漸近的に安全な 量子重力理論 (Asymptotically safe gravity)

山田 雅俊

(ハイデルベルク大学)

Class.Quant.Grav. 33 (2016) 12, 125011;
Phys.Lett.B 770 (2017) 268-271;
Phys.Rev.D 97 (2018) 8, 086004;
Phys.Rev.D 99 (2019) no.8, 086010;
Phys.Rev.D 100 (2019) no.6, 066017;
Eur.Phys.J.C 80 (2020) 5, 368;
Phys.Lett.B 813 (2021) 135975

素粒子物理学の進展2021@Zoom

量子重力は場の量子論の枠組みで定式化不可能か？

- Einstein-Hilbert作用に基づく量子論は摂動的にくりこみ不可能

  ’t Hooft and Veltman(1974), Annales Poincare Phys.Theor.,A20,69

  - ただし、pure gravityに限りone-loopではくりこみ可能
  - two-loop以上ではpure gravityでもくりこみ不可能

  Goroff and Sagnotti, Phys.Lett 160B,81 (1985)

- 高階微分演算子の導入(Quadratic gravity; Stelle gravity)

  Stelle, Phys.Rev. D16 (1977) 953-969

$$S_{\mathrm{HD}} = \frac{1}{16\pi G}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left[R - 2\Lambda - \alpha C^2_{\mu\nu\rho\sigma} + \beta R^2 - \gamma E\right]$$

  - 摂動的にくりこみ可能
  - ユニタリ性がtree levelで破れる

$$G(q) = \frac{1}{q^2(q^2-\alpha)} = \frac{1}{q^2} - \frac{1}{q^2-\alpha}$$

量子重力は場の量子論の枠組みで定式化不可能か？

- Einstein-Hilbert作用に基づく量子論は摂動的にくりこみ不可能

’t Hooft and Veltman(1974), Annales Poincare Phys.Theor.,A20,69

  - ただし、pure gravityに限りone-loopではくりこみ可能
  - two-loop以上ではpure gravityでもくりこみ不可能

Goroff and Sagnotti, Phys.Lett 160B,81 (1985)

- 高階微分演算子の導入(Quadratic gravity; Stelle gravity)

Stelle, Phys.Rev. D16 (1977) 953-969

$$S_{\mathrm{HD}} = \frac{1}{16\pi G}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left[R - 2\Lambda - \alpha C^2_{\mu\nu\rho\sigma} + \beta R^2 - \gamma E\right]$$

  - 摂動的にくりこみ可能
  - ユニタリ性がtree levelで破れる

$$G(q) = \frac{1}{q^2(q^2-\alpha)} = \frac{1}{q^2} - \frac{1}{q^2-\alpha}$$

Plan

1. 漸近的に安全とは？
   - (非摂動的に)くりこみ可能とは？
2. 漸近的に安全な量子重力
3. 量子重力効果の物質場(スカラー場)への寄与
   - 標準模型からその拡張に向けて
4. 漸近的に安全な量子重力はfundamentalか？
   - 強弱双対性と時空の発現について

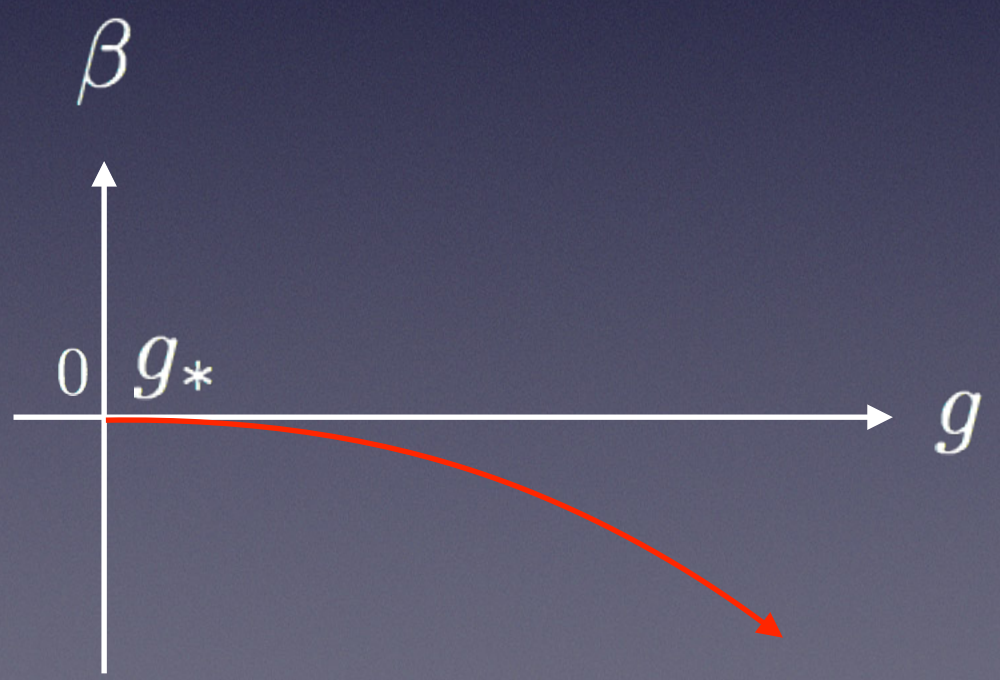
漸近的安全性とは？

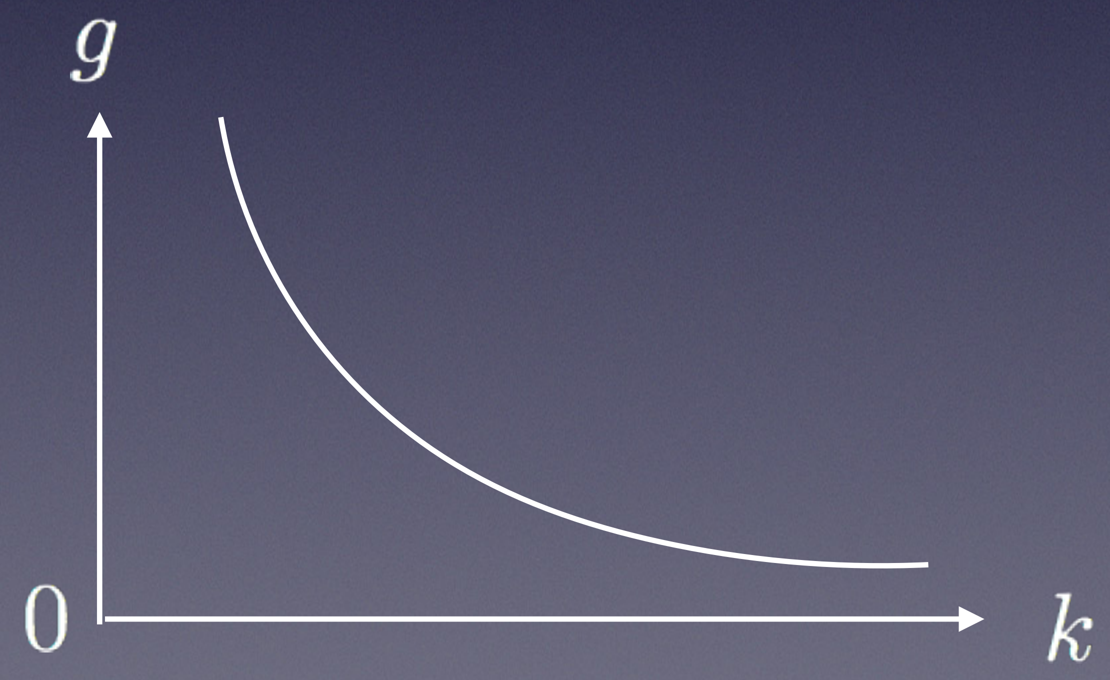
- 紫外極限($\Lambda \to \infty$)で
  - 漸近的自由性: 自由場の理論へと漸近的に近づく
  - 漸近的安全性: 相互作用のある理論へと漸近的に近づく
- 自由場の理論: ガウス(自明な)固定点(摂動的)
- 相互作用のある理論: 非自明な固定点(非摂動的)

漸近的自由性

- Asymptotic freedom

$$\partial_t g = -\beta_0 g^3, \quad \beta_0 > 0$$

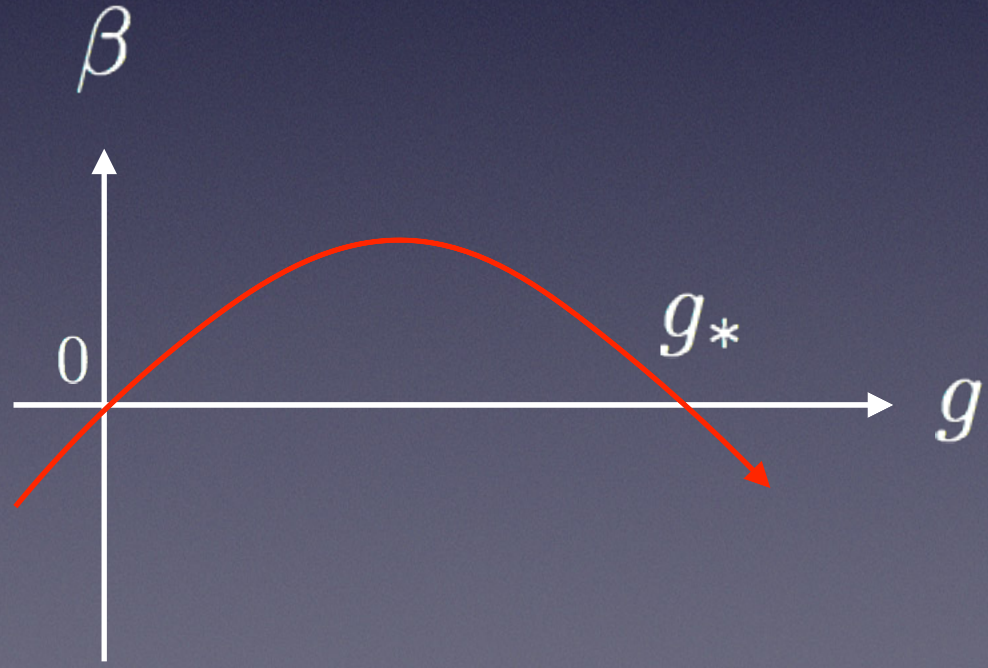


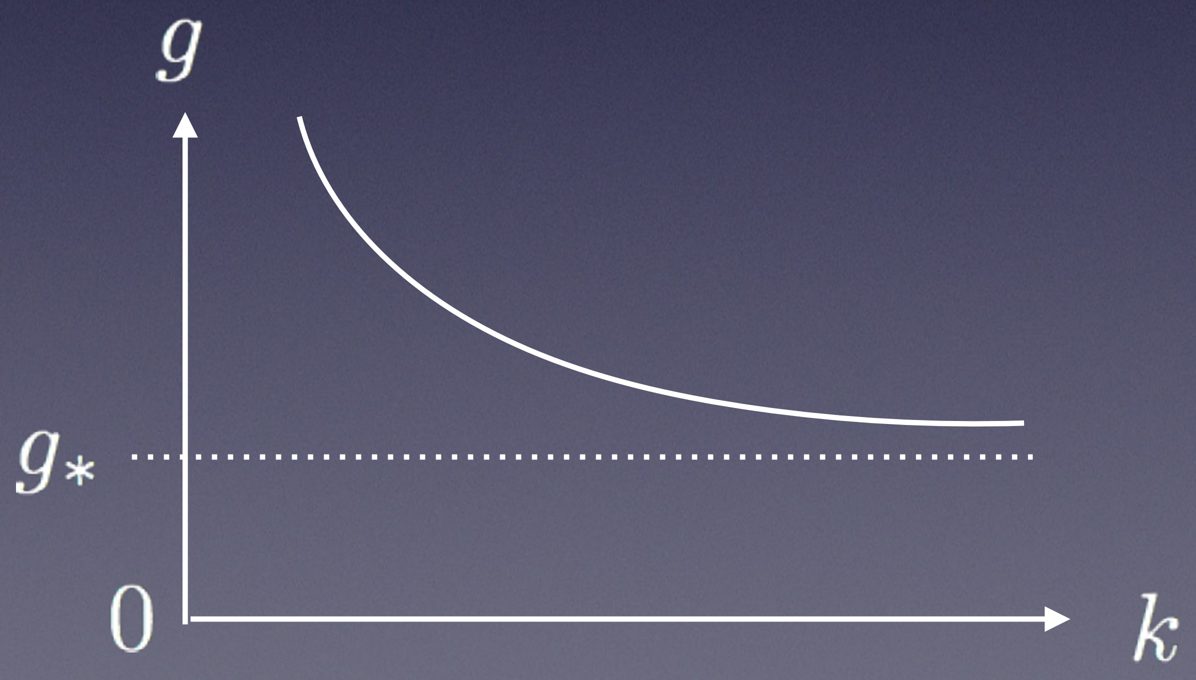


漸近的安全性

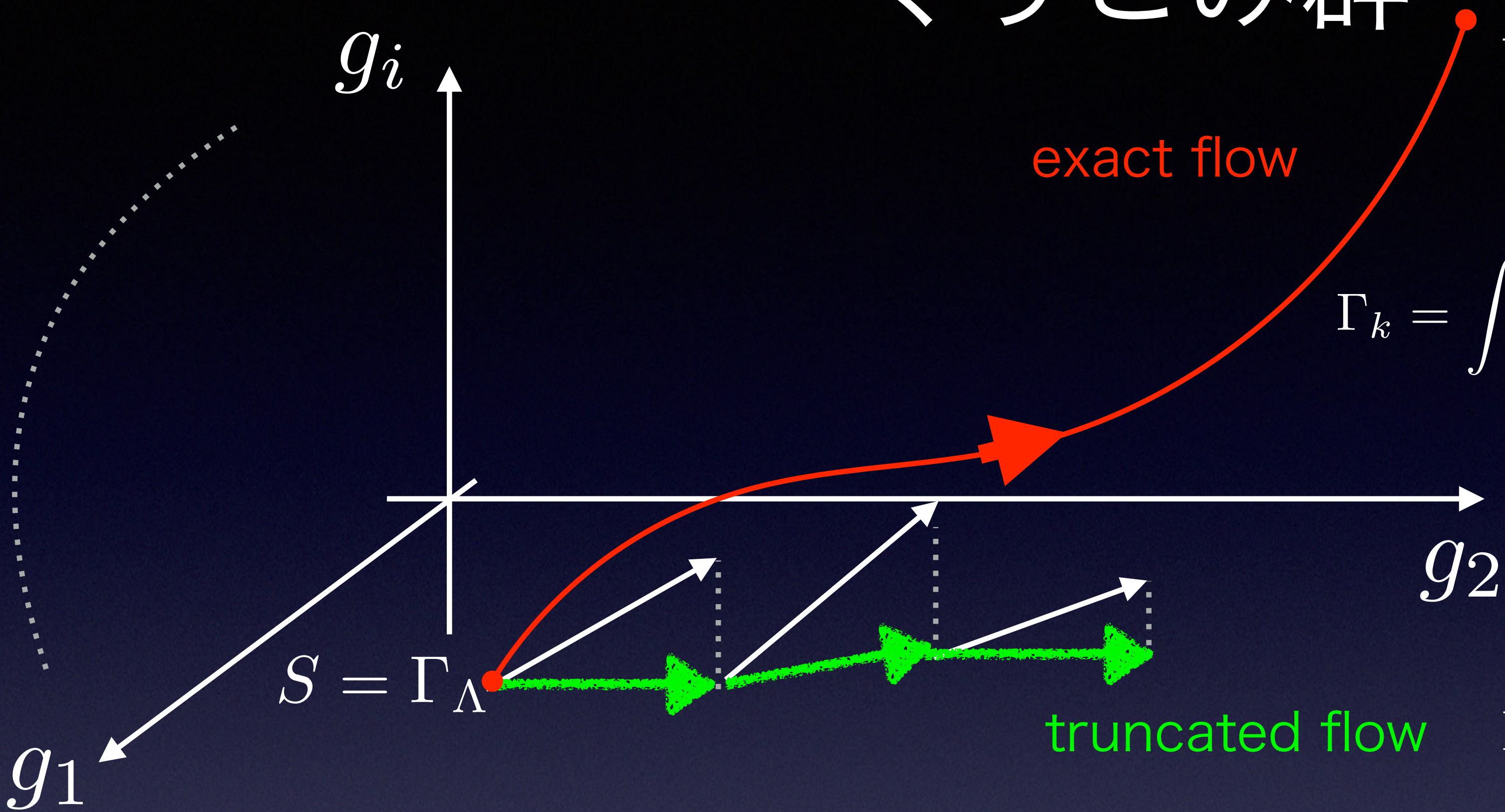
- Asymptotic safety $\quad g = G_N k^2$

$$\partial_t g = 2g - \beta_0 g^2, \quad \beta_0 > 0$$





ウィルソン/厳密/非摂動/汎関数くりこみ群



$$\Gamma_k = \int d^4x[g_1\mathcal{O}_1 + g_2\mathcal{O}_2 + \cdots + g_i\mathcal{O}_i + \cdots]$$

projection

$$\Gamma_k \simeq \int d^4x[g_1\mathcal{O}_1 + g_2\mathcal{O}_2]$$

Wetterich方程式

$$k\partial_k\Gamma_k = \frac{1}{2}\mathrm{Str}[(\Gamma_k^{(2)} + R_k)^{-1}k\partial_k R_k]$$

固定点

$$k\partial_k\Gamma_k = \int d^4x[\underbrace{(k\partial_k g_1)}_{\beta_1(g)}\mathcal{O}_1 + \underbrace{(k\partial_k g_2)}_{\beta_2(g)}\mathcal{O}_2 + \cdots + \underbrace{(k\partial_k g_i)}_{\beta_i(g)}\mathcal{O}_i + \cdots]$$

$$k\partial_k\Gamma_k^* = 0$$

$$\beta_i(g^*) = 0$$

臨界指数

$$k\frac{dg_i}{dk} = \beta_i(g)$$

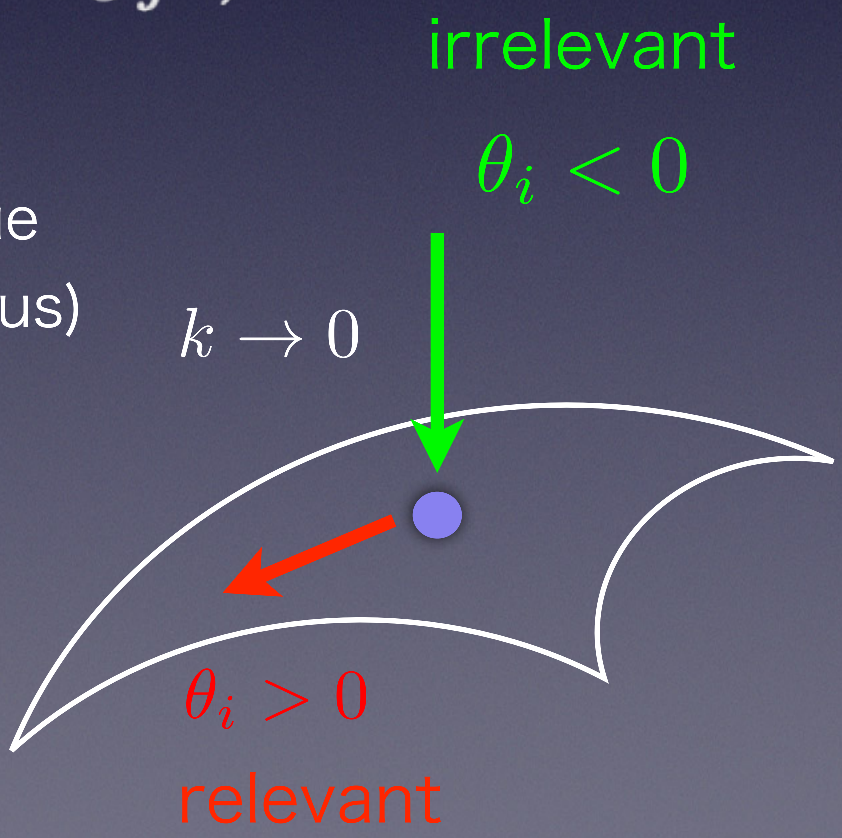
- RG eq. around FP g*

$$k\frac{dg_i}{dk} \simeq \cancel{\beta_i(g_*)} + \left.\frac{\partial \beta_i}{\partial g_j}\right|_{g=g_*} (g_j - g_{j*})$$

eigenvalue
(with minus)

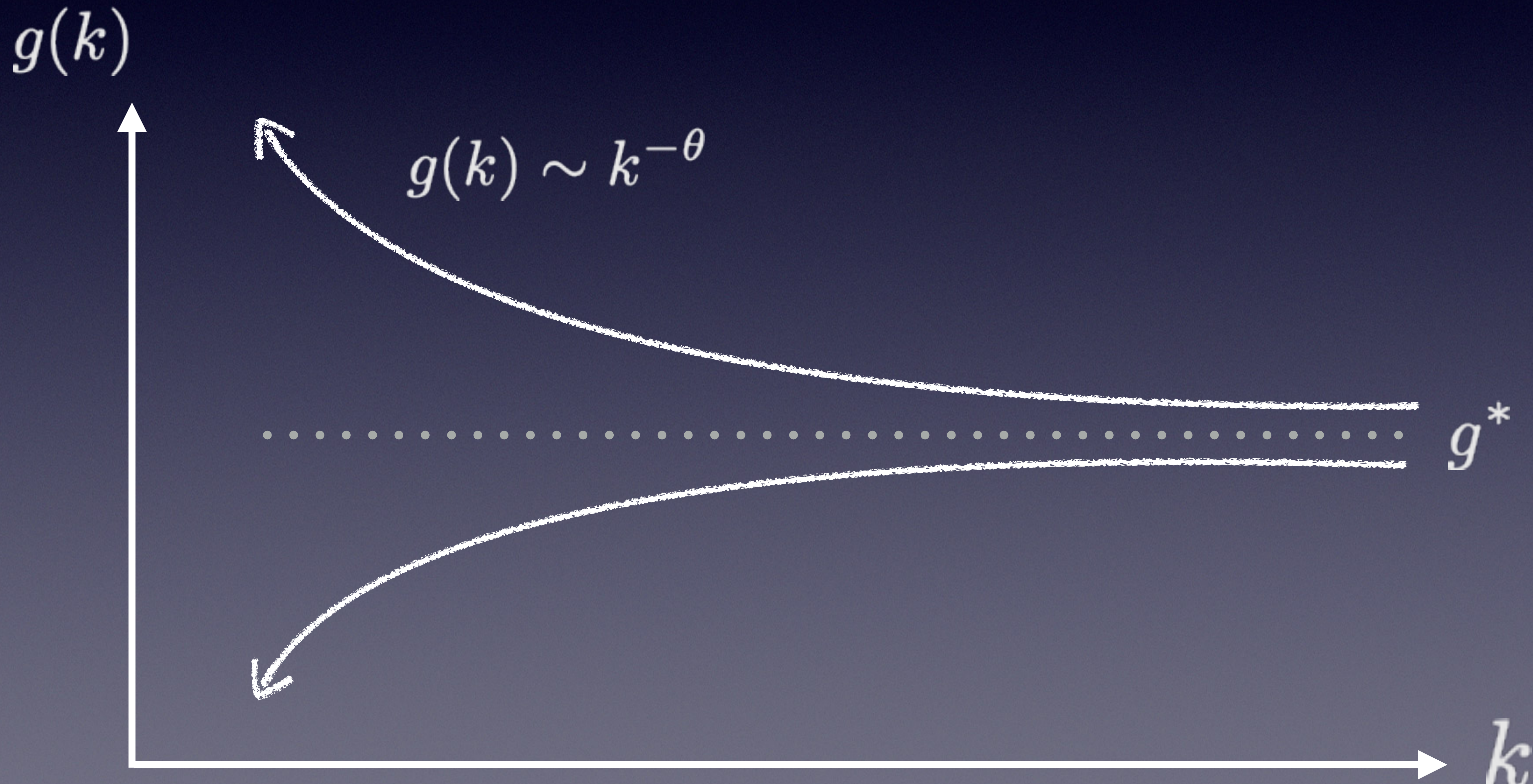
- Solution to RG eq.

$$g_i(k) = g_i^* + \sum_j^N \zeta_j^i \left(\frac{k}{\Lambda}\right)^{-\theta_j}$$



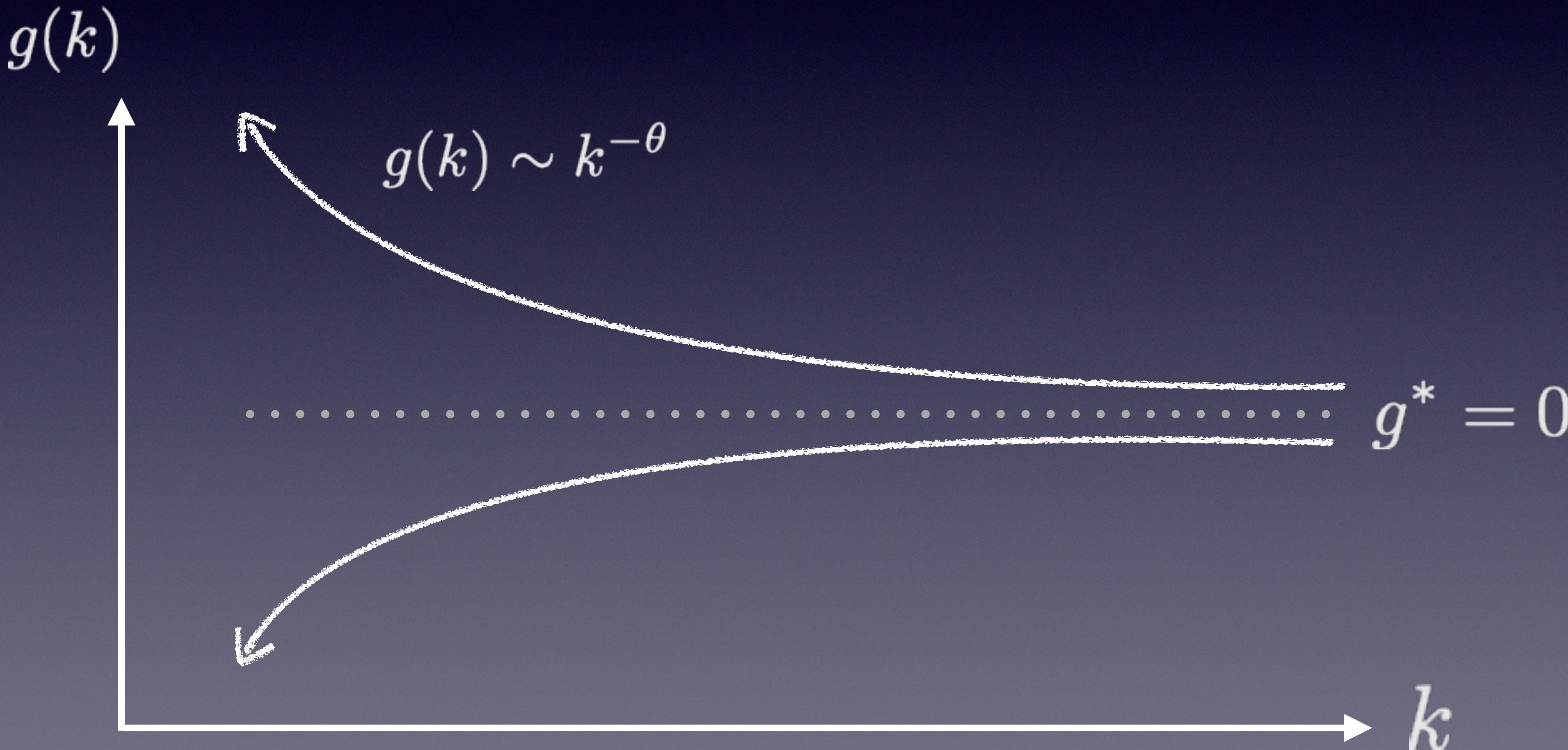
Relevant: $\theta > 0$

- 自由パラメータ



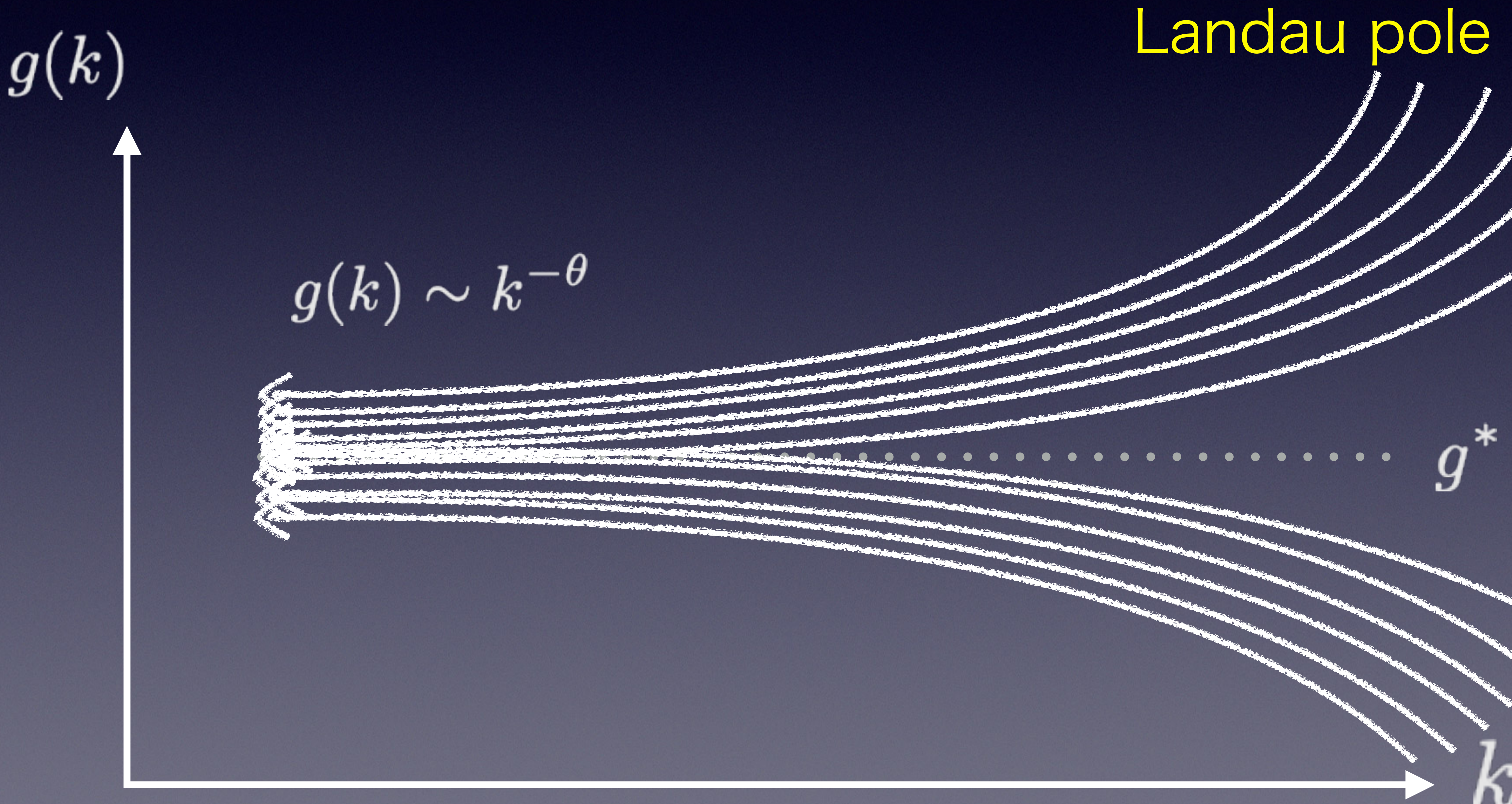
Relevant: $\theta > 0$

- QCDの場合



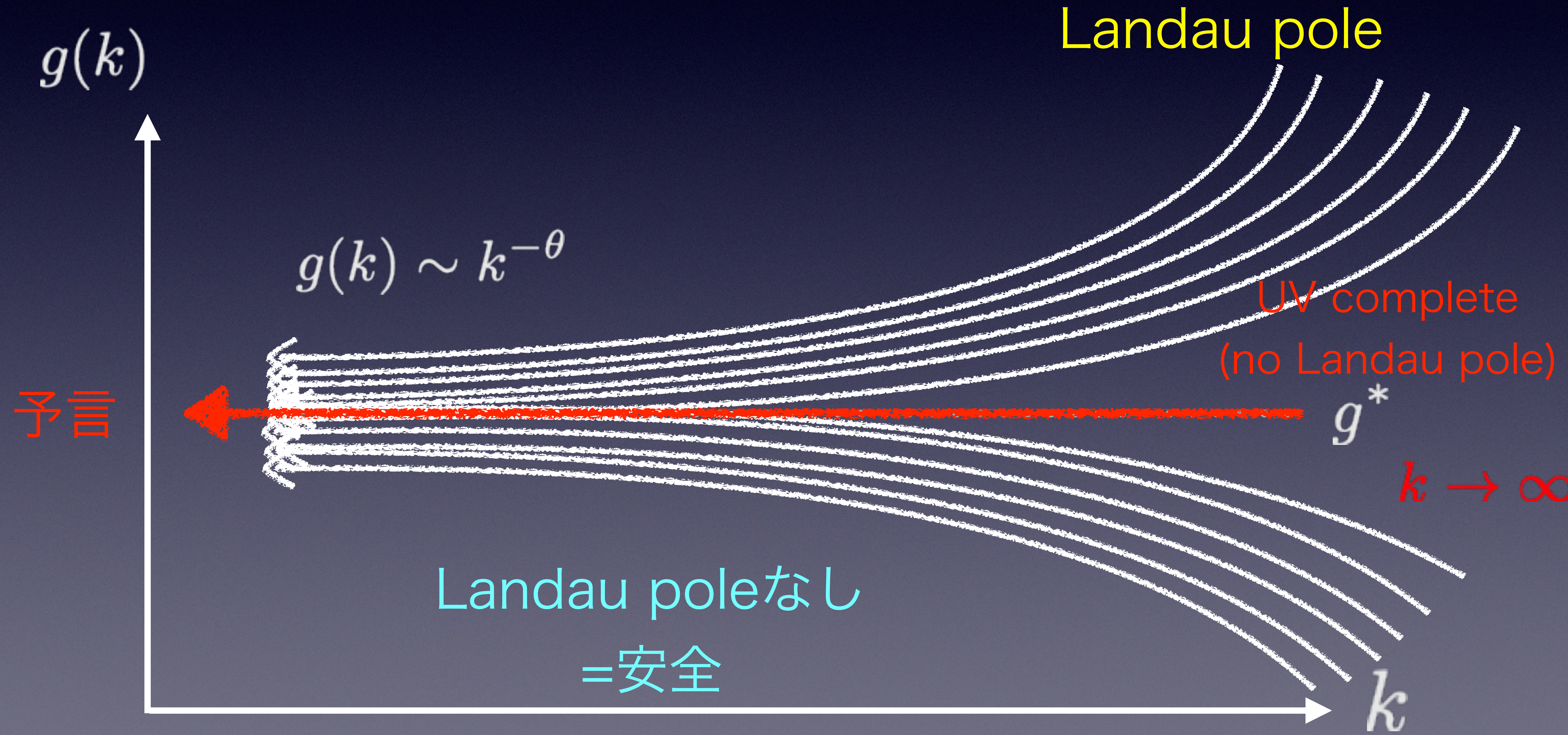
Irrelevant $\theta < 0$

- 予言可能なパラメータ



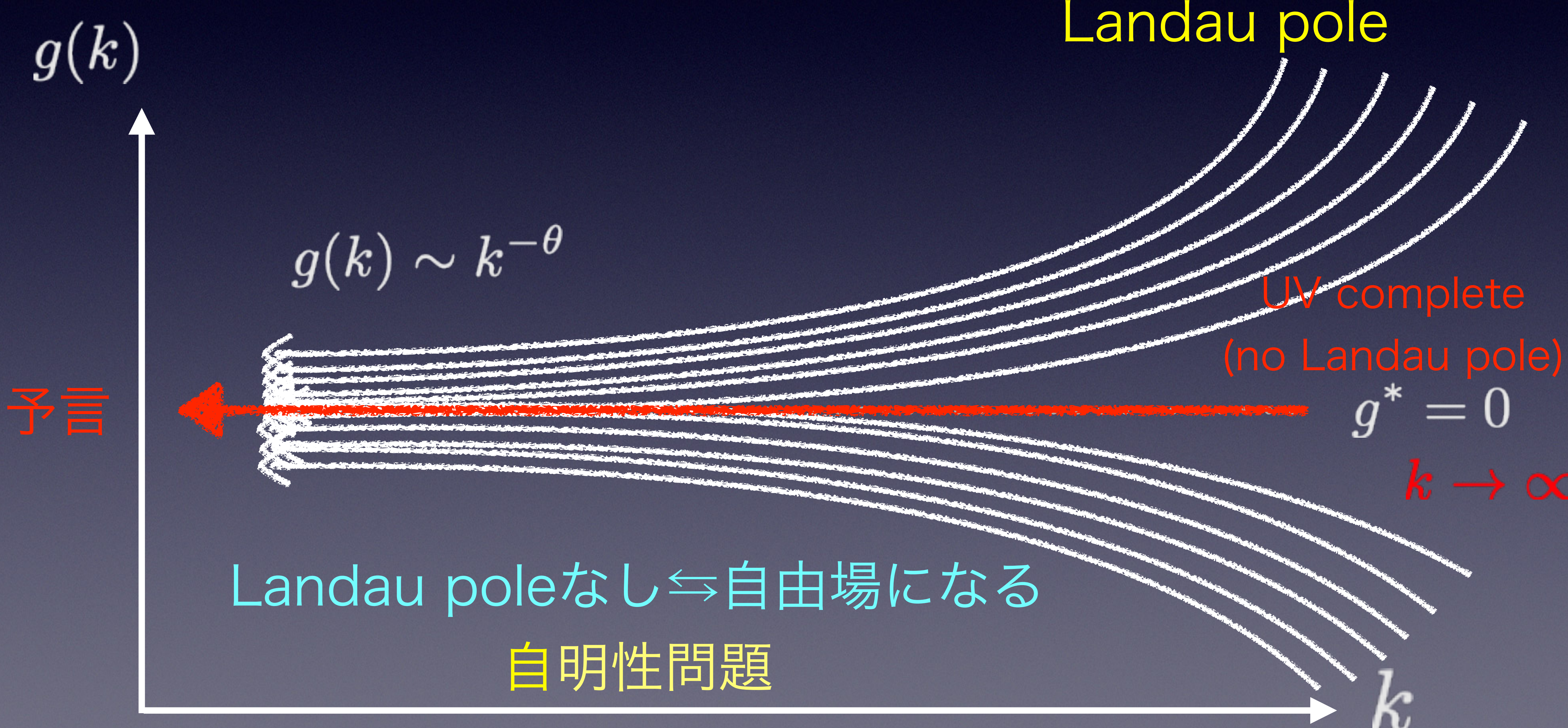
Irrelevant $\theta < 0$

- 予言可能なパラメータ



Irrelevant $\theta < 0$

- QEDやスカラー理論



くりこみ可能性

- 固定点周りでrelevant(θ>0)な結合定数が有限個 (臨界面の次元が有限)
  - その固定点周りでくりこみ可能という
- **摂動論**: ガウス固定点周り
  - 自由場理論周りなので異常次元は小さい
  - 臨界指数 ＝ 結合定数の質量次元 (正準次元)
- **非摂動論**: 非自明な固定点周り
  - 相互作用により大きな異常次元が生成されうる
  - 臨界指数 ＝ 正準次元 + 異常次元

Plan

1. 漸近的に安全とは？
   - 非摂動的にくりこみ可能とは？
2. 漸近的に安全な量子重力
3. 量子重力効果の物質場(スカラー場)への寄与
   - 標準模型からその拡張に向けて
4. 漸近的に安全な量子重力はfundamentalか？
   - 強弱双対性と時空の発現について

Gravitational system

- pure gravityでの有効作用

$$\Gamma_k = \frac{1}{16\pi G}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{g}\left[2\Lambda - R + aR^2 + bR_{\mu\nu}^2 + \cdots\right]$$

Gravitational system

- pure gravityでの有効作用

Truncate

$$\Gamma_k = \frac{1}{16\pi G}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{g}\left[2\Lambda - R + \cancel{aR^2 + bR_{\mu\nu}^2 + \cdots}\right]$$

Einstein-Hilbert truncation

$$g = k^2 G$$

$$\lambda = k^{-2}\Lambda$$

$$\beta_g(g,\lambda) = (2+\eta_N)g$$

$$\beta_\lambda(g,\lambda) = -(2-\eta_N)\lambda - \frac{g}{\pi}\left[5\ln(1-2\lambda) - 2\zeta(3) + \frac{5}{4}\eta_N\right]$$

重力相互作用により生成した異常次元

$$\eta_N = -\frac{2g}{6\pi + 5g}\left[\frac{18}{1-2\lambda} + 5\ln(1-2\lambda) - \zeta(2) + 6\right]$$

Gravitational system

- 固定点

$$\beta_g = \beta_\lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad (g_*, \lambda_*) = (0, 0),\ \ (0.378, 0.340)$$

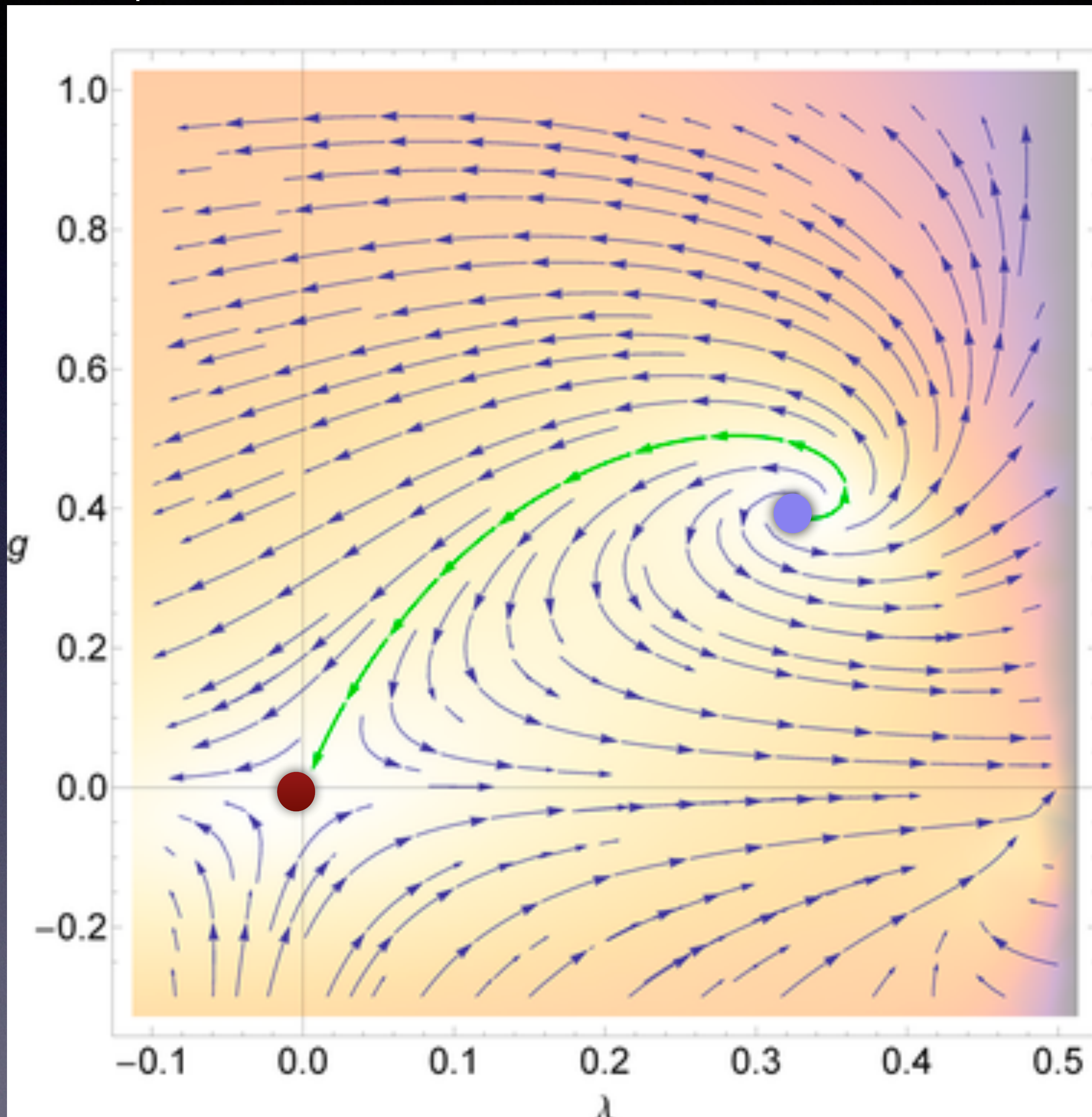
- 臨界指数

$$\theta_i = -\mathrm{eig}\begin{pmatrix} \frac{\partial \beta_g}{\partial g} & \frac{\partial \beta_g}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \beta_\lambda}{\partial g} & \frac{\partial \beta_\lambda}{\partial \lambda} \end{pmatrix}\Bigg|_{g=g_*, \lambda=\lambda_*}$$

$$(\theta_g, \theta_\lambda) = (-2, 2),\ \ (2.141 + 3.438i, 2.141 - 3.438i)$$

くりこみ群のフロー

e.g. scholarpedia



g

Newton constant

λ Cosmological constant

$$g(k) \sim k^{-\theta}$$

At 非自明なFP

$$g \sim k^{-2.141-3.438i}$$

$$\lambda \sim k^{-2.141+3.438i}$$

Relevant!

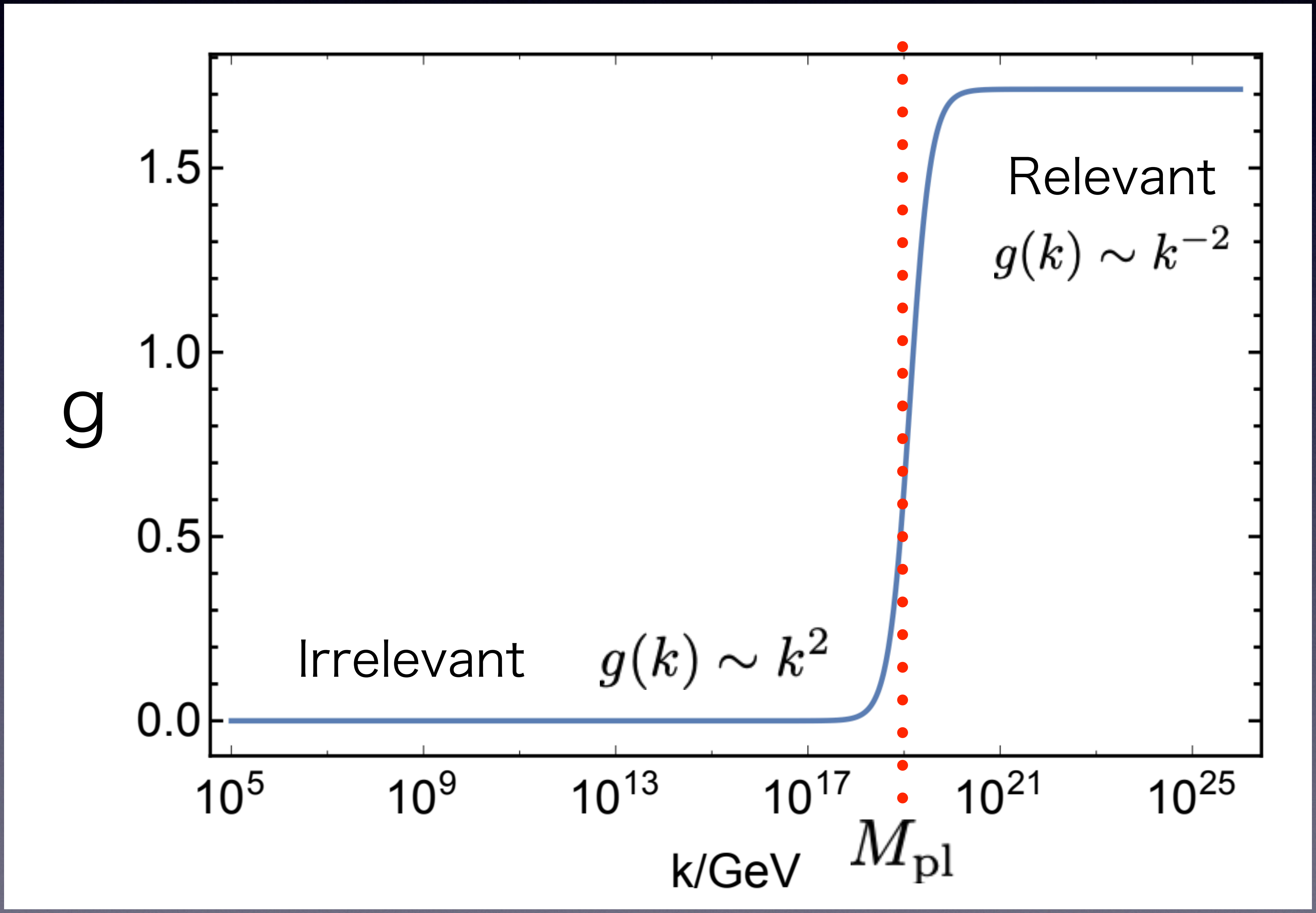
At ガウスFP

$$g \sim k^{2}$$

$$\lambda \sim k^{-2}$$

無次元のニュートン定数のRG

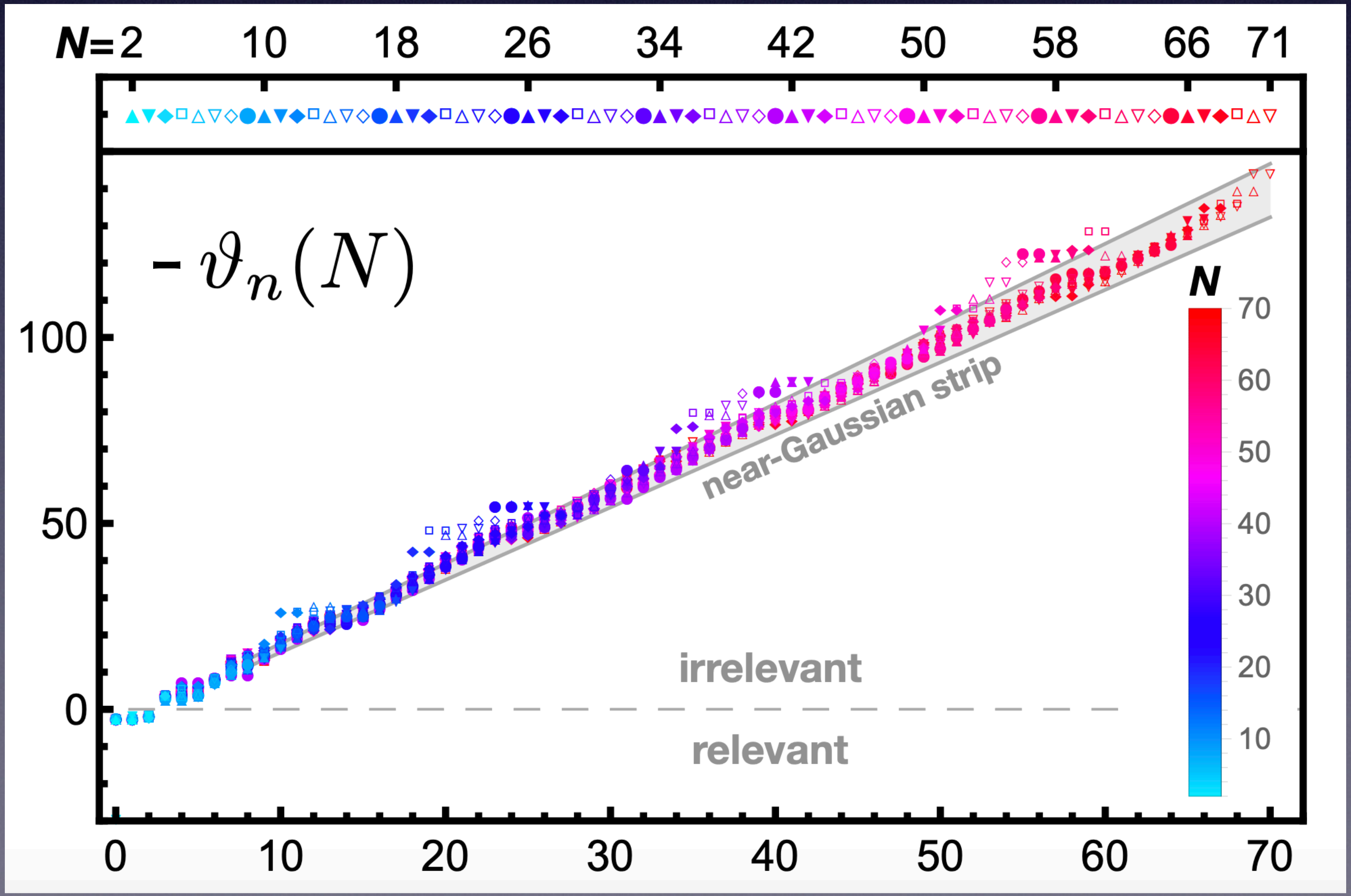
Newton
constant



Higher order truncation

- f(R) truncation (pure gravity) Phys.Rev. D99 (2019) no.12, 126015

$$\Gamma_k = \int d^4x\sqrt{g}\, f(R) = \int d^4x \sqrt{g}\left[g_0 + g_1 R + g_2 R^2 + g_3 R^3 + \cdots\right]$$

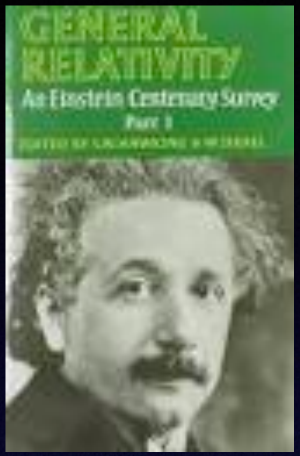


Up to R^{71}

Relevantな結合定数が有限個
=くりこみ可能!

3つの自由パラメータ

漸近的に安全な量子重力
歴史的な流れ



- Weinbergが1979年に提唱　　Chap.16 in General Relativity; an Einstein Centenary Survey
  - d=2+ε 展開による計算　$g_* = \frac{3}{38}\epsilon$

    ’t Hooftによるゲージ理論のくりこみ可能性の証明は1971年
    ’t HooftとVeltmanによる摂動的な計算は1974年
  - 川合さん達も大きく寄与

    Kawai, Ninomiya, Nucl. Phys., B336(1990) 115-145
    Kawai, Kitazawa, Ninomiya, Nucl. Phys. B393 (1993) 280-300
    Kawai, Kitazawa, Ninomiya, Nucl. Phys. B404(1993)684-714
    Kawai, Kitazawa, Ninomiya, Prog. of Theor. Phys. Suppl., No. 114, (1993)
- 汎関数くりこみ群による任意次元に対するベータ関数の導出 (M. Reuter; 1996年)

  Phys.Rev.D 57 (1998) 971-985
- Reuterによるベータ関数を用い、d=4で漸近的に安全な量子重力理論の可能性の指摘 (相馬さん; 1999年)

  Prog.Theor.Phys. 102 (1999) 181-195
- これ以降、汎関数くりこみ群によるd=4での漸近的に安全な量子重力理論に関する計算がたくさん出てくる。主にドイツで。
- 重力の非自明な固定点を最近”Reuter fixed point”と呼ぶようになってきた。。。

Plan

1. 漸近的に安全とは？
    - 非摂動的にくりこみ可能とは？
2. 漸近的に安全な量子重力
3. 量子重力効果の物質場(スカラー場)への寄与
    - 標準模型からその拡張に向けて
4. 漸近的に安全な量子重力はfundamentalか？
    - 強弱双対性と時空の発現について

スカラー場と重力の結合

- 有効作用

$$\Gamma_k = \int d^4x\sqrt{g}\left[\frac{Z_\phi}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + V(\phi) - \frac{F(\phi)}{2}R + \cdots\right]$$

- 重力の相互作用はRの一次までにしておく
- 最小結合を考える $F(\phi) = M_{\mathrm{p}}^2 = \dfrac{1}{8\pi G}$
- 局所ポテンシャル近似 $Z_\phi = 1$

スカラーポテンシャルの臨界指数

- 有効ポテンシャル

$$V(\phi) = \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4 + \cdots$$

canonically relevant　　canonically marginal　　canonically irrelevant

ガウスFP: $\theta_m = 2$　　$\theta_\lambda = 0$　　$\theta_i < 0$

非自明なFP:

$\theta_m = 2 - \gamma_m$　　$\theta_\lambda = -\gamma_\lambda$　　$\theta_i < 0$

$\theta_i > 0$

重力で生成された異常次元

- ポテンシャルのくりこみ群

$$\partial_t \tilde{m}^2 = (-2 + A)\tilde{m}^2 - \frac{3\tilde{\lambda}}{32\pi^2}\frac{1}{(1+\tilde{m}^2)^2}$$

$$\partial_t \tilde{\lambda} = A\tilde{\lambda} + \frac{9\tilde{\lambda}^2}{16\pi^2}\frac{1}{(1+\tilde{m}^2)^3}$$

- 重力の量子効果により生成された異常次元

Pawlowski, Reichert, Wetterich, **MY**, Phys.Rev. D99 (2019) no.8, 086010

$$A = \frac{1}{48\pi^2 \tilde{M}_\mathrm{p}^2}\left[\frac{20}{(1-v_0)^2} + \frac{1}{(1-v_0/4)^2}\right] \qquad v_0 = \frac{2\Lambda_\mathrm{cc}}{k^2 \tilde{M}_\mathrm{p}}$$

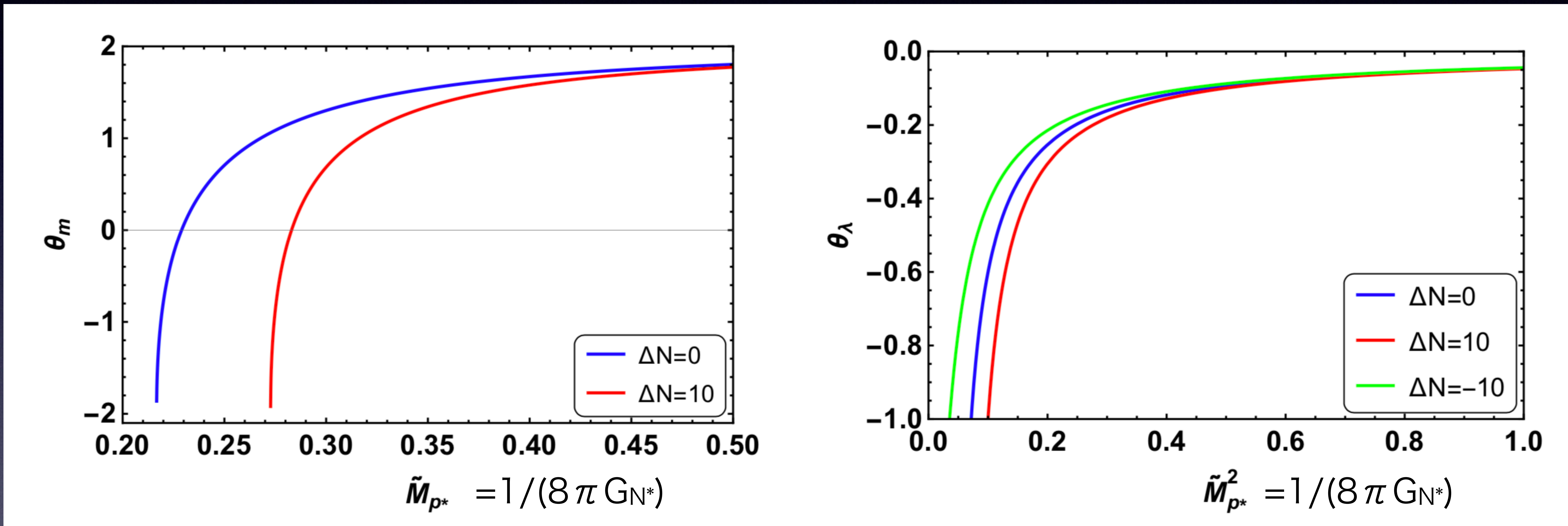
臨界指数

質量パラメータ

$$\theta_m \simeq 2 - A$$

４点結合

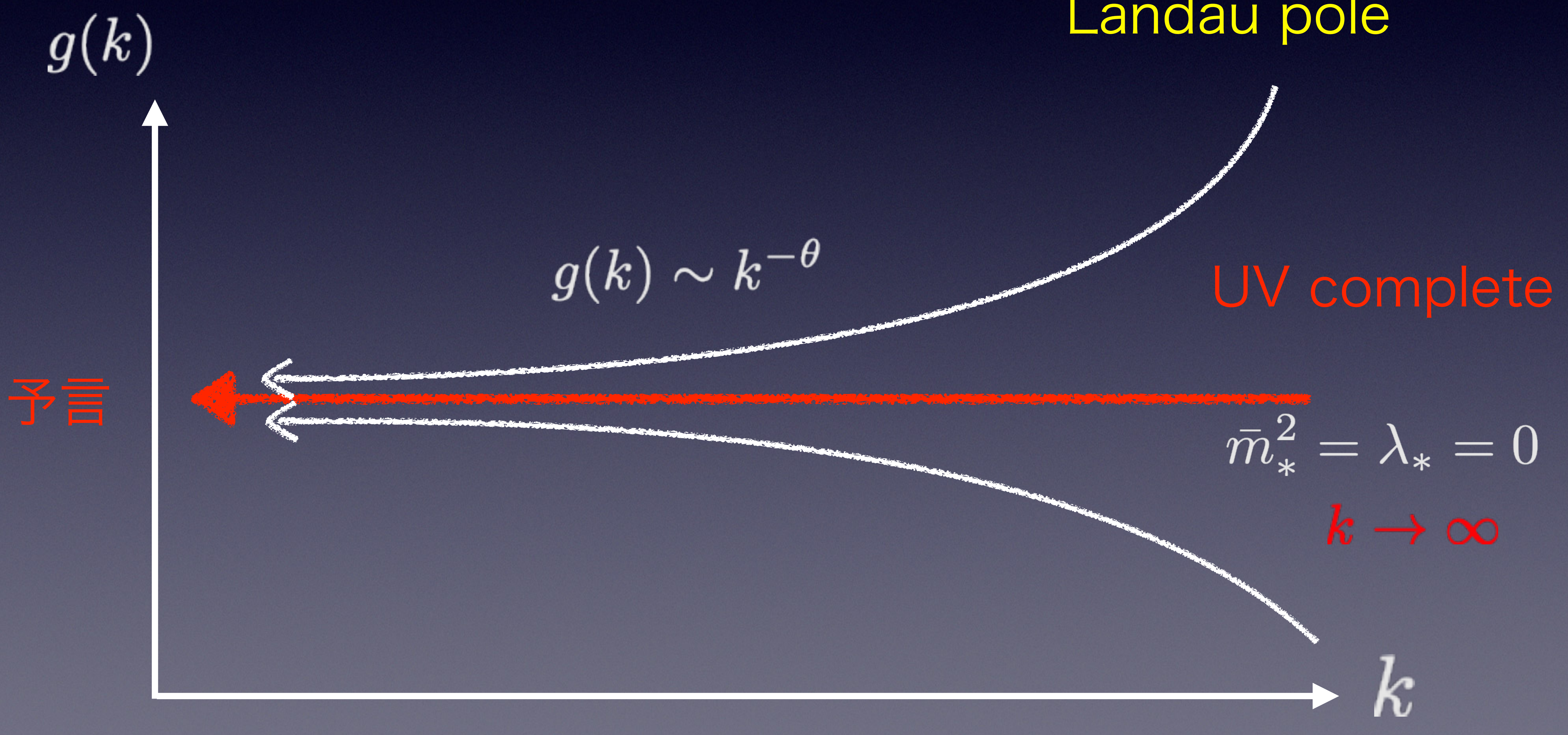
$$\theta_\lambda = -\gamma_\lambda = -A$$



・４点結合は重力相互作用により、irrelevantになる。
・質量パラメータは、 重力相互作用が大きくなっていくと、irrelevantになる。

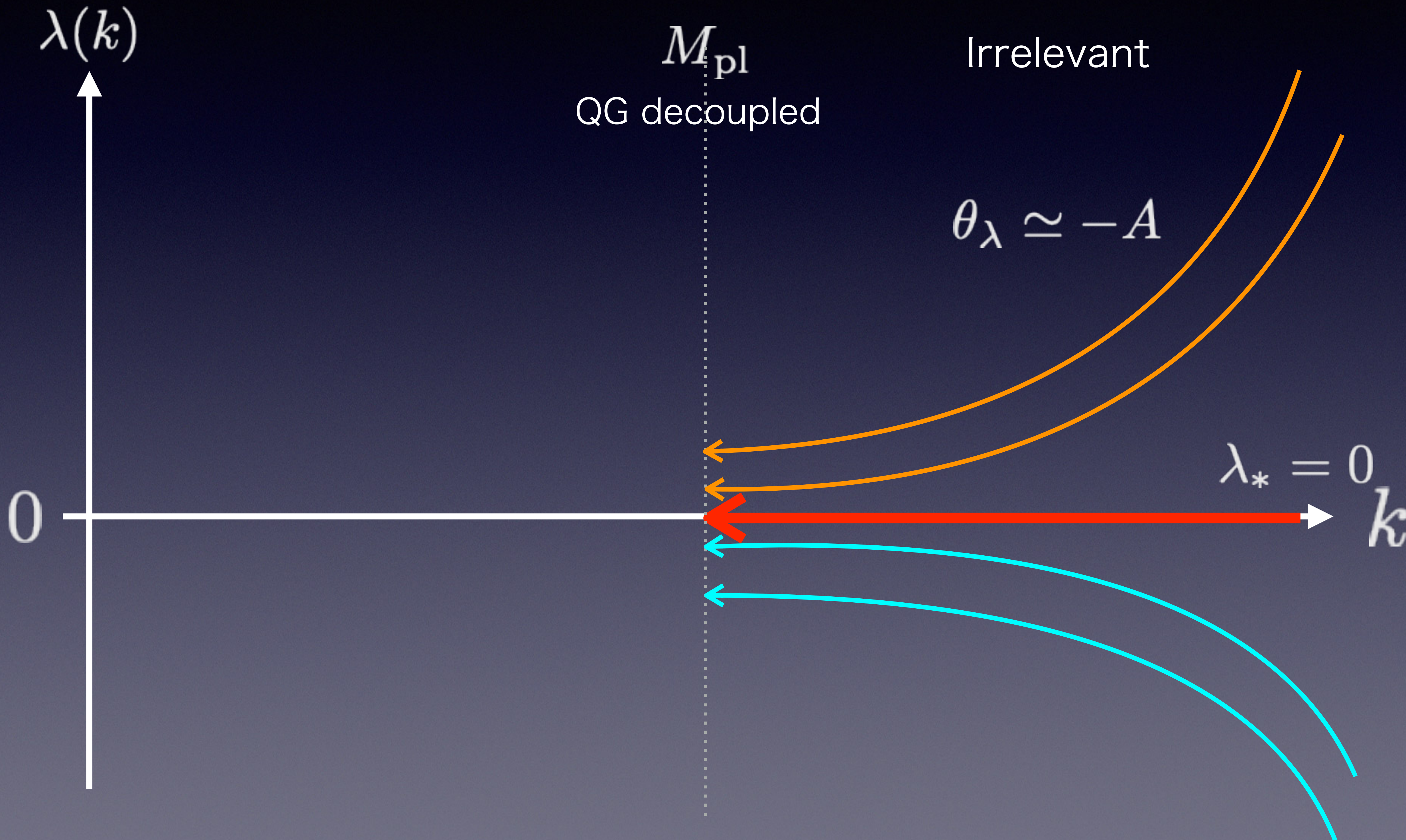
Irrelevant $\theta < 0$

- 予言可能



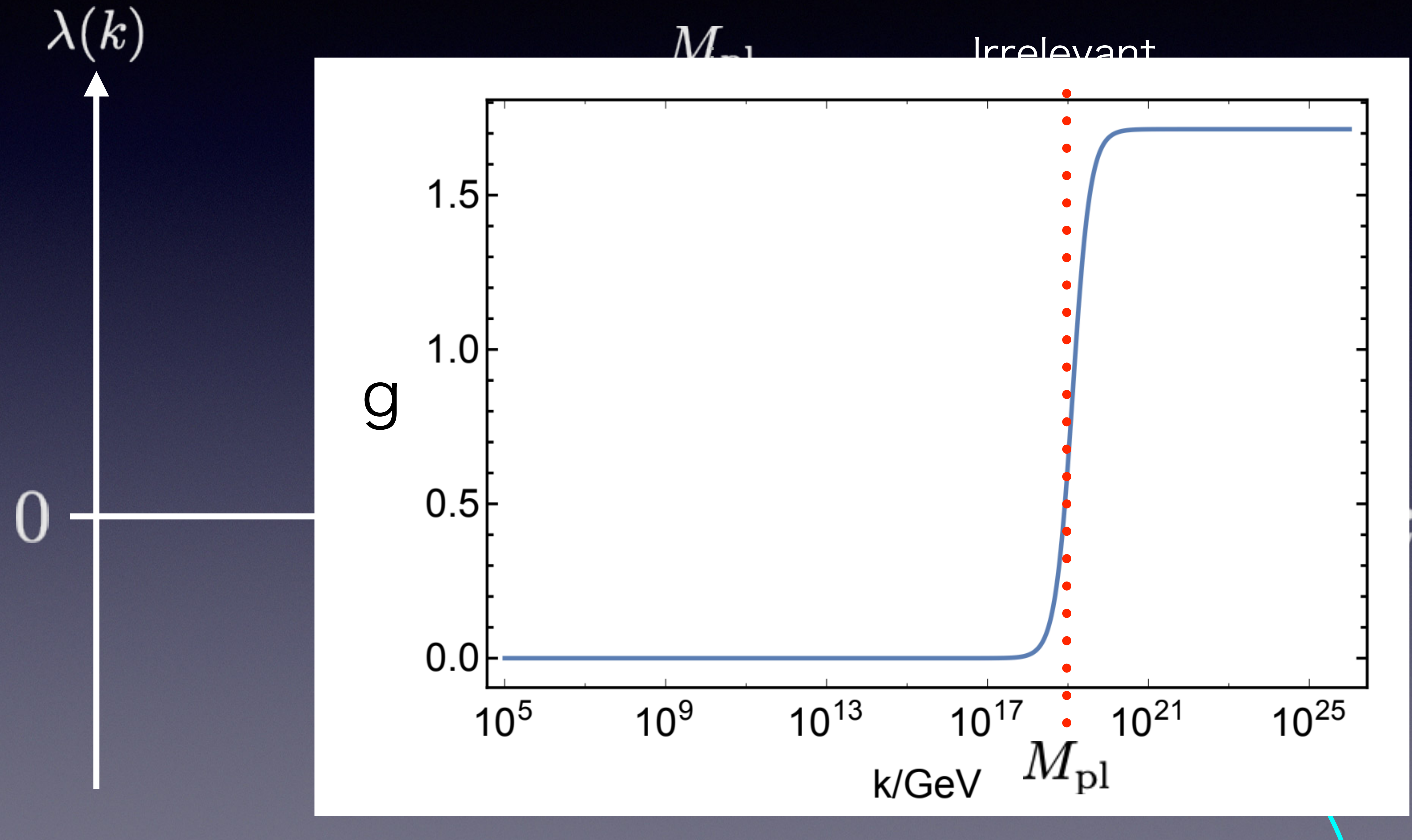
RG flow

$$\lambda(k) = \lambda_0 \left(\frac{k}{\Lambda}\right)^{-\theta_\lambda}$$



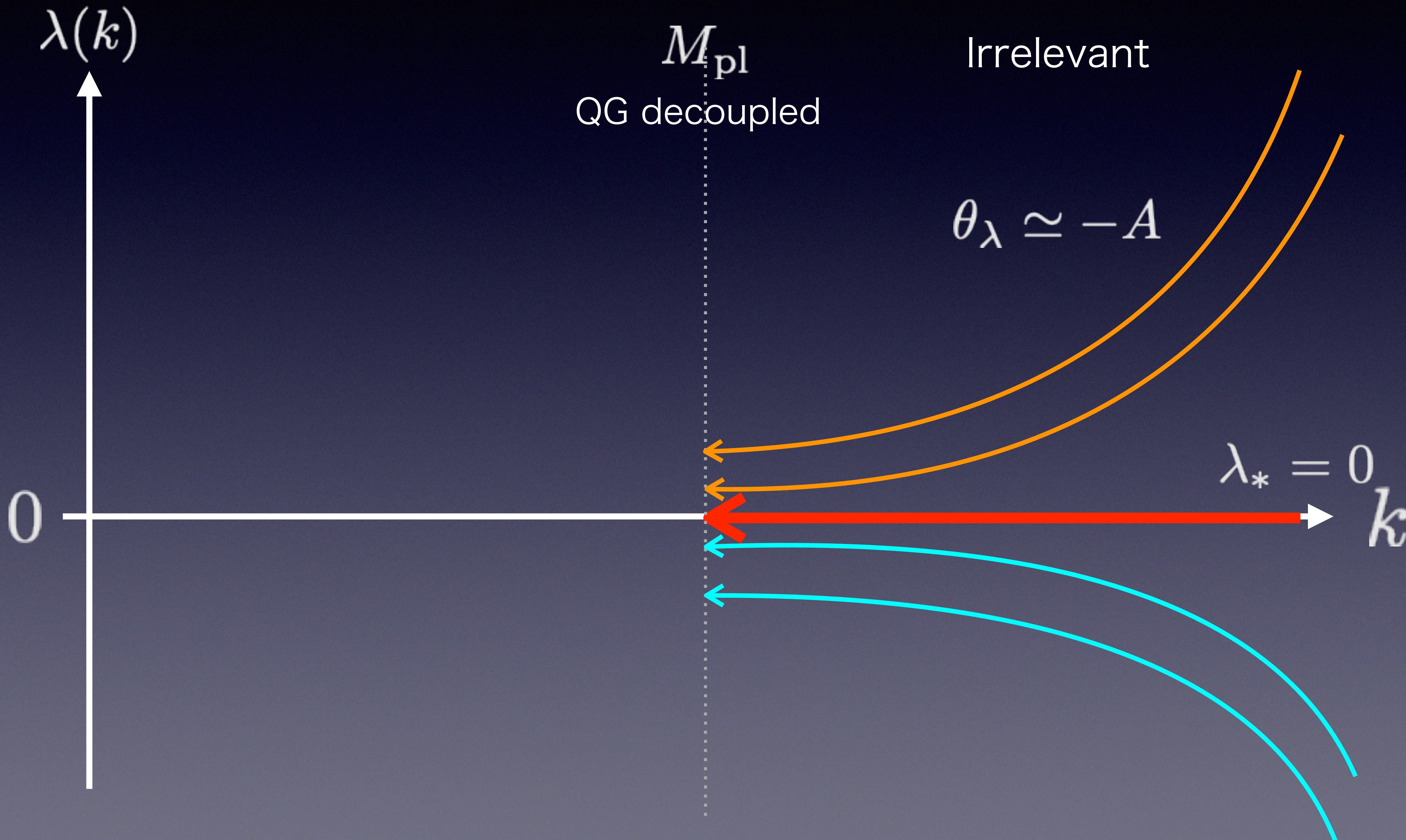
$$\lambda(k) = \lambda_0 \left(\frac{k}{\Lambda}\right)^{-\theta_\lambda}$$

RG flow



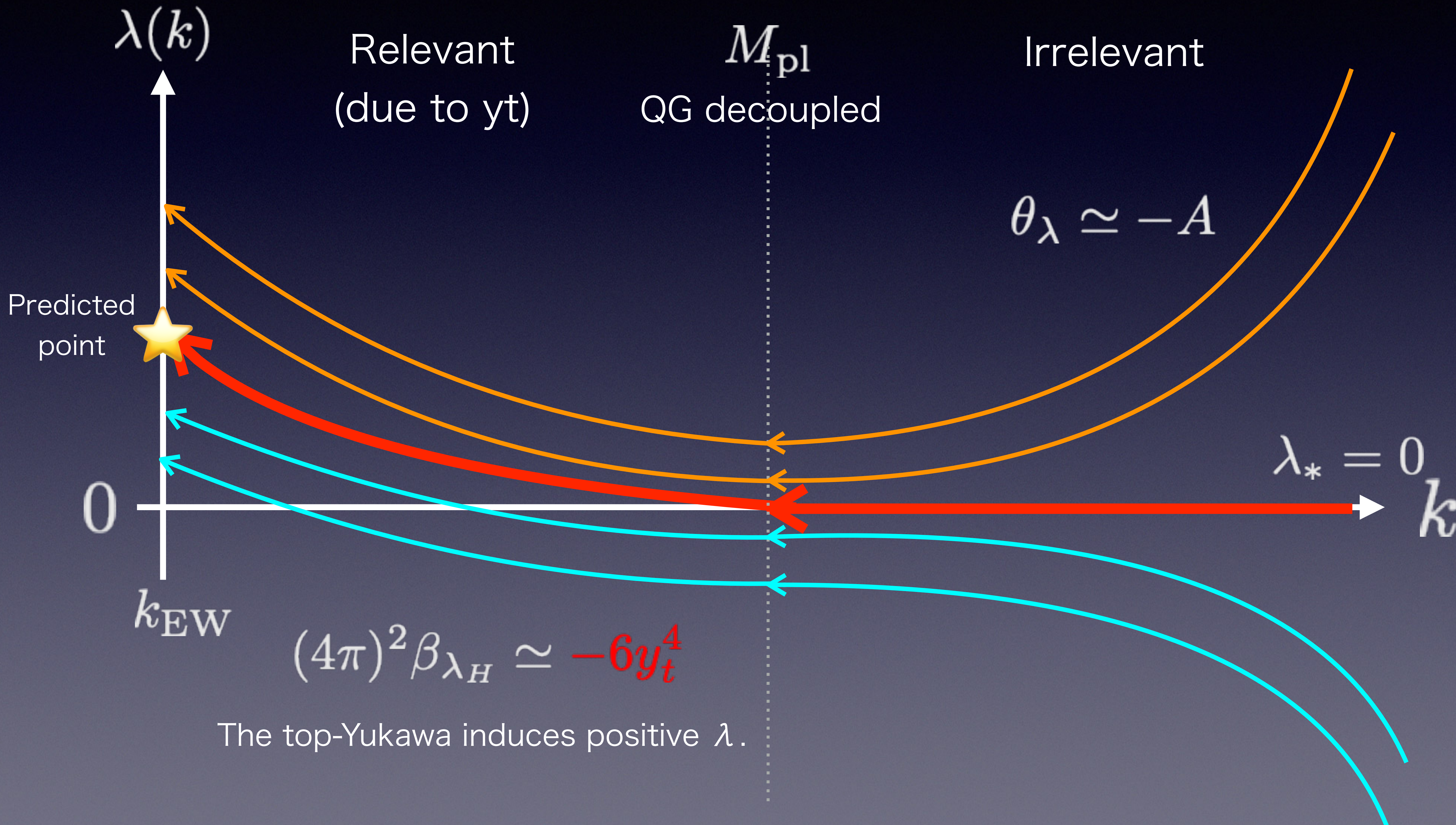
$$\lambda(k) = \lambda_0 \left(\frac{k}{\Lambda}\right)^{-\theta_\lambda}$$

RG flow



$$\lambda(k) = \lambda_0 \left(\frac{k}{\Lambda}\right)^{-\theta_\lambda}$$

RG flow



Top quark mass
vs.
Higgs mass

- For m_t=171.3 GeV, m_H=126.5 GeV

Shaposhnikov, Wetterich, Phys.Lett. B683 (2010) 196-200

- For m_t=230 GeV, m_H=233 GeV

- Current experimental results (LHC)

Eur. Phys. J. C 80 (2020) 658; PDG

    - m_t=170.5±0.7 GeV, m_H=125.10±0.14 GeV

Higgs portal interaction

- 新しいスカラー場Sを導入

$$V(S,H) = m_H^2 H^\dagger H + m_S^2 S^\dagger S + \lambda_H \left(H^\dagger H\right)^2 + \lambda_{HS}\left(H^\dagger H\right) S^\dagger S + \lambda_S \left(S^\dagger S\right)^2$$

- どの結合定数もirrelevant:

Eichhorn, Yuta.Hamada, Lumma, **M.Y.**, Phys.Rev. D97 (2018) no.8, 086004

$$m_H^2 = m_S^2 = 0$$

$$\lambda_H = \lambda_{HS} = \lambda_S = 0$$

at $k = M_{\rm pl}$

- スカラー場はプランクスケールより上でmassless自由場

- ポテンシャルはプランクスケールより上で平坦 (Flatland)

- ヒッグスセクターの拡張に対して強い制限となる

ここまでのまとめ

- 漸近的安全性 (Asymptotic safety)
  - 相互作用のある理論(固定点)へのUV極限が存在
  - 漸近的自由性の一般化
  - 異常次元によるスケーリングの変化(臨界指数)が起こる
  - 有限個のrelevantな結合定数=くりこみ可能
- 漸近的に安全な量子重力理論 (Asymptotically safe gravity)
  - 重力相互作用には非自明な固定点がある(可能性)
  - 異常次元により、有限個の重力結合定数がrelevantに(３つ？)
  - スカラー場への影響: プランクスケール以上でmassless自由場

課題

- 固定点周りの”relevant”の数は？
- 漸近的に安全な量子重力理論はユニタリーか？
- ユークリッド空間からミンコフスキー空間へ
  - プロパゲータの極構造に依る
- 非自明な固定点での有効自由度は?
- etc.

Plan

1. 漸近的に安全とは？
    - 非摂動的にくりこみ可能とは？
2. 漸近的に安全な量子重力
3. 量子重力効果の物質場(スカラー場)への寄与
    - 標準模型からその拡張に向けて
4. 漸近的に安全な量子重力はfundamentalか？
    - 強弱双対性と時空の発現について

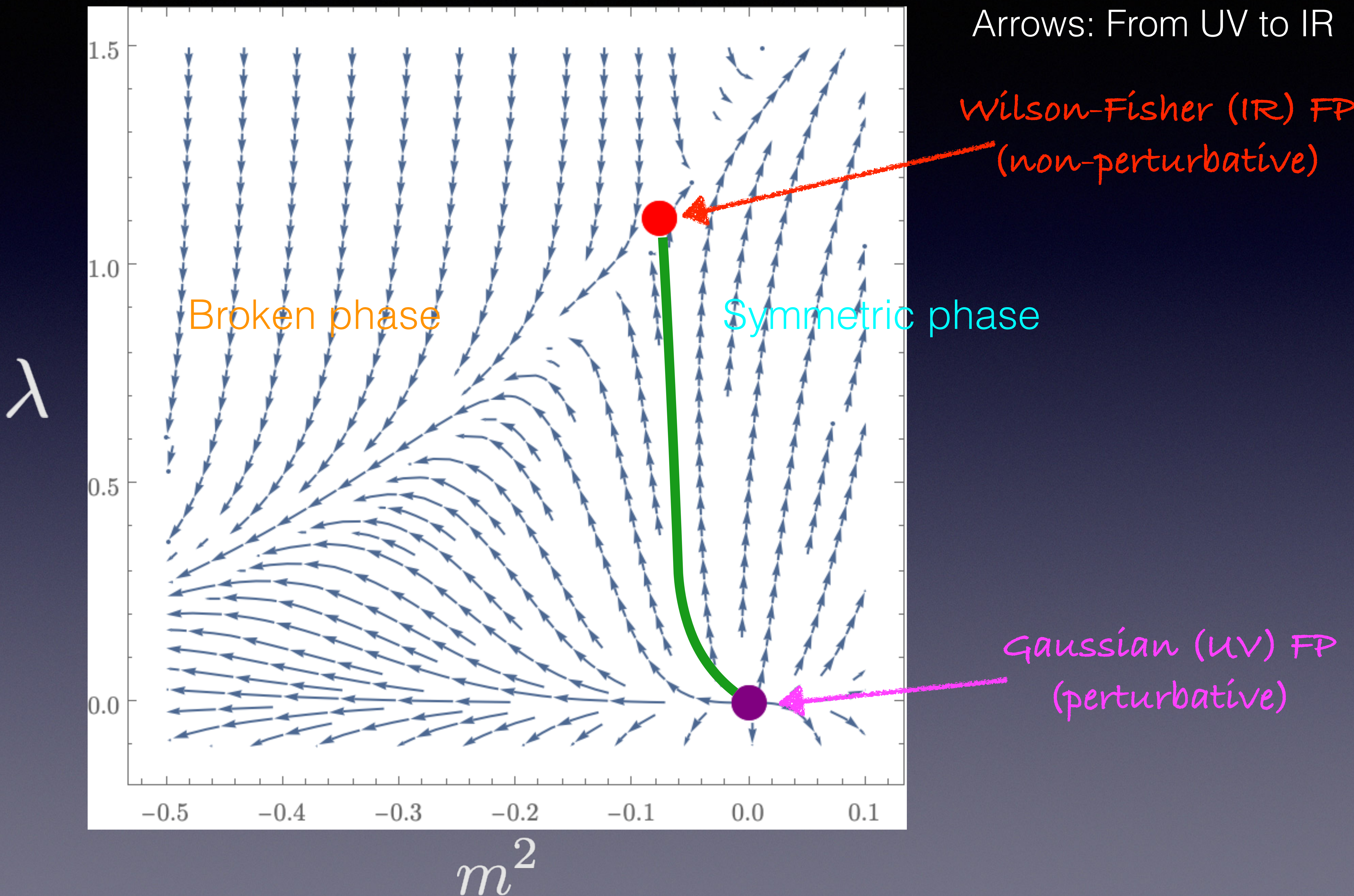
漸近的に安全な理論の1例

- ３次元非線形σ模型
  - 制限付き場の理論 $\langle \phi^i \phi^j \rangle = f_\pi^2 \delta^{ij}$
  - 線形σ模型における自発的対称性の破れ *O*(*N*) →*O*(*N*-1)

$$\phi^i = (\sigma, \pi^1, \ldots, \pi^{N-1}) \qquad \langle \sigma \rangle = f_\pi$$

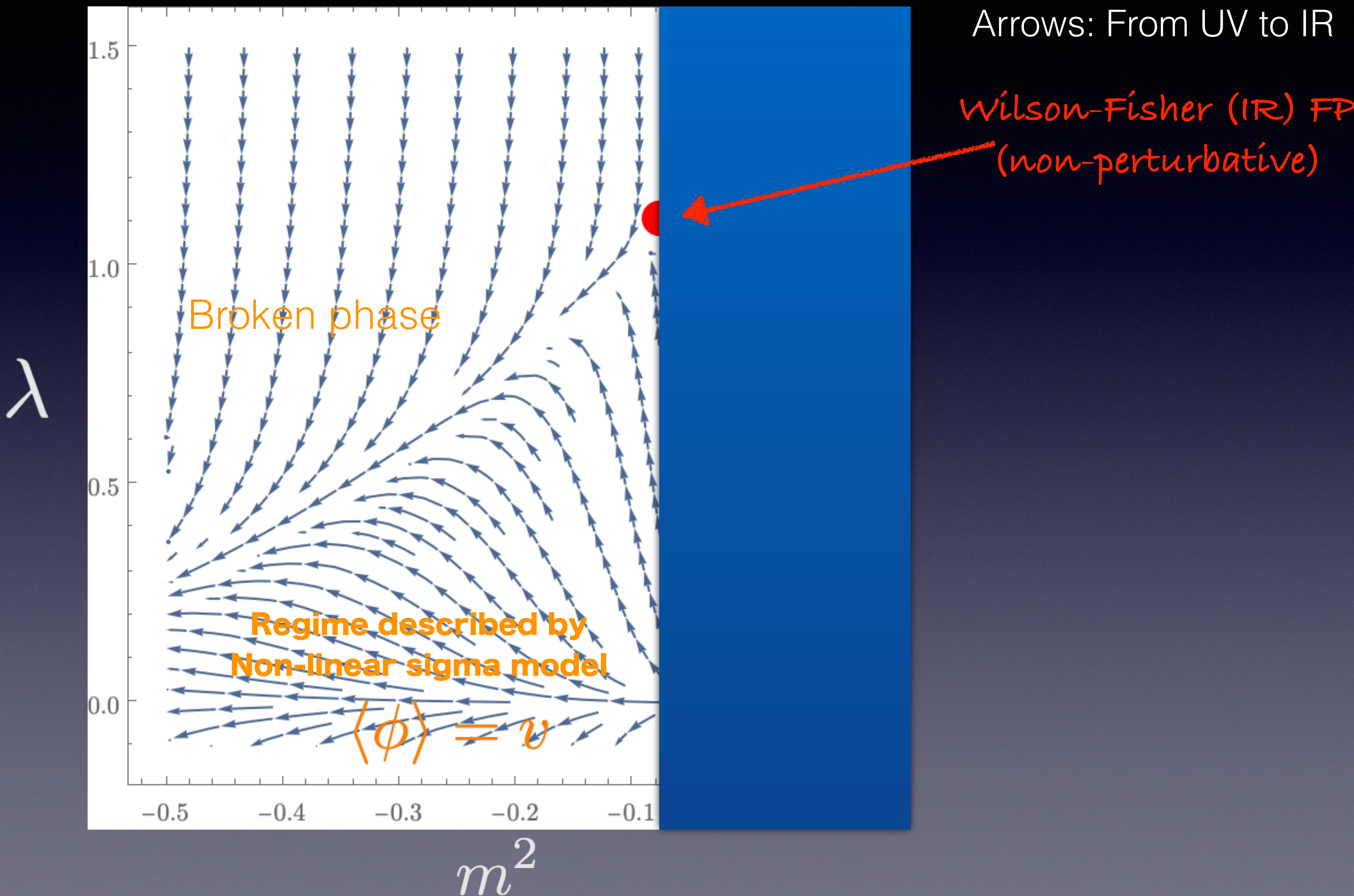
  - NG bosons (pions)のダイナミクスを記述 $S[\pi^i]$
  - 摂動的にくりこみ不可能

3次元線形σ模型の相図

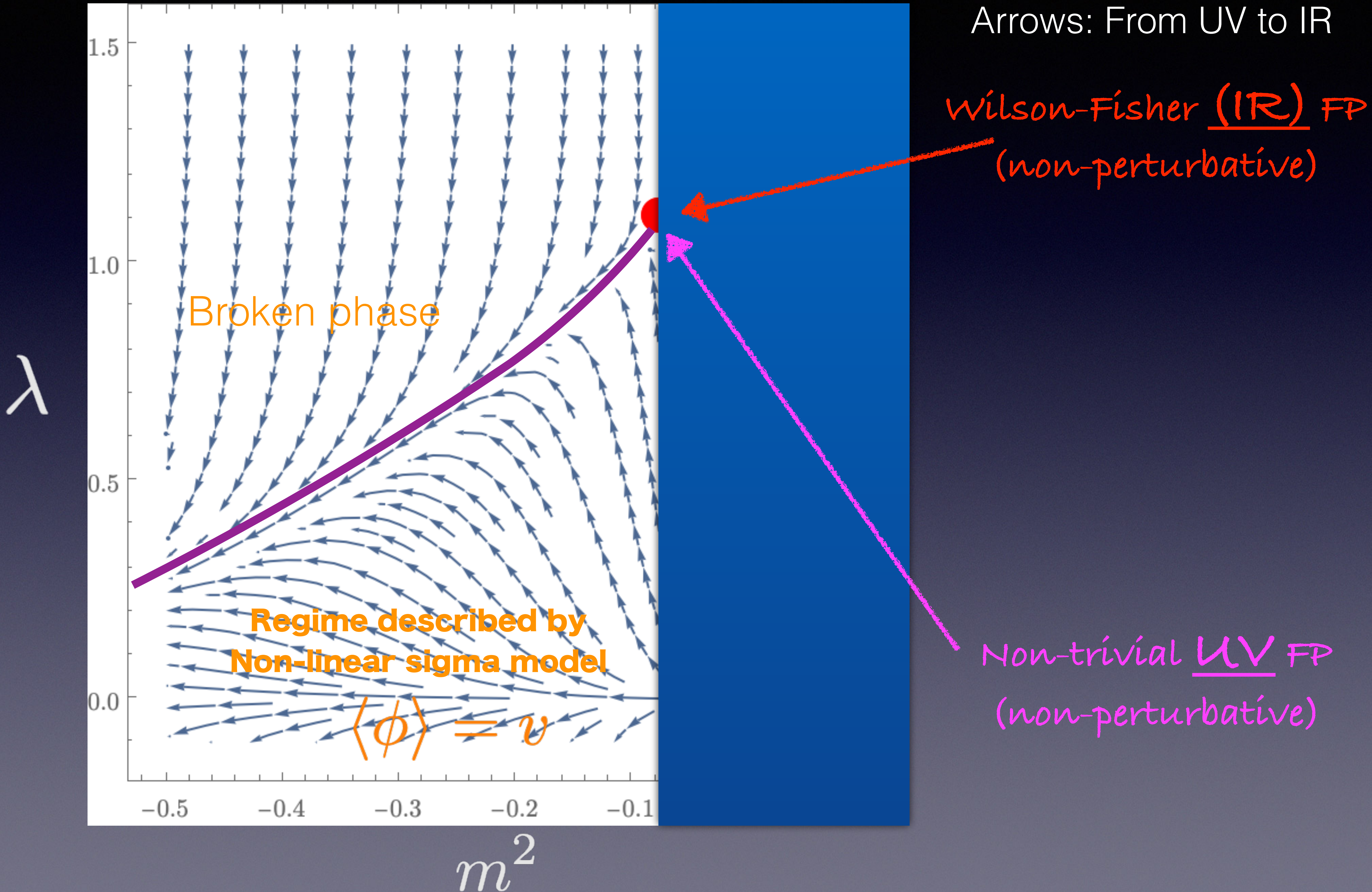


3次元線形σ模型の相図

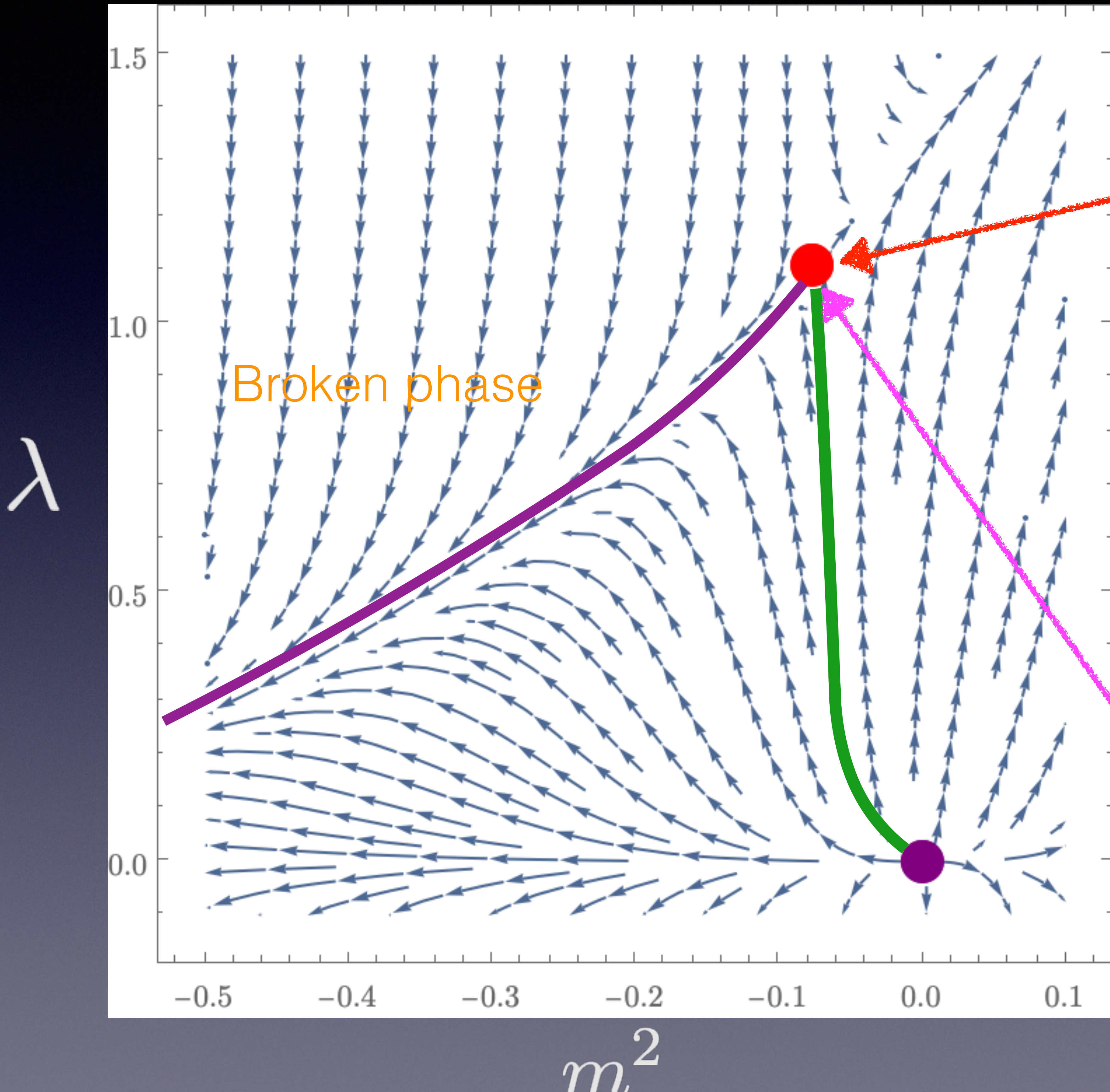
Arrows: From UV to IR



3次元線形σ模型の相図



3次元線形σ模型の相図



Arrows: From UV to IR

Wilson-Fisher (IR) FP
(non-perturbative)

linear σ model

Same universality class

non-linear σ model

Non-trivial UV FP
(non-perturbative)

関係

３次元非線形σ模型

O(N-1)

- 摂動的にくりこみ不可能
- 漸近的に安全(UV FP)
- 場に制限

$$\langle \phi^i \phi^j \rangle = f_\pi^2 \delta^{ij}$$

O(N) ３次元線形σ模型

- 摂動的にくりこみ可能
- ユニタリー
- 漸近的に自由(Gaussian FP)
- IR fixed point (Wilson-Fisher FP)

Same universality class

漸近的に安全な量子重力理論

- 摂動的にくりこみ不可能
- 漸近的に安全 (UV FP)
- 場に制限

$$g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = \delta_\mu^\nu$$

?

How to formulate?

- Metric theories are diffeomorphism invariant.

$$? \xrightarrow{\text{SSB}} \text{Diffeomorphism}$$

$$g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu} = \delta_\mu^\nu$$

- In this work, we consider local Lorentz SO(1,3):

$$SO(1,3)_{local} \times \text{Diff.} \xrightarrow[\cancel{SO(1,3)}_{local}]{\text{SSB}} \text{Diffeomorphism}$$

$$g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu} = \delta_\mu^\nu$$

First-order formalism

- Based on SO(1,3) local Lorentz symmetry (and diff.)
  - Vierbein $e_\mu{}^a$
  - Local-Lorentz (LL) gauge field $(A_\mu)^a{}_b$
- Action (Einstein-Hilbert)

$$S = \int \mathrm{d}^4 x\, e \left[-\Lambda + \frac{M^2}{2} e_a{}^\mu e_b{}^\nu F^{ab}{}_{\mu\nu} \right]$$

$$F^a{}_{b\mu\nu} = (\partial A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu])^a{}_b$$

First-order formalism

$$S = \int \mathrm{d}^4 x \, e \left[-\Lambda + \frac{M^2}{2} e_a{}^\mu e_b{}^\nu F^{ab}{}_{\mu\nu} \right]$$

- Equation of motion $\quad (A_\mu)^a{}_b = e_\nu{}^a D_\mu e^\nu{}_b$
  - Obtain the EH action in the vierbein formalism
  - Introducing inverse vierbein breaks $SO(1,3)_{\mathrm{local}}$ symmetry.
- Kinetic term of LL gauge field

$$\frac{1}{4} F^{ab}{}_{\mu\nu} F_{ab}{}^{\mu\nu} + \cdots \quad \rightarrow R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} + \cdots$$

Degenerate limit

- Non-linear σ model: O*(N-1)* invariant
  - Constraint on fields $\langle \phi^i \phi^j \rangle = f_\pi^2 \delta^{ij}$
  - $f_\pi^2 \to 0$: symmetric phase (O*(N)* invariant)
- Gravity in first-order formalism
  - Constrain on metric $g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = \delta_\mu^\nu$
  - $C \to 0$: symmetric phase (SO(1,3) invariant).

$$\langle e^a{}_\mu \rangle = C \delta^a_\mu$$

$$\bar{g}_{\mu\nu} \propto C^2$$

$$\bar{g}^{\mu\nu} \propto C^{-2}$$

Model with degenerate limit

- Including matters, at a certain scale,

$$S = \int \mathrm{d}^4 x\, e \Big[-V + \frac{M^2}{2} e_a{}^\mu e_b{}^\nu F^{ab}{}_{\mu\nu} - \frac{Z_\psi}{2} \left(\bar{\psi} e_a{}^\mu \gamma^a D_\mu \psi + \mathrm{h.c.} \right) \Big]$$

$$D_\mu = \partial_\mu - i g_L (A_\mu)^{ab} \Sigma_{ab} + \cdots$$

  - Invariant under SO(1,3)$_{\mathrm{local}}$ × diff.
  - Only fermions are dynamical!
  - No kinetic terms of vierbein, gauge fields, scalar fields.
  - These fields would be dynamical via fermion quantum corrections.

Spontaneous local Lorentz symmetry breaking

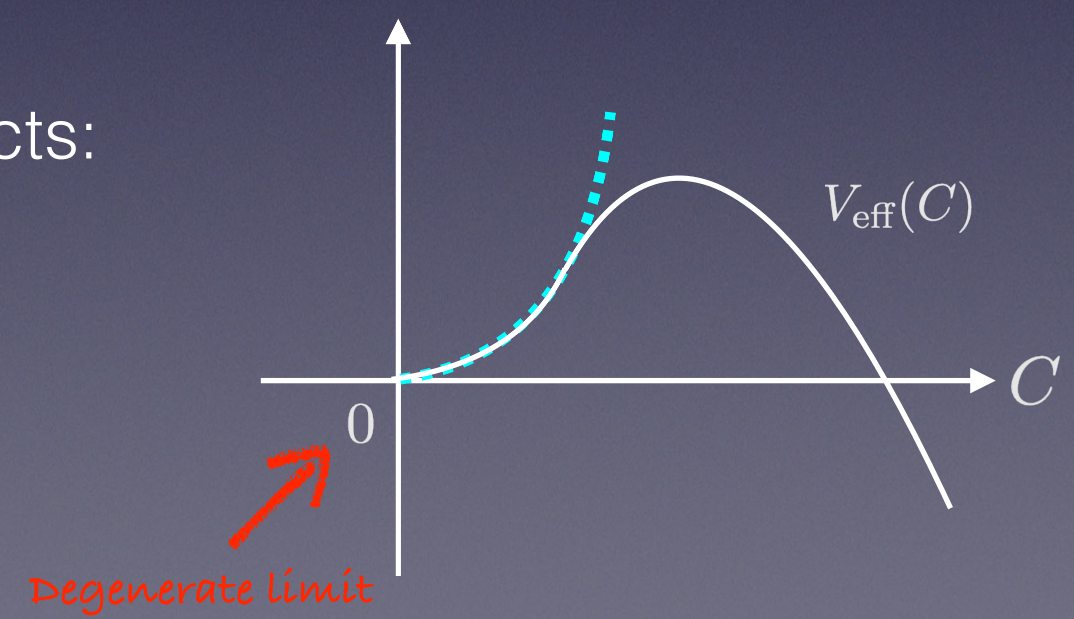
- SO(1,3)$_{\text{local}}$ × diff.
- Generation of expectation value of vierbein
- A possible solution would be a flat spacetime.

$$\langle e^a{}_\mu \rangle = C\delta^a_\mu$$ SO(1,3)$_{\text{local}}$ → SO(1,3)$_{\text{global}}$

  - Effective potential from spinor loop effects:

$$V_{\text{eff}}(C) = -VC^4 - \frac{(CM)^4}{2(4\pi)^2}\log\left(C^2M^2/\mu^2\right)$$

  - Precise analysis is in progress.



Spontaneous local Lorentz symmetry breaking

- Local Lorentz gauge symmetry is broken.
  - Degrees of freedom (d.o.f.):

    Symmetric part (metric)
    (radial modes)

    Anti-symmetric part (torsion)
    (NG modes)

    - Vierbein $e_\mu{}^a$: 16 d.o.f. = 10 + 6 d.o.f.

      eaten

    - LL gauge field $(A_\mu)^a{}_b$: 6 d.o.f.
  - LL gauge bosons become massive and decouple.
  - The symmetry parts (radial modes) are still massless thanks to diif..

Very ideal scenario!

$$S = \int \mathrm{d}^4x\, e\Big[-V + \frac{M^2}{2} e_a{}^\mu e_b{}^\nu F^{ab}{}_{\mu\nu} - \frac{Z_\psi}{2}\left(\bar\psi e_a{}^\mu \gamma^a(\partial_\mu - i g_L A_\mu)\psi + \text{h.c.}\right)\Big]$$