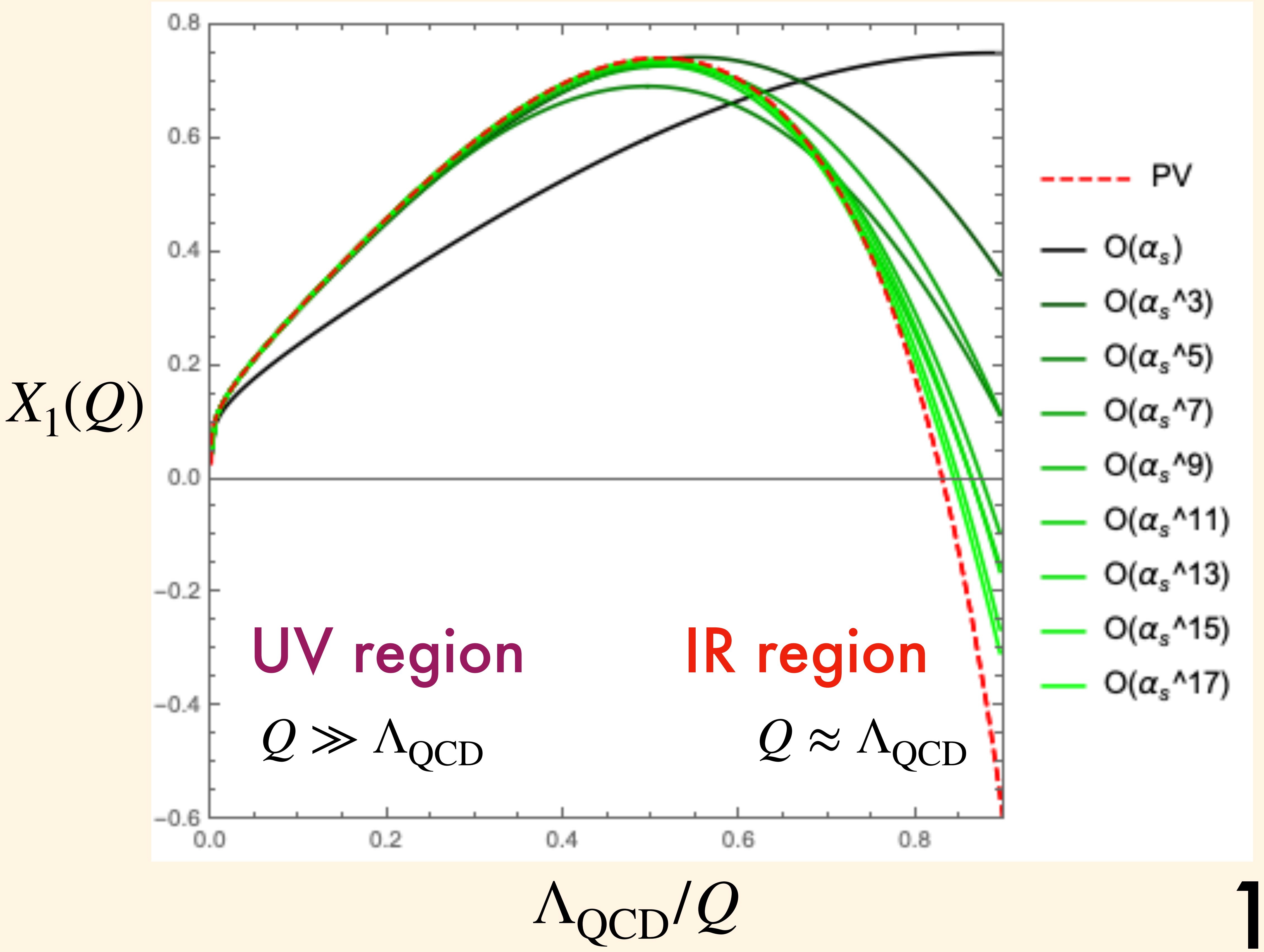
【Method】

- **Toy modelを使った例** $\left[X_1(Q)\right]_{\mathrm{PT}} = \sum_{n=0}^{\infty} n!\,\alpha_s(Q)^{n+1}$ 発散

摂動展開 vs PV prescription



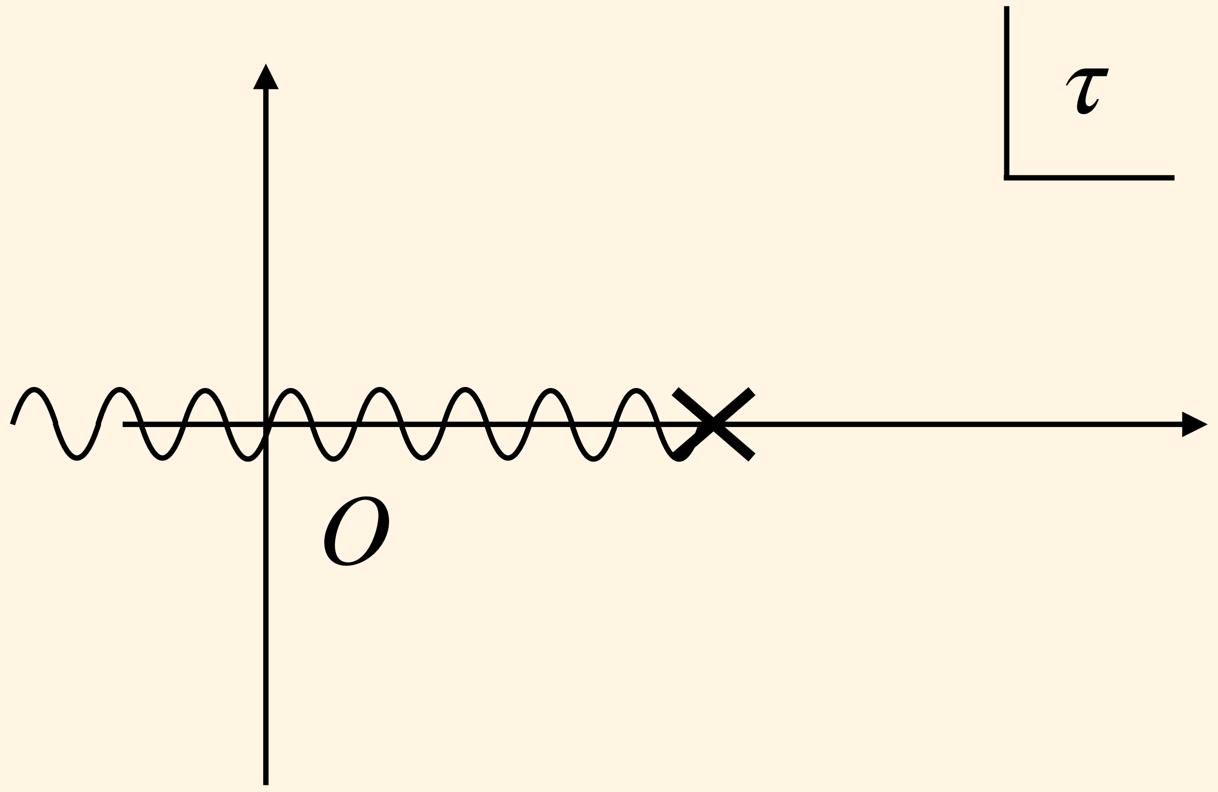
フーリエ変換 vs PV prescription



【Method】

- **フーリエ変換によるリノーマロン除去法のまとめ**

$$\left[X(Q)\right]^{(k)}_{\rm PV} = \frac{r^{-2au'-1}}{2\pi^2}\int_{0,{\rm PV}}^{\infty} d\tau\, \tau \sin(\tau r)\tilde{X}(\tau)\Big|_{\text{up to } \alpha_s^{k+1}}$$



・$\tilde{X}(\tau)$は適切なフーリエ変換によってリノーマロンを除去された級数.

・$\tilde{X}(\tau)$は$\alpha_s(\tau^a)$に由来するsingularityを持つ → 主値積分で発散(リノーマロン)を除去

・実用上は$\tilde{X}(\tau)$の摂動展開を$\alpha_s(\tau^a)^{k+1}$で打ち止める.（N^{k}LOの摂動級数から構成される)

→ PV prescriptionの結果に漸近する.

【Application】

- **OPE of B (D) meson mass**

$$\overline{M}_{H,\mathrm{OPE}} = m_h + \overline{\Lambda} + \frac{\mu_\pi^2}{2m_h} + O\left(\frac{\Lambda_{\mathrm{QCD}}^3}{m_h^2}\right)$$

(spin-averaged)

・m_h ... リノーマロンにより摂動展開が発散

不定性：　$O(\Lambda_{\mathrm{QCD}}), O(\Lambda_{\mathrm{QCD}}^2), \cdots$

・$H = B(D)$, $h =$ bottom (charm) quark

・m_h：重いクォークのon-shell質量

・$\overline{\Lambda}$：軽い自由度からの寄与

・$\dfrac{\mu_\pi^2}{2m_h}$：重いクォークの運動エネルギー

$\mu_\pi^2 = \dfrac{\langle H | h^\dagger (i\overrightarrow{D})^2 h | H \rangle}{2M_H}$ in H rest frame

$$\to \overline{M}_{H,\mathrm{OPE}} = [m_h]_{\mathrm{PV}} + [\overline{\Lambda}]_{\mathrm{PV}} + \frac{[\mu_\pi^2]_{\mathrm{PV}}}{2m_h} + O\left(\frac{\Lambda_{\mathrm{QCD}}^3}{m_h^2}\right)$$

2つのリノーマロンを引くのはこれが初めて

(先行研究は$O(\Lambda_{\mathrm{QCD}})$のみ)

【Application】

- フーリエ変換でリノーマロンを除去した$[\overline{\Lambda}]_{\mathrm{PV}}$と$[\mu_\pi^2]_{\mathrm{PV}}$の決定

$$\boxed{\overline{M}_{H,\,\mathrm{OPE}} = \left[m_h\right]_{\mathrm{PV}} + \left[\overline{\Lambda}\right]_{\mathrm{PV}} + \frac{\left[\mu_\pi^2\right]_{\mathrm{PV}}}{2m_h} + O\left(\frac{\Lambda_{\mathrm{QCD}}^3}{m_h^2}\right)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ \overline{M}_{B,\,\mathrm{OPE}}\text{と}\overline{M}_{D,\,\mathrm{OPE}}\text{を実験値と比較} \\ \cdot\ \text{inputs : } \bar{m}_b, \bar{m}_c, \alpha_s(M_Z)\ \text{(PDG value)} \end{array}\right\} \quad [\overline{\Lambda}]_{\mathrm{PV}}\text{と}[\mu_\pi^2]_{\mathrm{PV}}\text{を決定}$$

・$\mathrm{N^3LO}$ on-shell - $\overline{\mathrm{MS}}$ relation $m_h = \bar{m}_h\big(1 + \delta(\bar{m}_h)\big)\Big|_{\text{up to }\alpha_s^4}$ $\quad (n_l = 3, n_h = 2)$

【Application】

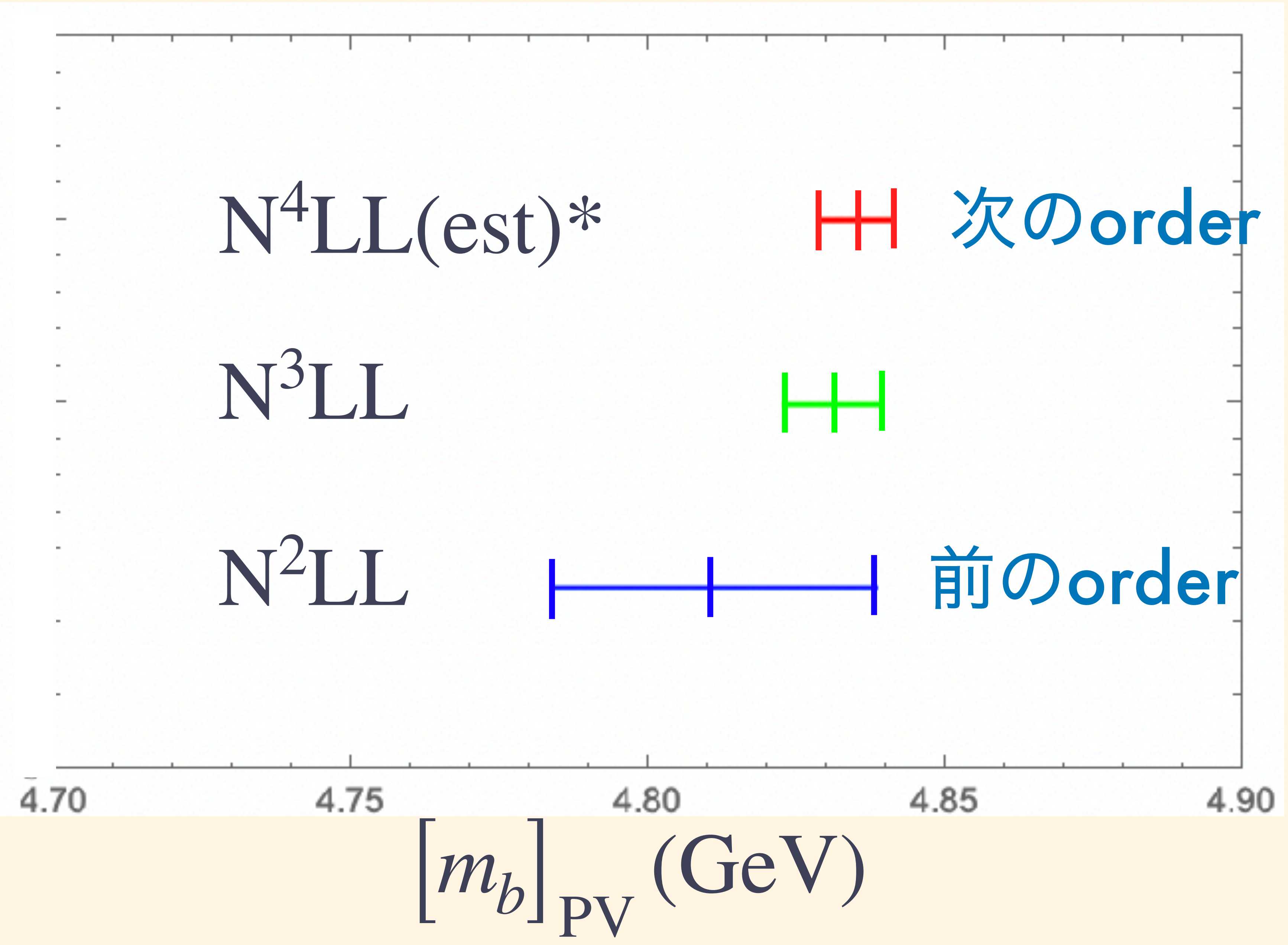
- **Scale dependence of $\left[m_h\right]_{\rm PV}$**

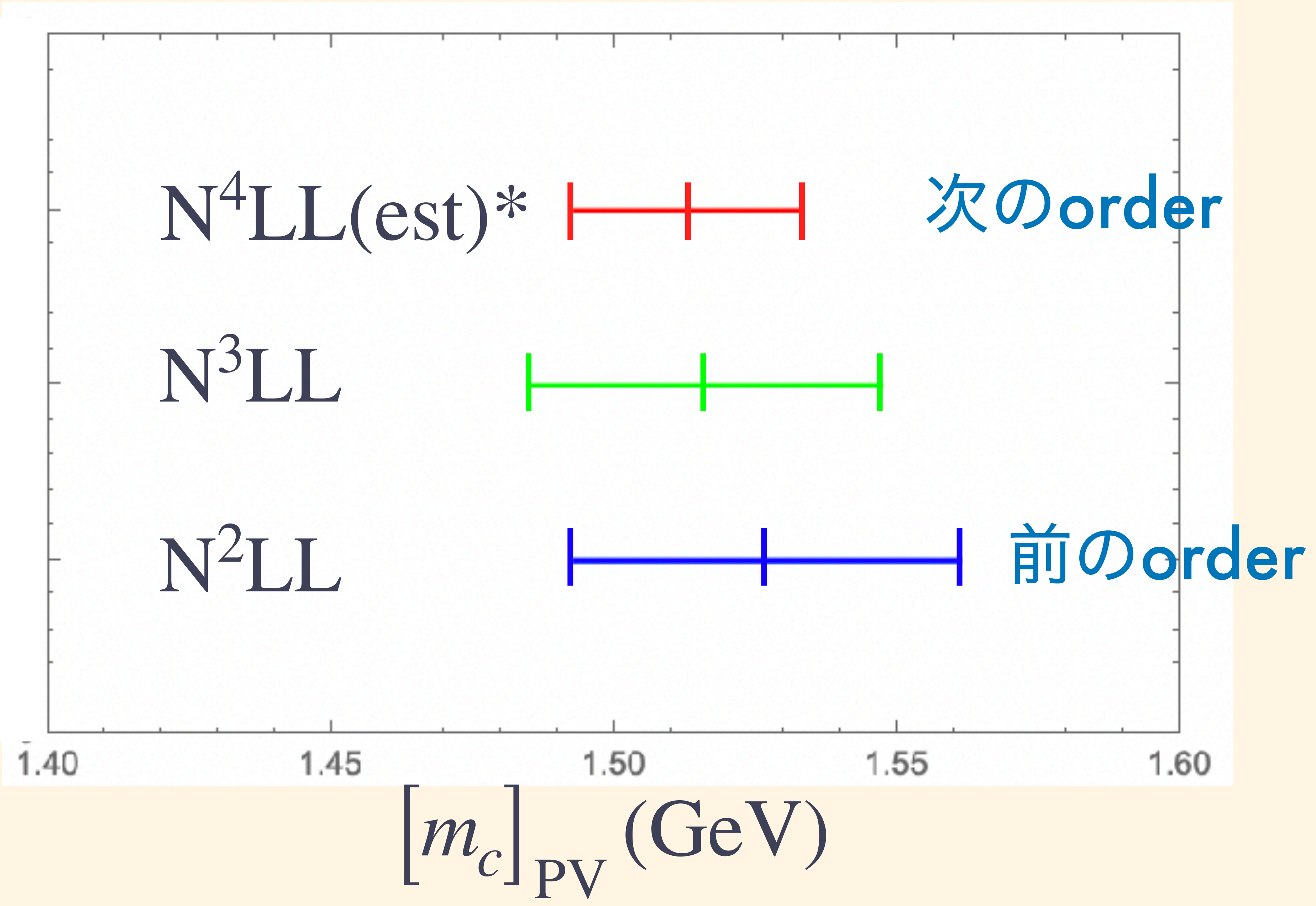
$$\boxed{\overline{M}_{H,\,\rm OPE} = \left[m_h\right]_{\rm PV} + \left[\overline{\Lambda}\right]_{\rm PV} + \frac{\left[\mu_\pi^2\right]_{\rm PV}}{2m_h} + O\left(\frac{\Lambda_{\rm QCD}^3}{m_h^2}\right)}$$

$$\mathrm{N^3LL} \qquad \left[m_b\right]_{\rm PV} = 4.831(8)\,\mathrm{GeV}, \quad \left[m_c\right]_{\rm PV} = 1.516(31)\,\mathrm{GeV}$$

(for $\bar{m}_b = 4.18\,\mathrm{GeV}$) (for $\bar{m}_c = 1.27\,\mathrm{GeV}$)

(#) : error from scale variation within $\mu \in [\tau^2/2, 2\tau^2]$





摂動論の次数を上げるごとにm_hの摂動予言の精度が改善している.

【Application】

- **Determination of $\left[\overline{\Lambda}\right]_{\rm PV}$ & $\left[\mu_\pi^2\right]_{\rm PV}$**

$$\boxed{\overline{M}_{H,\,\rm OPE} = \left[m_h\right]_{\rm PV} + \left[\overline{\Lambda}\right]_{\rm PV} + \frac{\left[\mu_\pi^2\right]_{\rm PV}}{2m_h} + O\left(\frac{\Lambda_{\rm QCD}^3}{m_h^2}\right)}$$

N^{3}LL

$$\left[\overline{\Lambda}\right]_{\rm PV} = 0.495\,(15)_\mu(49)_{\bar{m}_b}(12)_{\bar{m}_c}(13)_{\alpha_s}\,\text{GeV}$$

$$\left[\mu_\pi^2\right]_{\rm PV} = -\,0.12\,(13)_\mu(15)_{\bar{m}_b}(11)_{\bar{m}_c}(4)_{\alpha_s}\,\text{GeV}^2$$

・$\left[\overline{\Lambda}\right]_{\rm PV}$: リノーマロンの除去によって摂動論の不定性が小さい.

（もしリノーマロンが残っていたら$\delta\overline{\Lambda} = O(\Lambda_{\rm QCD})$の摂動論不定性が残る）

・$\left[\mu_\pi^2\right]_{\rm PV}$はリノーマロンが残っている？

$\rightarrow$ N^{4}LL(est)* $\quad \left[\mu_\pi^2\right]_{\rm PV} = -\,0.09\,(7)_\mu\,\text{GeV}^2$

N^{4}LOの摂動係数が計算されれば，摂動論による予言精度が向上する.

【Conclusions】

- OPEを使うことで，QCDの摂動予言に含まれるリノーマロン不定性を除去できる.
- 摂動予言からのリノーマロン除去を実用的に行うために，フーリエ変換を使った計算手法を開発した.

・適切なフーリエ変換でリノーマロンのない級数を生成.

・フーリエ逆変換の主値積分 → PV prescriptionのsystematicな近似

- B(D) meson質量のOPE → $\mathrm{N^3LL}$でリノーマロンを除去し非摂動パラメータを決定.

$$\left[\bar{\Lambda}\right]_{\mathrm{PV}} = 0.495\,(53)\,\mathrm{GeV}, \qquad \left[\mu_\pi^2\right]_{\mathrm{PV}} = -\,0.12\,(23)\,\mathrm{GeV}^2$$

- リノーマロン除去によって，次のorderでperturbative errorを小さくできる.

Back up slides

【Application】

- $\left[\overline{\Lambda}\right]_{\rm PV}$ & $\left[\mu_\pi^2\right]_{\rm PV}$ の先行研究との比較

Our result $\boxed{\left[\overline{\Lambda}\right]_{\rm PV} = 0.495\,(53)\,\mathrm{GeV}, \quad \left[\mu_\pi^2\right]_{\rm PV} = -\,0.12\,(23)\,\mathrm{GeV}^2}$

$O(\Lambda_{\rm QCD})$のリノーマロンだけを除去してμ_π^2まで決定

Bazavov *et al*, 1802.04248

$$\bar{\Lambda}_{\rm PV} = 0.435(31)\ \mathrm{GeV}\,, \quad (\mu_\pi^2)_{\rm PV} = 0.05(22)\ \mathrm{GeV}^2\,.$$

$O(\Lambda_{\rm QCD})$のリノーマロンだけを除去し，μ_π^2のオーダーの非摂動項を無視

Ayala, Lobreget, Pineda, 1909.01370

$$\bar{\Lambda}_{\rm PV} = 477(\mu)^{-8}_{+17}(Z_m)^{+11}_{-12}(\alpha_s)^{-8}_{+9}(\mathcal{O}(1/m_h))^{+46}_{-46}\ \mathrm{MeV}\,,$$

【Method】

- くりこみ群によるリノーマロンの同定

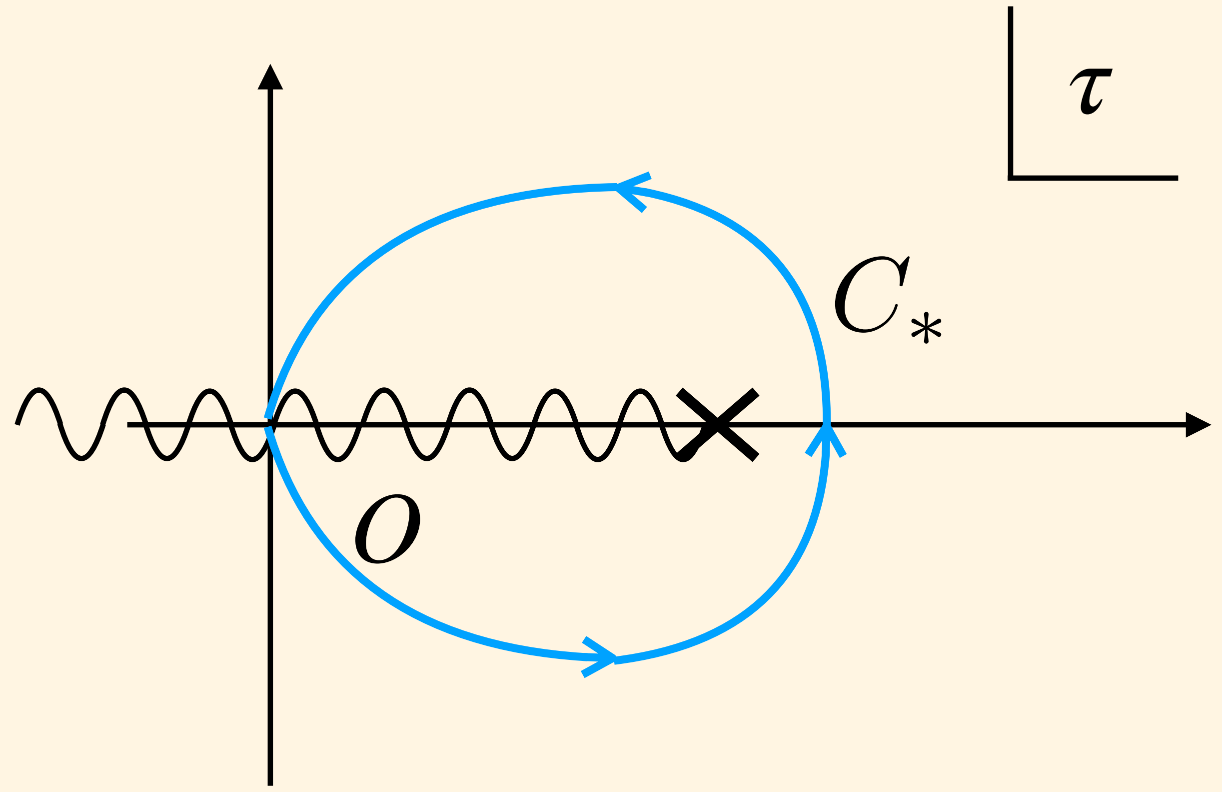
・RGを使って$\log(\mu/\tau^a)$の項をresumする（$\mu=\tau^a$とする）.

$$\frac{r^{-2au'-1}}{2\pi^2}\int_0^\infty d\tau\,\tau\sin(\tau r)\tilde{X}(\tau)=\frac{r^{-2au'-1}}{2\pi^2}\int_0^\infty d\tau\,\tau\sin(\tau r)F(\tau)\sum_n \tilde{c}_n(1)\alpha_s(\tau^a)^{n+1}$$

・リノーマロン（発散）の出どころは，$\alpha_s(\tau^a)$のもつsingularityに置き換わる.

→ singularityを囲む積分がリノーマロンに相当

$$\boxed{\delta X(Q)=\frac{r^{-2au'-1}}{2\pi^2}\int_{C_*} d\tau\,\tau\sin(\tau r)\tilde{X}(\tau)}$$



【Method】

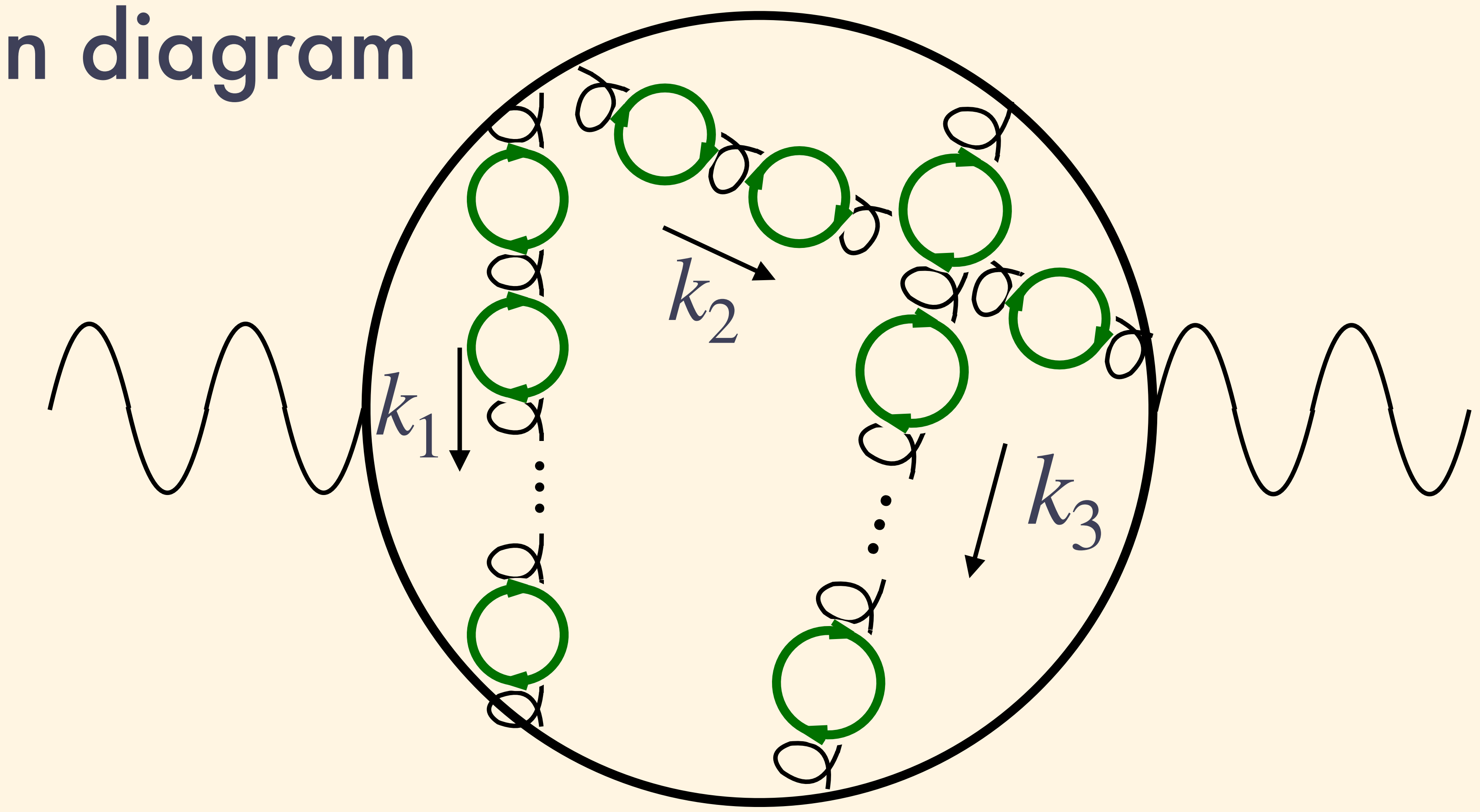
- 補足

・原理的にはα_s補正を含めたリノーマロンの除去が可能.

・フーリエ変換による運動量表示の解釈

Loop積分の詳細によらずに，摂動級数の1変数積分表示を与える.

一般のrenormalon diagram



→ 1変数積分表示の構成が難しい

- **Numerical calculation of** $[X(Q)]_{\rm PV}$

$$[X(Q)]_{\rm PV} \equiv \frac{r^{-2au'-1}}{2\pi^2} \int_{0,\rm PV}^{\infty} d\tau\, \tau \sin(\tau r) \tilde{X}(\tau)$$

Decompose

$$= \quad X_0(Q) \quad + \quad X_{\rm pow}(Q)$$

$X_0(Q)$: exponentially damped part

$X_{\rm pow}(Q)$: can be expanded to the appropriated order of $1/Q^n$

(should be expanded up to order of the eliminated renormalon)

- **Remove ambiguities with anomalous dim & α_s corrections**

$$\delta X(Q) = N_{u_*}\left(\Lambda_{\overline{\mathrm{MS}}}/Q\right)^{2u_*}\alpha_s^{\gamma_0/b_0}(1+\mathcal{O}(\alpha_s))$$

1993 Beneke

$$= N_{u_*}\left(\Lambda_{\overline{\mathrm{MS}}}/Q\right)^{2u_*}(1+q_1\log(1/Q^2)+q_2\log(1/Q^2)^2+\cdots)$$

We can define the Fourier transform so that $\delta\tilde{X}(\tau)$ doesn't have $\log(\tau)$ corrections.

(Detailed discussion is included in arXiv : 2106.03687)