Generalized global symmetry and its application

日高義将

(KEK)

Outline

Generalized global symmetries

- 通常の対称性
- 高次対称性, 非可逆対称性

応用

- 自発的対称性の破れ
- QCD相図への応用

まとめ

最近の我々の仕事(axion electrodynamics)

⇒横倉さんのトーク

通常の対称性

例) $U(1)$ 対称性

$$U(1)\ \text{電荷}\quad Q = \int d^d x j^0 = \int_{M^d} j$$

時間に依存しない

$$\frac{d}{dt}Q = \int d^d x \partial_0 j^0 = -\int d^d x \nabla_i j^i = 0$$

ユニタリー演算子

$$U_g(M^d) = e^{i\alpha Q} \quad (g = e^{i\alpha})$$

$\phi(x)$: 荷電場

$$U_g(M^d)\phi(x)U_g^{-1}(M^d) = e^{iq\alpha}\phi(x) = V_g\phi(x)$$

通常の対称性

$U_g(M^d) = e^{i\alpha Q}$ $(g = e^{i\alpha})$ は群をなす

積: $U_g U_{g'} = U_{gg'}$

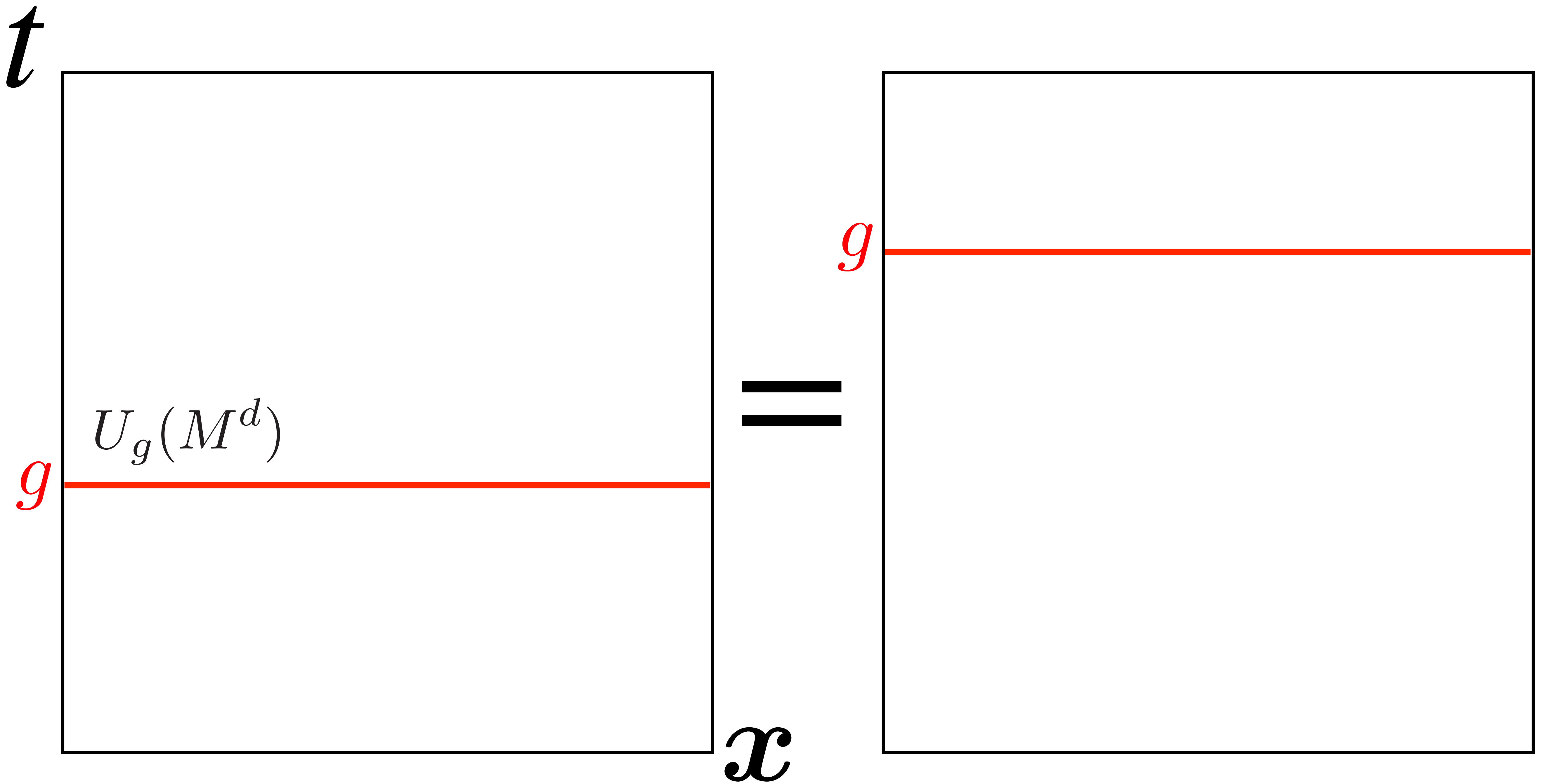
単位元: $1 := U_{e=1}$ $\quad U_g \times 1 = 1 \times U_g = U_g$

逆元: $U_g U_{g^{-1}} = U_{g^{-1}} U_g = 1$

結合則: $U_g(U_{g'} U_{g''}) = (U_g U_{g'}) U_{gg''}$

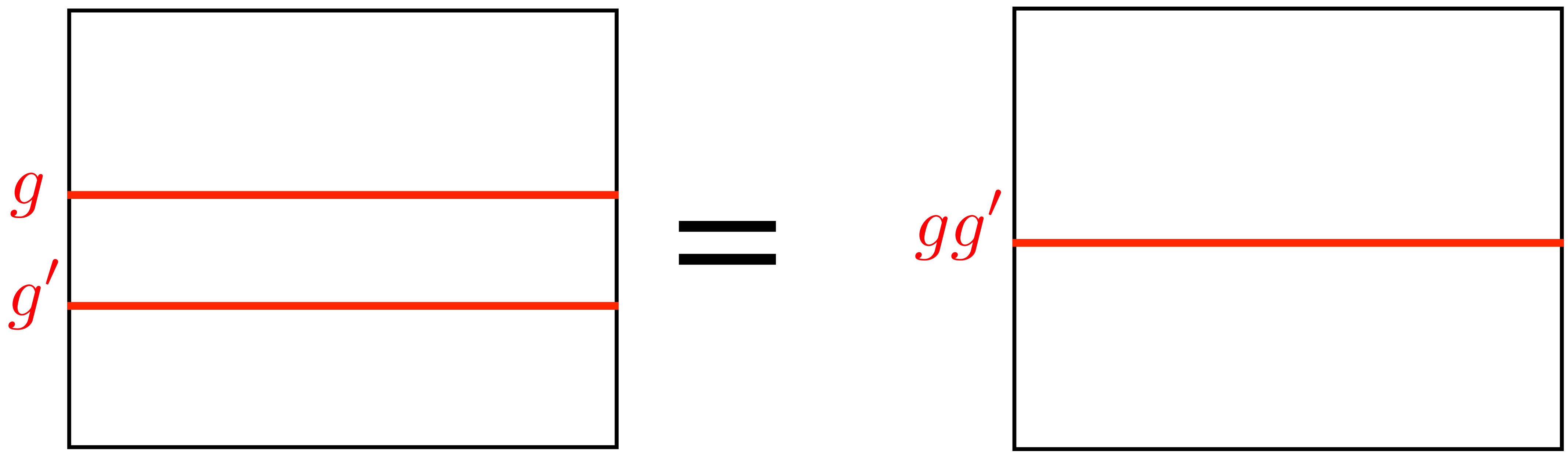
一般の対称性とその群G についても同様

グラフィカル表現

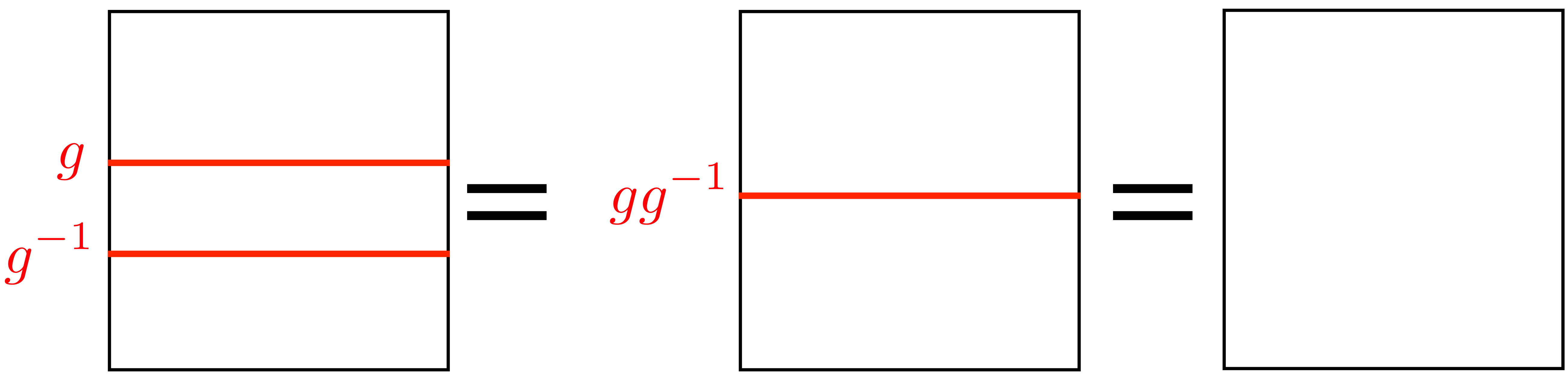


時間に依存しない

グラフィカル表現

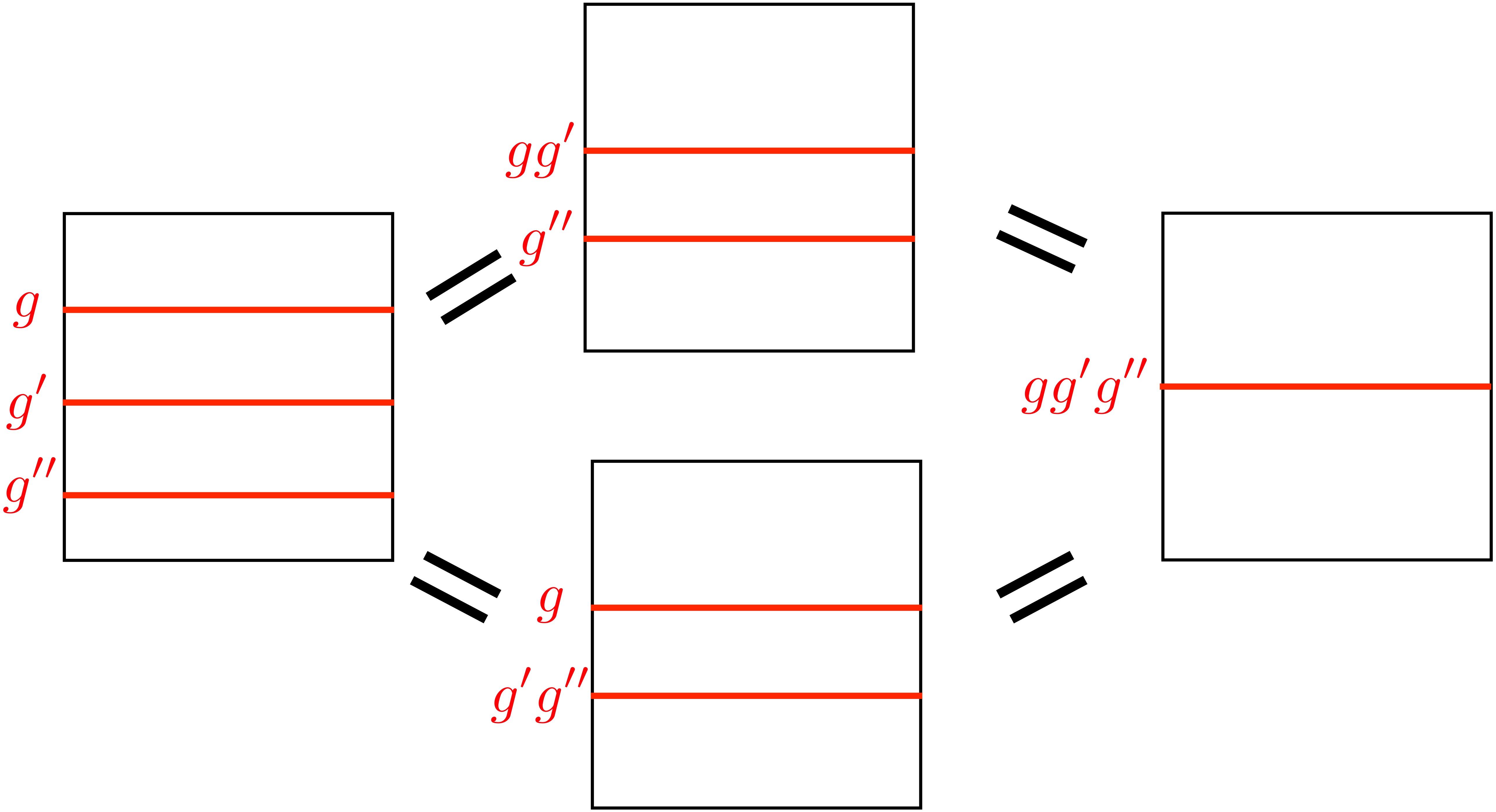


積： $U_g(M^d)U_{g'}(M^d) = U_{gg'}(M^d)$



逆元: $U_g(M^d)U_{g^{-1}}(M^d) = U_{gg^{-1}}(M^d) = 1$

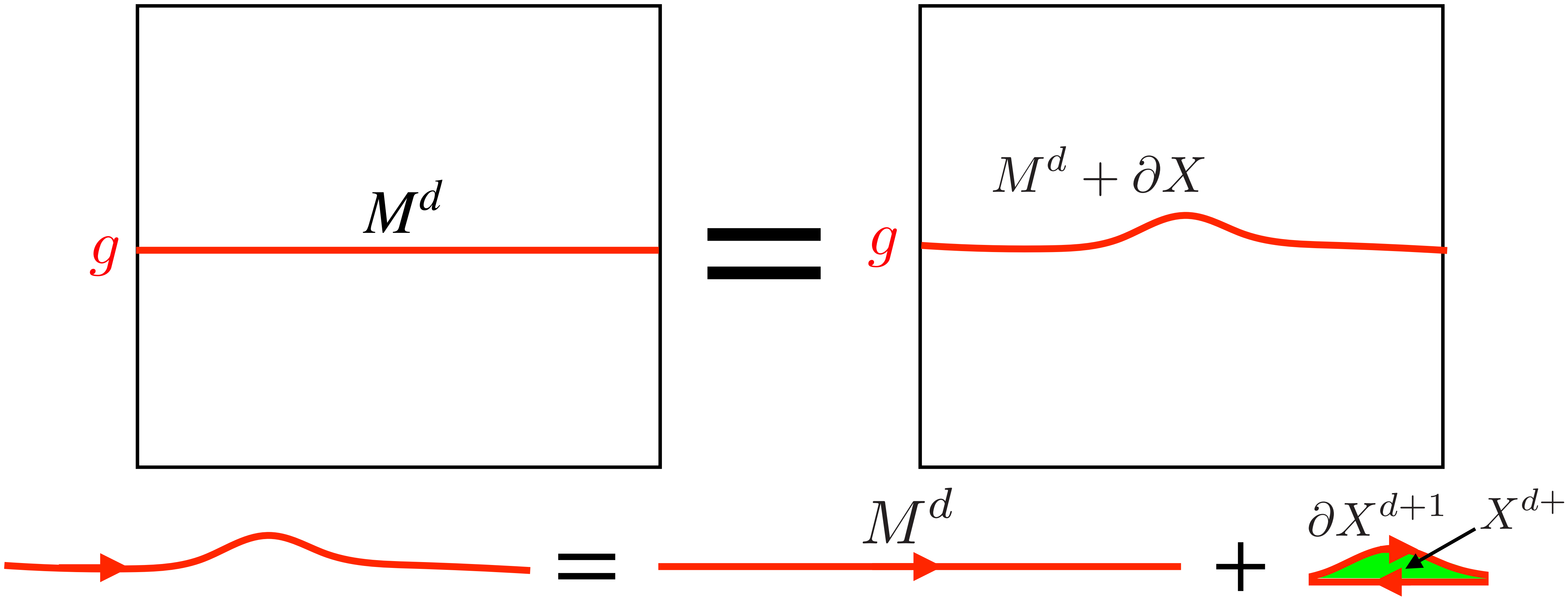
グラフィカル表現



結合則: $(U_g U_{g'})U_{g''} = U_g(U_{g'}U_{g''})$

グラフィカル表現

対称性演算子はトポロジカルである



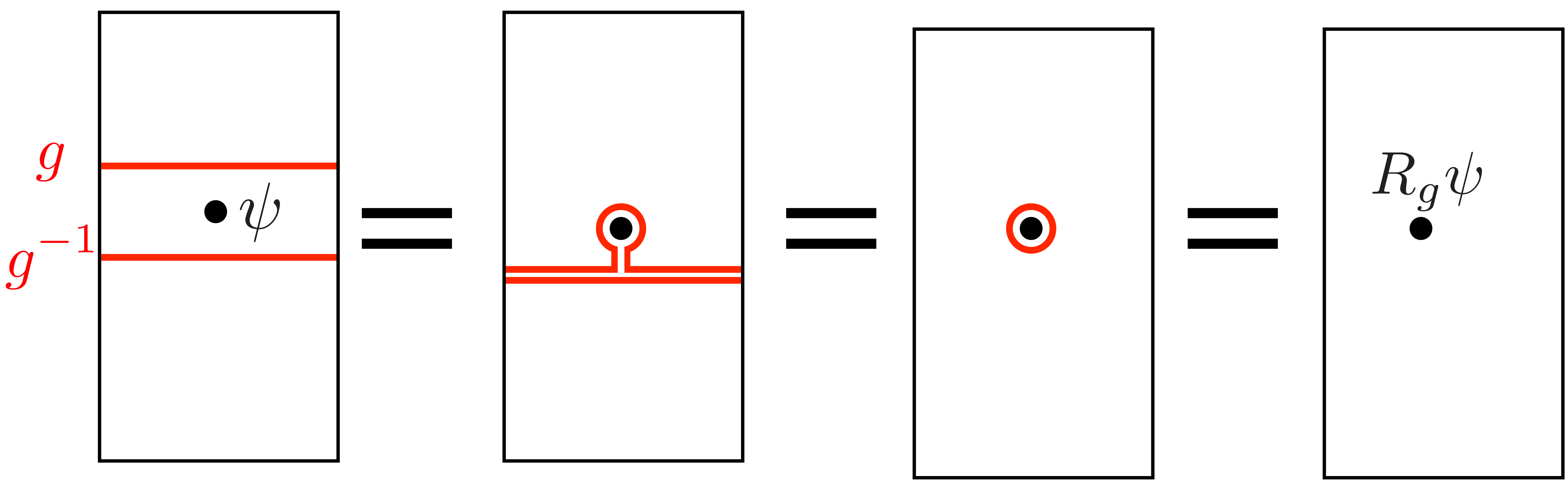
$$\int_{M^d+\partial X} j = \int_{M^d} j + \int_{\partial X} j = \int_{M^d} j + \int_{X} dj = \int_{M^d} j$$

グラフィカル表現

荷電物体

$$U_g\psi(x)U_{g^{-1}} = R_g\psi(x)$$

表現行列



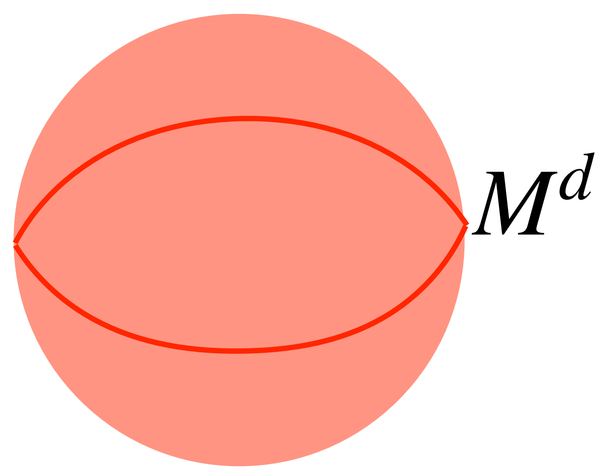
(d+1)次元QFTの対称性

対称性演算子

=群Gの元でラベルされた

d 次元トポロジカル物体

$U_g(M^d)$



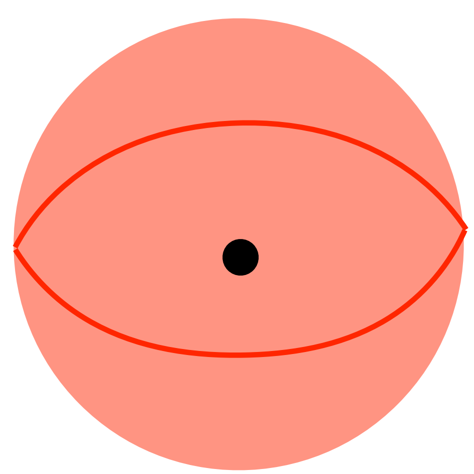
荷電物体

= Gの表現でラベル

された0-次元物体

$\bullet\phi_\rho(x)$

荷電物体のGの元での変換



$= R_g \bullet$

p-次対称性

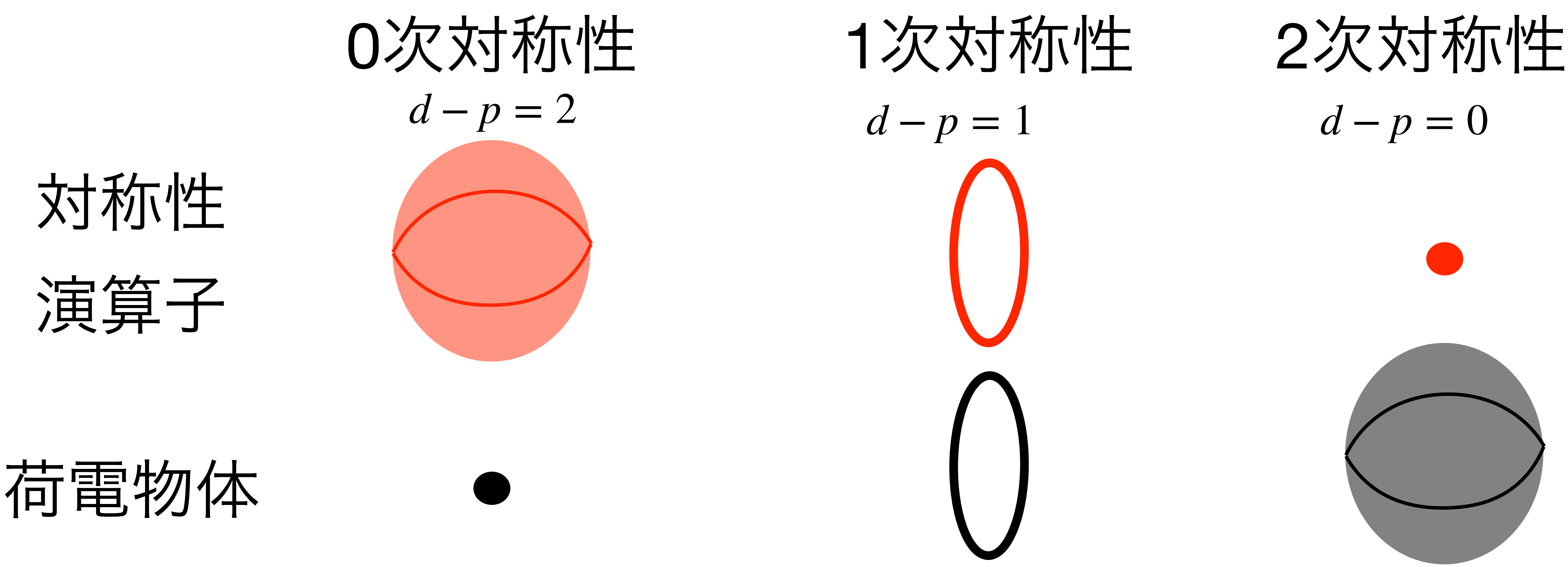
Gaiotto, Kapustin, Seiberg, Willett, JHEP 02 (2015) 172

荷電物体: 群Gの元で変換するp 次元物体

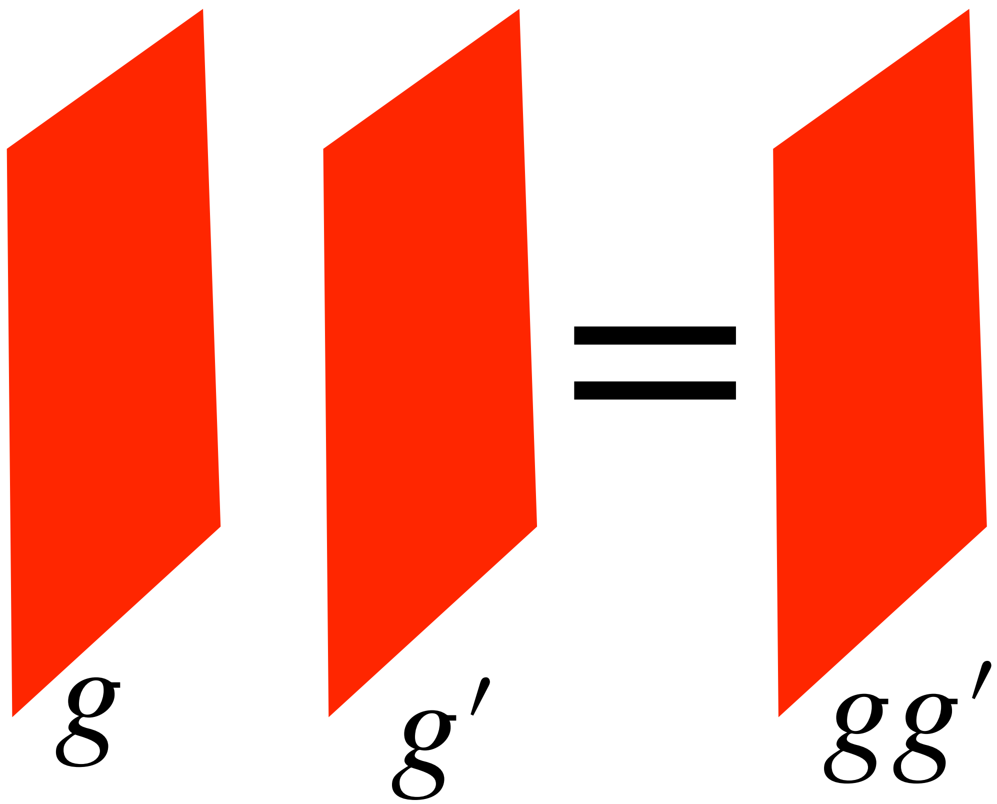
対称性演算子:

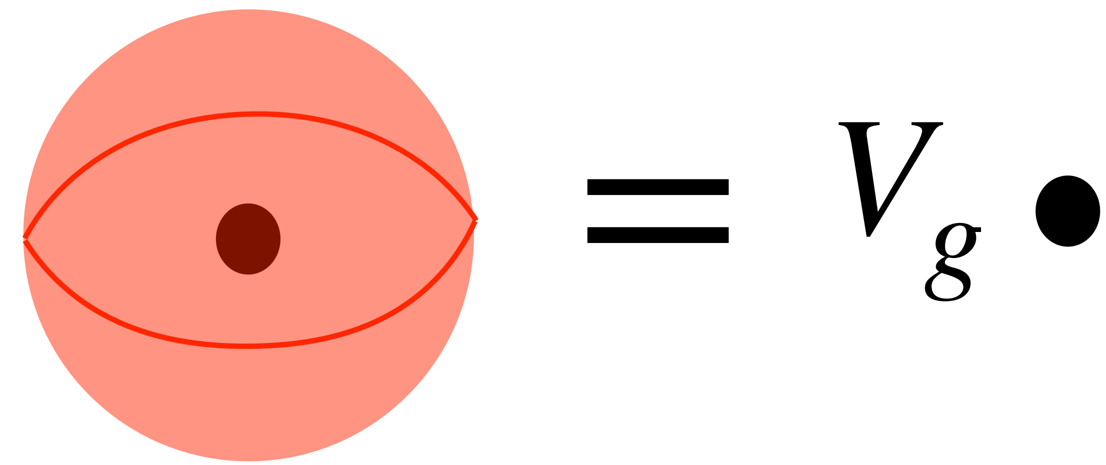
群Gの元でラベルされた$(d-p)$次元トポロジカル物体

例) 2+1 次元

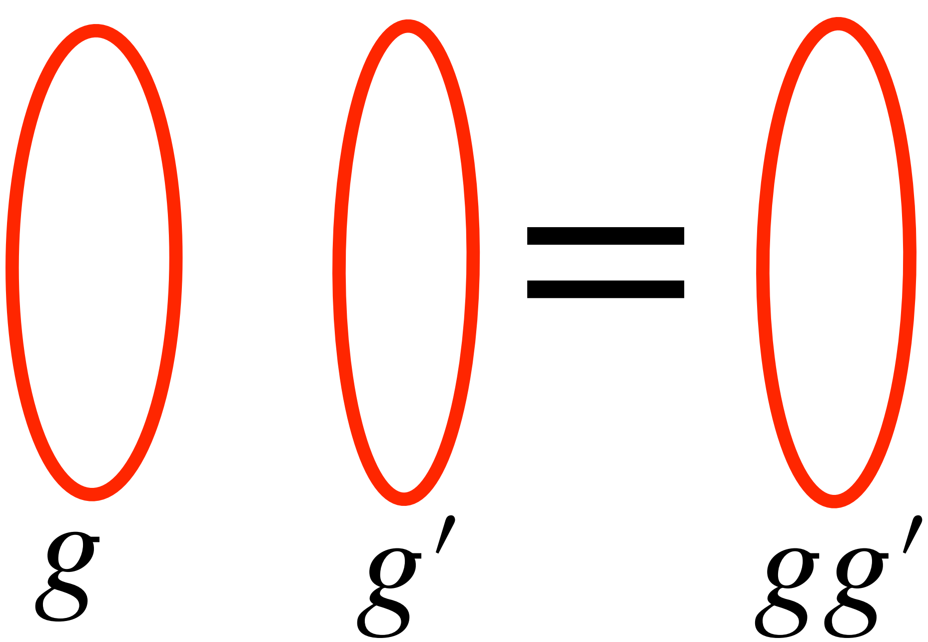


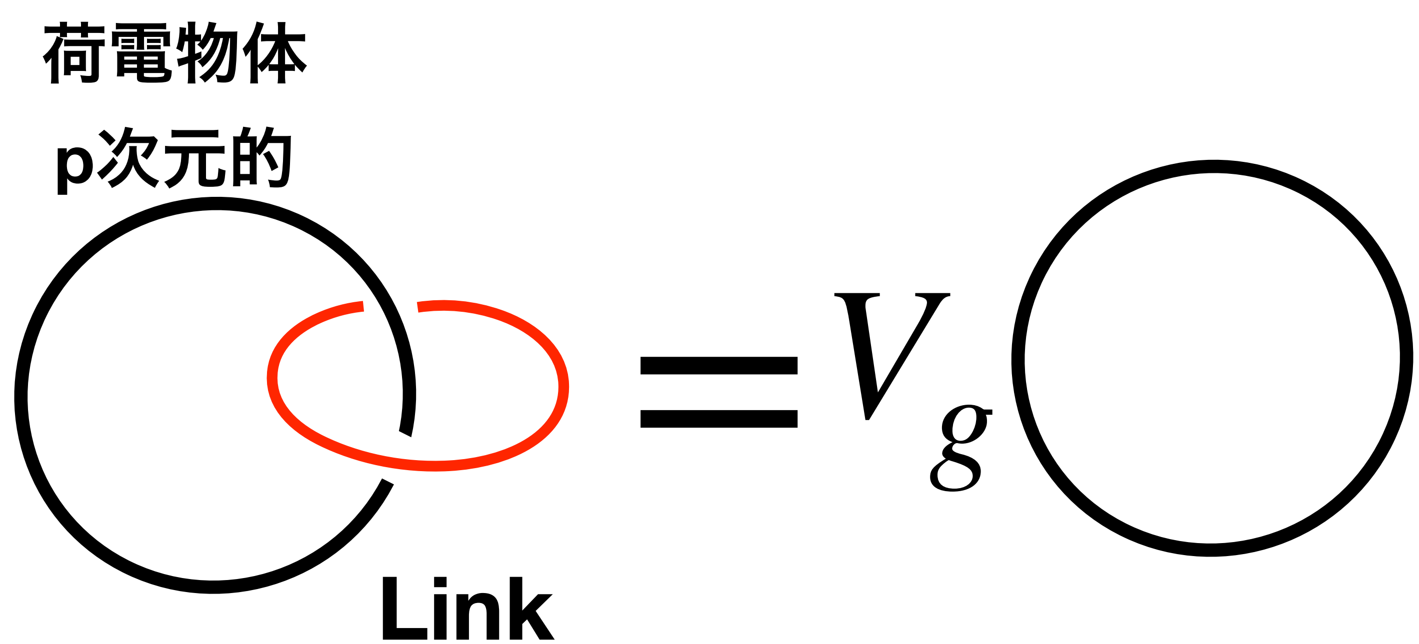
0-次対称性



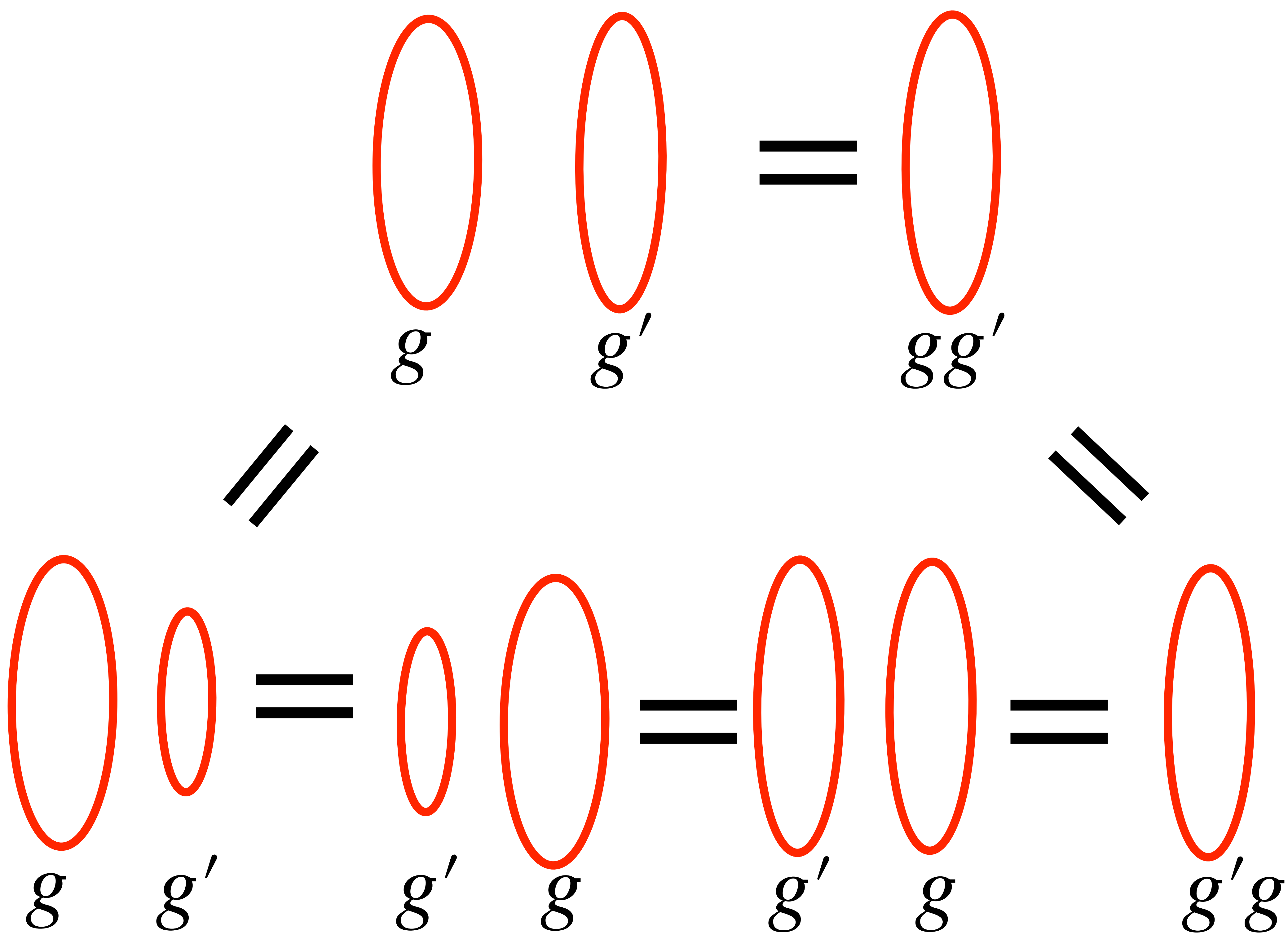


p-次対称性





p次対称性($p \geq 1$)の群は可換群



例) U(1) ゲージ理論

$$S = -\int d^4x \frac{1}{4e^2} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} = -\int \frac{1}{2e^2} f \wedge \star f$$

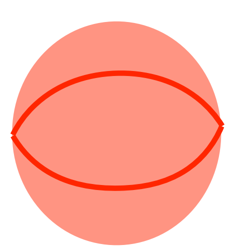
Maxwell 方程式

$$\partial_\mu f^{\mu\nu} = 0 \;\Rightarrow\; d \star f = 0$$

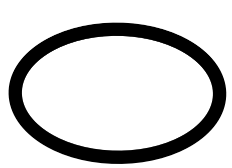
$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu f_{\nu\rho} = 0 \;\Rightarrow\; df = 0$$

電束と磁束の保存に対応する

$U(1)^{[1]}_E \times U(1)^{[1]}_M$ 対称性



$$U_E = e^{i\frac{\theta_E}{e^2}\int_S \star f} \qquad U_M = e^{i\frac{\theta_M}{2\pi}\int_S f}$$



$$W = e^{i\int_C a} \qquad H = e^{i\int_C \tilde{a}}$$

非可逆対称性(Non-invertible symmetry)
圏論的対称性(Categorical symmetry)

Bhardwaj, Tachikawa(2017), Chang, Lin, Shao, Wang, Yin (2018), Ji, Wen (2019), Komargodski, Ohmori, Roumpedakis, Seifnashri (2020), Nguyen, Tanizaki, Ünsal (2021), …

例) O(2)ゲージ理論

cf. Heidenreich, McNamara, Montero, Reece, Rudelius, Valenzuela, 2104.07036

$$O(2) \simeq U(1) \rtimes \mathbb{Z}_2$$

$$\underset{\text{回転}}{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}} \qquad \underset{\text{荷電共役}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

3種類の群の表現: 1, det, 2_q

対応するWilsonループ

$$W_{\det}(C) = \mathrm{tr}_{\det} e^{i\int_C a}$$

$$W_{2_q}(C) = e^{iq\int_C a} + e^{-iq\int_C a}$$

対応する対称性演算子

$$T_\theta(S) = e^{i\theta \frac{1}{e^2}\int_S \star f} + e^{-i\theta \frac{1}{e^2}\int_S \star f}$$

$$T_\pi(S) = e^{i\pi \frac{1}{e^2}\int_S \star f}$$

これらはトポロジカルだが非可逆

$$T_\theta(S) T_{\theta'}(S) = T_{\theta+\theta'}(S) + T_{\theta-\theta'}(S)$$

$$T_\theta(S) T_{-\theta}(S) \approx 1 + T_{2\theta}(S)$$

融合則: $T_a(S) T_b(S) = \sum_c N_{ab}{}^c T_c(S)$

cf. 積和の公式

$$2\cos(\theta)\cos(\theta') = \cos(\theta+\theta') + \cos(\theta-\theta')$$

TとWのリンク

$$T_\theta(S) = e^{i\theta\frac{1}{e^2}\int_S \star f} + e^{-i\theta\frac{1}{e^2}\int_S \star f}$$

$$W_{2_q}(C) = e^{iq\int_C a} + e^{-iq\int_C a}$$

$$e^{i\theta\frac{1}{e^2}\int_S \star f} e^{iq\int_C a} = e^{iq\theta} e^{iq\int_C a}$$

$$\Rightarrow \quad T_\theta(S) W_{2_q}(C) = (e^{iq\theta} + e^{-iq\theta}) W_{2_q}(C)$$

位相じゃない

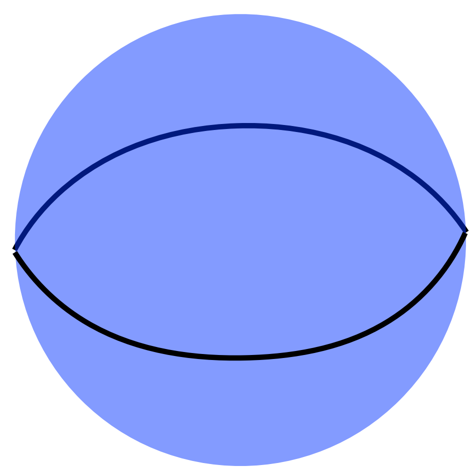
リンクすると:$T_\theta(S) W_{2_q}(C) = B_{2_q}(\theta) W_{2_q}(C)$

$$B_{2_q}(\theta) = 2\cos q\theta$$

$(d+1)$次元QFTの非可逆対称性:

対称性演算子

$T_a(M^{d-p})$



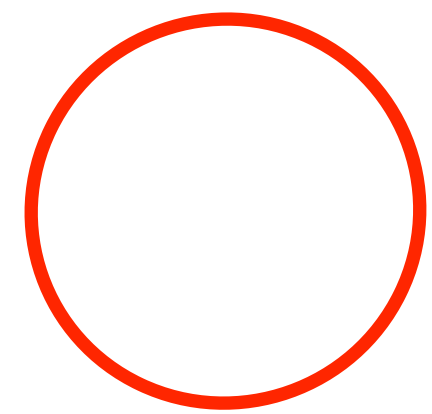
何かでラベルされた

$(d-p)$次元

トポロジカルな物体

荷電物体

$W_\rho(C^p)$



何かの表現ρでラベルされた

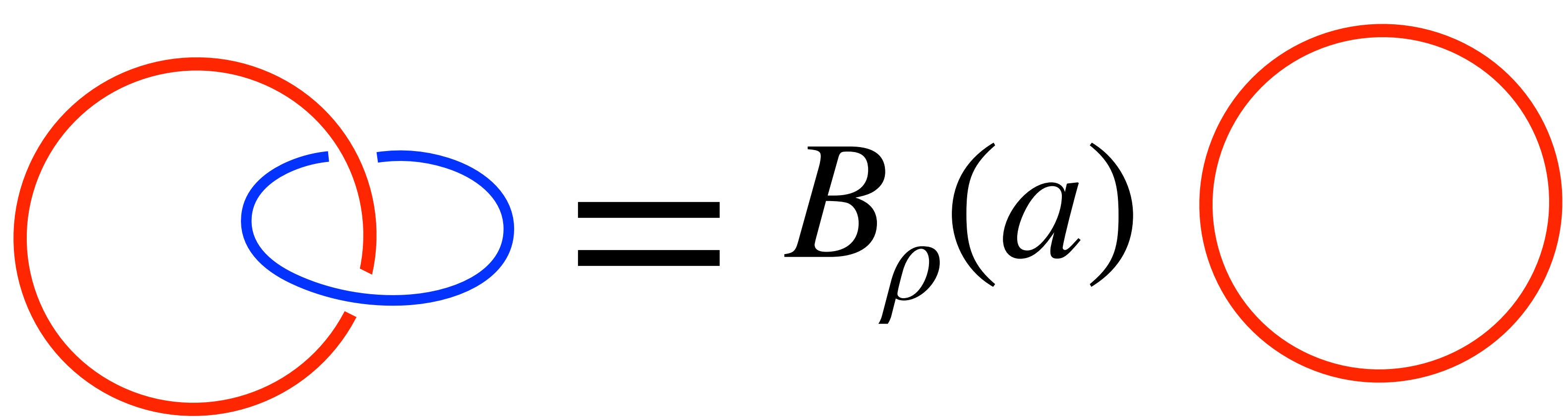
p 次元物体

$(d+1)$次元QFTの非可逆対称性:

融合則 : $T_a(M)T_b(M) = \sum_c N_{ab}{}^c T_c(M)$

結合則: $T_a(M)(T_b(M)T_c(M)) = (T_a(M)T_b(M))T_c(M)$

リンク: $T_a(M)W_\rho(C) = B_\rho(a)W_\rho(C)$



応用

対称性の自発的破れ (SSB)

- 光子は南部-Goldstoneボソン
- 離散高次対称性の自発的破れはトポロジカル秩序

量子異常とトポロジカル相

- アノマリーマッチングによる相の制限

例:$\theta = \pi$における$SU(2)$ Yang-Mills 理論は,

1次対称性と時間反転対称性の間に't Hooft anomaly

基底状態は非自明

対称性による相の分類

Nambu-Goldstone ボソン

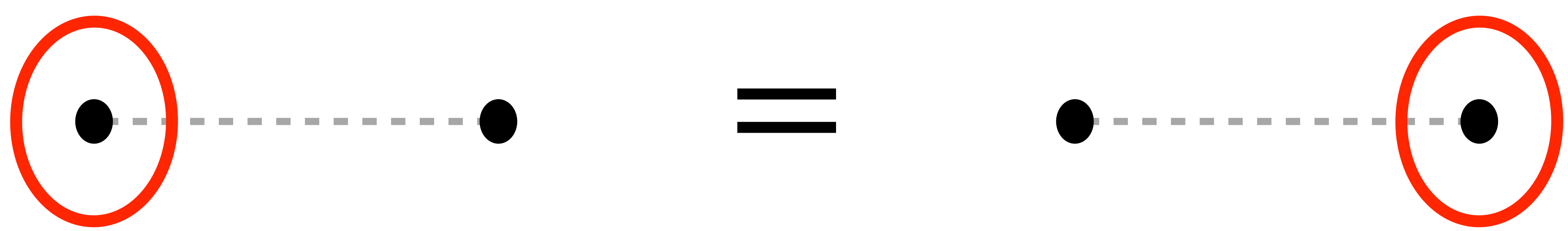
自発的対称性の破れ

0次対称性

$$\lim_{x\to\infty}\langle\phi^\dagger(x)\phi(0)\rangle \simeq \langle\phi^\dagger(x)\rangle\langle\phi(0)\rangle \neq 0$$

非対角長距離秩序 

２点は線の境界



$$\langle e^{i\theta}\phi^\dagger(x)\phi(y)\rangle = \langle\phi(x)e^{i\theta}\phi(y)\rangle$$

離れた2点で位相が相関

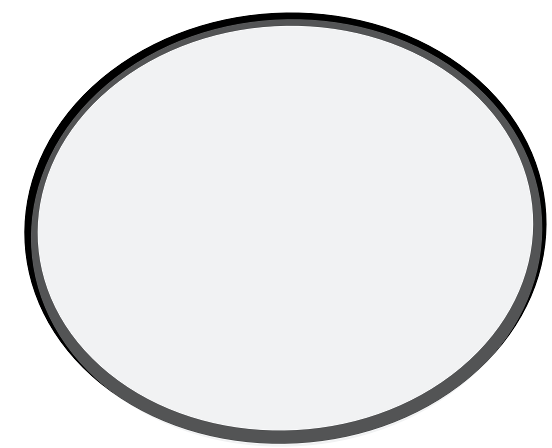
秩序変数

0次対称性の破れ

$$\lim_{x\to\infty}\langle\phi^\dagger(x)\phi(0)\rangle \neq 0$$

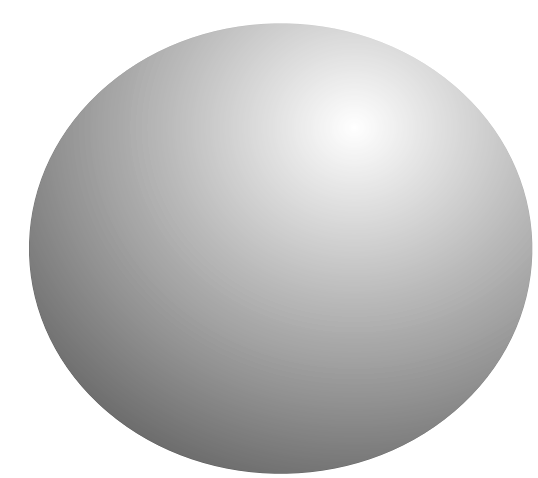
1次対称性の破れ

$$\lim_{C\to\infty}\langle W(C)\rangle \neq 0$$



p次対称性の破れ

$$\lim_{M^p\to\infty}\langle W(M^p)\rangle \neq 0$$



南部-Goldstoneの定理の
p次対称性バージョン

Gaiotto, Kapustin, Seiberg, Willett ('14), Lake ('18), Hofman, Iqbal ('18)

連続的p次対称性が自発的に
破れるとギャップレスモード(NGモード)が現れる

相対論的な場合は，NGモードの数は,

$$N_{\mathrm{NG}} = \sum_A {}_{d-1}C_{p_A}$$

例) U(1)ゲージ理論

$$\lim_{C\to\infty}\langle e^{i\int_C a}\rangle \neq 0 \quad U(1)^{[1]}_E$$ は自発的に破れている

光子はNGボソン

$$N_{\mathrm{NG}} = \sum_A {}_{d-1}C_{p_A} = {}_2C_1 = 2$$

$$S = -\int \frac{1}{2e^2} f \wedge \star f$$

は低エネルギー有効ラグランジアン

($f = da$はMaurer-Cartan formの高次対称性バージョン)

Ex) $SU(N)$ ゲージ理論

$$S = -\int d^4x \frac{1}{2g^2} \mathrm{tr} f \wedge \star f \qquad f = da - ia \wedge a$$

は $\mathbb{Z}_N$ 1次対称性を持つ

秩序演算子

$$\langle W \rangle = \langle \mathrm{tr} e^{i \int_C a} \rangle = \begin{cases} \text{面積則 (破れてない)} \\ \text{周長則 (破れている)} \end{cases}$$

$\mathbb{Z}_N$ は離散対称性なので,

$\mathbb{Z}_N$が自発的に破れてもNGモードはでない

$SU(N)$ ゲージ理論にクーロン相がない事と無矛盾

非相対論的な場合

0次対称性の対称性の破れとNGモードの関係

Watanabe, Murayama ('12), YH ('12)

$$N_{\rm NG} = N_{\rm BS} - \frac{1}{2}\mathrm{rank}\,\langle [\mathrm{i}Q_a, Q_b]\rangle$$

高次対称性の破れに拡張可能

Hidaka, Hirono, Yokokura ('20)

$$N_{\rm NG} = \sum_A {}_{d-1}C_{p_A} - \frac{1}{2}\mathrm{rank}\,\langle [\mathrm{i}Q_a, Q_b]\rangle$$

物質相の分類

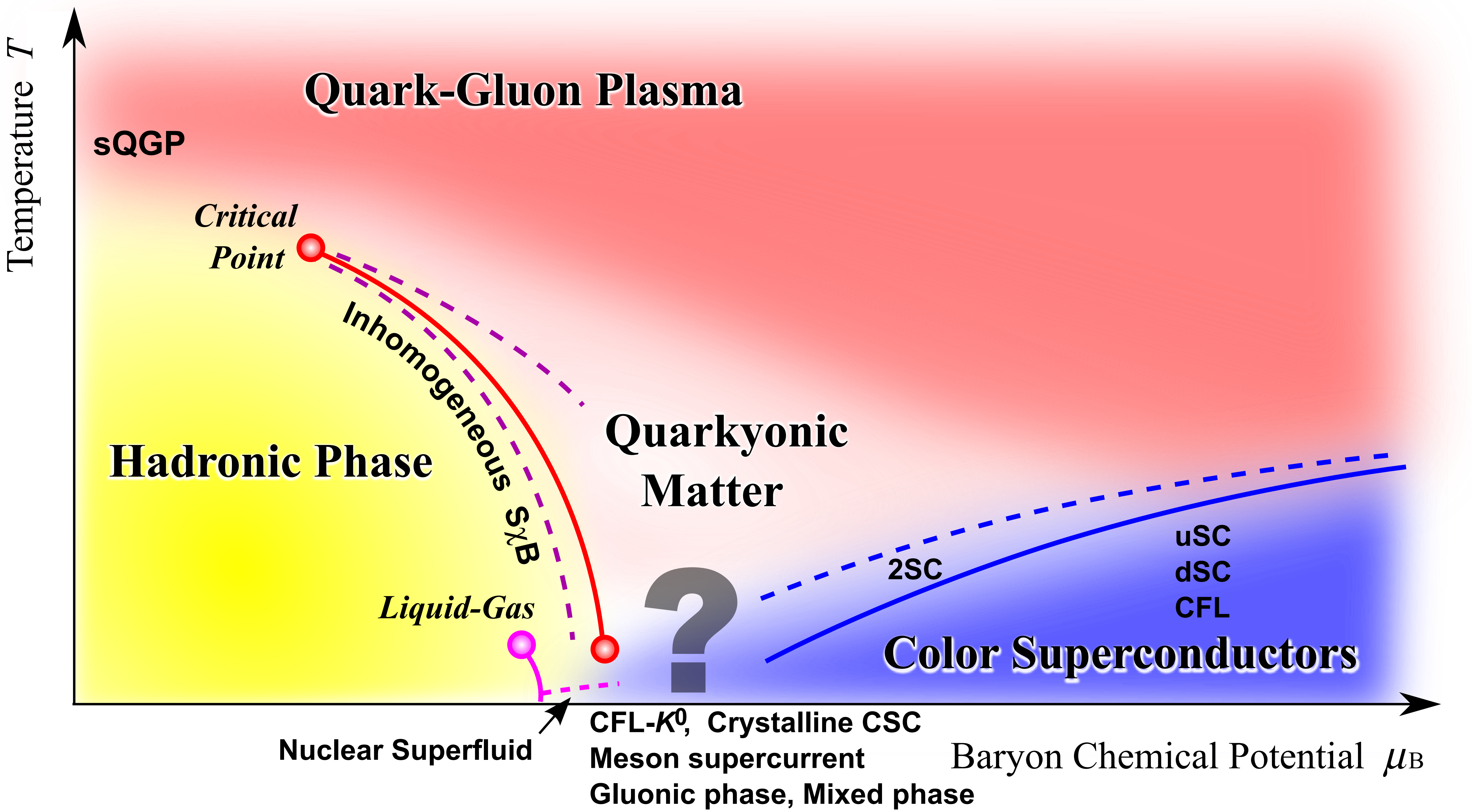
(対称性)が異なっている相の間には

相転移が存在

QCDへの応用を考えてみる

QCD相図(予想)

Fukushima, Hatsuda, Rept. Prog. Phys. 74 (2011) 014001



高密度相はよくわかっていない

何がわかっているか？

簡単のため3フレーバQCDについて

超高密度

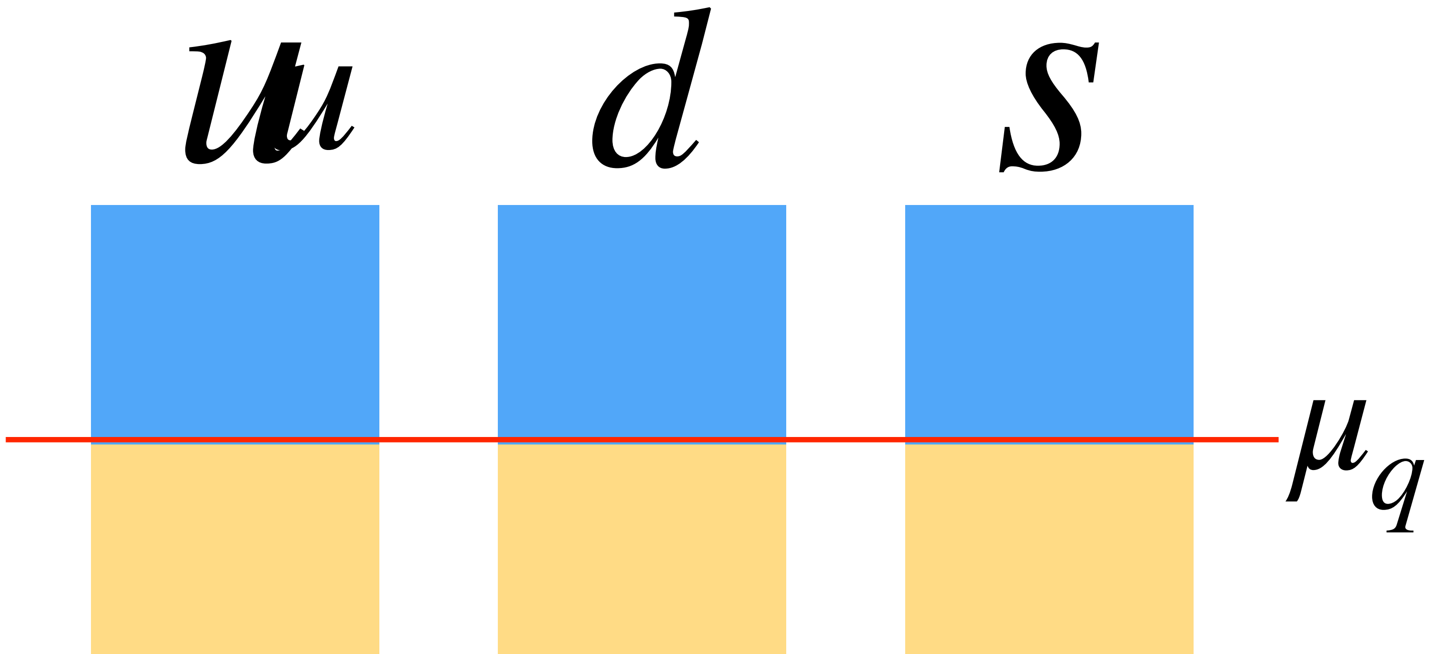
フレーバとカラーがロックした

カラー超伝導相(CFL相)

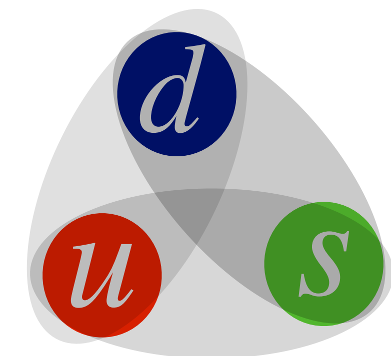
低密度

原子核超流動相

CFL相



クォークペア



$$(\Phi_L)^i_a = \epsilon^{ijk}\epsilon_{abc}\langle (q_L)^b_j (Cq_L)^c_k \rangle \quad (\Phi_R)^i_a = \epsilon^{ijk}\epsilon_{abc}\langle (q_R)^b_j (Cq_R)^c_k \rangle$$

$$\Phi := \Phi_L = -\Phi_R = \begin{pmatrix} \Delta_{\mathrm{CFL}} & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_{\mathrm{CFL}} & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_{\mathrm{CFL}} \end{pmatrix}$$

カイラル対称性も破れている

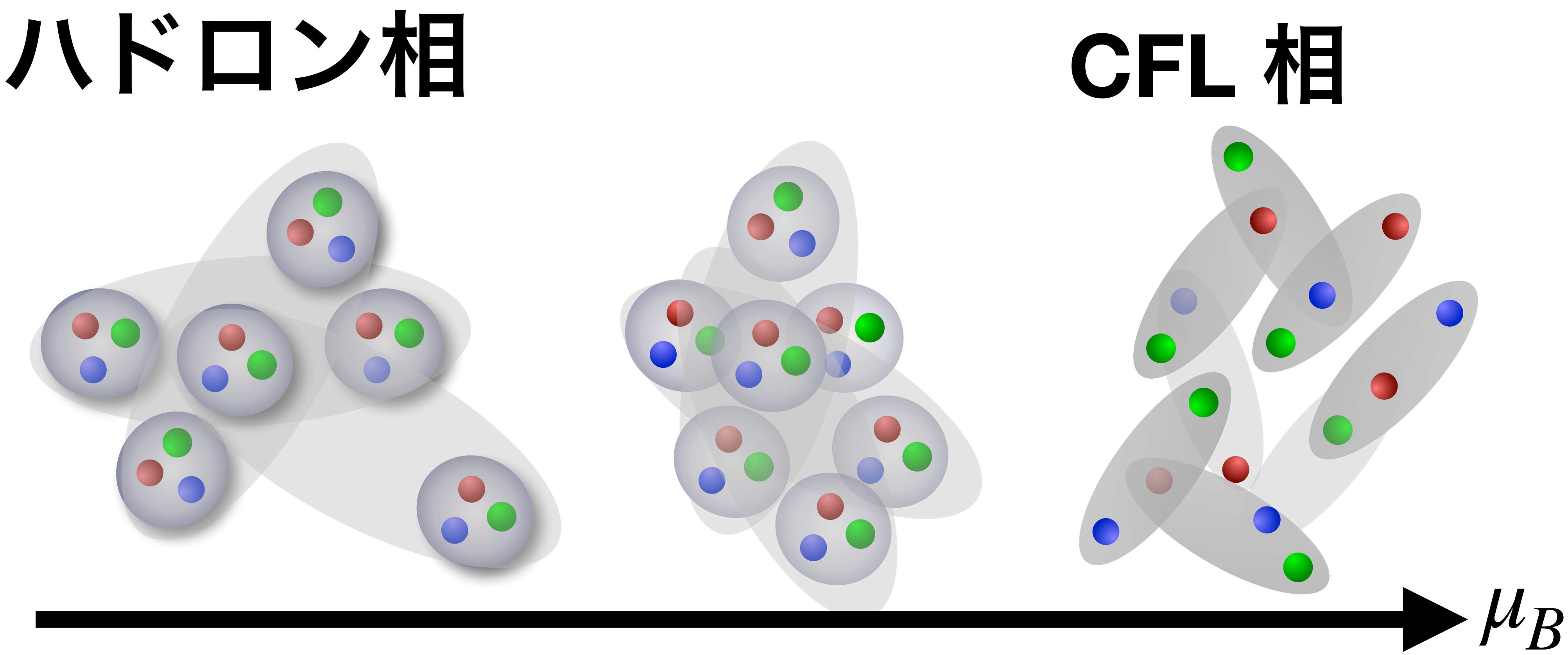
大域対称性の破れのパターン

$$SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_B \rightarrow SU(3)_V$$

CFL相は何が特徴づけるか？

Fradkin-Shenker定理:

閉じ込め相とHiggs相は同じ相



クォークハドロン連続性(仮説)

Schafer and Wilczek, PRL 82 , 3956(1999)   Hatsuda, Tachibana, Yamamoto, Baym, PRL 97 122001 (2006)

CFL = $\mathbb{Z}_3$ -2 次対称性が創発

Hirono, Tanizaki, Phys. Rev. Lett. 122, 212001 (2019)

cf. Cherman，Sen, Yaffe, Phys. Rev. D 100, 034015 (2019)

対応して，非可換渦が存在する

U(1) 渦 $\Phi := \Delta_{\mathrm{CFL}} \begin{pmatrix} e^{i\theta} f(r) & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} f(r) & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\theta} f(r) \end{pmatrix}$

非可換渦 Balachandran, Digal，Matsuura, PRD73, 074009 (2006)

$$\Phi := \Delta_{\mathrm{CFL}} \begin{pmatrix} e^{i\theta} f(r) & 0 & 0 \\ 0 & g(r) & 0 \\ 0 & 0 & g(r) \end{pmatrix} = \Delta_{\mathrm{CFL}} e^{i\frac{\theta}{3}} \begin{pmatrix} e^{i\frac{2\theta}{3}} f(r) & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\theta}{3}} g(r) & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\frac{\theta}{3}} g(r) \end{pmatrix}$$

ハドロン相にこの対称性がなければ相転移があるはず

cf. Boojumシナリオ: Chatterjee, Nitta, Yasui

Cherman, Jacobson, Sen, Yaffe, Phys. Rev. D 102, 105021 (2020)

cf. 谷崎-広野の議論: $\mathbb{Z}_3$ -2 次対称性は破れていない

のでトポロジカル秩序ではない

2フレーバQCDの場合

ハドロン相:$^3P_2$超流動

高密度相: 1 重項 (ud) +$^3P_2$ (dd)のダイクウォーク凝縮相

Fujimoto, Fukushima, Weise Phys. Rev. D 101 (2020) 094009

量子渦として “**Alice string**”が存在

Fujimoto, Nitta, Phys. Rev.D 103 (2021), 114003; 054002; 2103.15185

⇒非可逆対称性が創発(?)

ハドロン相にこの対称性がなければ相転移があるはず

まとめ

対称性: 何かでラベルされたトポロジカルな物体

通常の対称性と同様に便利

対称性の破れ, ’t Hooftアノマリー, 相の分類

通常の対称性と同じように便利

対称性の破れ，アノマリー，相の分類など

対称性演算のなす代数= 高次群

⇒横倉さんのトーク

おまけ

トポロジカル秩序

トポロジカル秩序

トポロジカル秩序の特徴づけ

- 基底状態の縮退
- エニオン統計
- 長距離の量子相関(エンタングルメント)
- 局所的な摂動に対する安定性

低エネルギーの有効理論

= BF理論のようなトポロジカルな場の理論

$$S = \frac{k}{2\pi}\int b \wedge da$$

典型的なトポロジカル秩序は高次対称性の

自発的破れとして解釈可能

例: 分数量子ホール系

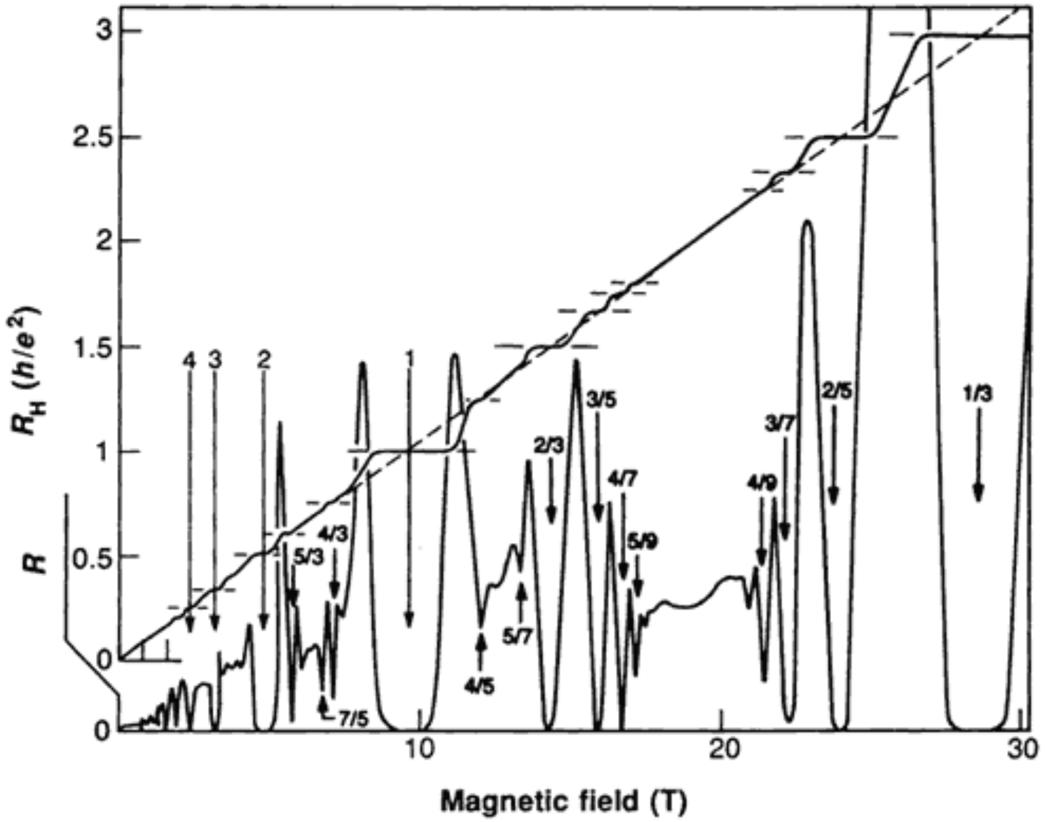


Figure from Nobelprize.org

$$S_{\mathrm{eff}} = -\frac{k}{4\pi}\int a \wedge da + \frac{1}{2\pi}\int A \wedge da$$

a: ダイナミカルゲージ場

A: 外場としてのU(1)ゲージ場

k: 整数

運動方程式: $$-\frac{k}{2\pi}da + \frac{dA}{2\pi} = 0$$

カレント: $$J = \frac{\delta S_{\mathrm{eff}}}{\delta A} = \frac{1}{2\pi}da = \frac{1}{k}\frac{dA}{2\pi}$$ 分数ホール効果

例: 分数ホール効果

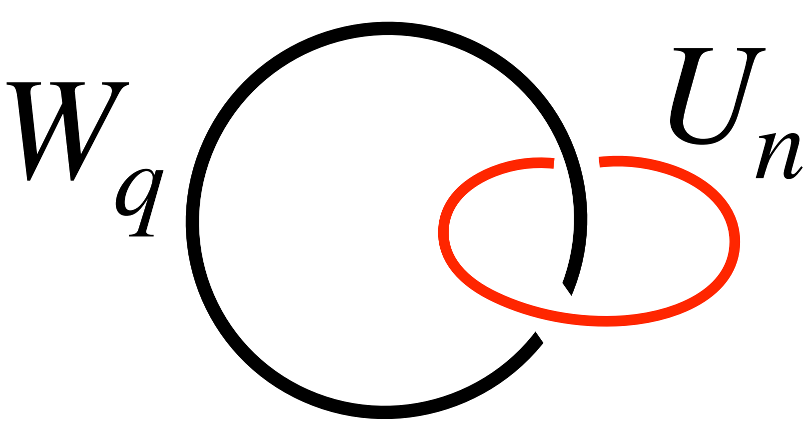
有効理論: Cherns-Simons

$$S = -\frac{k}{4\pi}\int a \wedge da$$

$\mathbb{Z}_k$**1次対称性** $$a \to a + \frac{\lambda}{k} \qquad d\lambda = 0 \quad \int \lambda \in 2\pi\mathbb{Z}$$

荷電物体: $$W_q = e^{iq\int a}$$

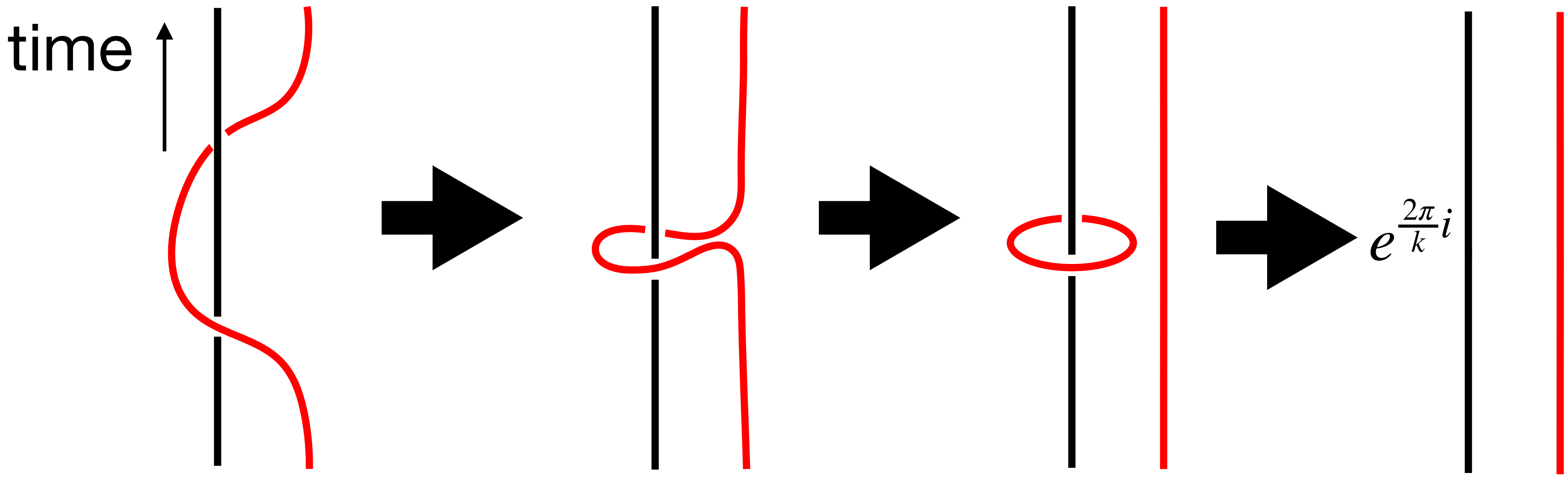
対称性演算子: $$U_n = e^{in\int a}$$



$$= e^{2\pi i \frac{nq}{k}}$$

例: 分数量子ホール系

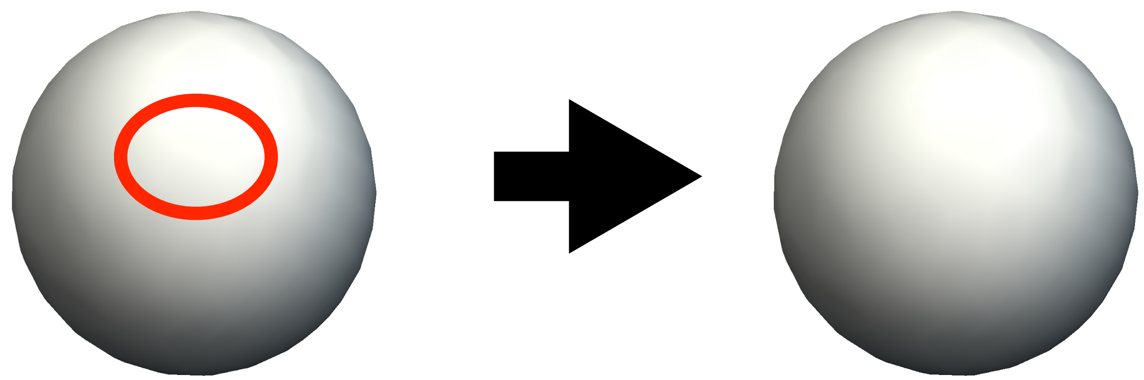
エニオン統計



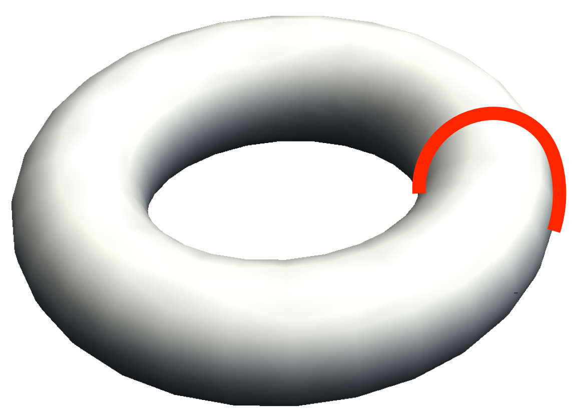
$e^{\frac{\pi}{k}i}$ が入れ替えたときの位相を表す

例: 分数量子ホール系

基底状態の縮退

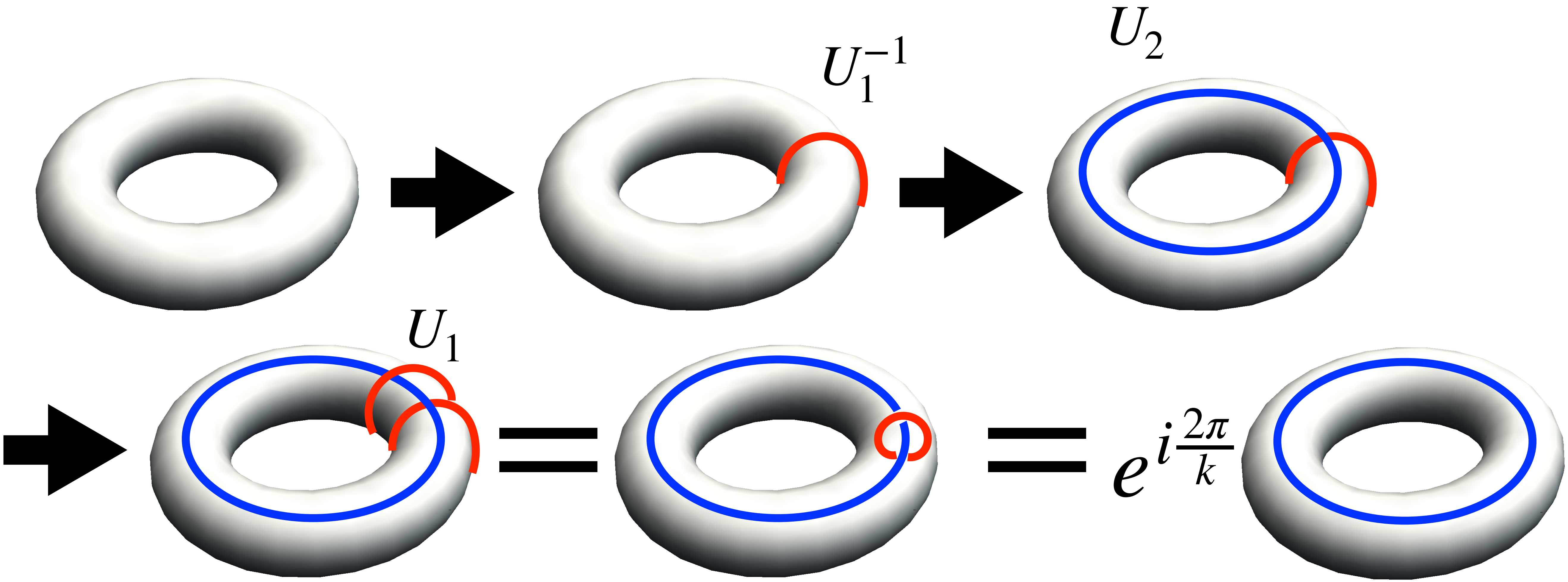


自明



非自明になりうる

例: 分数量子ホール系



$$U_1 U_2 U_1^{-1} |\Omega\rangle = e^{i\frac{2\pi}{k}} U_2 |\Omega\rangle$$

$$U_1 U_2 U_1^{-1} |\Omega\rangle = e^{i\frac{2\pi}{k}} U_2 |\Omega\rangle$$

は基底状態の縮退を意味する

$U_1^{-1}|\Omega\rangle = e^{i\theta}|\Omega\rangle$**とすると,**

$$\langle\Omega|U_2|\Omega\rangle = \langle\Omega|U_1 U_2 U_1^{-1}|\Omega\rangle = e^{i\frac{2\pi}{k}}\langle\Omega|U_2|\Omega\rangle$$

$$\Rightarrow \langle\Omega|U_2|\Omega\rangle = 0$$

$|\Omega\rangle$ **と** $U_2|\Omega\rangle$**は異なる状態**

(基底状態は k^g **重縮退)**

例: 超伝導

$$S_{\text{eff}} = v^2 \int (d\varphi - ka) \wedge \star\, (d\varphi - ka)$$

$k = 2$: クーパーペアの電荷

低エネルギーの有効理論は $\mathbb{Z}_k$ ゲージ理論

$$v^2 \to \infty \quad \blacktriangleright \quad d\varphi - ka = 0$$

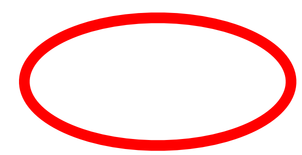
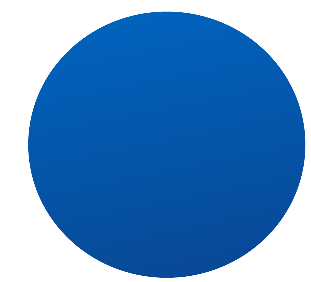
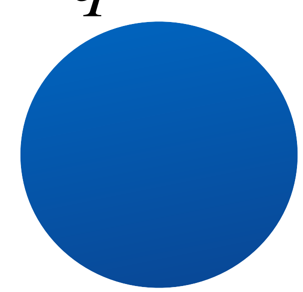
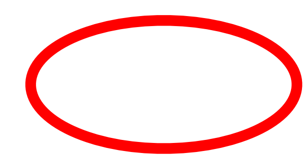
$$S_{\text{eff}} = \frac{1}{2\pi} \int c \wedge (d\varphi - ka)$$

φの運動方程式 $dc = 0$ $\blacktriangleright$ $c = db$

$$S_{\text{eff}} = \frac{-k}{2\pi} \int db \wedge a = \frac{k}{2\pi} \int b \wedge da$$

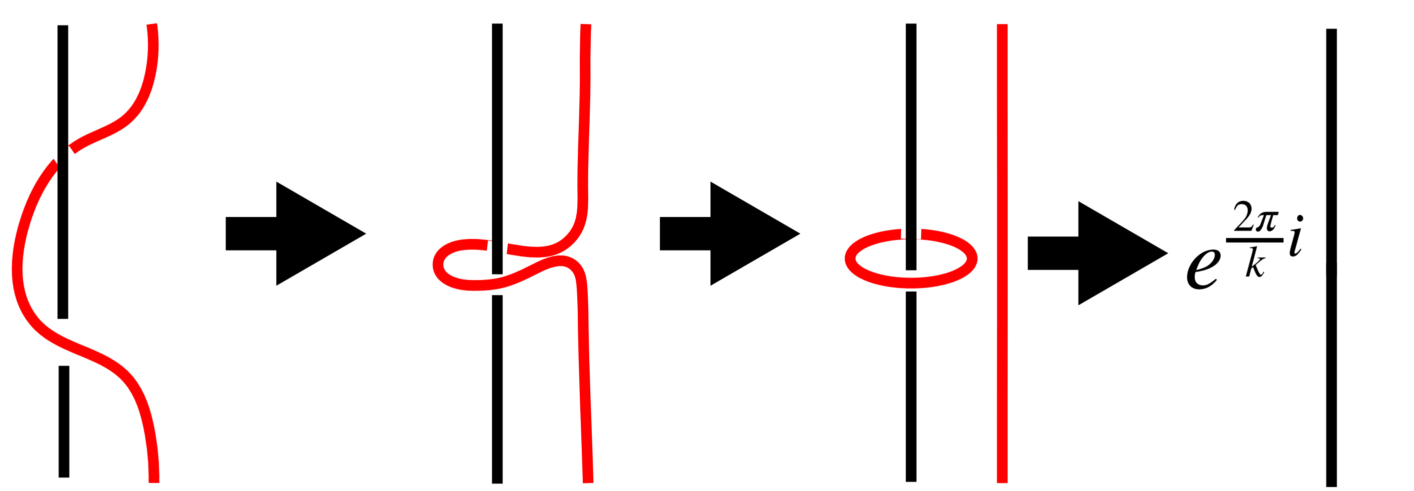
例: 超伝導

$$S_{\mathrm{eff}} = \frac{k}{2\pi}\int b \wedge da$$

	荷電物体	対称性演算子
1 次対称性 $a \to a + \frac{\lambda^{(1)}}{k}$	 $W_q = e^{iq\int a}$	 $U_n = e^{in\int b}$
2 次対称性 $b \to b + \frac{\lambda^{(2)}}{k}$	 U_n	 W_q

入れ替えの統計(Aharonov–Bohm位相)

時間



アノマリー

対称性を背景ゲージ場と結合させると

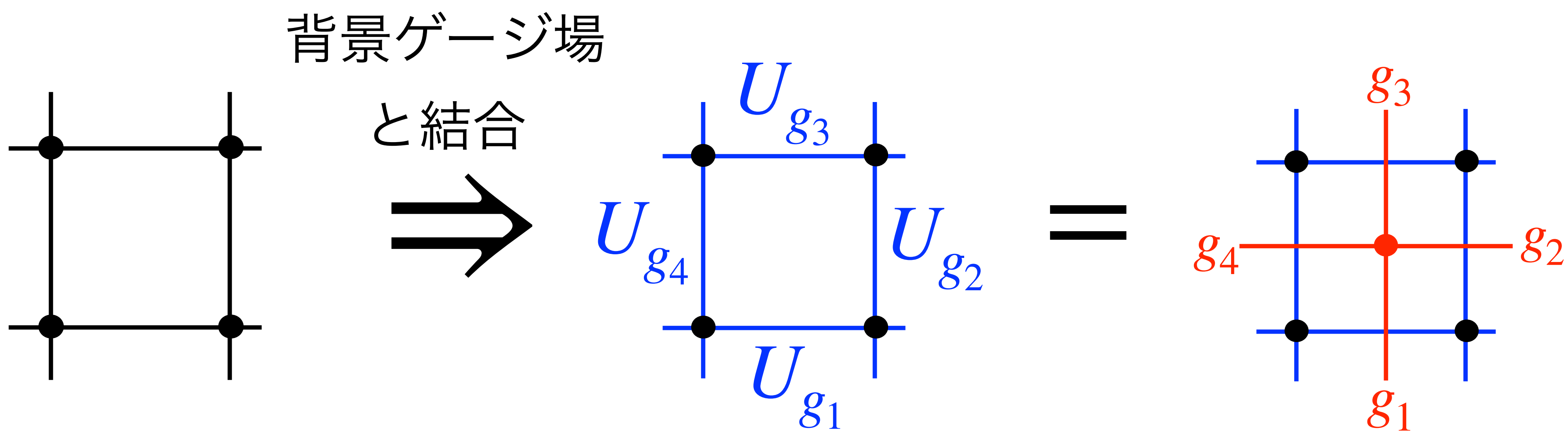
カレントが保存しなくなる.

背景ゲージ場
=対称性演算子の
ネットワーク

背景ゲージ場との結合

格子ゲージ理論ではゲージ場は,

G値のリンク変数 $U = e^{i\int a}$



対称性演算子のネットワーク

と等価 (Poincare 双対)

離散対称性の場合は, 連続極限を取れるためには

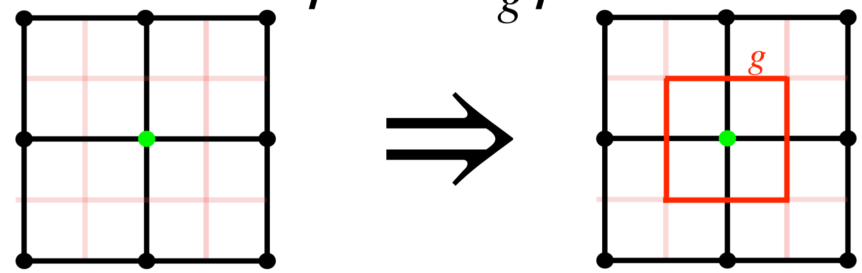
$U_{g_1}U_{g_2}U_{g_3}^{-1}U_{g_4}^{-1} = 1$**を要請 (平坦接続),**

i.e., $g_1g_2g_3^{-1}g_4^{-1} = 1$

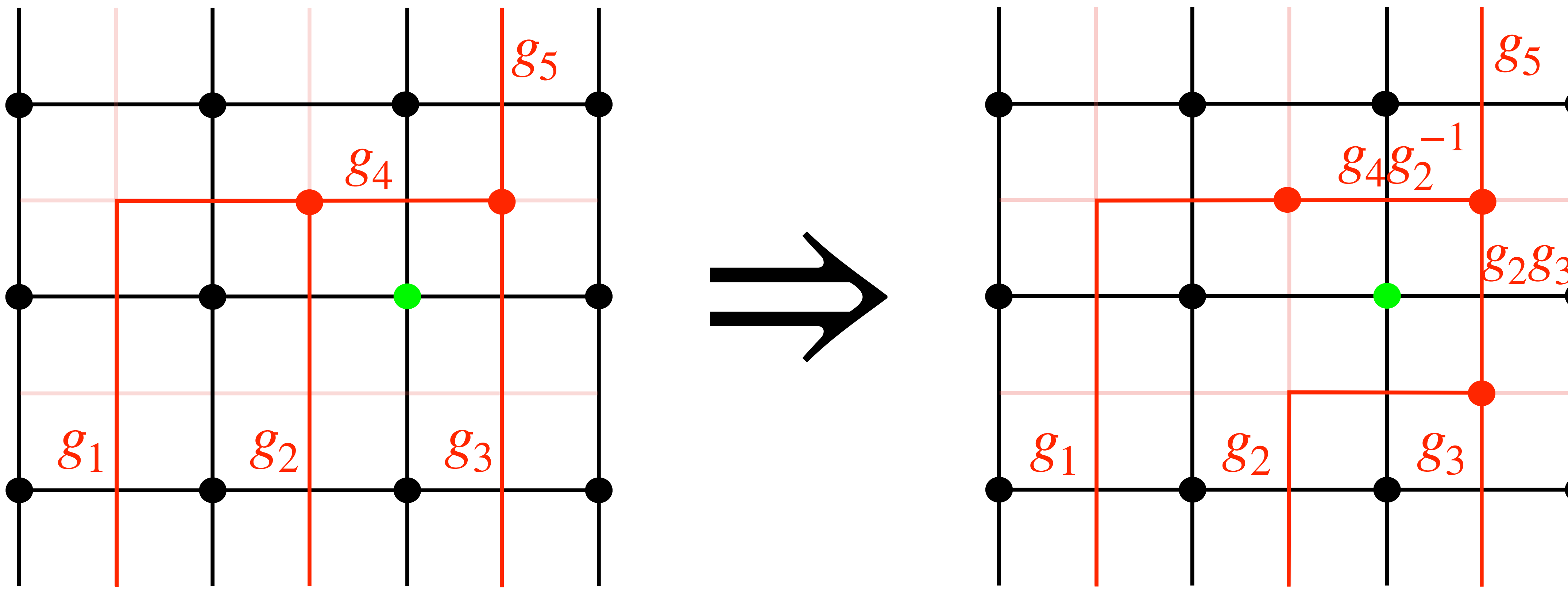
ゲージ変換

$\phi \to V_g \phi$

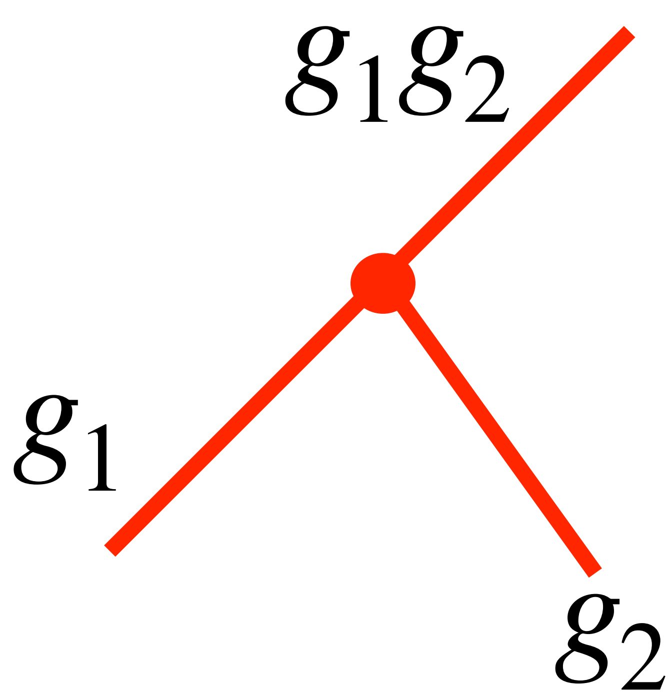
ϕの再定義



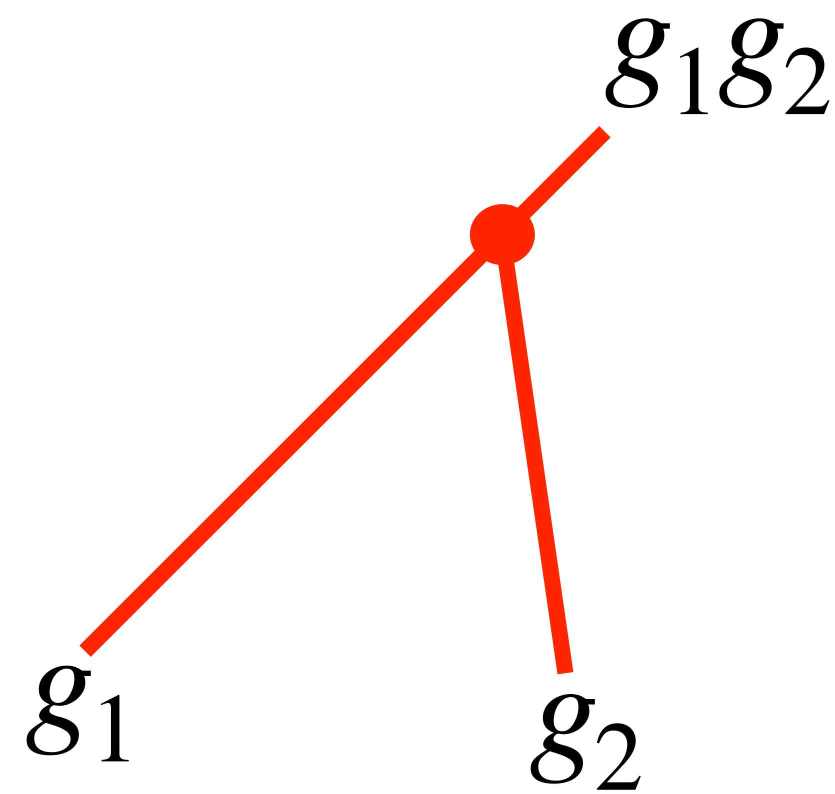
ネットワークの変形(ゲージ変換)を誘発



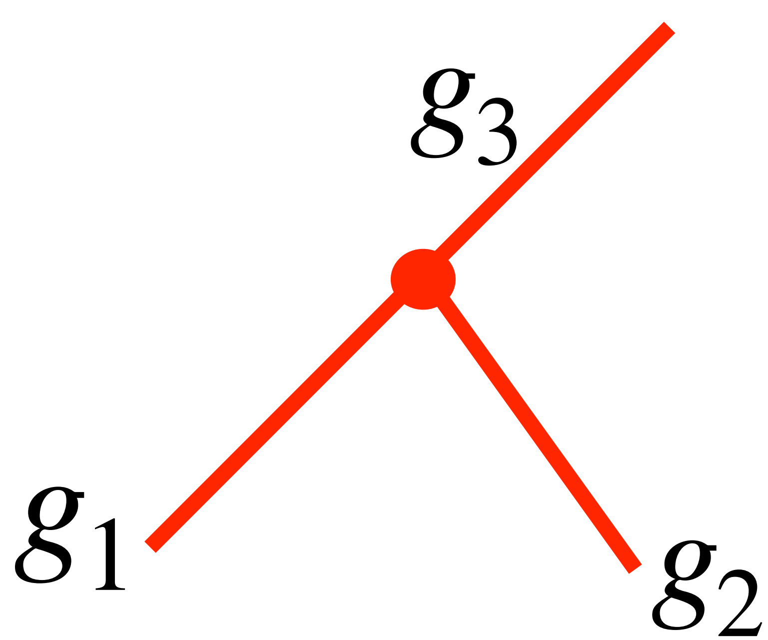
平坦接続　　　　**ジャンクションがトポロジカル**



$$\Rightarrow$$



平坦じゃない(曲率がある)場合は,
ジャンクションはトポロジカルではない



't Hooft アノマリー

分配関数 $Z[A] = \int D\phi e^{iS[A]}$

はゲージ変換の元で不変でない

$$Z[A] \to Z[A + d\lambda] = Z[A]e^{i\omega(\lambda,A)} \neq Z[A]$$

差は位相 $e^{i\omega(\lambda,A)}$

't Hooftアノマリーとしての射影表現

量子力学を考える. 分配関数は,

$$Z = \mathrm{tr} e^{-\beta H}$$

$$Z[A] = \mathrm{tr} e^{-\beta H} U_{g_1} U_{g_2} \stackrel{?}{=} Z[A + d\lambda] = \mathrm{tr} e^{-\beta H} U_{g_1 g_2}$$

もし, $U_{g_1} U_{g_2} = e^{i\omega(g_1, g_2)} U_{g_1 g_2}$ ならば

$$Z[A + d\lambda] = e^{-i\omega(g_1, g_2)} Z[A]$$ アノマリー

$U_{g_1}U_{g_2} = e^{i\omega(g_1,g_2)}U_{g_1g_2}$ は

結合則を満たす: $(U_{g_1}U_{g_2})U_{g_3} = U_{g_1}(U_{g_2}U_{g_3})$

$\Rightarrow$ $e^{i\omega(g_1g_2,g_3)+i\omega(g_1,g_2)} = e^{i\omega(g_1,g_2g_3)+i\omega(g_2,g_3)}$

$\Rightarrow$ $\delta^{(3)}\omega(g_1,g_2,g_3) := \omega(g_2,g_3) - \omega(g_1g_2,g_3) + \omega(g_1,g_2g_3) - \omega(g_1,g_2) = 0$

$U_g \to e^{i\omega(g)}U_g$ の元で $\Rightarrow$ $\omega(g_1,g_2) \to \omega(g_1,g_2) - \delta^{(2)}\omega(g_1,g_2)$

ここで, $\delta^{(2)}\omega(g_2,g_1) := \omega(g_2) - \omega(g_1g_2) + \omega(g_1)$

$\delta^{(3)} \circ \delta^{(2)} = 0$ を満たす

$\delta^{(3)}\omega(g_1,g_2,g_3) = 0$ と $\omega(g_1,g_2) \sim \omega(g_1,g_2) - \delta^{(2)}\omega(g_1,g_2)$

$\Rightarrow$ $\omega(g_1,g_2) \in \dfrac{\ker \delta^{(3)}}{\mathrm{im}\, \delta^{(2)}} =: H^2(G,U(1))$

射影表現は非自明な基底状態を意味する

$U_{g_1}U_{g_2} = e^{i\omega(g_1,g_2)}U_{g_1g_2}$とし,

基底状態$|\Omega\rangle$ に縮退がないとする

$|\Omega\rangle$はU_gの固有状態に取れる: $U_g|\Omega\rangle = e^{i\omega(g)}|\Omega\rangle$

$$U_{g_1}U_{g_2}|\Omega\rangle = e^{i\omega(g_1)+i\omega(g_2)}|\Omega\rangle$$

$$e^{i\omega(g_1,g_2)}U_{g_2g_1}|\Omega\rangle = e^{i\omega(g_1,g_2)+i\omega(g_1g_2)}|\Omega\rangle$$

$$\Rightarrow |\Omega\rangle = e^{i\omega(g_1,g_2)-i\delta^{(2)}\omega(g_1,g_2)}|\Omega\rangle$$

射影表現は,

$\omega(g_1, g_2) - \delta^{(2)}\omega(g_1, g_2)$ が非自明

これは仮定に反する⇒基底状態が縮退

より一般に,'t Hooftがあると
基底状態は非自明

- 対称性の自発的破れ
- トポロジカル秩序
- CFT
- …..

例) U(1)ゲージ理論

$$S = -\int \frac{1}{2e^2} f \wedge \star f$$

背景ゲージ場を結合

$$S[B_E, B_M] = -\int \frac{1}{2e^2}(f - B_E) \wedge \star\, (f - B_E)$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int (f - B_E) \wedge B_M$$

作用は $B_M \to B_M + d\lambda$ の元で不変でない:

$$S[B_E, B_M] \to S[B_E, B_M] - \frac{1}{2\pi}\int B_E \wedge d\lambda$$

対称性で保護されたトポロジカル相

縮退のないギャップを持った基底状態
しかし境界を持つ場合,
境界理論にアノマリー

全系の分配関数 $Z[A]_{\mathrm{total}} = Z[A]_{\mathrm{bulk}} Z[A]_{\mathrm{boundary}}$

ゲージ不変: $Z[A + d\lambda]_{\mathrm{total}} = Z[A]_{\mathrm{total}}$

バルクと境界それぞれは，不変でない:

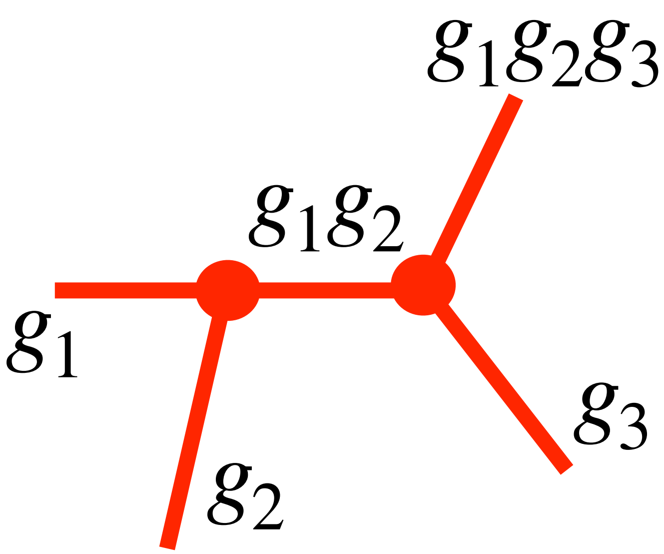
$$Z[A + d\lambda]_{\mathrm{boundary}} = e^{i\omega(A,\lambda)} Z[A]_{\mathrm{boundary}}$$

$$Z[A + d\lambda]_{\mathrm{bulk}} = e^{-i\omega(A,\lambda)} Z[A]_{\mathrm{bulk}}$$

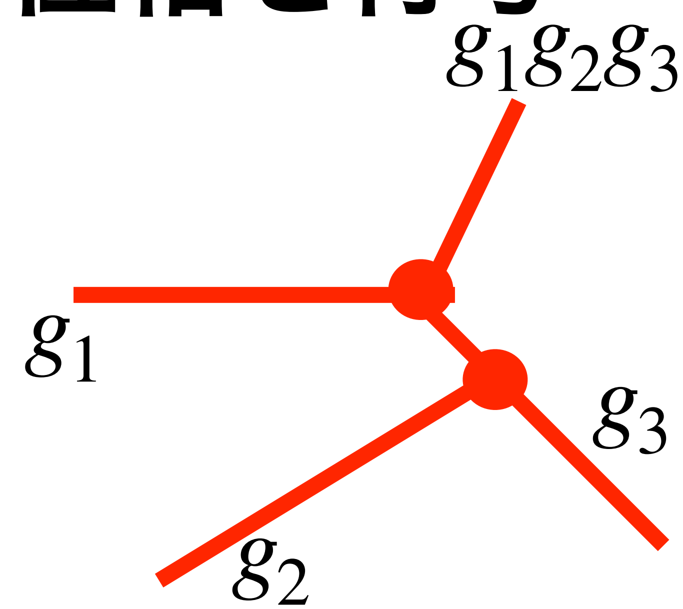
対称性で保護されたトポロジカル相

分配関数は背景ゲージ場と結合させると
非自明な位相を出す $Z[A] = e^{i\theta(A)}$

ジャンクションに位相を付与



$\Rightarrow$
ゲージ変換



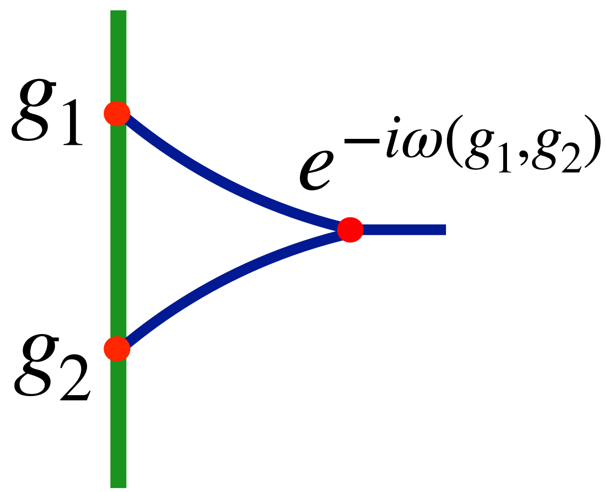
$= e^{-i\omega(g_1,g_2)} e^{-i\omega(g_1 g_2, g_3)}$ $\qquad$ $= e^{-i\omega(g_2,g_3)} e^{-i\omega(g_1, g_2 g_3)}$

$$d^{(3)}\omega(g_1, g_2, g_3) := \omega(g_2, g_3) - \omega(g_1 g_2, g_3) + \omega(g_1, g_2 g_3) - \omega(g_1, g_2) = 0$$

U_gの再定義 $\omega(g_1, g_2) \to \omega(g_1, g_2) - d^{(2)}\omega(g_1, g_2)$

$\omega \in H^2(G, U(1))$ 量子力学のアノマリー(射影表現)の分類と同じ

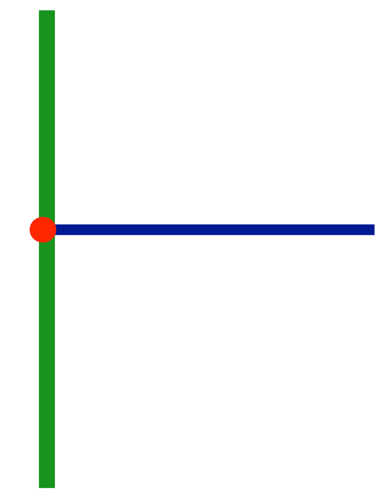
アノマリー流入



ゲージ変換

$\Rightarrow$

$$e^{i\omega(g_1,g_2)}e^{-i\omega(g_1,g_2)}$$
$$= 1$$



例: U(1) ゲージ理論

$$Z_{\text{boundary}}[B_E, B_M] = \int \mathscr{D}a e^{iS[a,B_E,B_M]}$$

$$Z_{\text{bulk}}[B_E, B_M] = e^{\frac{i}{2\pi}\int_X dB_E \wedge B_M}$$

ゲージ変換の元で,

$$Z_{\text{boundary}}[B_E, B_M + d\lambda] = Z_{\text{boundary}}[B_E, B_M] e^{\frac{-i}{2\pi}\int_M B_E d\lambda}$$

$$Z_{\text{bulk}}[B_E, B_M + d\lambda] = Z_{\text{bulk}}[B_E, B_M] e^{\frac{i}{2\pi}\int_{\partial X} B_E \wedge d\lambda}$$

$Z_{\text{boundary}}[B_E, B_M] Z_{\text{bulk}}[B_E, B_M]$は不変.