SU(N) gauge natural inflation

Kai Murai / 村井 開 (ICRR)

共同研究者: Tomohiro Fujita (Waseda U.), Kyohei Mukaida (KEK), and Hiromasa Nakatsuka (ICRR)

基研研究会 素粒子物理学の進展 2021

2021/09/06

目次

目次

I. 背景
   - Chromo-natural inflation

II. SU(N) ゲージ場の一様等方解

III. 数値計算

IV. まとめ

Chromo-natural inflation

■ Natural inflation

Slow-roll inflationを実現するためには平らなポテンシャルが必要

→ Natural inflation: [K. Freese, J. A. Frieman, and A. V. Olinto (1990)]

AxionのようなNGボソンがinflatonであれば

shift symmetryによってポテンシャルの平坦性が保たれる

一方でnatural inflationがうまくいくためには $f \gtrsim M_{\mathrm{Pl}}$

[K. Freese and W. H. Kinney (2004)]

→ InflatonとSU(2)ゲージ場の結合によって

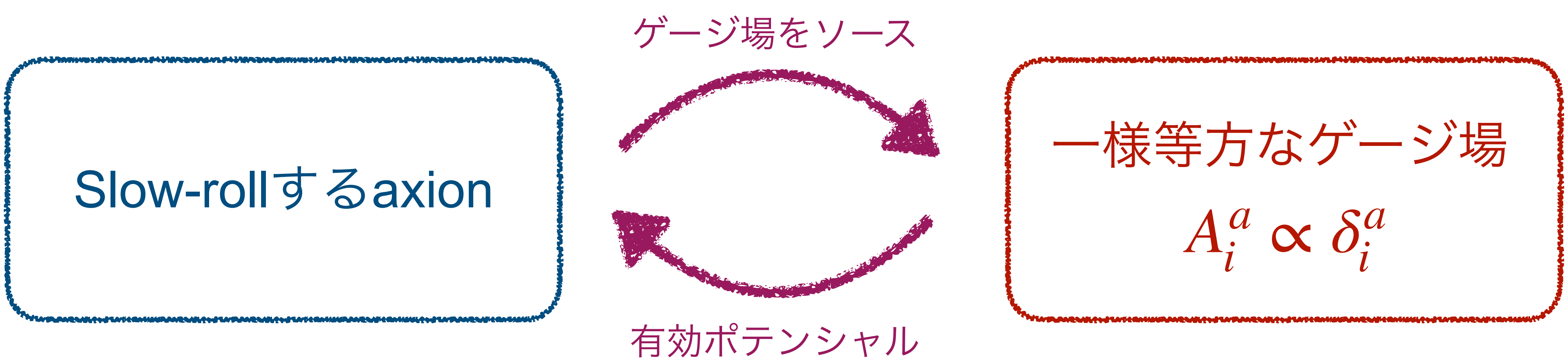
inflatonの有効ポテンシャルが変化する

"Chromo-natural inflation"

[P. Adshead and M. Wyman (2012)]

■ モデル設定 [P. Adshead and M. Wyman (2012)]

$$\mathscr{L} = \underbrace{\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi)}_{\text{axion/inflaton}} \underbrace{- \frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}}_{\text{SU(2)ゲージ場}} + \underbrace{\frac{\phi}{4f}F^a_{\mu\nu}\tilde{F}^{a\mu\nu}}_{\text{axionとゲージ場の結合}}$$



背景解の範囲では $f < M_{\rm Pl}$ でinflationがうまくいきそうだが

一様等方なゲージ場を通じてテンソルゆらぎが増幅されすぎる…

[P. Adshead, E. Martinec, and M. Wyman (2013)]

Chromo-natural inflation

■ Chromo-natural inflationの拡張

SU(2)というゲージ群は一様等方なゲージ場のためのminimalな選択

→ ゲージ群をより大きいものに拡張してみる

“SU(N) gauge natural inflation”

今回は背景ゲージ場の解がどうなるかを調べる

→ SU(2)の場合と違い、複数の一様等方解が存在

解を実際に見ていく

目次

運動方程式

- 背景ゲージ場の運動方程式

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi) + \frac{\phi}{4f}F^a_{\mu\nu}\tilde{F}^{a\mu\nu}$$

Inflation中を考え $a \propto e^{Ht}$, $\xi \equiv \dfrac{\dot{\phi}}{2fH} = \mathrm{const}$. を仮定する

temporal gauge $A^a_0 = 0$, 背景場を $M^a_i(t) \equiv \dfrac{g}{a(t)H}A^a_i(t)$ で無次元化

定常な背景ゲージ場の運動方程式

$$\cancel{\frac{\ddot{M}^a_i}{H^2}} + \cancel{\frac{3}{H}\dot{M}^a_i} + 2M^a_i + f^{bac}f^{bde}M^c_jM^d_iM^e_j - \xi\epsilon_{ijk}f^{abc}M^b_jM^c_k = 0,$$

このままだと解けないので2つの条件を課す

(i): 等方性

(ii): 電場と磁場の平行性

解の条件

- (i): 等方性

任意の空間回転Rによる電磁場の変換に対して

同じ電磁場の変換を導くゲージ変換Gが存在する

つまり

$$^\forall R, {}^\exists G : R_{ij} M_j^a = G^{ab} M_i^b$$

このことから任意のRに対して

$$M_i^a M_j^a = R_{ik} M_k^a M_l^a R_{lj}^{\mathrm{T}}$$

が成立することから

$$M_i^a M_j^a \propto \delta_{ij}$$

$$E_i^a = -\frac{aH^2}{g} M_i^a$$

$$B_i^a = -\frac{a^2 H^2}{2g} \epsilon_{ijk} f^{abc} M_j^b M_k^c$$

$$M_i^a = \sigma n_i^a, \quad n_i^a n_j^a = \delta_{ij}$$

解の条件

- (ii): 電場と磁場の平行性

Chern-Simons項は電場と磁場を直接結合する:

$$\phi F^a_{\mu\nu}\tilde{F}^{a\mu\nu} \to \propto \xi E^a_i B^a_i$$

→ 電磁場それぞれがお互いをソースする

→ 各空間方向の電場と磁場が比例するという条件を課す:

$$E^a_i \propto B^a_i$$

$E_i = E^a_i T^a$ のように生成子を含めた形式を用いると

$$B_i = \frac{ig\epsilon^{ijk}}{H^2}\left[E_j, E_k\right]$$

→ $$\boxed{n_i \propto \epsilon_{ijk}[n_j, n_k]}$$

$\{n_i\}$ はSU(2)部分群をなす

$$E^a_i = -\frac{aH^2}{g}M^a_i$$

$$B^a_i = -\frac{a^2H^2}{2g}\epsilon_{ijk}f^{abc}M^b_j M^c_k$$

$$M^a_i = \sigma n^a_i, \quad n^a_i n^a_j = \delta_{ij}$$

解の条件

- 条件(i), (ii)の帰結

$$\boxed{\begin{gathered} M_i^a = \sigma n_i^a, \quad n_i^a n_j^a = \delta_{ij}, \\ n_i^a T^a = n_i \propto \epsilon_{ijk}[n_j, n_k] \end{gathered}}$$

生成子の規格化: $\mathrm{Tr}\left(T^a T^b\right) = \dfrac{\delta^{ab}}{2}$ より

$$\mathrm{Tr}\left(n_i n_j\right) = \frac{\delta_{ij}}{2}$$

交換関係の比例定数をλで定義する:

$$\boxed{[n_i, n_j] = i\lambda\epsilon_{ijk}n_k}$$

SU(2) 部分群

- 条件を満たす解の振幅

運動方程式

$$2M_i^a + f^{bac} f^{bde} M_j^c M_i^d M_j^e - \xi \epsilon_{ijk} f^{abc} M_j^b M_k^c = 0$$

$$M_i^a = \sigma n_i^a, \quad n_i^a n_j^a = \delta_{ij}, \quad [n_i, n_j] = i\lambda \epsilon_{ijk} n_k$$

$$\sigma + \lambda^2 \sigma^3 - \xi \lambda \sigma^2 = 0$$

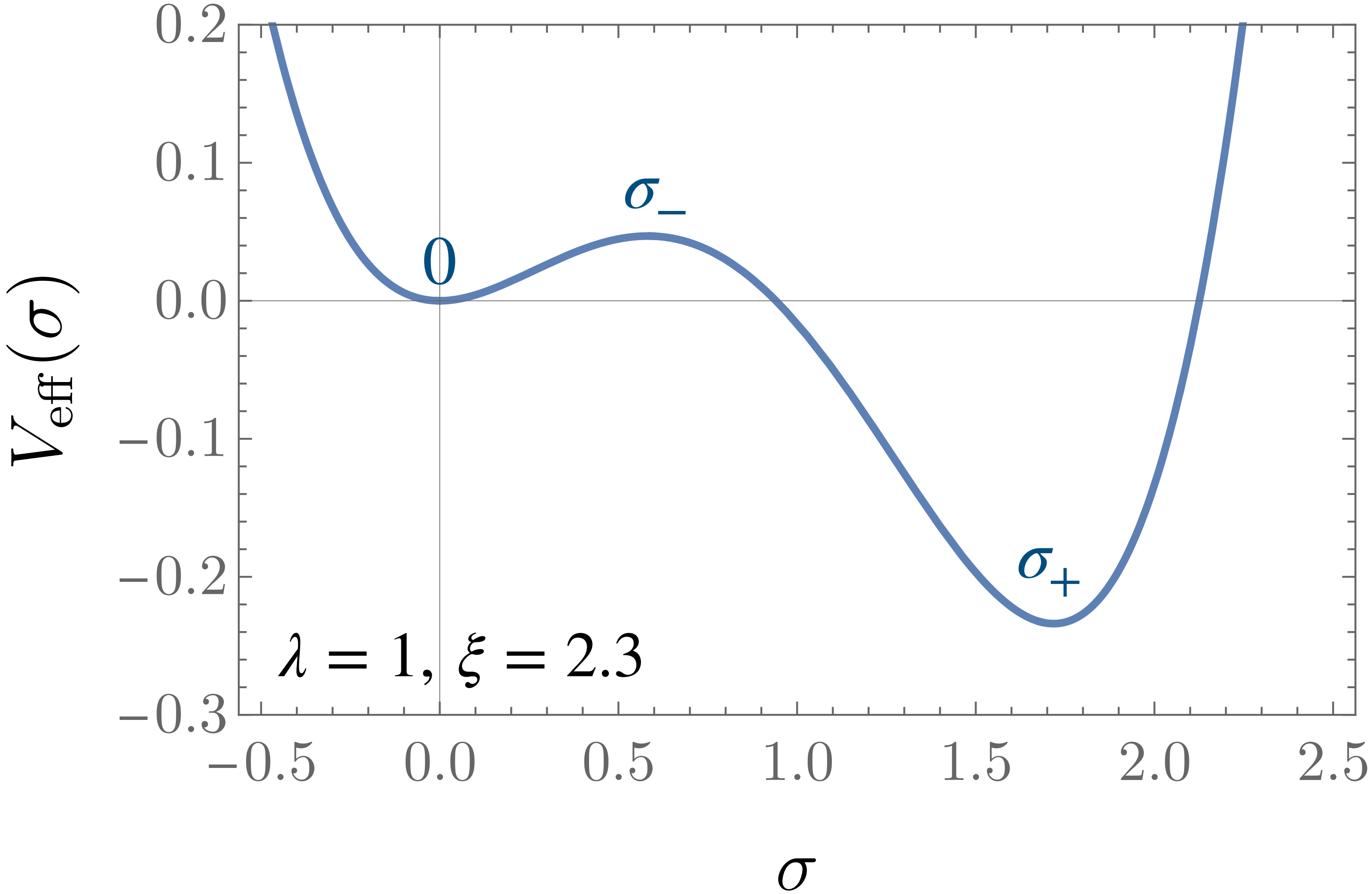
$$\sigma = 0, \ \frac{\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 4}}{2\lambda}$$

λさえ決まればゲージ場の振幅が決まる

■ 解の安定性

有効ポテンシャルで解の安定性を調べる

→ 以降は安定に見える $\sigma = \sigma_+$ に注目する



$$V_{\rm eff}[\sigma] = \frac{1}{2}\sigma^2 - \frac{1}{3}\xi\lambda\sigma^3 + \frac{1}{4}\lambda^2\sigma^4$$

$$\sigma_\pm = \frac{\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 4}}{2}$$

$$\sigma = 0, \frac{\sigma_\pm}{\lambda}$$

具体例

- 解の構成法: $N=3$ の例

まずはSU(N)に含まれるSU(2)部分群を特定する

$$SU(3) \supset SU(2), \quad \mathbf{3} = \mathbf{3}$$

$$n_i = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

SU(2)部分群の生成子n_iを用いて

$$\boxed{M_i^a = \sigma\, n_i}$$: 選んだSU(2)を破っている

場の大きさσは$\{n_i\}$の交換関係から決まり

$$[n_x, n_y] = \frac{i}{2} n_z \rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{\sigma = 2\sigma_+}$$

具体例

- $N = 3$

$$SU(3) \supset SU(2) \times U(1) \quad \mathbf{3} = \mathbf{2} + \mathbf{1}$$

$$n_i = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda = 1 \quad \sigma = \sigma_+$$

$$SU(3) \supset SU(2) \quad \mathbf{3} = \mathbf{3}$$

$$n_i = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \qquad \sigma = 2\sigma_+$$

具体例

- $N = 4$

$$SU(4) \supset SU(2) \times U(1) \quad \mathbf{4} = \mathbf{3} + \mathbf{1}$$

$$n_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda = \frac{1}{2} \qquad \sigma = 2\sigma_+$$

$$SU(4) \supset SU(2) \quad \mathbf{4} = \mathbf{4}$$

$$n_z = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \qquad \lambda = \frac{1}{\sqrt{10}} \qquad \sigma = \sqrt{10}\sigma_+$$

具体例

- $N = 4$

$$SU(4) \supset SU(2) \times SU(2) \quad \mathbf{4} = (\mathbf{2}, \mathbf{1}) + (\mathbf{1}, \mathbf{2})$$

$$n_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 1$$

$$\sigma = \sigma_+, \sqrt{2}\sigma_+$$

$$SU(4) \supset SU(2) \times SU(2) \quad \mathbf{4} = (\mathbf{2}, \mathbf{2})$$

$$n_z = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sigma = \sqrt{2}\sigma_+, 2\sigma_+$$

具体例

- 一般のN

$$SU(N) \supset SU(2) \times \cdots \qquad \mathbf{N} = \mathbf{m} + \cdots \qquad (m = 2, \cdots, N)$$

$$n_z = \Lambda(m)\,\mathrm{diag}\left(\frac{m-1}{2}, \frac{m-3}{2}, \cdots, -\frac{m-1}{2}, 0, \cdots, 0\right)$$

$$\lambda = \Lambda(m) = \left(\frac{m(m^2-1)}{6}\right)^{-1/2} \qquad \sigma = \frac{\sigma_+}{\Lambda(m)} \sim \sqrt{\frac{m(m^2-1)}{6}}\sigma_+$$

Outline

I. 背景

II. SU(N) ゲージ場の一様等方解

III. 数値計算

- 時間発展
- 有効ポテンシャル

IV. まとめ

■ 設定

- 時間微分を含めた微分方程式を解く： $\left(a \propto e^{Ht}, \quad \xi \equiv \frac{\dot{\phi}}{2fH} = \mathrm{const.}\right)$

$$\frac{\ddot{M}_i^a}{H^2} + \frac{3}{H}\dot{M}_i^a + 2M_i^a + f^{bac} f^{bde} M_j^c M_i^d M_j^e - \xi \epsilon_{ijk} f^{abc} M_j^b M_k^c = 0,$$

- 初期条件はランダムに振る：

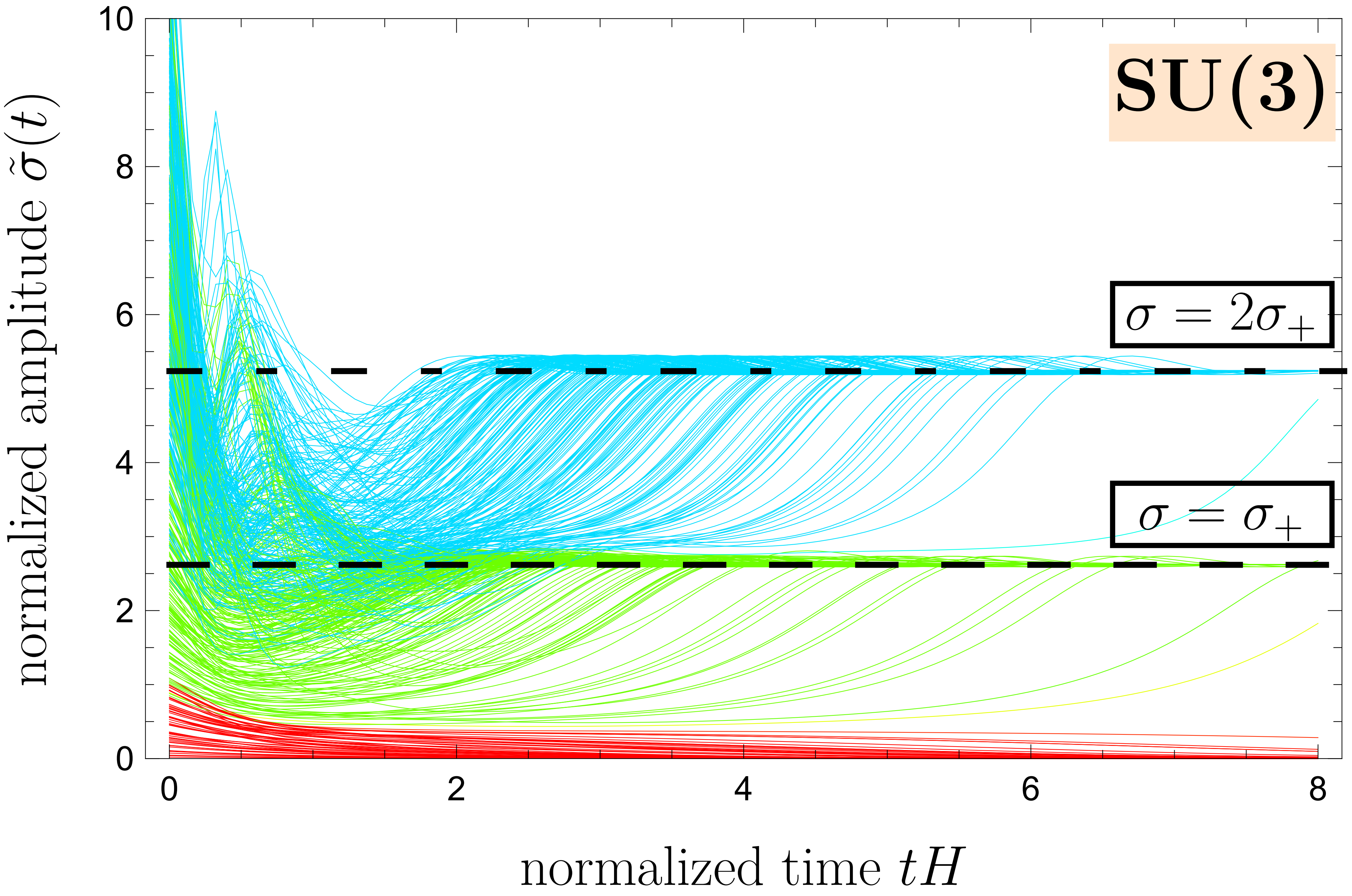
$$\dot{A}_i^a = 0, \quad M_i^a(t_0) = \text{(Gaussian distribution)}$$

- 結果のプロットは

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}[M_i M_i]$$

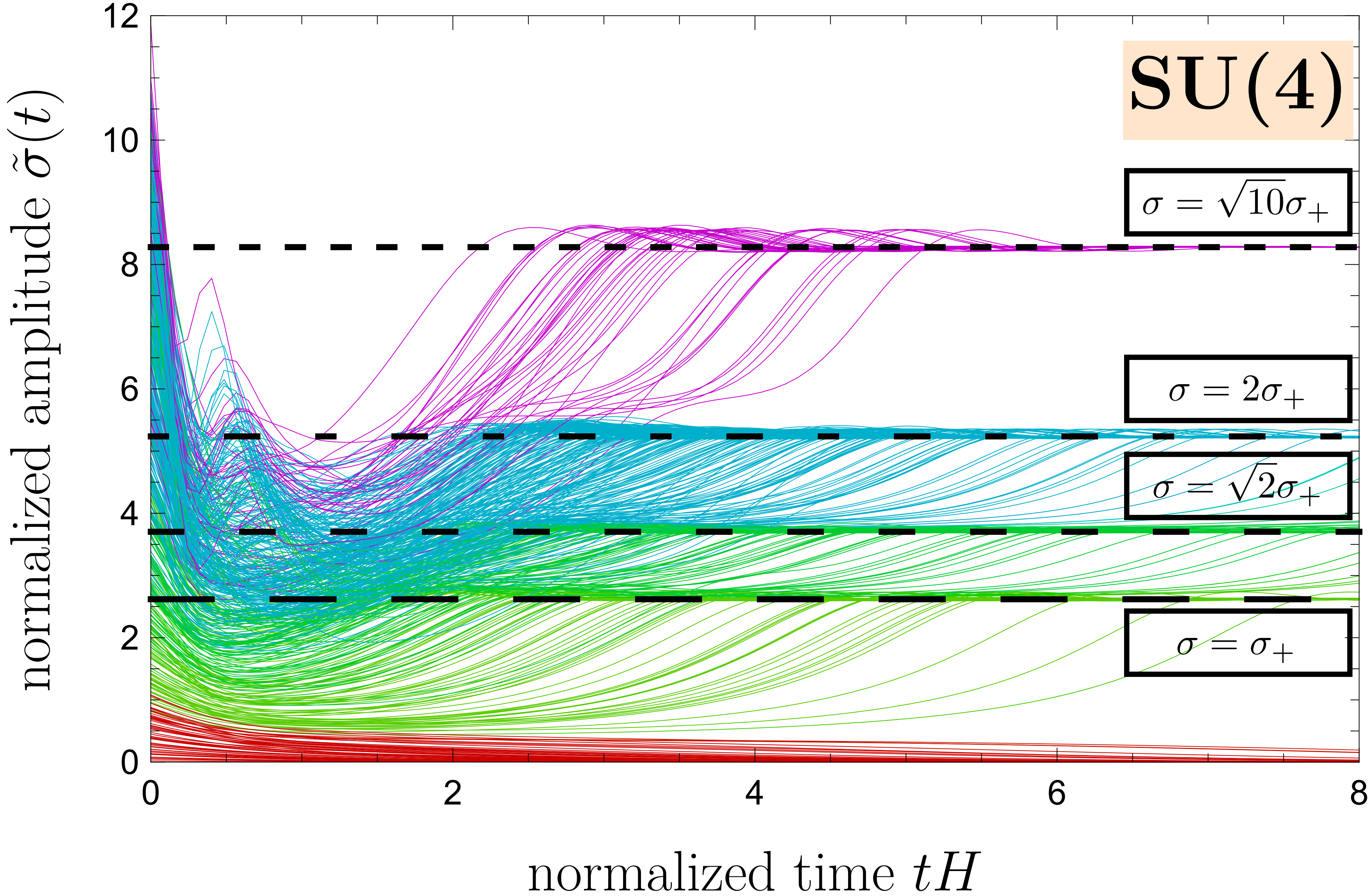
時間発展

- Background dynamics



時間発展

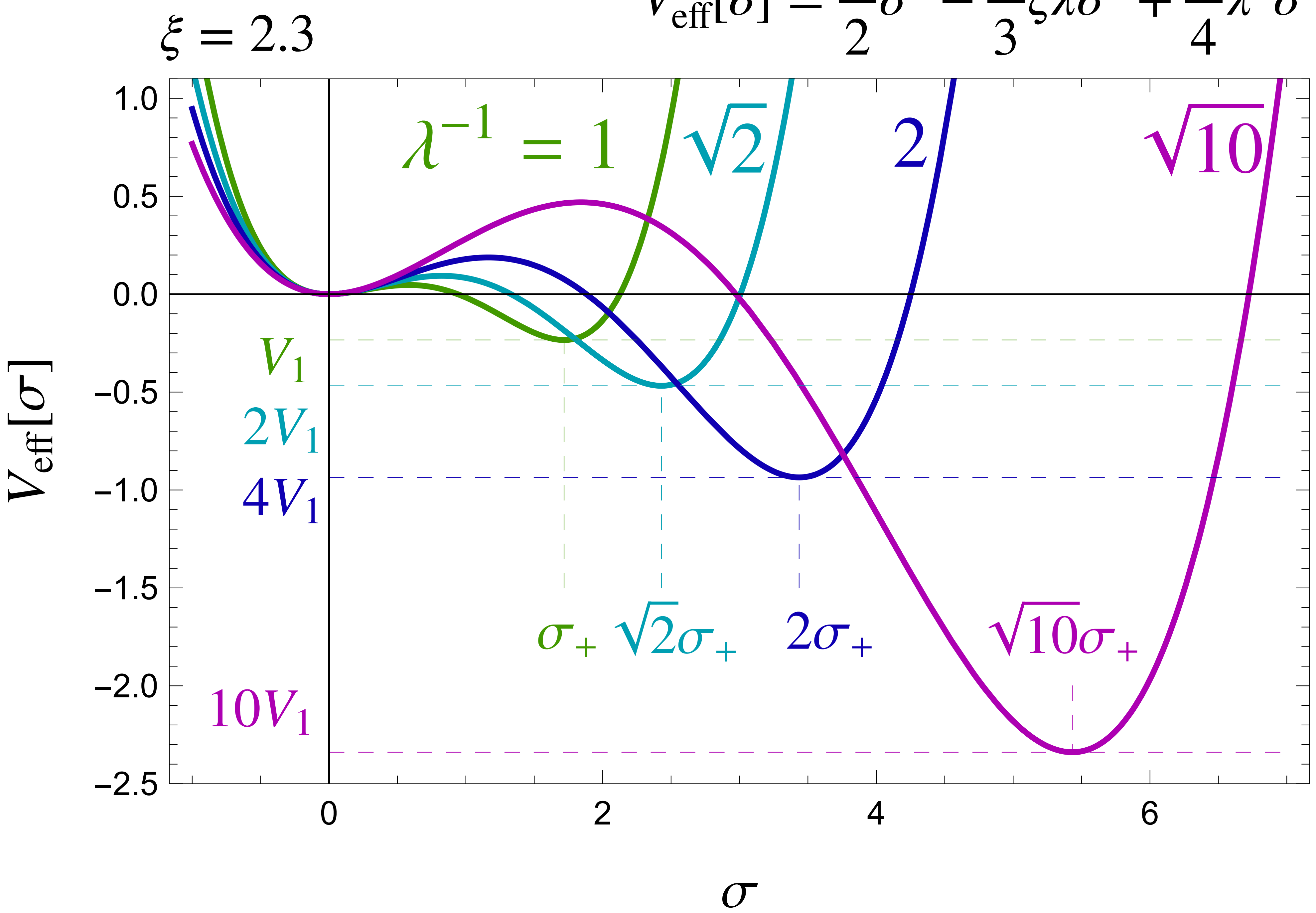
- Background dynamics



有効ポテンシャル

- 解の安定性

$$V_{\rm eff}[\sigma] = \frac{1}{2}\sigma^2 - \frac{1}{3}\xi\lambda\sigma^3 + \frac{1}{4}\lambda^2\sigma^4$$



目次

まとめ

- Chromo-natural inflationは一様等方なゲージ場を予言
- ただし重力波の過剰生成でinflationとしてうまくいかない

- 模型をSU(N)に拡張して背景ゲージ場の解を調べた
- SU(2)部分群を見つけることで一様等方解を構成できる
- 選ぶ部分群によってゲージ場の大きさが異なる新しい解

- 構成した解がアトラクターであることを数値的に確認
- それ以外の解は見つからなかった

- これから: SU(N)以外の群への拡張

  解の選ばれ方

  重力波などのゆらぎ 等...

参考文献

- Natural inflationの提案

"Natural inflation with pseudo-Nambu-Goldstone bosons”
Katherine Freese, Joshua A. Frieman, and Angela V. Olinto
Phys.Rev.Lett 65 (1990) 3233-3236 [INSPIRE]

- Natural inflationでの $f \gtrsim M_{\rm Pl}$ について

"On natural inflation”
Katherine Freese and William H. Kinney
Phys.Rev. D70 083512 (2004) [INSPIRE]

- Chromo natural inflationの提案

“Chromo-Natural Inflation: Natural inflation on a steep potential with classical non-Abelian gauge fields”
Peter Adshead and Mark Wyman
Phys.Rev.Lett 108 (2012) 261302 [INSPIRE]

- Chromo natural inflationのゆらぎ評価

“Perturbations in Chromo-Natural inflation”
Peter Adshead, Emil Martinec, and Mark Wyman
JHEP 09 (2013) 087 [INSPIRE]

運動方程式

- SU(N) 電磁場

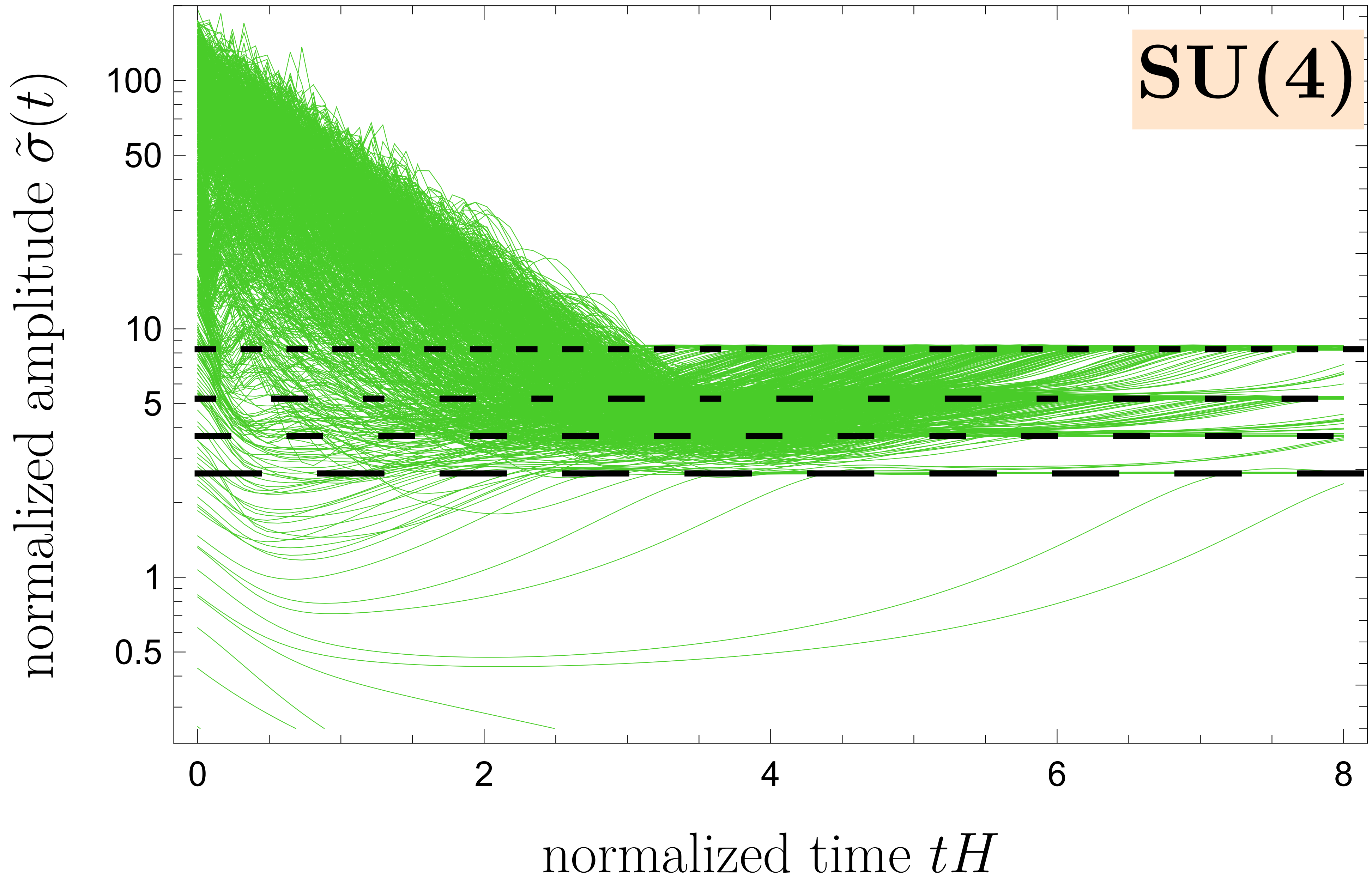
$$E_i^a = -F_{0i}^a = -\frac{aH^2}{g} M_i^a \equiv \frac{aH^2}{g} \mathscr{E}_i^a$$

$$B_i^a = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} F_{jk}^a = -\frac{a^2H^2}{2g} \epsilon_{ijk} f^{abc} M_j^b M_k^c \equiv \frac{a^2H^2}{g} \mathscr{B}_i^a$$

電磁場で表すと運動方程式は

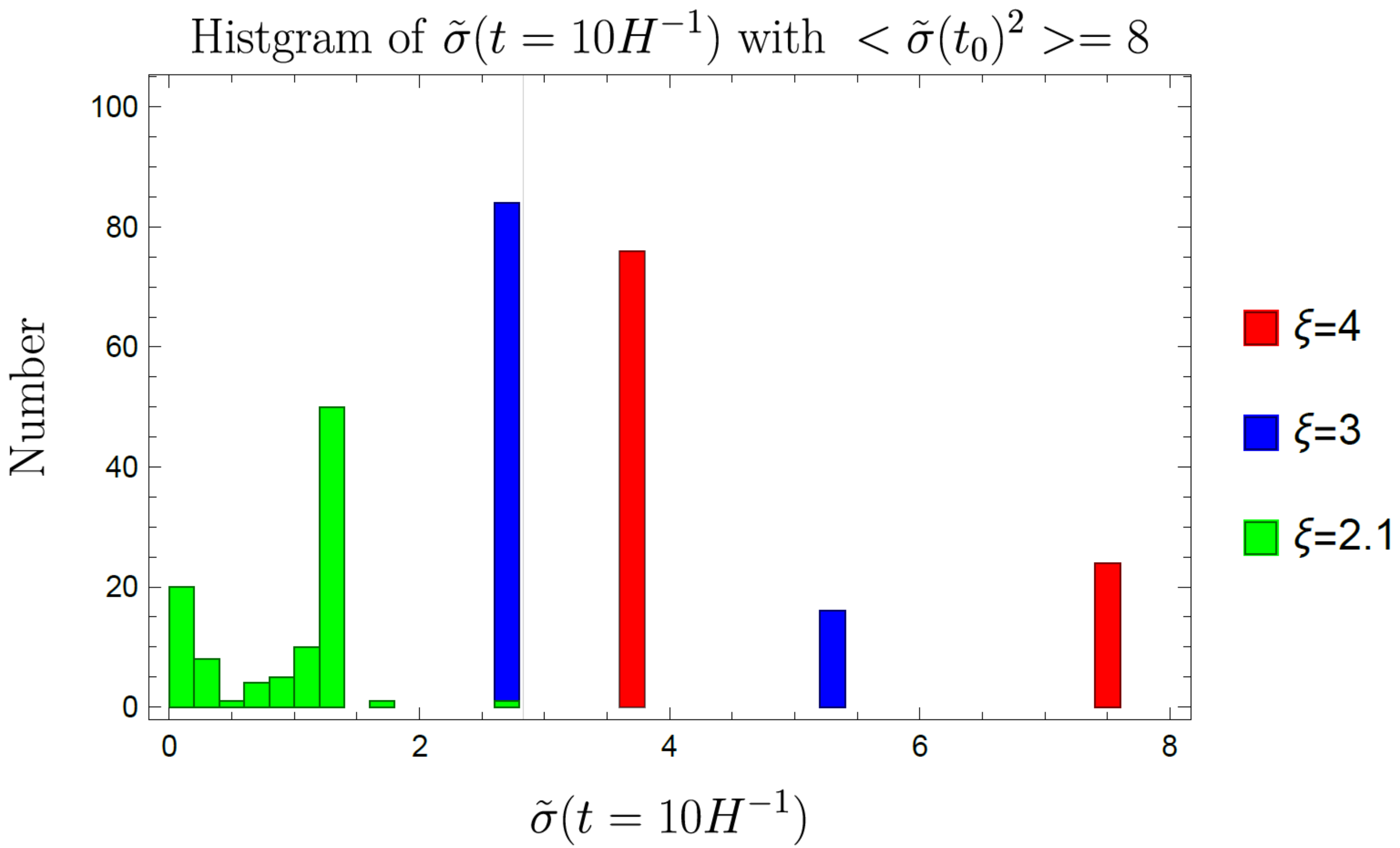
$$-2\mathscr{E}_i^a + \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} f^{abc} \mathscr{E}_j^b \mathscr{B}_k^c + \xi \mathscr{B}_i^a = 0.$$

- 他のattractor解の可能性

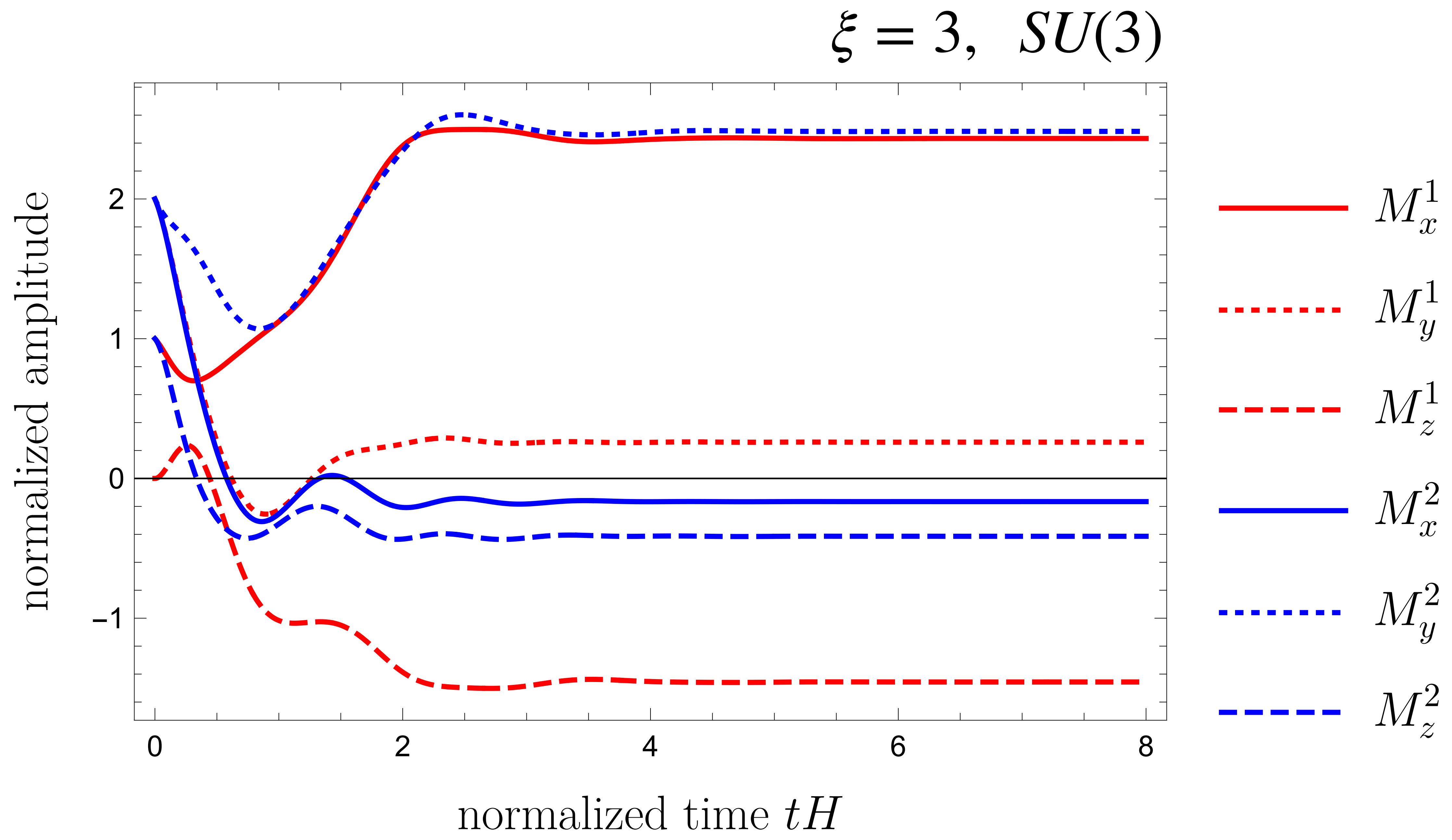


Back up

■ ξによる解の分岐の違い

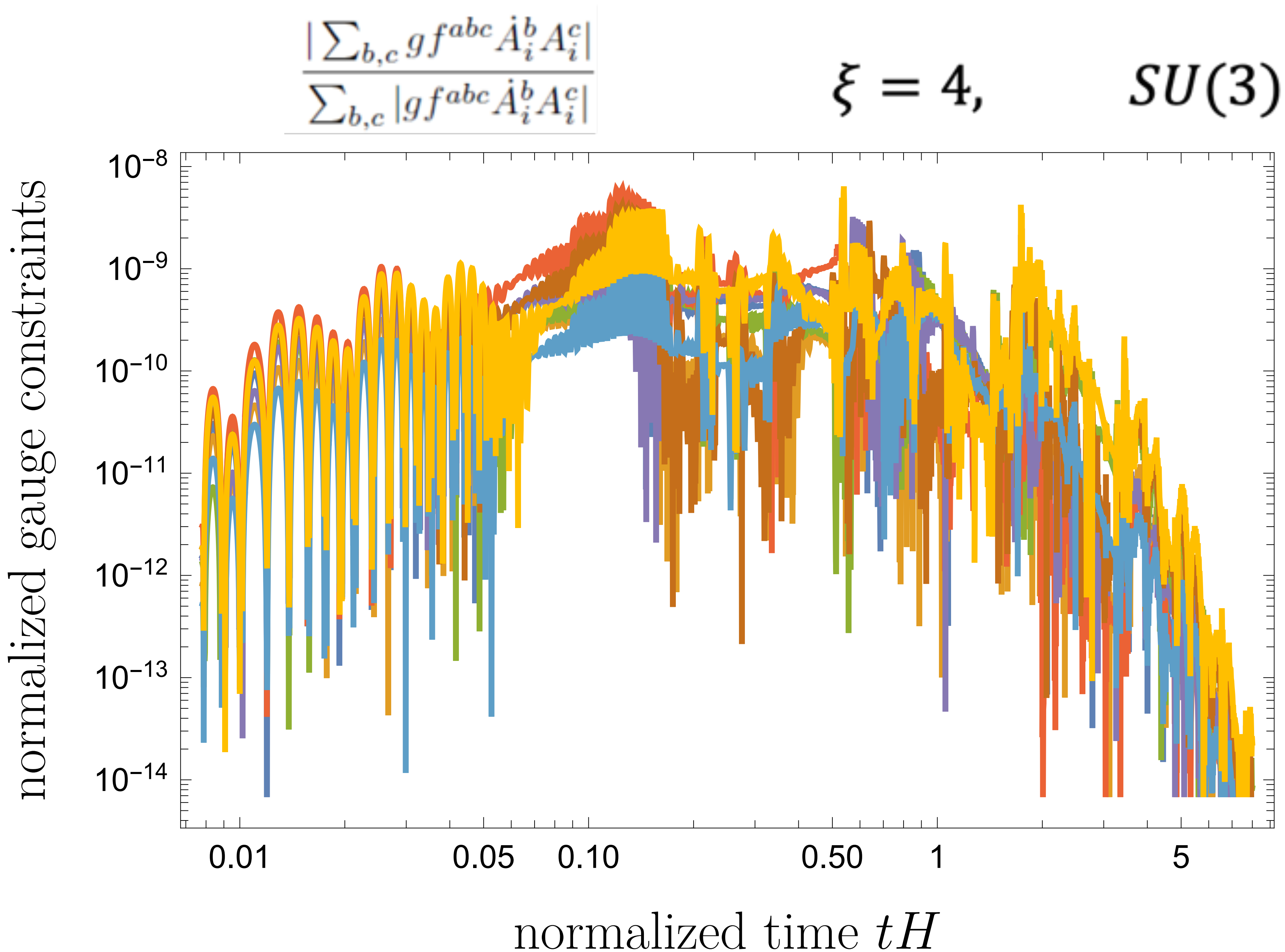


- M_i^aの時間発展の一例



Back up

- Gauge条件の確認



■ より厳密な安定性

有効ポテンシャルのHessian :

$$S_{ij}^{ab} = 2\delta_{ij}\delta^{ab} + \left(f^{eab}f^{ecd} - f^{ead}f^{ebc}\right)M_i^c M_j^d + f^{fac}f^{fbd}M_k^c M_k^d \delta_{ij} - 2\xi\epsilon_{ijk}f^{abc}M_c^k .$$

(i, a) でfield spaceの一方向と思うと S_{ij}^{ab} は $3 \times (N^2 - 1)$ 次元平方行列

固有値の符号を調べれば安定性がわかる

→ SU(3), SU(4)の範囲で見つけた解は全て安定であることを確認ずみ
つまり固有値が正とゼロ（ゲージ変換に対応）のみ