

4-A

量子グラフを余剰次元としてもつ 時空の対称性とAZ対称類との対応

井上奉紀 (神戸大)

共同研究

上場一慶・佐藤昌利 (YITP)
坂本真人 (神戸大)

発表の流れ

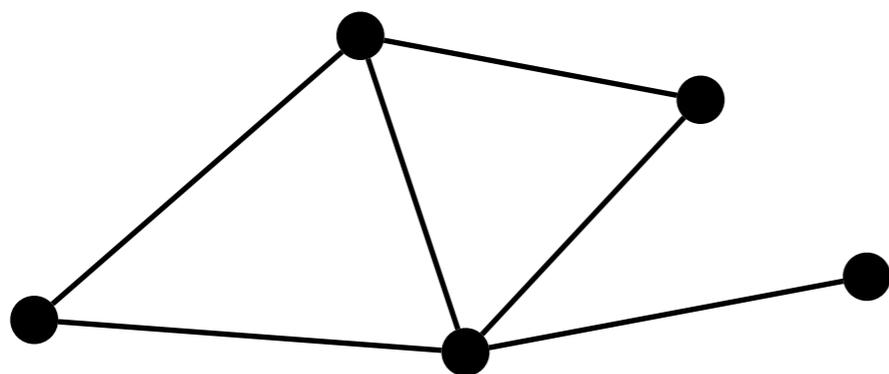
- 背景と導入
- 量子グラフに関する説明
- 研究結果
- まとめと今後の展望

背景(1)

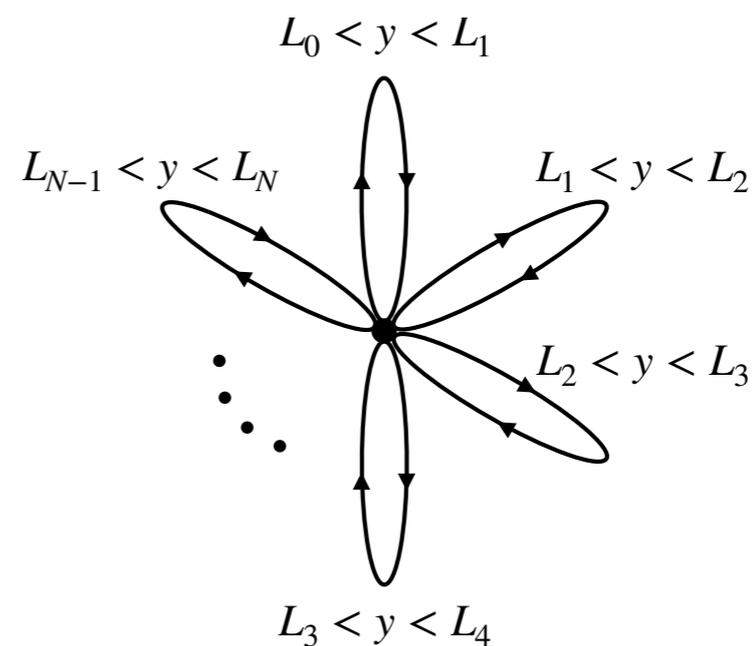
量子グラフ

線分と頂点で構成される
1次元回路状の量子力学系

例) 6本の線分+5つの頂点



N本の線分+1つの頂点



背景(2)

量子グラフ

様々な分野で研究対象になっている

→ 様々な境界条件を含むため、一般の量子力学系を解析するときに有用だから。

エネルギースケール



• 余剰次元模型

標準模型スケール

• 量子カオス

• グラフ上の散乱理論

• 超対称な量子力学

• ナノテクノロジー

背景(2)

量子グラフ

様々な分野で研究対象になっている

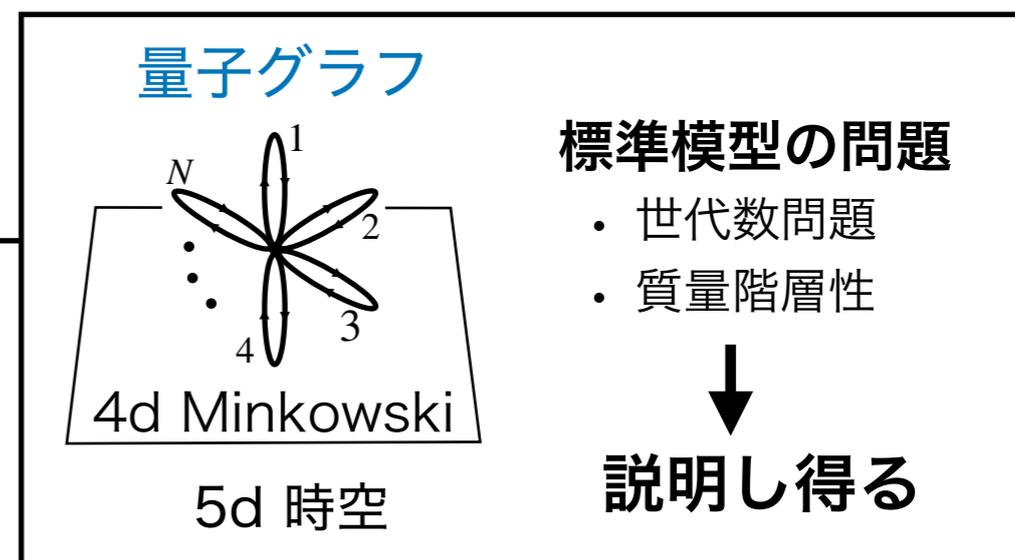
→ 様々な境界条件を含むため、一般の量子力学系を解析するときに有用だから。

エネルギースケール

• 余剰次元模型

標準模型スケール

- 量子カオス
- グラフ上の散乱理論
- 超対称な量子力学
- ナノテクノロジー



背景(2)

量子グラフ

様々な分野で研究対象になっている

→ 様々な境界条件を含むため、一般の量子力学系を解析するときに有用だから。

エネルギースケール



• 余剰次元模型

標準模型スケール

• 量子カオス

• グラフ上の散乱理論

• 超対称な量子力学

• ナノテクノロジー

量子グラフ

4d Minkowski
5d 時空

標準模型の問題

- 世代数問題
- 質量階層性

↓

説明し得る

超対称代数

$$H = Q^2,$$

$$[(-1)^F]^2 = 1,$$

$$\{Q, (-1)^F\} = 0$$

やったこと

AZ対称類
(トポロジカル物性)



余剰次元=量子グラフ
とするモデル

非自明な関係を明らかにした！

AZ対称類とは？

Altland-Zirnbauer対称類(トポロジカル物性)とは

[Altland and Zirnbauer, Phys. Rev. B55 (1997) 1142.]

AZ対称類とは？

Altland-Zirnbauer対称類(トポロジカル物性)とは

[Altland and Zirnbauer, Phys. Rev. B55 (1997) 1142.]

自由フェルミオン系のハミルトニアンは
対称性によって10の対称類に分類される.

$$H^2 = 1, \quad H^\dagger = H$$

時間反転対称性

$$THT^{-1} = H \quad (T^2 = \pm 1)$$

粒子ホール対称性

$$CHC^{-1} = -H \quad (C^2 = \pm 1)$$

+これらの
組み合わせ

カイラル対称性

$$\Gamma H \Gamma^{-1} = -H \quad (\Gamma^2 = 1)$$

AZ対称類とは？

Altland-Zirnbauer対称類(トポロジカル物性)とは

[Altland and Zirnbauer, Phys. Rev. B55 (1997) 1142.]

自由フェルミオン系のハミルトニアンは対称性によって10の対称類に分類される。

$$H^2 = 1, \quad H^\dagger = H$$

時間反転対称性

$$THT^{-1} = H \quad (T^2 = \pm 1)$$

粒子ホール対称性

$$CHC^{-1} = -H \quad (C^2 = \pm 1)$$

カイラル対称性

$$\Gamma H \Gamma^{-1} = -H \quad (\Gamma^2 = 1)$$

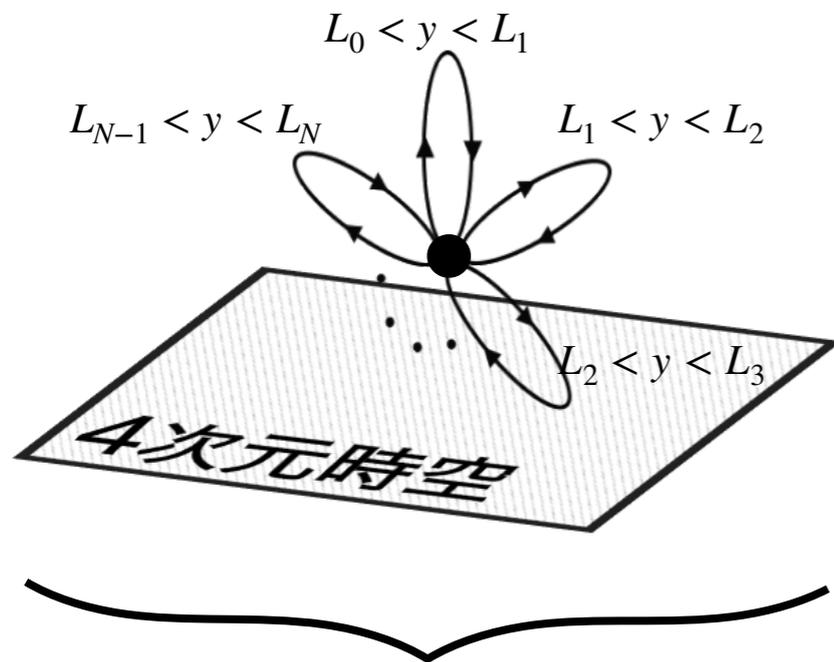
+これらの組み合わせ

トポロジカル絶縁体に対応

対称類	T	C	Γ	top#
A	0	0	0	Z
AIII	0	0	1	0
AI	+	0	0	Z
BDI	+	+	1	Z_2
D	0	+	0	Z_2
DIII	-	+	1	0
AII	-	0	0	2Z
CII	-	-	1	0
C	0	-	0	0
CI	-	-	1	0

0: 対称性なし / ± 1 : 対称性あり, 2乗の正負

本講演で明らかにしたいこと



4次元Minkowski時空 (x^μ)
+ 量子グラフ (y) = 5次元時空

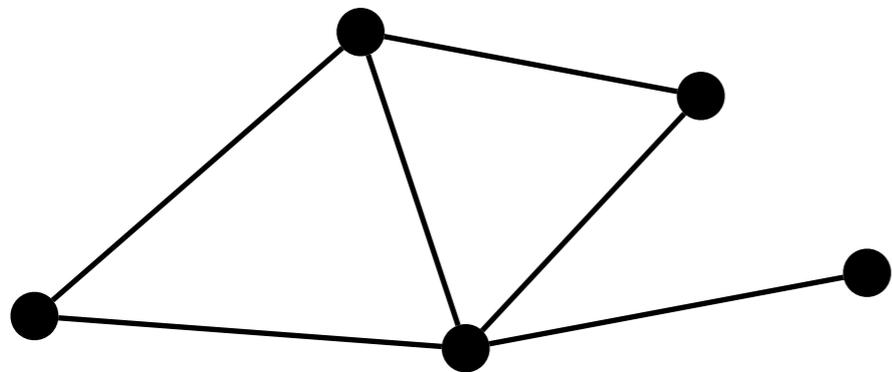
量子グラフを余剰次元としてもつ模型において

1. $H^2 = 1, H^\dagger = H$ に対応するものは何か？
2. T, C, Γ の変換に対応するものは何か？
3. AZ対称類のtop#に対応するものは何か？

発表の流れ

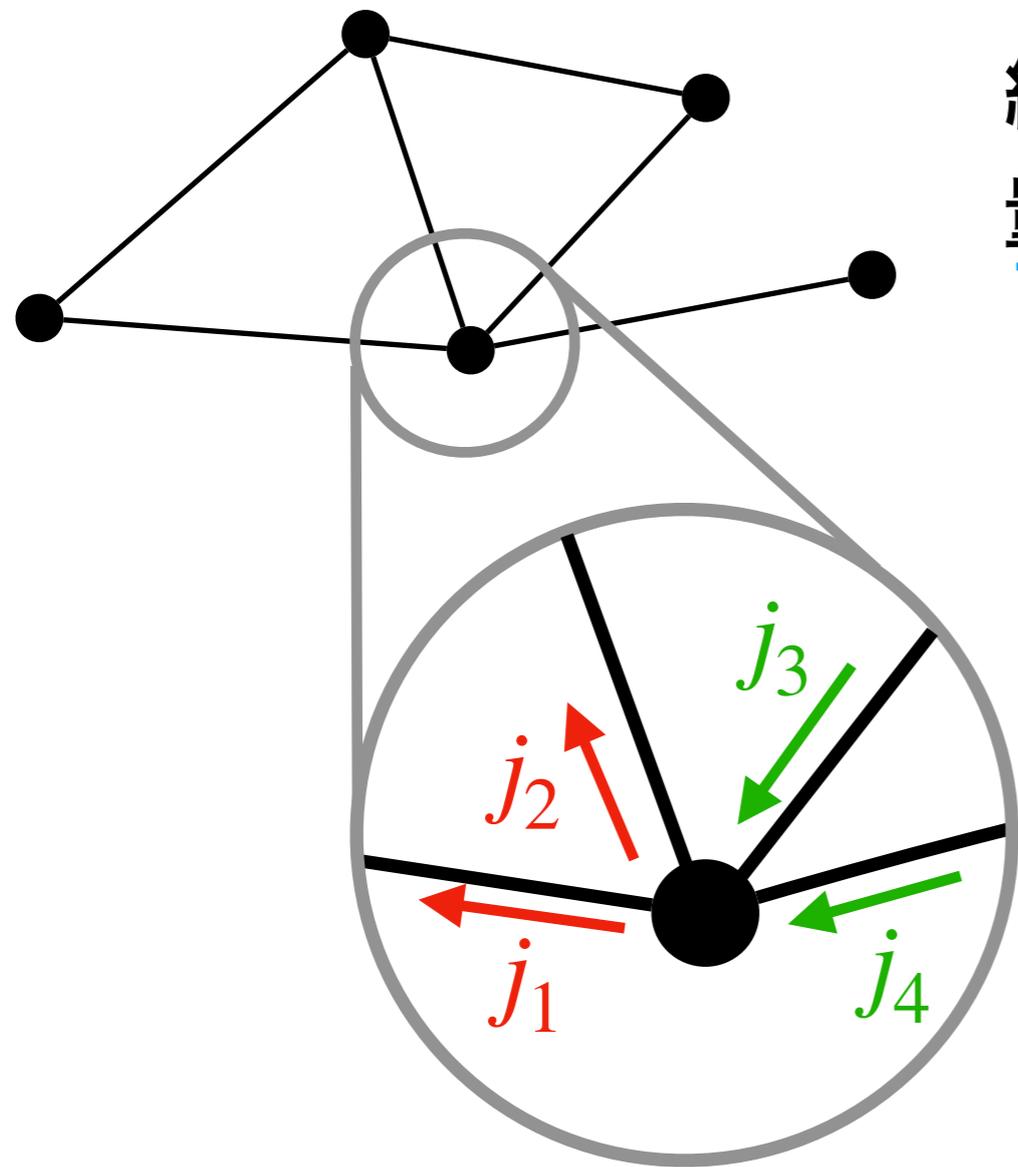
- 背景と導入
- **量子グラフに関する説明**
- 研究結果
- まとめと今後の展望

量子グラフとは何か？



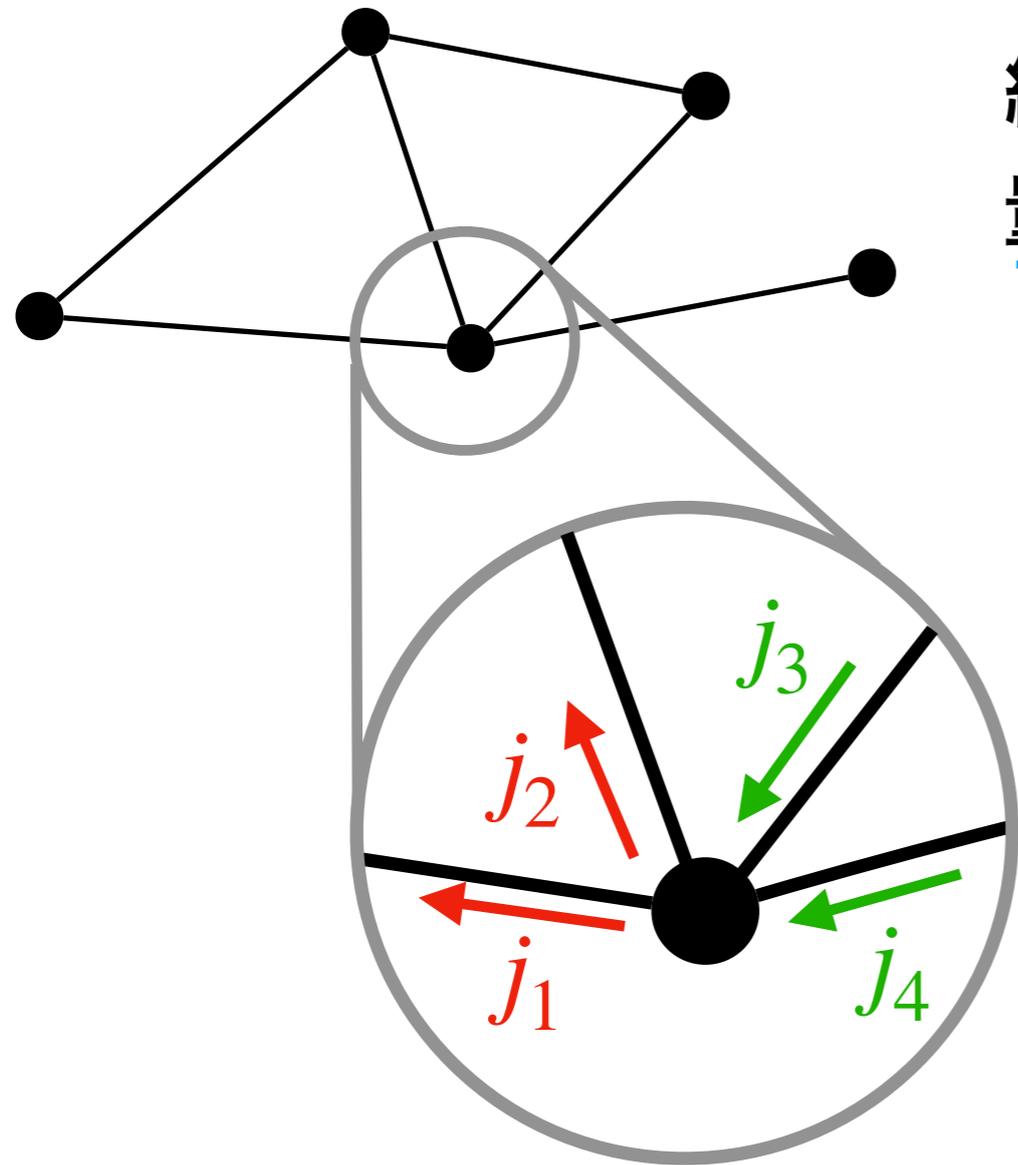
線分と頂点で構成される1次元回路状の
量子力学系

量子グラフとは何か？



線分と頂点で構成される1次元回路状の
量子力学系

量子グラフとは何か？



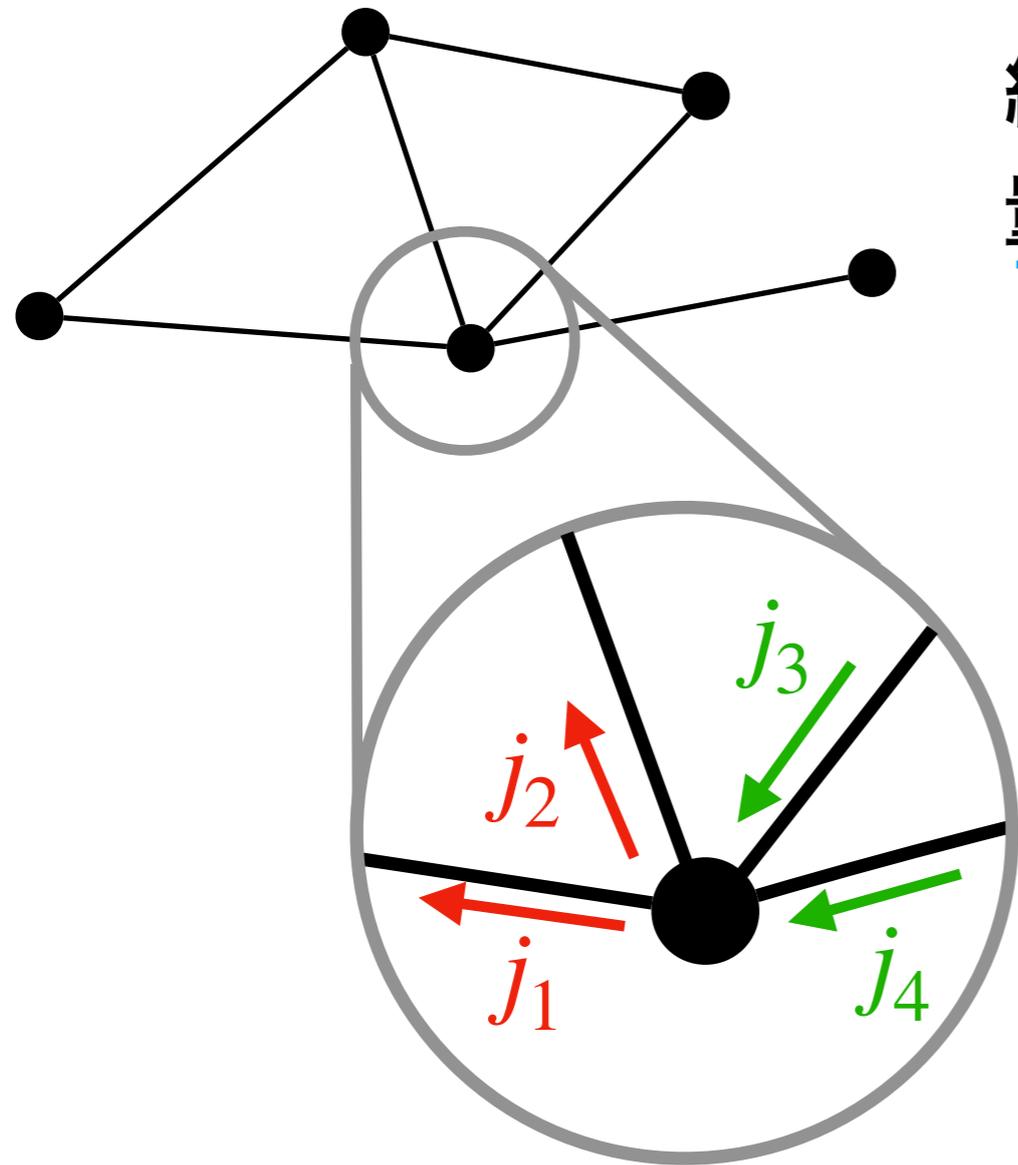
線分と頂点で構成される1次元回路状の
量子力学系



系のカレントが保存する

$$j_1 + j_2 = j_3 + j_4$$

量子グラフとは何か？



線分と頂点で構成される1次元回路状の量子力学系



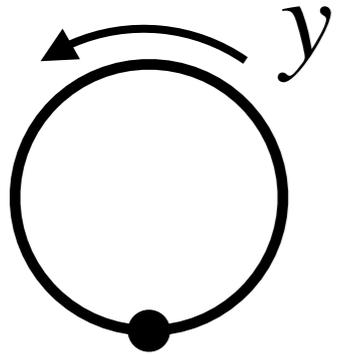
系のカレントが保存する

$$j_1 + j_2 = j_3 + j_4$$



頂点での適切な境界条件/接続条件

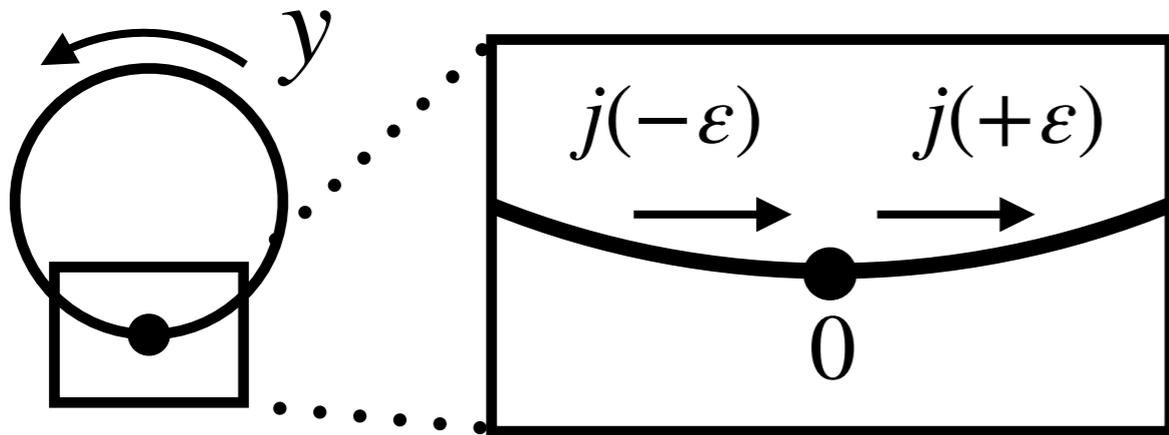
簡単な例の境界条件



量子力学系

1次元上の自由粒子

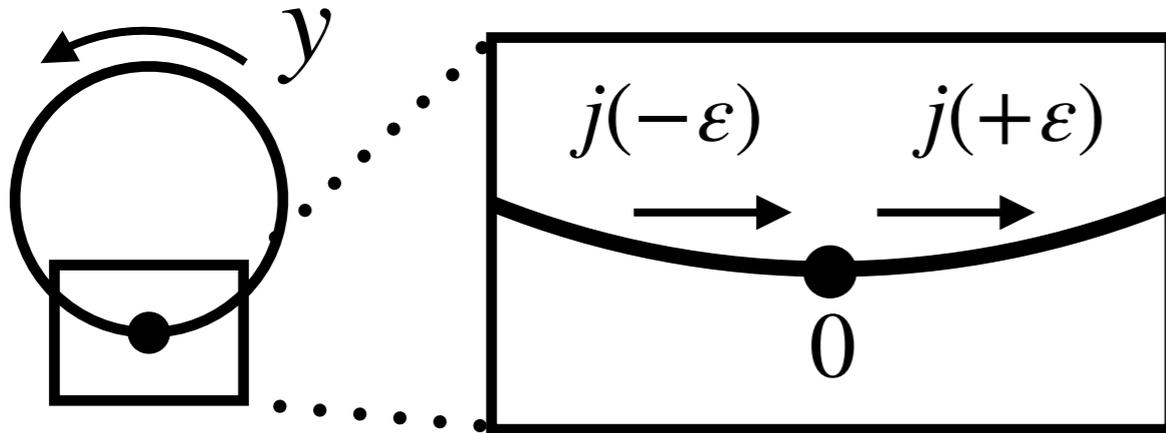
簡単な例の境界条件



量子力学系

1次元上の自由粒子

簡単な例の境界条件



量子力学系

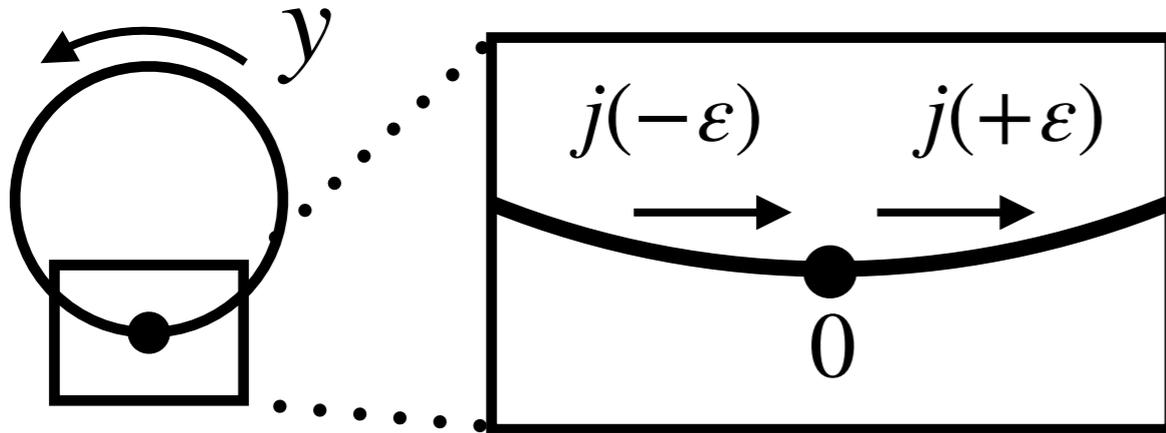
1次元上の自由粒子

カレントの保存則

$$j(-\varepsilon) = j(+\varepsilon)$$

$$j(y) = -i [\varphi^* \varphi'(y) - \varphi'^* \varphi(y)]$$

簡単な例の境界条件



量子力学系

1次元上の自由粒子

カレントの保存則

$$j(-\varepsilon) = j(+\varepsilon)$$

$$j(y) = -i [\varphi^* \varphi'(y) - \varphi'^* \varphi(y)]$$



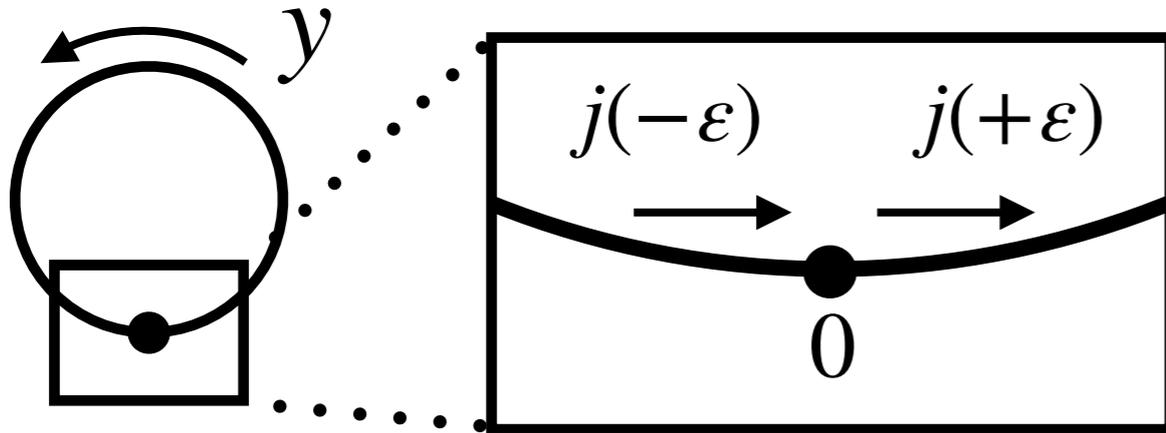
境界条件/接続条件

$$(1_2 - U)\Phi + iL_0(1_2 + U)\Phi' = 0$$

$$\Phi \equiv \begin{pmatrix} \varphi(+\varepsilon) \\ \varphi(-\varepsilon) \end{pmatrix}, \quad \Phi' \equiv \begin{pmatrix} \varphi'(+\varepsilon) \\ -\varphi'(-\varepsilon) \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in U(2)$$

簡単な例の境界条件



量子力学系

1次元上の自由粒子

カレントの保存則

$$j(-\varepsilon) = j(+\varepsilon)$$

$$j(y) = -i [\varphi^* \varphi'(y) - \varphi'^* \varphi(y)]$$

境界条件/接続条件

$$(1_2 - U)\Phi + iL_0(1_2 + U)\Phi' = 0$$

$$\Phi \equiv \begin{pmatrix} \varphi(+\varepsilon) \\ \varphi(-\varepsilon) \end{pmatrix}, \quad \Phi' \equiv \begin{pmatrix} \varphi'(+\varepsilon) \\ -\varphi'(-\varepsilon) \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in U(2)$$

↑

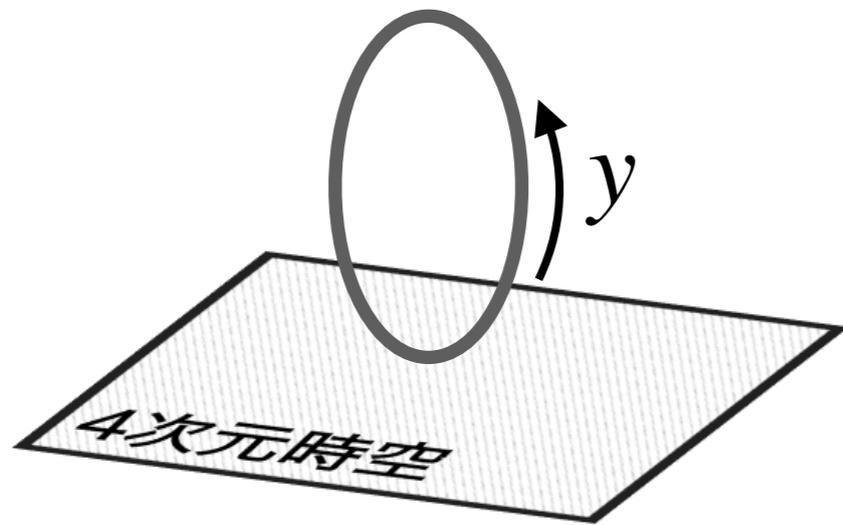
境界条件はU(2)のパラメータで特徴付けられる

発表の流れ

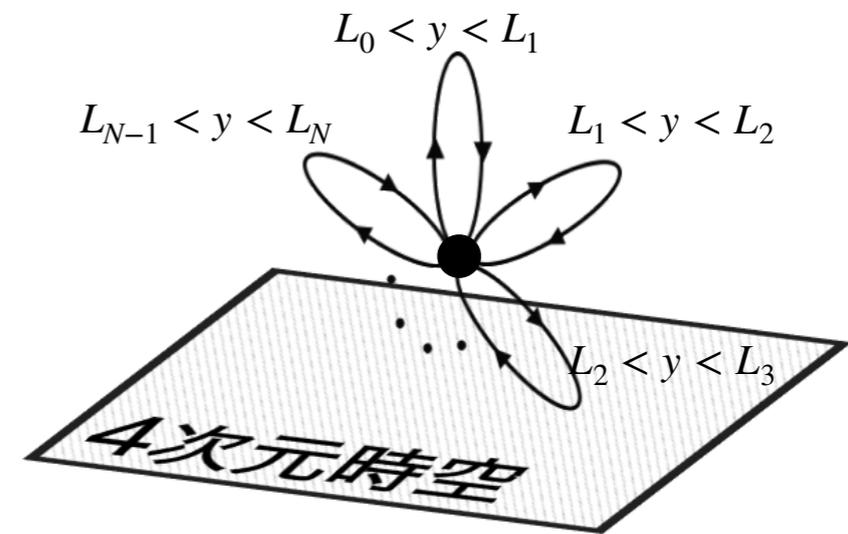
- 背景と導入
- 量子グラフに関する説明
- **研究結果**
- まとめと今後の展望

本研究の動機

余剰次元 = S^1



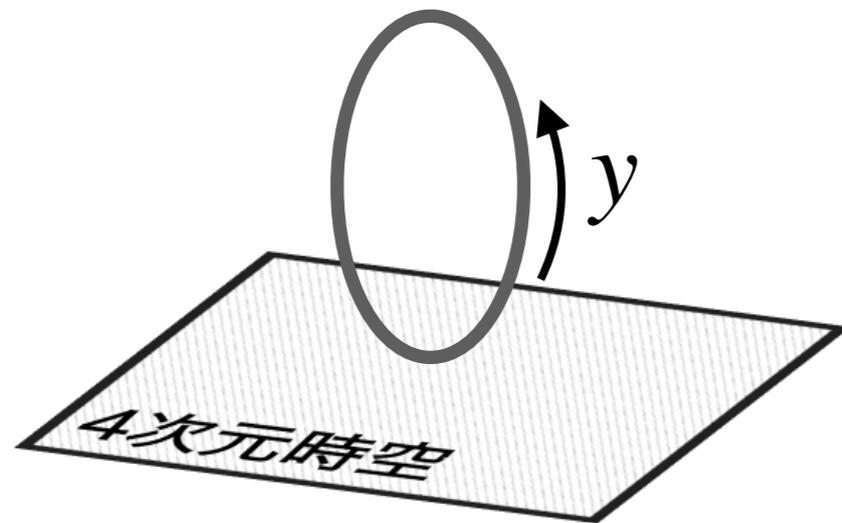
余剰次元 = 量子グラフ



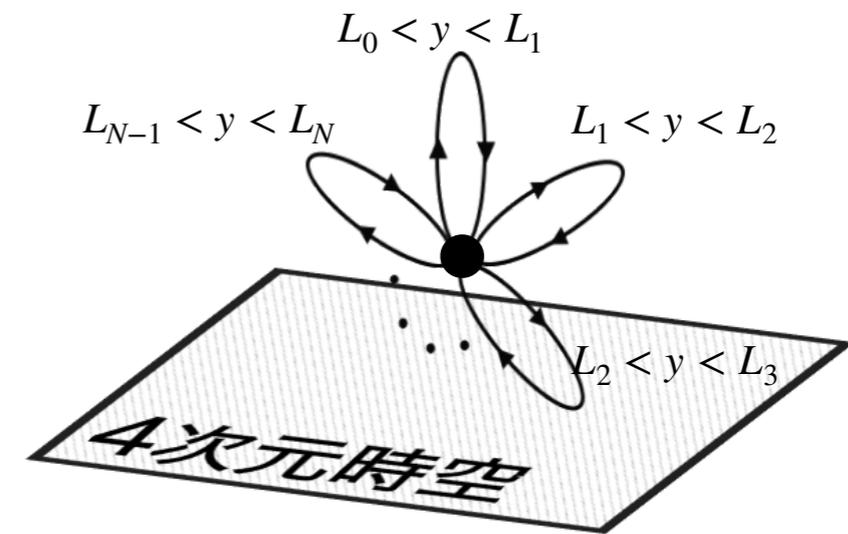
余剰次元 = 「様々な境界条件を含む量子力学系(量子グラフ)」
としたモデルの構造を解明したい

本研究の動機

余剰次元 = S^1



余剰次元 = 量子グラフ



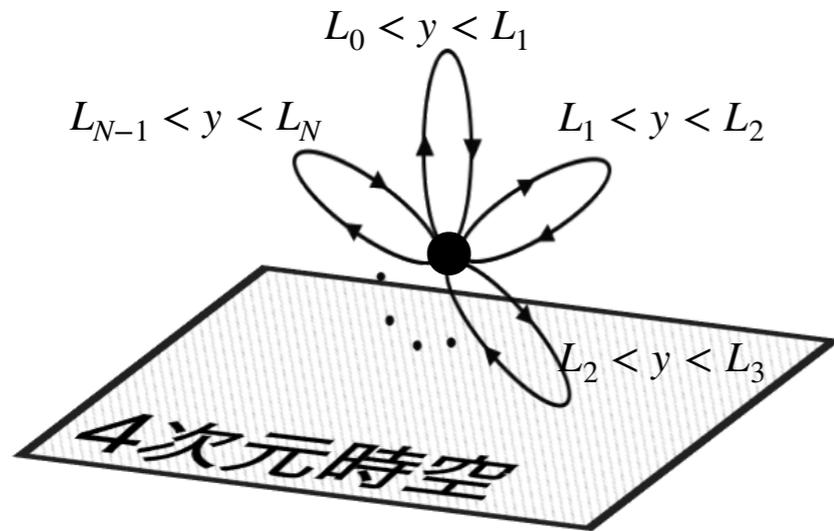
余剰次元 = 「様々な境界条件を含む量子力学系(量子グラフ)」
としたモデルの構造を解明したい

コンパクト化後に現れる4次元質量スペクトルと、
時間反転・荷電共役・パリティ対称性の関係を調べる。

セットアップ

5次元自由Diracフェルミオンの作用

$$S = \int d^4x \sum_{a=1}^N \int_{L_{a-1}+\varepsilon}^{L_a-\varepsilon} dy \bar{\Psi}(x, y) [i\gamma^\mu \partial_\mu + i\gamma^y \partial_y + M] \Psi(x, y)$$

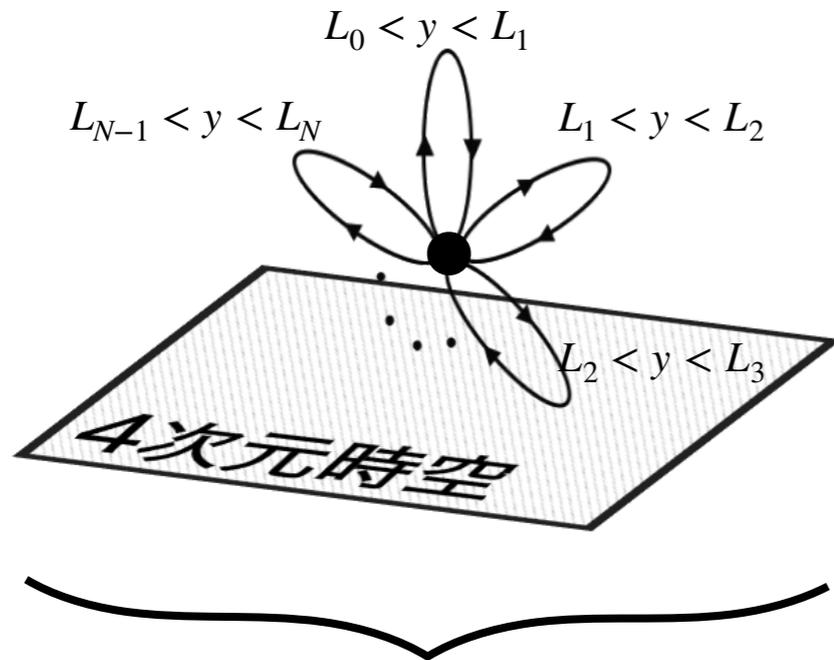


4次元Minkowski時空 (x^μ)

+ 量子グラフ (y) = 5次元時空

区間の数(N)=偶数

セットアップ



4次元Minkowski時空 (x^μ)
 + 量子グラフ (y) = 5次元時空

区間の数(N)=偶数

5次元自由Diracフェルミオンの作用

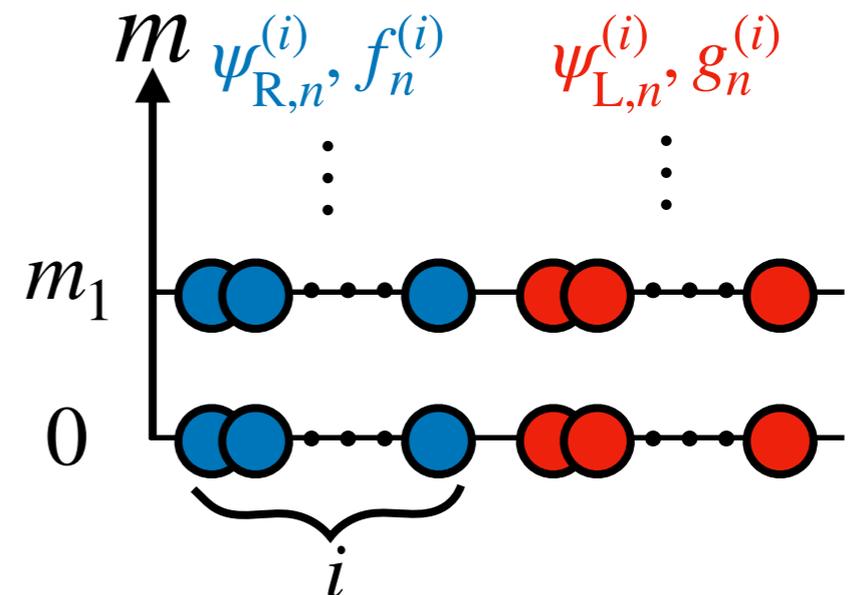
$$S = \int d^4x \sum_{a=1}^N \int_{L_{a-1}+\epsilon}^{L_a-\epsilon} dy \bar{\Psi}(x, y) [i\gamma^\mu \partial_\mu + i\gamma^y \partial_y + M] \Psi(x, y)$$

5次元DiracフェルミオンのKaluza-Klein展開

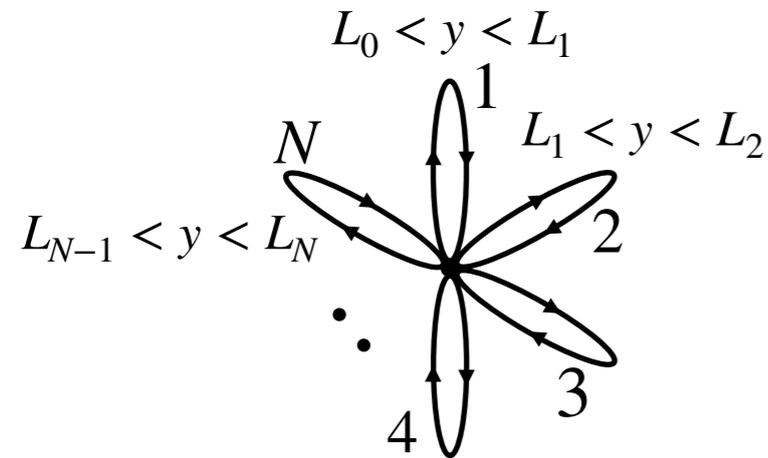
$$\Psi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_i [\psi_{R,n}^{(i)}(x) f_n^{(i)}(y) + \psi_{L,n}^{(i)}(x) g_n^{(i)}(y)]$$

$$\gamma^5 \psi_{R/L,n}^{(i)} = \psi_{R/L,n}^{(i)}$$

KK展開の意味



本モデルの境界条件

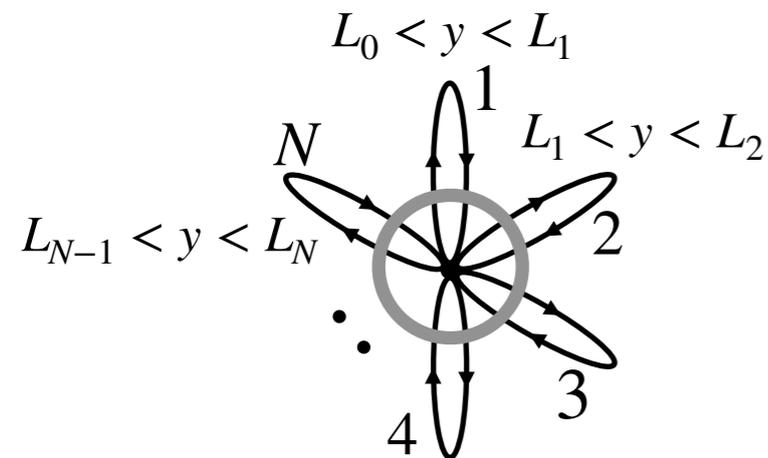


量子力学系

4+1次元上のDiracフェルミオン

(4: 4次元時空, 1: 量子グラフ方向の座標)

本モデルの境界条件



量子力学系

4+1次元上のDiracフェルミオン

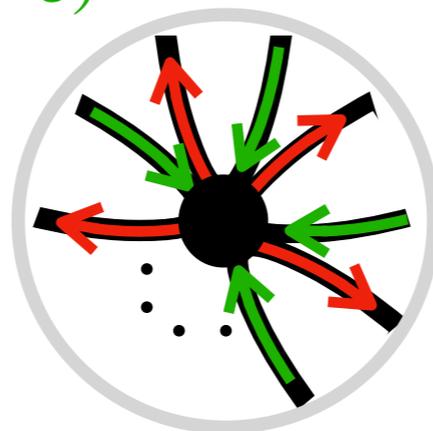
(4: 4次元時空, 1: 量子グラフ方向の座標)

カレントの保存則

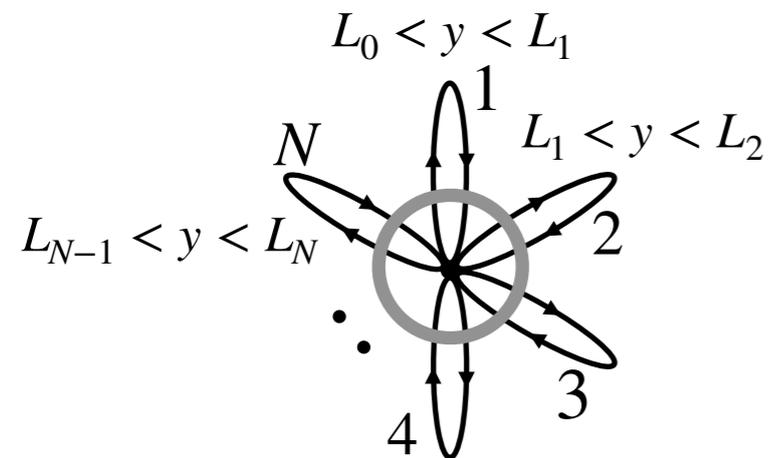
$$\sum_{a=1}^N j(L_{a-1} + \varepsilon) = \sum_{a=1}^N j(L_a - \varepsilon)$$

$$j(y) = \bar{\Psi}(x, y) \gamma^y \Psi(x, y)$$

y: 量子グラフ方向



本モデルの境界条件



量子力学系

4+1次元上のDiracフェルミオン

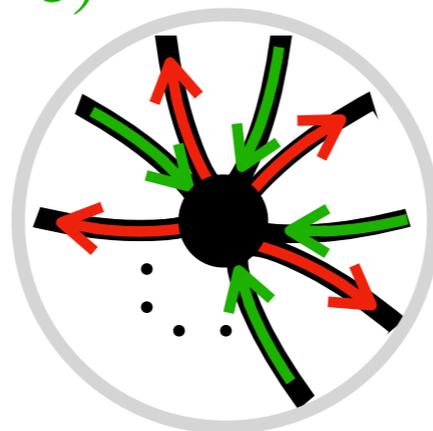
(4: 4次元時空, 1: 量子グラフ方向の座標)

カレントの保存則

$$\sum_{a=1}^N j(L_{a-1} + \varepsilon) = \sum_{a=1}^N j(L_a - \varepsilon)$$

$$j(y) = \bar{\Psi}(x, y) \gamma^y \Psi(x, y)$$

y: 量子グラフ方向



境界条件/接続条件

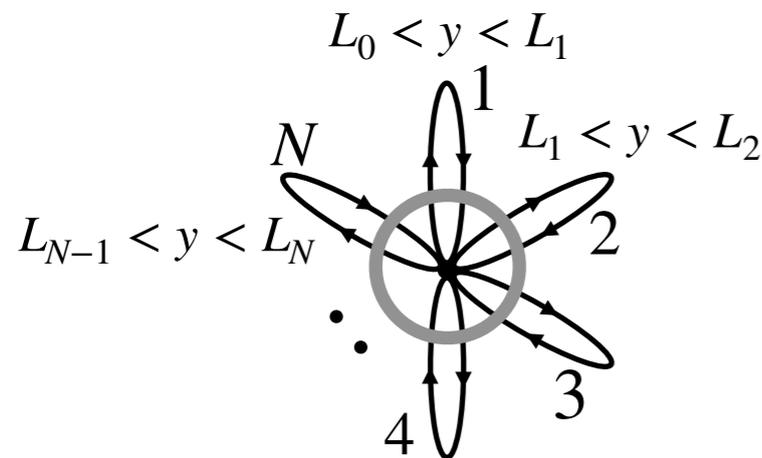
$$(1_{2N} - U_B) \vec{F} = \vec{0}$$

$$(1_{2N} + U_B) \vec{G} = \vec{0}$$

$$\vec{F} \equiv \begin{pmatrix} f(L_0 + \varepsilon) \\ f(L_1 - \varepsilon) \\ \vdots \\ f(L_N - \varepsilon) \end{pmatrix}, \quad \vec{G} \equiv \begin{pmatrix} g(L_0 + \varepsilon) \\ -g(L_1 - \varepsilon) \\ \vdots \\ -g(L_N - \varepsilon) \end{pmatrix}$$

$$U_B \in U(2N), \quad U_B^2 = 1_{2N}$$

本モデルの境界条件



量子力学系

4+1次元上のDiracフェルミオン

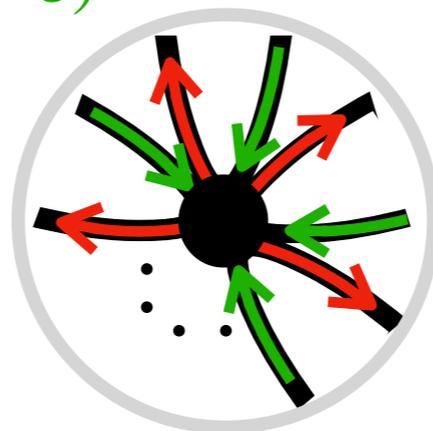
(4: 4次元時空, 1: 量子グラフ方向の座標)

カレントの保存則

$$\sum_{a=1}^N j(L_{a-1} + \varepsilon) = \sum_{a=1}^N j(L_a - \varepsilon)$$

$$j(y) = \bar{\Psi}(x, y) \gamma^y \Psi(x, y)$$

y: 量子グラフ方向



境界条件/接続条件

$$(1_{2N} - U_B) \vec{F} = \vec{0}$$

$$(1_{2N} + U_B) \vec{G} = \vec{0}$$

$$\vec{F} \equiv \begin{pmatrix} f(L_0 + \varepsilon) \\ f(L_1 - \varepsilon) \\ \vdots \\ f(L_N - \varepsilon) \end{pmatrix}, \quad \vec{G} \equiv \begin{pmatrix} g(L_0 + \varepsilon) \\ -g(L_1 - \varepsilon) \\ \vdots \\ -g(L_N - \varepsilon) \end{pmatrix}$$

$$U_B \in U(2N), \quad U_B^2 = 1_{2N}$$

境界条件は $U^2=1_{2N}$ を満たす $U(2N)$ のパラメータで特徴付けられる。 N は区間の数。

境界条件とWitten指数

境界条件 U_B によって4次元のカイラルゼロモードの差が決まる

- 対称性が1つもない場合

境界条件とWitten指数

境界条件 U_B によって4次元のカイラルゼロモードの差が決まる

- 対称性が1つもない場合

$$U_B = V \begin{pmatrix} 1_{2N-k} & 0 \\ 0 & -1_k \end{pmatrix} V^\dagger, \quad V \in U(2N) \quad k = 0, 1, \dots, 2N$$

$$(\because U_B \in U(2N) \text{ with } U_B^2 = 1_{2N})$$

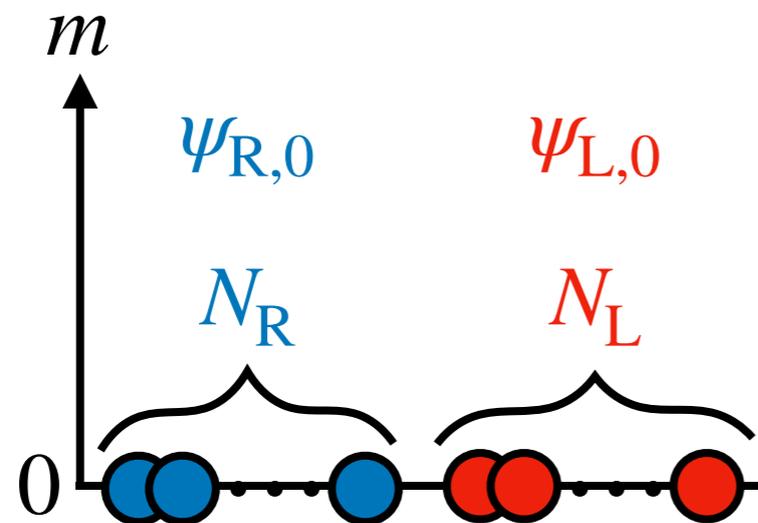
境界条件とWitten指数

境界条件 U_B によって4次元のカイラルゼロモードの差が決まる

- 対称性が1つもない場合

$$U_B = V \begin{pmatrix} 1_{2N-k} & 0 \\ 0 & -1_k \end{pmatrix} V^\dagger, \quad V \in U(2N) \quad k = 0, 1, \dots, 2N$$

$$(\because U_B \in U(2N) \text{ with } U_B^2 = 1_{2N})$$



$$\begin{aligned} N_R - N_L &= N - k \\ &= \Delta_W \end{aligned}$$

結果

- 行列 V を変えても $N-k$ は不変
- $-N \leq \Delta_W \leq N$

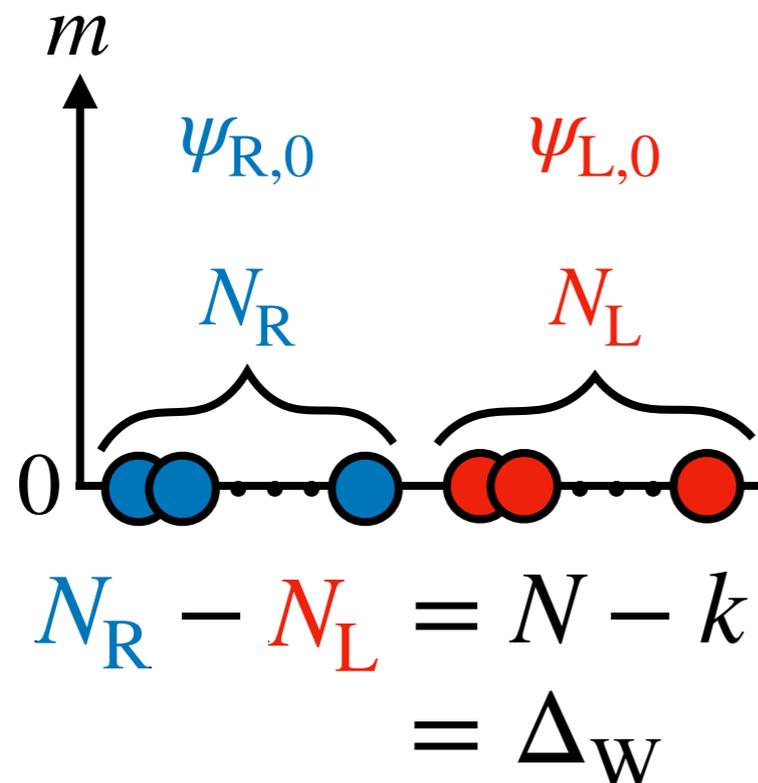
境界条件とWitten指数

境界条件 U_B によって4次元のカイラルゼロモードの差が決まる

- 対称性が1つもない場合

$$U_B = V \begin{pmatrix} 1_{2N-k} & 0 \\ 0 & -1_k \end{pmatrix} V^\dagger, \quad V \in U(2N) \quad k = 0, 1, \dots, 2N$$

$$(\because U_B \in U(2N) \text{ with } U_B^2 = 1_{2N})$$



結果

- 行列 V を変えても $N-k$ は不変
- $-N \leq \Delta_W \leq N$

対称性がある場合には
境界条件にも追加の条件が課される



対称性を満たす境界条件を分類できる！

考える対称性

時間反転 ($T^2=+1$)

$$\Psi(x, y) \xrightarrow{T} \Psi^T(x, y) = U_T \Psi^*(x, y)$$

$$f_n^{(i)}(y) \xrightarrow{T} f_n^{(i)*}(\tilde{y}), \quad g_n^{(i)}(y) \xrightarrow{T} g_n^{(i)*}(\tilde{y})$$

$$U_T \gamma^A U_T^{-1} = \begin{cases} (\gamma^0)^* & (A = 0) \\ -(\gamma^i)^* & (i \neq 0) \end{cases}$$

荷電共役変換 ($C^2=-1$)

$$\Psi(x, y) \xrightarrow{C} \Psi^C(x, y) = C P_y \bar{\Psi}^T(x, y)$$

$$f_n^{(i)}(y) \xrightarrow{C} g_n^{(i)*}(\tilde{y}), \quad g_n^{(i)}(y) \xrightarrow{C} f_n^{(i)*}(\tilde{y})$$

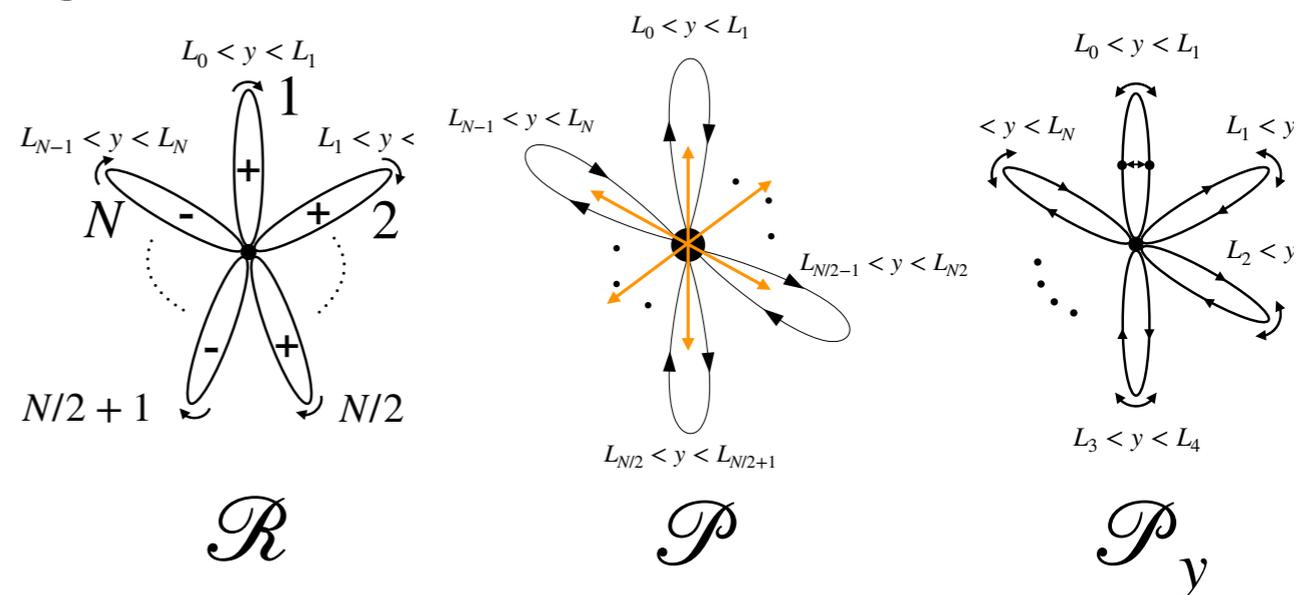
$$C(\gamma^A)^T C^{-1} = \begin{cases} -\gamma^\mu & (\mu = 0, \dots, 3) \\ \gamma^y & (A = y) \end{cases}$$

パリティ-like変換 ($P^2=1$)

$$\Psi(x, y) \xrightarrow{P} \Psi^P(x, y) = \gamma^0 \mathcal{P}_y \Psi(x, y)$$

$$f_n^{(i)}(y) \xrightarrow{P} g_n^{(i)}(\tilde{y}), \quad g_n^{(i)}(y) \xrightarrow{P} f_n^{(i)}(\tilde{y})$$

y方向の追加の対称性



→ これらの組み合わせで10のクラスに分類

結果(1)

AZ対称類

- セットアップ

相互作用のないフェルミオン系

$$H^2 = 1, \quad H^\dagger = H$$

- ハミルトニアンを分類

$$THT^{-1} = H \quad (T^2 = \pm 1)$$

$$CHC^{-1} = -H \quad (C^2 = \pm 1)$$

$$\Gamma H \Gamma^{-1} = -H \quad (\Gamma^2 = 1)$$

→組み合わせで10に分類

- クラスを特徴づける量

トポロジカル数 π_0

我々のモデル

- セットアップ

量子グラフ=余剰次元
の上のDiracフェルミオン

$$U_B^2 = 1, \quad U_B^\dagger = U_B$$

- 境界条件(U_B)を分類

$$\hat{T}U_B\hat{T}^{-1} = U_B \quad (\hat{T}^2 = \pm 1)$$

$$\hat{C}U_B\hat{C}^{-1} = -U_B \quad (\hat{C}^2 = \pm 1)$$

$$\hat{P}U_B\hat{P}^{-1} = -U_B \quad (\hat{P}^2 = 1)$$

(+ y方向の追加の対称性)

- クラスを特徴づける量

Witten指数

or カイラルゼロモードの差



結果(1)

AZ対称類

• セットアップ

相互作用のないフェルミオン系

$$H^2 = 1, \quad H^\dagger = H$$

• ハミルトニアンを分類

$$THT^{-1} = H \quad (T^2 = \pm 1)$$

$$CHC^{-1} = -H \quad (C^2 = \pm 1)$$

$$\Gamma H \Gamma^{-1} = -H \quad (\Gamma^2 = 1)$$

→組み合わせで10に分類

• クラスを特徴づける量

トポロジカル数 π_0

我々のモデル

• セットアップ

量子グラフ=余剰次元
の上のDiracフェルミオン

$$U^2 = 1, \quad U_B^\dagger = U_B$$

• U_B を分類

$$\hat{T}U_B\hat{T}^{-1} = U_B \quad (\hat{T}^2 = \pm 1)$$

$$\hat{C}U_B\hat{C}^{-1} = -U_B \quad (\hat{C}^2 = \pm 1)$$

$$\hat{P}U_B\hat{P}^{-1} = -U_B \quad (\hat{P}^2 = 1)$$

(+ y方向の追加の対称性)

• クラスを特徴づける量

Witten指数

or カイラルゼロモードの差

AZ対称類と我々のモデルの間の
非自明な対応を明らかにした!

結果(2)

再掲

$$U_B = V \begin{pmatrix} 1_{2N-k} & 0 \\ 0 & -1_k \end{pmatrix} V^\dagger$$

0 : 対称性なし / ±1 : 対称性あり, 2乗の正負

対称類	T変換	C変換	P変換	分類空間	Witten指数	top#
A	0	0	0	$\frac{U(2N)}{U(2N-k) \times U(k)}$	N-k	Z
AIII	0	0	1	$U(N)$	0	0
AI	+	0	0	$\frac{O(2N)}{O(2N-k) \times O(k)}$	N-k	Z
BDI	+	+	1	$O(N)$	0[*]	Z_2
D	0	+	0	$\frac{O(2N)}{U(N)}$	0[*]	Z_2
DIII	-	+	1	$\frac{U(N)}{Sp(N/2)}$	0	0
AII	-	0	0	$\frac{Sp(N)}{Sp(N-b) \times Sp(b)}$	N-2b	2Z
CII	-	-	1	$Sp(N/2)$	0	0
C	0	-	0	$\frac{Sp(N)}{U(N)}$	0	0
CI	+	-	1	$\frac{U(N)}{O(N)}$	0	0

[*]カイラルゼロモードの差は0だが, それぞれの個数が偶数・奇数のクラスが存在

まとめと今後の展望

まとめ

- 「余剰次元 = 量子グラフ」の上の5次元Diracフェルミオンに対して，時間反転・荷電共役・パリティ・グラフ方向の対称性を課して境界条件を分類した。
- 分類されたクラスのWitten指数は，物性系で知られているAZ対称類のトポロジカル数と対応があることを明らかにした。

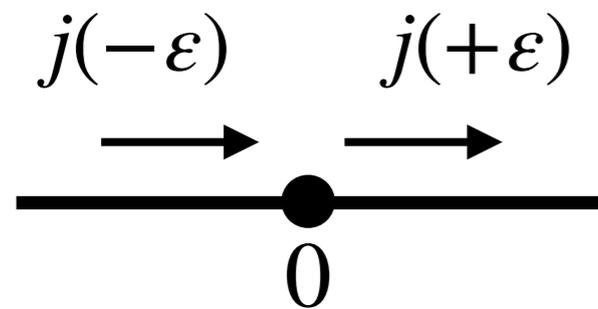
起源： $H^2 = 1, H^\dagger = H \longleftrightarrow U_B^2 = 1, U_B^\dagger = U_B$

今後の展望

- 任意の次元の時空に対して，空間の1方向を量子グラフにコンパクト化した場合にも同様の関係が得られるか？
- 実験が可能な物性系として実現することはできるか？

補助スライド

境界条件の導出の詳細



$$j(y) = -i [\varphi^* \varphi'(y) - \varphi'^* \varphi(y)]$$

$$\Phi \equiv \begin{pmatrix} \varphi(+\varepsilon) \\ \varphi(-\varepsilon) \end{pmatrix}, \quad \Phi' \equiv \begin{pmatrix} \varphi'(+\varepsilon) \\ -\varphi'(-\varepsilon) \end{pmatrix}$$

カレントの保存則を書き換える

$$j(-\varepsilon) = j(+\varepsilon)$$

$$\iff |\Phi - iL_0\Phi'|^2 = |\Phi + iL_0\Phi'|^2$$

(L_0 :次元を合わせるためのパラメータ)

同じ長さの複素ベクトルは回転でつながる

$$\iff \Phi - iL_0\Phi' = U(\Phi + iL_0\Phi')$$

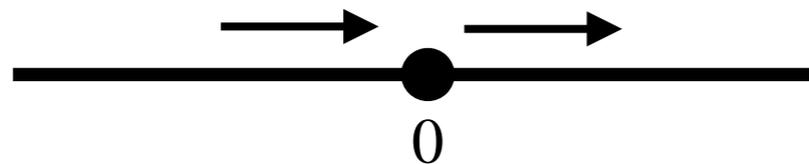
$$(1_2 - U)\Phi + iL_0(1_2 + U)\Phi' = 0$$

*境界条件は $U \in U(2)$ のパラメータで特徴付けられる.

境界条件の具体形(1)

境界条件はU(2)のパラメータで特徴付けられる.

$$j(y) = -i [\varphi^* \varphi'(y) - \varphi'^* \varphi(y)]$$



$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in U(2)$$

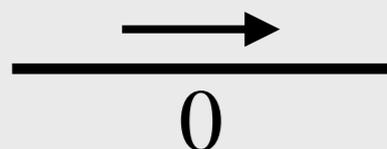
Connected

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Periodic B.C.

$$\varphi(-\varepsilon) = \varphi(+\varepsilon)$$

$$\varphi'(-\varepsilon) = \varphi'(+\varepsilon)$$

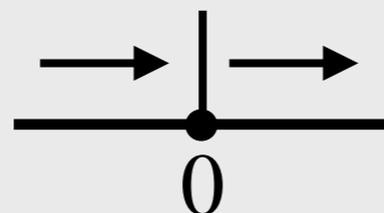


$$U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{i\theta} - 1 & e^{i\theta} + 1 \\ e^{i\theta} + 1 & e^{i\theta} - 1 \end{pmatrix}$$

δ -function like B.C.

$$\varphi(-\varepsilon) = \varphi(+\varepsilon)$$

$$\varphi'(-\varepsilon) \neq \varphi'(+\varepsilon)$$

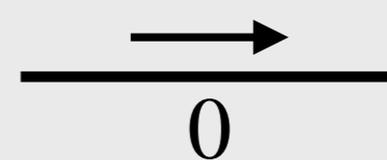


$$U = \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\theta} \\ e^{i\theta} & 0 \end{pmatrix}$$

twisted B.C.

$$\varphi(-\varepsilon) = e^{i\theta} \varphi(+\varepsilon)$$

$$\varphi'(-\varepsilon) = e^{i\theta} \varphi'(+\varepsilon)$$

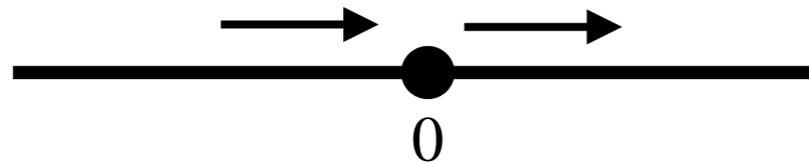


...

境界条件の具体形(2)

境界条件はU(2)のパラメータで特徴付けられる.

$$j(y) = -i [\varphi^* \varphi'(y) - \varphi'^* \varphi(y)]$$



$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in U(2)$$

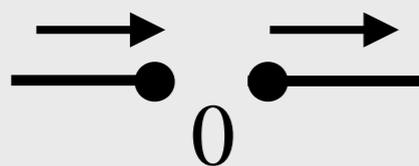
Disconnected

$$U = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dirichlet B.C.

$$\varphi(-\varepsilon) = 0$$

$$\varphi(+\varepsilon) = 0$$

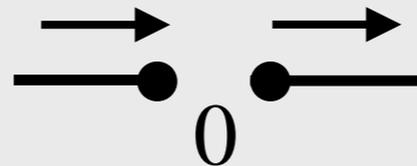


$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Neumann B.C.

$$\varphi'(-\varepsilon) = 0$$

$$\varphi'(+\varepsilon) = 0$$

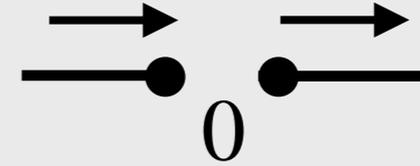


$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

Robin B.C.

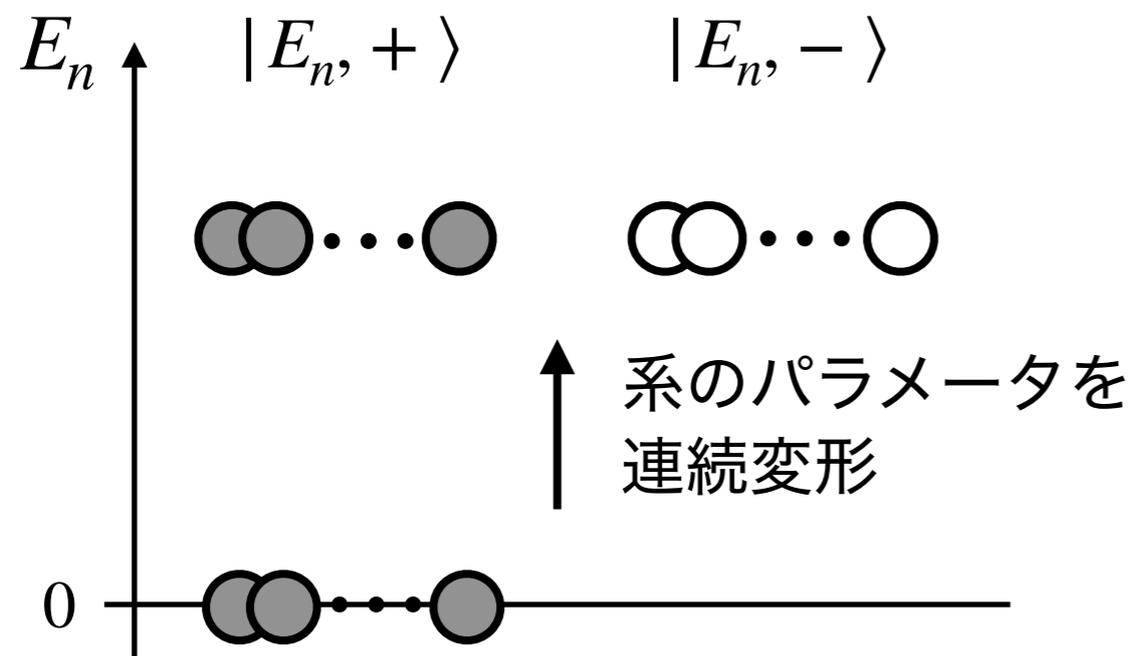
$$a\varphi(-\varepsilon) + b\varphi'(-\varepsilon) = 0$$

$$c\varphi(+\varepsilon) + d\varphi'(+\varepsilon) = 0$$



...

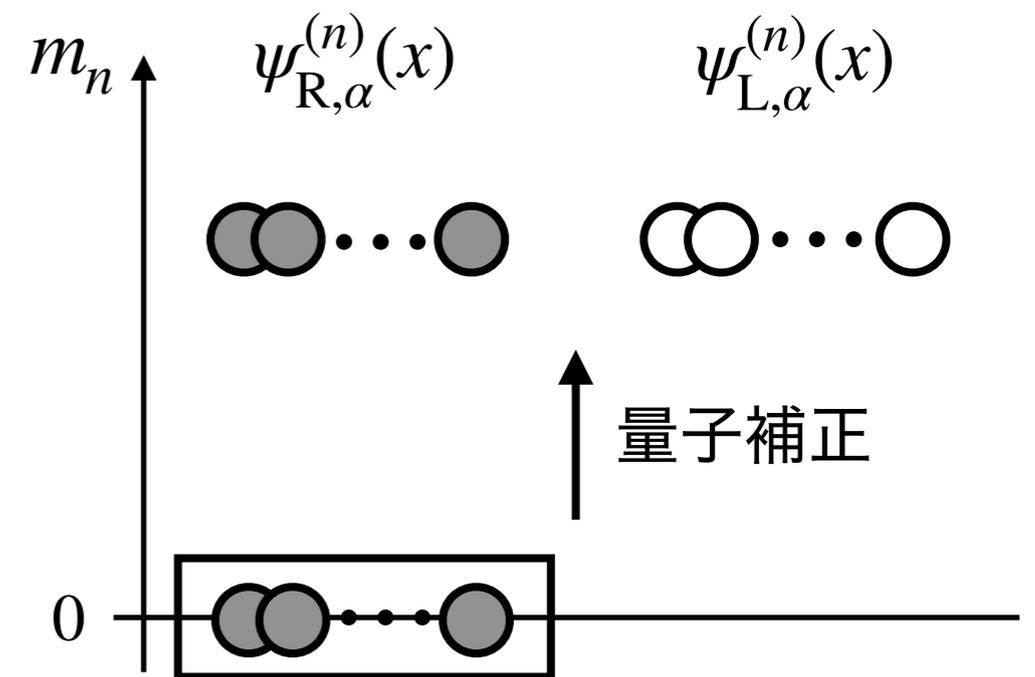
超対称量子力学との対応



超対称量子力学のゼロモード

$$\Delta_W = (|0, +\rangle \text{ の数}) - (|0, -\rangle \text{ の数})$$

Witten指数



高次元Diracフェルミオンのゼロモード

標準模型のスケールで見える粒子
=フェルミオンの世代数

対称性の具体的な計算

T変換($T^2=+1$)があるクラス

$$\Psi(x, y) \xrightarrow{T} \Psi^T(x, y) = U_T \Psi^*(x, y)$$

$$U_T \gamma^A U_T^{-1} = \begin{cases} (\gamma^0)^* & (A = 0) \\ -(\gamma^i)^* & (i \neq 0) \end{cases}$$

KK展開を代入すると

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} [\psi_{R,n}^{(i)}(x) f_n^{(i)}(y) + \psi_{L,n}^{(i)}(x) g_n^{(i)}(y)] \\ & \xrightarrow{T} U_T K \sum_{n=0}^{\infty} [\psi_{R,n}^{(i)}(x) f_n^{(i)}(y) + \psi_{L,n}^{(i)}(x) g_n^{(i)}(y)] \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} [U_T \psi_{R,n}^{(i)*}(x) f_n^{(i)*}(y) + U_T \psi_{L,n}^{(i)}(x) g_n^{(i)*}(y)] \\ & \longrightarrow \begin{cases} \psi_{R/L,n}^{(i)}(x) \xrightarrow{T} U_T \psi_{R/L,n}^{(i)*}(x) \\ f_n^{(i)}(y) \xrightarrow{T} f_n^{(i)*}(y), \quad g_n^{(i)}(y) \xrightarrow{T} g_n^{(i)*}(y) \end{cases} \end{aligned}$$

境界条件の変換

$$\vec{F} \xrightarrow{T} \vec{F}^*, \quad \vec{G} \xrightarrow{T} \vec{G}^*$$

変換後のモード関数が
満たすべき境界条件

$$(1_{2N} - U_B) \vec{F}^* = \vec{0}$$

$$(1_{2N} + U_B) \vec{G}^* = \vec{0}$$

元々の境界条件

$$(1_{2N} - U_B) \vec{F} = \vec{0}$$

$$(1_{2N} + U_B) \vec{G} = \vec{0}$$

$$(U_B \in U(2N), \quad U_B^2 = 1_{2N})$$

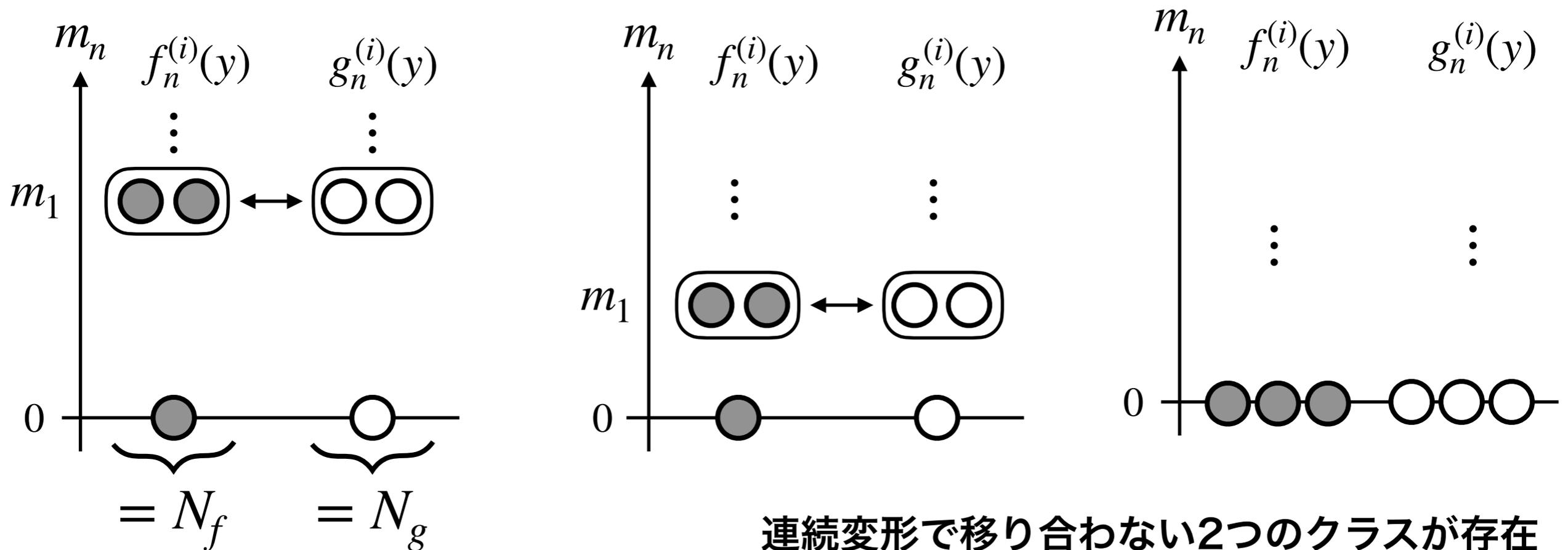
$$\therefore U_B^* = U_B, \quad K U_B K^{-1} = U_B$$

$$AZ \quad THT^{-1} = H \quad (H^2 = 1)$$

Z₂に関するコメント

top#=Z₂のクラス

→ C²=+1の対称性があるとmassiveモードになるためには
4重に縮退する必要がある



Witten指数

$$\Delta_W = N_f - N_g = 0$$

連続変形で移り合わない2つのクラスが存在

$$\begin{cases} N_f = 1 \pmod{2} \\ N_f = 0 \pmod{2} \end{cases}$$