

Topological axion electrodynamics and 4-group symmetry

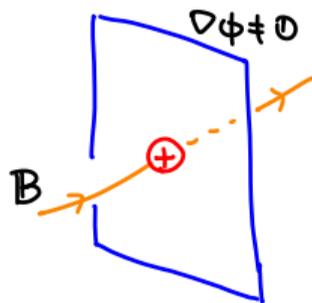
横倉 諒 (KEK)

2021. 9. 10

素粒子物理学の進展 2021, online

Based on Y. Hidaka, M. Nitta, RY, 2107.08753, 2108.12564

やったこと



- アクシオン電磁気学の有質量ギャップ相には、4 群として記述される 0,1,2,3 次対称性が存在する
- アクシオンドメインウォール (分域壁) や磁束渦の相関は 4 群の構造として理解できる

技術的には、

- アクシオン電磁気学の有質量ギャップ相における高次対称性を示した。
- 対称性の生成子の相関関数により 4 群構造を特定した。

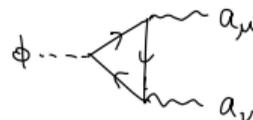
もくじ

- 1 導入 [4 スライド]
- 2 トポロジカルアクシオン電磁気学 [3 スライド]
- 3 トポロジカルアクシオン電磁気学における高次対称性 [6 スライド]
- 4 高次対称性でトポロジカルソリトンの物理をみる [2 スライド]
- 5 トポロジカルアクシオン電磁気学における 4 群 [5 スライド]

アクシオン電磁気学: アクシオン ϕ + 光子 a_μ + トポロジカル結合

[Wilczek '87]

$$\frac{N}{4\pi^2} \phi \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \frac{N}{32\pi^2} \phi \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} f_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} \quad (N: \text{整数})$$



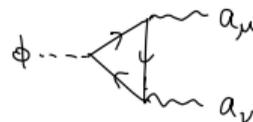
特徴

1. トポロジカル結合: カイラル量子異常によって決まる。時空の計量やスケールによらない
2. 素粒子・ハドロン・物性物理に遍在する: QCD アクシオン, π^0 中間子, 磁性トポロジカル絶縁体, ...

アクシオン電磁気学: アクシオン ϕ + 光子 a_μ + トポロジカル結合

[Wilczek '87]

$$\frac{N}{4\pi^2} \phi \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \frac{N}{32\pi^2} \phi \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} f_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} \quad (N: \text{整数})$$



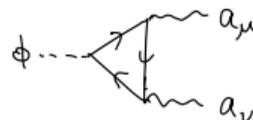
特徴

1. トポロジカル結合: カイラル量子異常によって決まる。時空の計量やスケールによらない
2. 素粒子・ハドロン・物性物理に遍在する: QCD アクシオン, π^0 中間子, 磁性トポロジカル絶縁体, ...
3. アクシオンと光子の有質量/無質量相がある。両方質量があると真空中に質量ギャップがある

アクシオン電磁気学: アクシオン ϕ + 光子 a_μ + トポロジカル結合

[Wilczek '87]

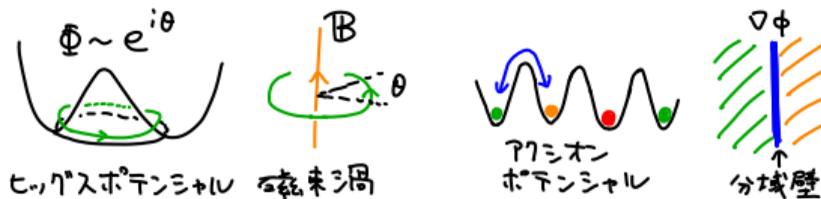
$$\frac{N}{4\pi^2} \phi \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \frac{N}{32\pi^2} \phi \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} f_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} \quad (N: \text{整数})$$



特徴

1. トポロジカル結合: カイラル量子異常によって決まる。時空の計量やスケールによらない
2. 素粒子・ハドロン・物性物理に遍在する: QCD アクシオン, π^0 中間子, 磁性トポロジカル絶縁体, ...
3. アクシオンと光子の有質量/無質量相がある。両方質量があると真空中に質量ギャップがある
4. 有質量ギャップ相にはトポロジカルソリトンが存在し得る: 磁束渦、アクシオン分域壁

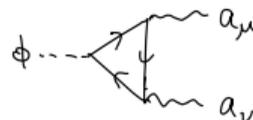
e.g., 宇宙ひもと分域壁の複合系 [Kogan '93], トポロジカル超伝導体 [Qi, Witten, Zhang '12]



アクシオン電磁気学: アクシオン ϕ + 光子 a_μ + トポロジカル結合

[Wilczek '87]

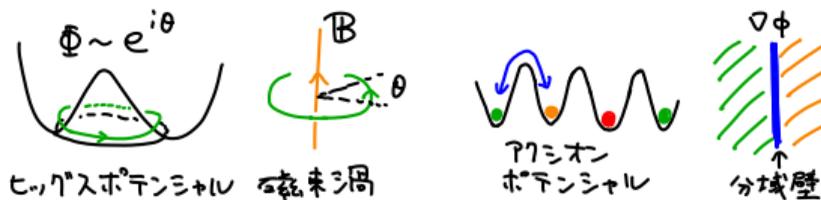
$$\frac{N}{4\pi^2} \phi \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \frac{N}{32\pi^2} \phi \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} f_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} \quad (N: \text{整数})$$



特徴

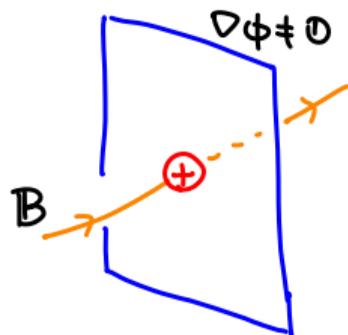
1. トポロジカル結合: カイラル量子異常によって決まる。時空の計量やスケールによらない
2. 素粒子・ハドロン・物性物理に遍在する: QCD アクシオン, π^0 中間子, 磁性トポロジカル絶縁体, ...
3. アクシオンと光子の有質量/無質量相がある。両方質量があると真空中に質量ギャップがある
4. 有質量ギャップ相にはトポロジカルソリトンが存在し得る: 磁束渦、アクシオン分域壁

e.g., 宇宙ひもと分域壁の複合系 [Kogan '93], トポロジカル超伝導体 [Qi, Witten, Zhang '12]



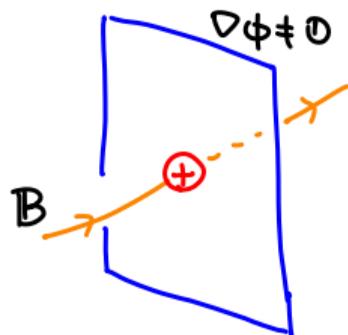
アクシオン・光子結合はソリトン同士に非自明な相関を導く

アクシオン分域壁の Sikivie 効果



- アクシオン分域壁に磁束を差す → 電荷が誘起する [Sikivie '84]

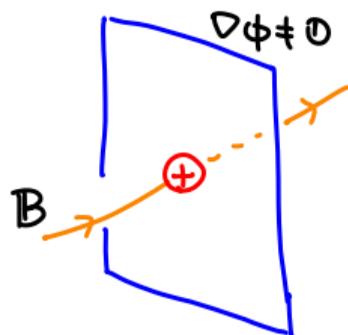
アクシオン分域壁の Sikivie 効果



- アクシオン分域壁に磁束を差す → 電荷が誘起する [Sikivie '84]

電場のガウスの法則がアクシオンで変更される $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{N}{4\pi^2} \nabla \phi \cdot \mathbf{B}$

アクシオン分域壁の Sikivie 効果

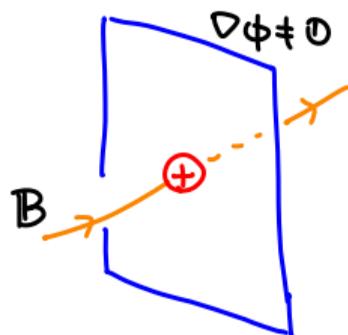


- アクシオン分域壁に磁束を差す → 電荷が誘起する [Sikivie '84]

電場のガウスの法則がアクシオンで変更される $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{N}{4\pi^2} \nabla \phi \cdot \mathbf{B}$

- ヒッグス相では磁束が量子化されている → 誘起した電荷も離散的である

アクシオン分域壁の Sikivie 効果



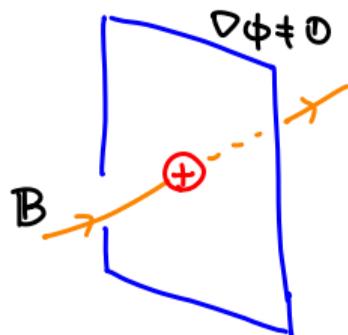
- アクシオン分域壁に磁束を差す → 電荷が誘起する [Sikivie '84]

電場のガウスの法則がアクシオンで変更される $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{N}{4\pi^2} \nabla \phi \cdot \mathbf{B}$

- ヒッグス相では磁束が量子化されている → 誘起した電荷も離散的である

Q: この効果の背後にある数学的構造は？

アクシオン分域壁の Sikivie 効果



- アクシオン分域壁に磁束を差す → 電荷が誘起する [Sikivie '84]

電場のガウスの法則がアクシオンで変更される $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{N}{4\pi^2} \nabla \phi \cdot \mathbf{B}$

- ヒッグス相では磁束が量子化されている → 誘起した電荷も離散的である

Q: この効果の背後にある数学的構造は？

- トポロジカルソリトン = 保存する物体 → 対称性？
- 保存量の相関 → 対称性の代数？

候補: 高次対称性 [Gaiotto et al. '14]

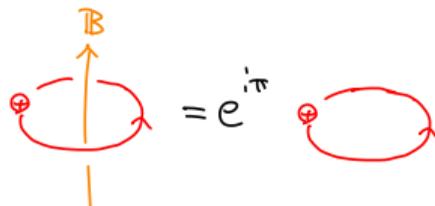
p 次元の広がった物体への変換の元での対称性

(通常の対称性は 0 次対称性。0 次元物体に作用するため。)

The diagram illustrates a symmetry operation. On the left, a red loop with a counter-clockwise arrow and a plus sign (\oplus) is shown. An orange arrow labeled B points upwards through the center of the loop. This is equated to $e^{i\pi}$ multiplied by a red loop with a counter-clockwise arrow and a plus sign (\oplus).

p 次元の広がった物体への変換の元での対称性

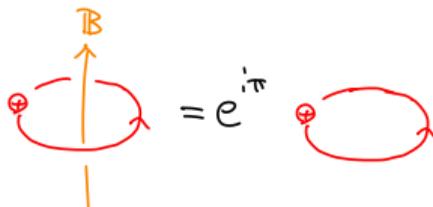
(通常の対称性は 0 次対称性。0 次元物体に作用するため。)



- 広がった物体の物理を対称性で理解できる。
 - 例: アハラノフ・ボーム (AB) 効果: 1 次対称性の変換
生成子 = 保存量: 磁束, 変換をうける物体: 試験電荷の世界線

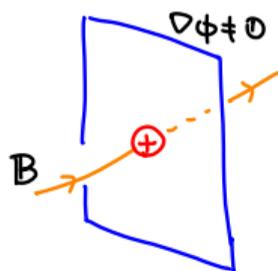
p 次元の広がった物体への変換の元での対称性

(通常の対称性は 0 次対称性。0 次元物体に作用するため。)



- 広がった物体の物理を対称性で理解できる。
 - 例: アハラノフ・ボーム (AB) 効果: 1 次対称性の変換
生成子 = 保存量: 磁束, 変換をうける物体: 試験電荷の世界線
- 通常の対称性を超えた場の量子論の相分類が可能
 - (3 + 1) 次元のマクスウェル理論: 光子 = NG ボソン ($U(1)$ 1 次対称性の自発的破れ)
 - (s-wave) 超伝導体 \neq charge 1 可換 Higgs 模型 [cf. Hansson, et al. '04]

この発表の目的



有質量ギャップを持つアクシオン電磁気学において

- 高次対称性とその対称性の群を特定する
- Sikivie 効果などのトポロジカルソリトンの相関から、高次対称性同士の相関を導く

以下ではソリトンに注目するため、低エネルギー (長波長) 極限の議論をする

- アクシオンや光子はソリトン以外の励起無し $f_{\mu\nu} = 0, \partial_\mu\phi = 0$
- ソリトンの太さは無視してデルタ関数的配位で近似

もくじ

- 1 導入 [4 スライド]
- 2 トポロジカルアクシオン電磁気学 [3 スライド]
- 3 トポロジカルアクシオン電磁気学における高次対称性 [6 スライド]
- 4 高次対称性でトポロジカルソリトンの物理をみる [2 スライド]
- 5 トポロジカルアクシオン電磁気学における 4 群 [5 スライド]

トポロジカルアクション電磁気学 [3 スライド]

Y. Hidaka, M. Nitta, RY, 2107.08753, 2108.12564

セットアップ [e.g., Kogan '93]

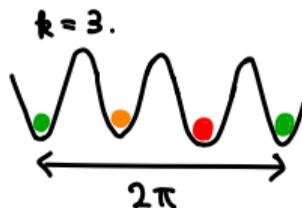
低エネルギー極限での作用: 質量項 + トポロジカル結合 (運動項は無視)

$$S_{\text{gapped}} = - \int d^4x \left(V_k(\phi) + \frac{v^2}{2} |\partial_\mu \chi - q a_\mu|^2 - \frac{N}{16\pi^2} \phi f_{\mu\nu} \tilde{f}^{\mu\nu} \right) - \int \left(\frac{v'^2}{2} |\partial_\mu \phi|^2 + \frac{1}{4e^2} |f_{\mu\nu}|^2 \right)$$

v : ヒッグス場の VEV

ϕ : アクシオン

- $\phi + 2\pi \sim \phi$ を満たす擬スカラー (NG ボソン $e^{i\phi}$)
- V_k : \mathbb{Z}_k 対称性をもつポテンシャル, e.g., $V_k \propto 1 - \cos k\phi$



a_μ : 光子

- $U(1)$ ゲージ場 (ディラックの量子化条件 $\int_{S^2} B \cdot dS \in 2\pi\mathbb{Z}$)
- $|\partial_\mu \chi - q a_\mu|^2$: 質量項。 χ は電荷 q のヒッグス場の NG モードで、光子に食べられる

アクシオン・光子結合

- N : 整数 (UV 理論での Dirac フェルミオンの数) (時空多様体 M_4 はスピン多様体とする)

セットアップ [e.g., Kogan '93]

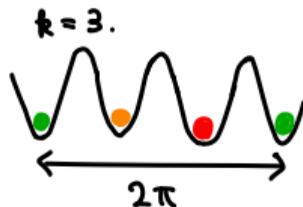
低エネルギー極限での作用: 質量項 + トポロジカル結合 (運動項は無視)

$$S_{\text{gapped}} = - \int d^4x \left(V_k(\phi) + \frac{v^2}{2} |\partial_\mu \chi - q a_\mu|^2 - \frac{N}{16\pi^2} \phi f_{\mu\nu} \tilde{f}^{\mu\nu} \right) - \int \left(\frac{v'^2}{2} |\partial_\mu \phi|^2 + \frac{1}{4e^2} |f_{\mu\nu}|^2 \right)$$

v : ヒッグス場の VEV

ϕ : アクシオン

- $\phi + 2\pi \sim \phi$ を満たす擬スカラー (NG ボソン $e^{i\phi}$)
- V_k : \mathbb{Z}_k 対称性をもつポテンシャル, e.g., $V_k \propto 1 - \cos k\phi$



a_μ : 光子

- $U(1)$ ゲージ場 (ディラックの量子化条件 $\int_{S^2} B \cdot dS \in 2\pi\mathbb{Z}$)
- $|\partial_\mu \chi - q a_\mu|^2$: 質量項。 χ は電荷 q のヒッグス場の NG モードで、光子に食べられる

アクシオン・光子結合

- N : 整数 (UV 理論での Dirac フェルミオンの数) (時空多様体 M_4 はスピン多様体とする)

トポロジカルソリトンは双対トポロジカル理論だと扱いやすい

トポロジカルアクシオン電磁気学

アクシオンおよび光子の質量項 $\overset{\text{等価}}{\longleftrightarrow}$ トポロジカル項

作用: 質量項に等価なトポロジカル項 + アクシオン・光子結合

$$S_{\text{TAE}} = \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left(\frac{q}{2\pi} b_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} + \frac{k}{2\pi} c_{\mu\nu\rho} \partial_\sigma \phi + \frac{N}{32\pi^2} \phi f_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} \right)$$

重複する添字に付く 2! や 3! は略した

トポロジカルアクシオン電磁気学

アクシオンおよび光子の質量項 $\overset{\text{等価}}{\longleftrightarrow}$ トポロジカル項

作用: 質量項に等価なトポロジカル項 + アクシオン・光子結合

$$S_{\text{TAE}} = \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left(\frac{q}{2\pi} b_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} + \frac{k}{2\pi} c_{\mu\nu\rho} \partial_\sigma \phi + \frac{N}{32\pi^2} \phi f_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} \right)$$

重複する添字に付く 2! や 3! は略した

双対場

- $b_{\mu\nu}$: 2 階反対称テンソル $U(1)$ ゲージ場 (NG ボソン χ の双対変数) [Cremmer & Scherk '74]

トポロジカルアクシオン電磁気学

アクシオンおよび光子の質量項 $\xleftrightarrow{\text{等価}}$ トポロジカル項

作用: 質量項に等価なトポロジカル項 + アクシオン・光子結合

$$S_{\text{TAE}} = \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left(\frac{q}{2\pi} b_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} + \frac{k}{2\pi} c_{\mu\nu\rho} \partial_\sigma \phi + \frac{N}{32\pi^2} \phi f_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} \right)$$

重複する添字に付く 2! や 3! は略した

双対場

- $b_{\mu\nu}$: 2 階反対称テンソル $U(1)$ ゲージ場 (NG ボソン χ の双対変数) [Cremmer & Scherk '74]
- $c_{\mu\nu\rho}$: 3 階反対称テンソル $U(1)$ ゲージ場 (ポテンシャルの極小点 (局所定数) の双対変数) [Aurilia, Takahashi, Townsend '80]

トポロジカルアクシオン電磁気学

アクシオンおよび光子の質量項 $\xleftrightarrow{\text{等価}}$ トポロジカル項

作用: 質量項に等価なトポロジカル項 + アクシオン・光子結合

$$S_{\text{TAE}} = \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left(\frac{q}{2\pi} b_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} + \frac{k}{2\pi} c_{\mu\nu\rho} \partial_\sigma \phi + \frac{N}{32\pi^2} \phi f_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} \right)$$

重複する添字に付く 2! や 3! は略した

双対場

- $b_{\mu\nu}$: 2 階反対称テンソル $U(1)$ ゲージ場 (NG ボソン χ の双対変数) [Cremmer & Scherk '74]
- $c_{\mu\nu\rho}$: 3 階反対称テンソル $U(1)$ ゲージ場 (ポテンシャルの極小点 (局所定数) の双対変数) [Aurilia, Takahashi, Townsend '80]

等価性 (のラフな説明): 低エネルギー極限を再現する。 $b_{\mu\nu}$ の運動方程式: $f_{\mu\nu} = 0$, $c_{\mu\nu\rho}$ の運動方程式: $\partial_\mu \phi = 0$

技術的にはルジャンドル変換を行う

トポロジカルアクシオン電磁気学

アクシオンおよび光子の質量項 $\xleftrightarrow{\text{等価}}$ トポロジカル項

作用: 質量項に等価なトポロジカル項 + アクシオン・光子結合

$$S_{\text{TAE}} = \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left(\frac{q}{2\pi} b_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} + \frac{k}{2\pi} c_{\mu\nu\rho} \partial_\sigma \phi + \frac{N}{32\pi^2} \phi f_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} \right)$$

重複する添字に付く 2! や 3! は略した

双対場

- $b_{\mu\nu}$: 2 階反対称テンソル $U(1)$ ゲージ場 (NG ボソン χ の双対変数) [Cremmer & Scherk '74]
- $c_{\mu\nu\rho}$: 3 階反対称テンソル $U(1)$ ゲージ場 (ポテンシャルの極小点 (局所定数) の双対変数) [Aurilia, Takahashi, Townsend '80]

等価性 (のラフな説明): 低エネルギー極限を再現する。 $b_{\mu\nu}$ の運動方程式: $f_{\mu\nu} = 0$, $c_{\mu\nu\rho}$ の運動方程式: $\partial_\mu \phi = 0$

技術的にはルジャンドル変換を行う

どのようにトポロジカルソリトンを扱うか? 反対称テンソルゲージ場の物理的意味は?

トポロジカルソリトン = 双対場 $b_{\mu\nu}, c_{\mu\nu\rho}$ に結合する物体 [e.g., Sugamoto '78]

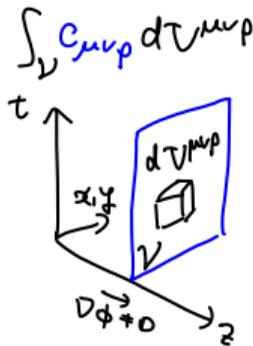
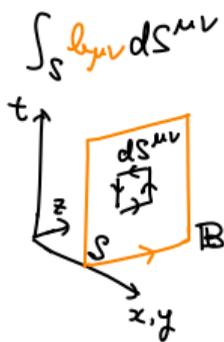
ソリトンも含めた作用

$$S = \int_S b_{\mu\nu} dS^{\mu\nu} + \int_V c_{\mu\nu\rho} dV^{\mu\nu\rho} + \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left(\frac{q}{2\pi} b_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} + \frac{k}{2\pi} c_{\mu\nu\rho} \partial_\sigma \phi + \frac{N}{32\pi^2} \phi f_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} \right)$$

磁束渦 アクション分域壁

磁束渦、分域壁の配位を運動方程式で再現:

- $b_{\mu\nu}$ の運動方程式: $B = \frac{2\pi}{q} \delta(x)\delta(y)e_z$



添字で書くと $f_{\mu\nu} = \frac{2\pi}{q} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int_S dS^{\rho\sigma}(y) \delta^4(x-y)$, $\partial_\mu \phi = \frac{2\pi}{k} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int_V dV^{\nu\rho\sigma}(y) \delta^4(x-y)$

トポロジカルソリトン = 双対場 $b_{\mu\nu}, c_{\mu\nu\rho}$ に結合する物体 [e.g., Sugamoto '78]

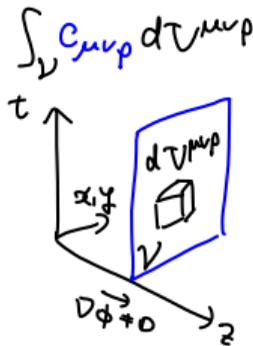
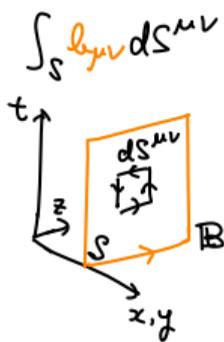
ソリトンも含めた作用

$$S = \int_S b_{\mu\nu} dS^{\mu\nu} + \int_V c_{\mu\nu\rho} dV^{\mu\nu\rho} + \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left(\frac{q}{2\pi} b_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} + \frac{k}{2\pi} c_{\mu\nu\rho} \partial_\sigma \phi + \frac{N}{32\pi^2} \phi f_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} \right)$$

磁束渦
アクション分域壁

磁束渦、分域壁の配位を運動方程式で再現:

- $b_{\mu\nu}$ の運動方程式: $B = \frac{2\pi}{q} \delta(x)\delta(y)e_z$
- $c_{\mu\nu\rho}$ の運動方程式: $\nabla\phi = \frac{2\pi}{k} \delta(z)e_z$



添字で書くと $f_{\mu\nu} = \frac{2\pi}{q} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int_S dS^{\rho\sigma}(y) \delta^4(x-y)$, $\partial_\mu \phi = \frac{2\pi}{k} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int_V dV^{\nu\rho\sigma}(y) \delta^4(x-y)$

トポロジカルソリトン = 双対場 $b_{\mu\nu}, c_{\mu\nu\rho}$ に結合する物体 [e.g., Sugamoto '78]

ソリトンも含めた作用

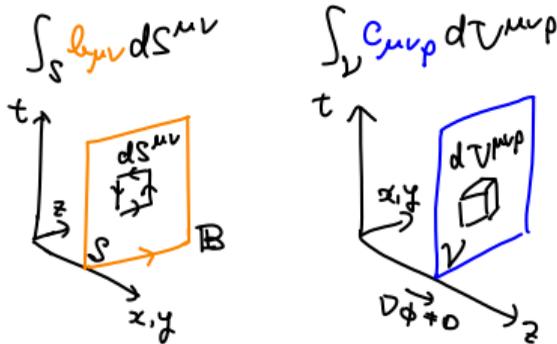
$$S = \int_S b_{\mu\nu} dS^{\mu\nu} + \int_V c_{\mu\nu\rho} dV^{\mu\nu\rho} + \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left(\frac{q}{2\pi} b_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} + \frac{k}{2\pi} c_{\mu\nu\rho} \partial_\sigma \phi + \frac{N}{32\pi^2} \phi f_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} \right)$$

磁束渦 アクション分隔壁

磁束渦、分隔壁の配位を運動方程式で再現:

- $b_{\mu\nu}$ の運動方程式: $B = \frac{2\pi}{q} \delta(x)\delta(y)e_z$
- $c_{\mu\nu\rho}$ の運動方程式: $\nabla\phi = \frac{2\pi}{k} \delta(z)e_z$

2,3 階反对称テンソルゲージ場の物理的意味



添字で書くと $f_{\mu\nu} = \frac{2\pi}{q} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int_S dS^{\rho\sigma}(y) \delta^4(x-y)$, $\partial_\mu \phi = \frac{2\pi}{k} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int_V dV^{\nu\rho\sigma}(y) \delta^4(x-y)$

トポロジカルソリトン = 双対場 $b_{\mu\nu}, c_{\mu\nu\rho}$ に結合する物体 [e.g., Sugamoto '78]

ソリトンも含めた作用

$$S = \int_S b_{\mu\nu} dS^{\mu\nu} + \int_V c_{\mu\nu\rho} dV^{\mu\nu\rho} + \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left(\frac{q}{2\pi} b_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} + \frac{k}{2\pi} c_{\mu\nu\rho} \partial_\sigma \phi + \frac{N}{32\pi^2} \phi f_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} \right)$$

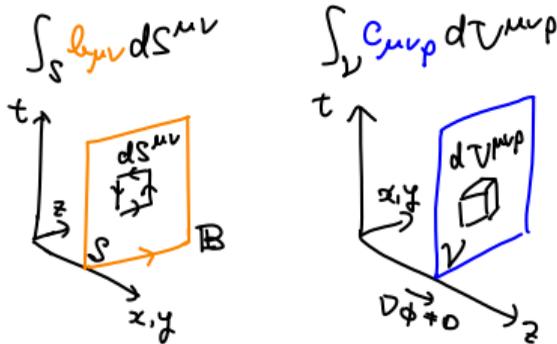
磁束渦 アクション分域壁

磁束渦、分域壁の配位を運動方程式で再現:

- $b_{\mu\nu}$ の運動方程式: $B = \frac{2\pi}{q} \delta(x)\delta(y)e_z$
- $c_{\mu\nu\rho}$ の運動方程式: $\nabla\phi = \frac{2\pi}{k} \delta(z)e_z$

2,3 階反对称テンソルゲージ場の物理的意味

- 2, 3 階: 磁束渦、分域壁の時空次元



添字で書くと $f_{\mu\nu} = \frac{2\pi}{q} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int_S dS^{\rho\sigma}(y) \delta^4(x-y)$, $\partial_\mu \phi = \frac{2\pi}{k} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int_V dV^{\nu\rho\sigma}(y) \delta^4(x-y)$

トポロジカルソリトン = 双対場 $b_{\mu\nu}, c_{\mu\nu\rho}$ に結合する物体 [e.g., Sugamoto '78]

ソリトンも含めた作用

$$S = \int_S b_{\mu\nu} dS^{\mu\nu} + \int_V c_{\mu\nu\rho} dV^{\mu\nu\rho} + \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left(\frac{q}{2\pi} b_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} + \frac{k}{2\pi} c_{\mu\nu\rho} \partial_\sigma \phi + \frac{N}{32\pi^2} \phi f_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} \right)$$

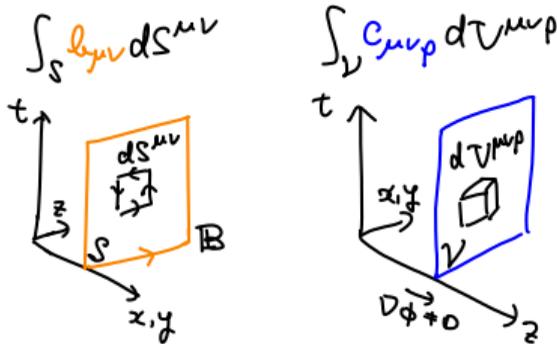
磁束渦 アクション分域壁

磁束渦、分域壁の配位を運動方程式で再現:

- $b_{\mu\nu}$ の運動方程式: $B = \frac{2\pi}{q} \delta(x)\delta(y)e_z$
- $c_{\mu\nu\rho}$ の運動方程式: $\nabla\phi = \frac{2\pi}{k} \delta(z)e_z$

2,3 階反对称テンソルゲージ場の物理的意味

- 2, 3 階: 磁束渦、分域壁の時空次元
- 反对称: ソリトンの向きづけ (ヤコビアン) = ソリトン電荷の正負



添字で書くと $f_{\mu\nu} = \frac{2\pi}{q} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int_S dS^{\rho\sigma}(y) \delta^4(x-y)$, $\partial_\mu \phi = \frac{2\pi}{k} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int_V dV^{\nu\rho\sigma}(y) \delta^4(x-y)$

トポロジカルソリトン = 双対場 $b_{\mu\nu}, c_{\mu\nu\rho}$ に結合する物体 [e.g., Sugamoto '78]

ソリトンも含めた作用

$$S = \int_S b_{\mu\nu} dS^{\mu\nu} + \int_V c_{\mu\nu\rho} dV^{\mu\nu\rho} + \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left(\frac{q}{2\pi} b_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} + \frac{k}{2\pi} c_{\mu\nu\rho} \partial_\sigma \phi + \frac{N}{32\pi^2} \phi f_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} \right)$$

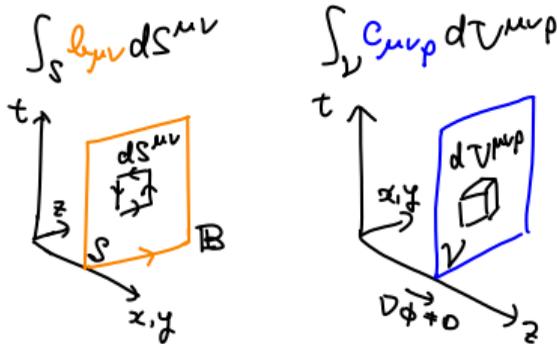
磁束渦 アクション分域壁

磁束渦、分域壁の配位を運動方程式で再現:

- $b_{\mu\nu}$ の運動方程式: $B = \frac{2\pi}{q} \delta(x)\delta(y)e_z$
- $c_{\mu\nu\rho}$ の運動方程式: $\nabla\phi = \frac{2\pi}{k} \delta(z)e_z$

2,3 階反对称テンソルゲージ場の物理的意味

- 2, 3 階: 磁束渦、分域壁の時空次元
- 反对称: ソリトンの向きづけ (ヤコビアン) = ソリトン電荷の正負
- ゲージ場: ソリトンの保存則 (低エネルギー極限ではソリトンが勝手に消えない)



添字で書くと $f_{\mu\nu} = \frac{2\pi}{q} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int_S dS^{\rho\sigma}(y) \delta^4(x-y)$, $\partial_\mu \phi = \frac{2\pi}{k} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int_V dV^{\nu\rho\sigma}(y) \delta^4(x-y)$

トポロジカルソリトン = 双対場 $b_{\mu\nu}, c_{\mu\nu\rho}$ に結合する物体 [e.g., Sugamoto '78]

ソリトンも含めた作用

$$S = \int_S b_{\mu\nu} dS^{\mu\nu} + \int_V c_{\mu\nu\rho} dV^{\mu\nu\rho} + \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left(\frac{q}{2\pi} b_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} + \frac{k}{2\pi} c_{\mu\nu\rho} \partial_\sigma \phi + \frac{N}{32\pi^2} \phi f_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} \right)$$

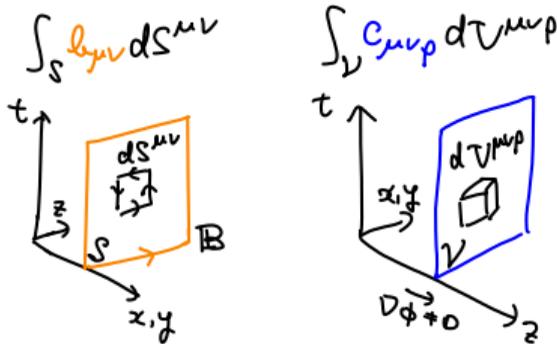
磁束渦
アクション分域壁

磁束渦、分域壁の配位を運動方程式で再現:

- $b_{\mu\nu}$ の運動方程式: $B = \frac{2\pi}{q} \delta(x)\delta(y)e_z$
- $c_{\mu\nu\rho}$ の運動方程式: $\nabla\phi = \frac{2\pi}{k} \delta(z)e_z$

2,3 階反对称テンソルゲージ場の物理的意味

- 2, 3 階: 磁束渦、分域壁の時空次元
- 反对称: ソリトンの向きづけ (ヤコビアン) = ソリトン電荷の正負
- ゲージ場: ソリトンの保存則 (低エネルギー極限ではソリトンが勝手に消えない)



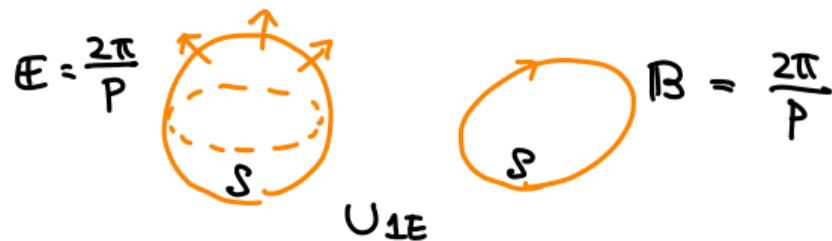
トポロジカルアクション電磁気学を用いて高次対称性を調べる

添字で書くと $f_{\mu\nu} = \frac{2\pi}{q} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int_S dS^{\rho\sigma}(y) \delta^4(x-y)$, $\partial_\mu \phi = \frac{2\pi}{k} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int_V dV^{\nu\rho\sigma}(y) \delta^4(x-y)$

トポロジカルアクシオン電磁気学における高次対称性 [6 スライド]

光子に関するもの $\times 3$, アクシオンに関するもの $\times 3$

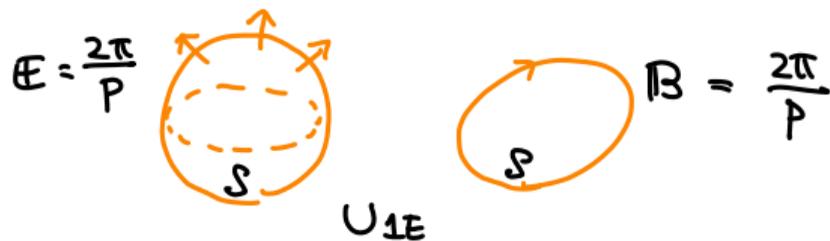
光子に関する高次対称性 1/3: 電氣的 \mathbb{Z}_p 1次対称性



- 保存則: a_μ の運動方程式 $\nabla \cdot D = 0, \nabla \times H - \frac{\partial D}{\partial t} = 0$ (電束 $D = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E}$, 磁場 $H = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B}$)

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu \left(\frac{q}{2\pi} b_{\rho\sigma} + \frac{N}{4\pi^2} \phi f_{\rho\sigma} \right) = 0,$$

光子に関する高次対称性 1/3: 電氣的 \mathbb{Z}_p 1次対称性

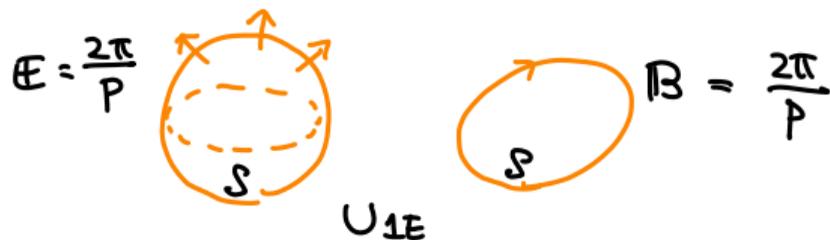


- 保存則: a_μ の運動方程式 $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0$ (電束 $\mathbf{D} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{E}}$, 磁場 $\mathbf{H} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{B}}$)
- 生成子 (保存量): 積分形ガウスの法則で使う閉曲面 (マクスウェル・アンペールの方は線積分を時間的に伸ばす)

$$U_{1E}(S) = \exp\left(\frac{2\pi i}{p} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}\right), \quad \exp\left(\frac{2\pi i}{p} \int_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} dt\right)$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu \left(\frac{q}{2\pi} b_{\rho\sigma} + \frac{N}{4\pi^2} \phi f_{\rho\sigma} \right) = 0, \quad U_{1E}(S) = \exp\left(\frac{2\pi i}{p} \int_S dS^{\mu\nu} \left(\frac{q}{2\pi} b_{\mu\nu} + \frac{N}{4\pi^2} \phi f_{\mu\nu} \right)\right)$$

光子に関する高次対称性 1/3: 電氣的 \mathbb{Z}_p 1次対称性



- 保存則: a_μ の運動方程式 $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0$ (電束 $\mathbf{D} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{E}}$, 磁場 $\mathbf{H} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{B}}$)
- 生成子 (保存量): 積分形ガウスの法則で使う閉曲面 (マクスウェル・アンペールの方は線積分を時間的に伸ばす)

$$U_{1E}(S) = \exp\left(\frac{2\pi i}{p} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}\right), \quad \exp\left(\frac{2\pi i}{p} \int_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} dt\right)$$

- 群は \mathbb{Z}_p ($p = \gcd(N, q)$): 電気力線は mod p でのみ保存する

アクシオンとヒッグス場がそれぞれ N, q 本の電気力線を吸収してしまう。(技術的には、 U_{1E} の large gauge invariance から従う)

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu \left(\frac{q}{2\pi} b_{\rho\sigma} + \frac{N}{4\pi^2} \phi f_{\rho\sigma} \right) = 0, \quad U_{1E}(S) = \exp\left(\frac{2\pi i}{p} \int_S dS^{\mu\nu} \left(\frac{q}{2\pi} b_{\mu\nu} + \frac{N}{4\pi^2} \phi f_{\mu\nu} \right)\right)$$

光子に関する高次対称性 1/3: 電氣的 \mathbb{Z}_p 1次対称性

- 保存則: a_μ の運動方程式 $\nabla \cdot D = 0, \nabla \times H - \frac{\partial D}{\partial t} = 0$ (電束 $D = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E}$, 磁場 $H = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B}$)
- 生成子 (保存量): 積分形ガウスの法則で使う閉曲面 (マクスウェル・アンペールの方は線積分を時間的に伸ばす)

$$U_{1E}(S) = \exp\left(\frac{2\pi i}{p} \int_S D \cdot dS\right), \quad \exp\left(\frac{2\pi i}{p} \int_S H \cdot drdt\right)$$

- 群は \mathbb{Z}_p ($p = \gcd(N, q)$): 電磁力線は mod p でのみ保存する

アクシオンとヒッグス場がそれぞれ N, q 本の電磁力線を吸収してしまう。(技術的には、 U_{1E} の large gauge invariance から従う)

- U_{1E} それ自体を磁束渦や電場とみなせる。AB 位相は $e^{2\pi i/p}$.

$$\frac{2\pi}{p} \int_S H \cdot drdt \text{ がある元での } b_{\mu\nu} \text{ の EOM: } B \sim \frac{2\pi}{p} \delta(x)\delta(y)$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu \left(\frac{q}{2\pi} b_{\rho\sigma} + \frac{N}{4\pi^2} \phi f_{\rho\sigma} \right) = 0, \quad U_{1E}(S) = \exp\left(\frac{2\pi i}{p} \int_S dS^{\mu\nu} \left(\frac{q}{2\pi} b_{\mu\nu} + \frac{N}{4\pi^2} \phi f_{\mu\nu} \right)\right)$$

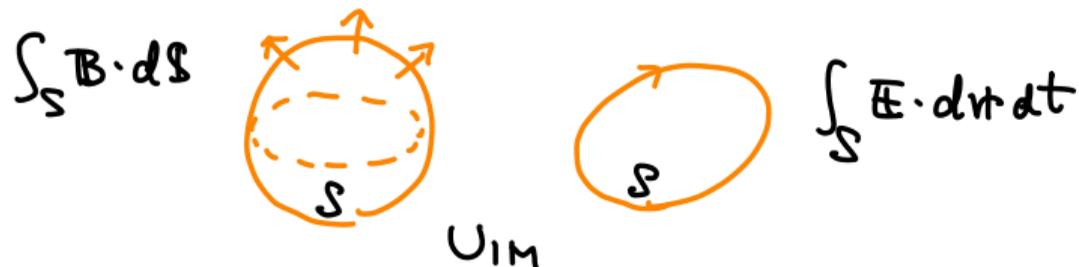
光子に関する高次対称性 2/3: 磁氣的 $U(1)$ 1次対称性

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad \text{U(1)} \quad \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} dt$$


- 保存則: ビアンキ恒等式 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$

$$\partial_\mu \tilde{f}^{\mu\nu} = 0$$

光子に関する高次対称性 2/3: 磁氣的 $U(1)$ 1次対称性

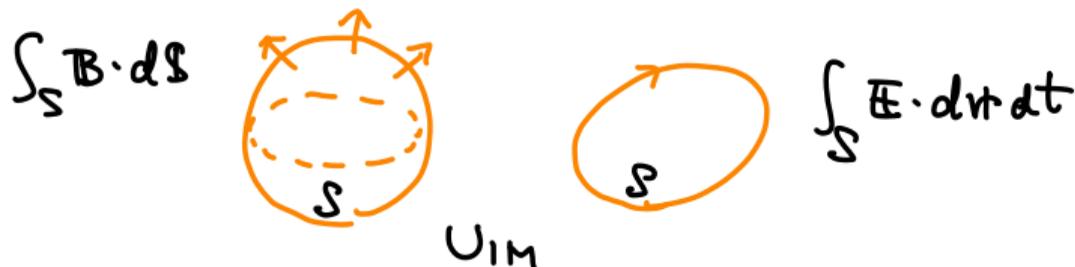


- 保存則: ビアンキ恒等式 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$
- 生成子: ガウスの法則で使う閉曲面

$$U_{1M}(S) = \exp\left(i\alpha \cdot \frac{1}{2\pi} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}\right), \quad \exp\left(i\alpha \cdot \frac{1}{2\pi} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} dt\right)$$

$$\partial_\mu \tilde{f}^{\mu\nu} = 0, \quad U_{1M}(S) = \exp\left(i\alpha \cdot \frac{1}{2\pi} \int_S dS^{\mu\nu} f_{\mu\nu}\right)$$

光子に関する高次対称性 2/3: 磁氣的 $U(1)$ 1次対称性



- 保存則: ビアンキ恒等式 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$
- 生成子: ガウスの法則で使う閉曲面

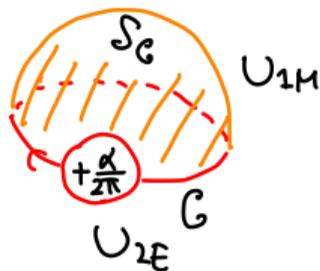
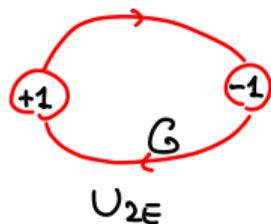
$$U_{1M}(S) = \exp\left(i\alpha \cdot \frac{1}{2\pi} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}\right), \quad \exp\left(i\alpha \cdot \frac{1}{2\pi} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} dt\right)$$

- 群は $U(1) \ni e^{i\alpha}$: 整数個の磁束を数えられる

(注 1: 磁気単極子が動的に生成されないので遮蔽を受けない。注 2: 量子数が整数なら群は $U(1)$)

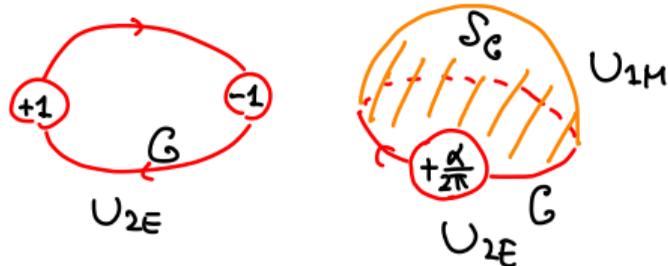
$$\partial_\mu \tilde{f}^{\mu\nu} = 0, \quad U_{1M}(S) = \exp\left(i\alpha \cdot \frac{1}{2\pi} \int_S dS^{\mu\nu} f_{\mu\nu}\right)$$

光子に関する高次対称性 3/3: \mathbb{Z}_q 2次対称性



- 保存則: $b_{\mu\nu}$ の運動方程式 $f_{\mu\nu} = 0$. 物理的には、電荷間に長距離力が働かないという意味。

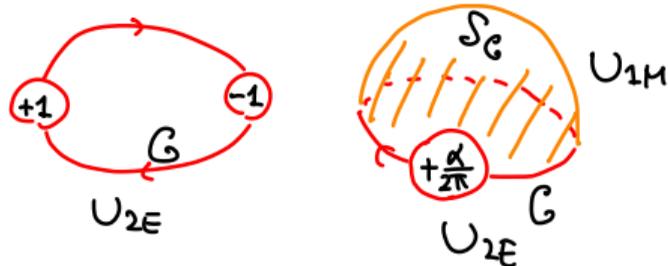
光子に関する高次対称性 3/3: \mathbb{Z}_q 2次対称性



- 保存則: $b_{\mu\nu}$ の運動方程式 $f_{\mu\nu} = 0$. 物理的には、電荷間に長距離力が働かないという意味。
- 生成子: 整数電荷を持つ試験電荷の世界線 (ウィルソン・ループのこと)

$$U_{2E}(C) = \exp\left(i \int_C a_\mu dx^\mu\right)$$

光子に関する高次対称性 3/3: \mathbb{Z}_q 2次対称性



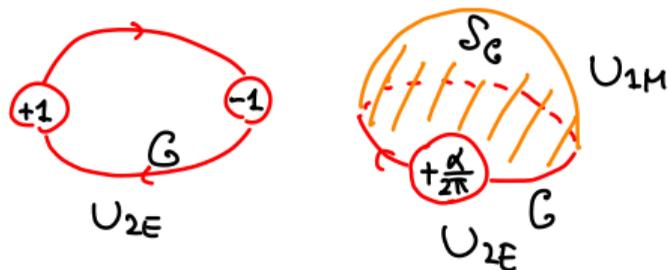
- 保存則: $b_{\mu\nu}$ の運動方程式 $f_{\mu\nu} = 0$. 物理的には、電荷間に長距離力が働かないという意味。
- 生成子: 整数電荷を持つ試験電荷の世界線 (ウィルソン・ループのこと)

$$U_{2E}(C) = \exp\left(i \int_C a_\mu dx^\mu\right)$$

- 群は \mathbb{Z}_q : U_{2E} は磁束渦由来のアハラノフ・ボーム (AB) 位相 $e^{2\pi i/q}$ を感じる

磁束渦由来の AB 位相: $\int_C a_\mu dx^\mu = \frac{1}{q} \int_C \partial_\mu \chi dx^\mu = \frac{2\pi}{q}$ (運動方程式の解 $\partial_\mu \chi - q a_\mu = 0$ を用いた)

光子に関する高次対称性 3/3: \mathbb{Z}_q 2次対称性



- 保存則: $b_{\mu\nu}$ の運動方程式 $f_{\mu\nu} = 0$. 物理的には、電荷間に長距離力が働かないという意味。
- 生成子: 整数電荷を持つ試験電荷の世界線 (ウィルソン・ループのこと)

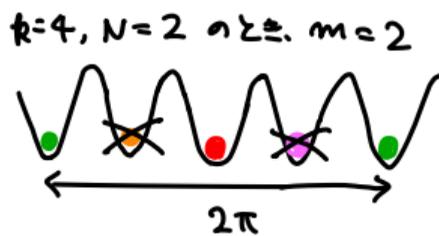
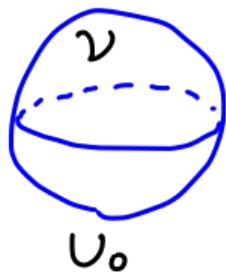
$$U_{2E}(C) = \exp\left(i \int_C a_\mu dx^\mu\right)$$

- 群は \mathbb{Z}_q : U_{2E} は磁束渦由来のアハラノフ・ボーム (AB) 位相 $e^{2\pi i/q}$ を感じる
- 整数電荷でない U_{2E} も考えられる。これは U_{1M} の境界としてのみ存在する (genuine でないウィルソン・ループ)

$$U_{2E}(C; \frac{\alpha}{2\pi}) = \exp\left(i \frac{\alpha}{2\pi} \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}\right) = \exp\left(i\alpha \frac{1}{2\pi} \int_{S_C} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}\right) \quad (\text{ストークスの定理})$$

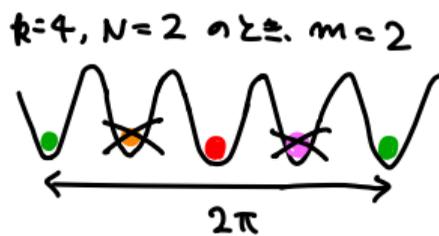
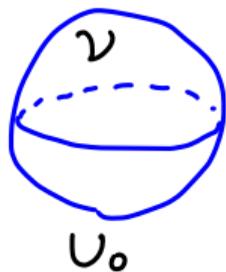
磁束渦由来の AB 位相: $\int_C a_\mu dx^\mu = \frac{1}{q} \int_C \partial_\mu \chi dx^\mu = \frac{2\pi}{q}$ (運動方程式の解 $\partial_\mu \chi - qa_\mu = 0$ を用いた)

アクシオンに関する高次対称性 1/3: \mathbb{Z}_m 0次対称性



アクシオンのシフト対称性のこと

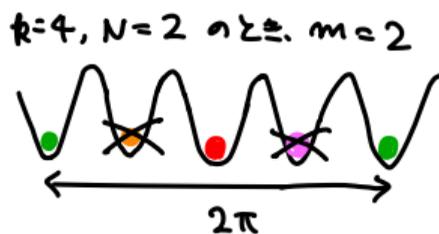
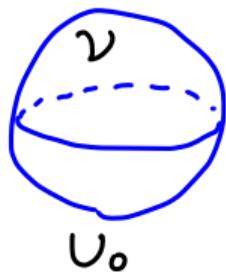
アクシオンに関する高次対称性 1/3: \mathbb{Z}_m 0次対称性



アクシオンのシフト対称性のこと

- 保存則: ϕ の運動方程式 $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\sigma \left(\frac{k}{2\pi} c_{\mu\nu\rho} + \frac{N}{8\pi^2} a_\mu \partial_\nu a_\rho \right) = 0$

アクシオンに関する高次対称性 1/3: \mathbb{Z}_m 0次対称性

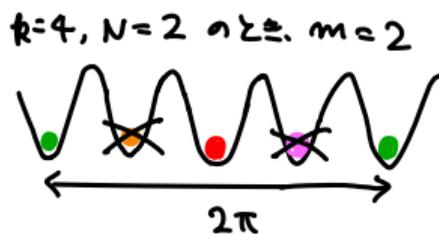
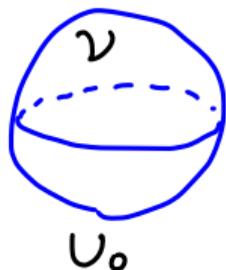


アクシオンのシフト対称性のこと

- 保存則: ϕ の運動方程式 $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\sigma \left(\frac{k}{2\pi} c_{\mu\nu\rho} + \frac{N}{8\pi^2} a_\mu \partial_\nu a_\rho \right) = 0$
- 生成子: アクシオン分域壁 $\int_{\mathcal{V}} dV^{\mu\nu\rho} c_{\mu\nu\rho}$ の中で、アクシオン・光子結合があっても安定なもの

$$U_0(\mathcal{V}) = \exp \left(\frac{2\pi i}{m} \int_{\mathcal{V}} dV^{\mu\nu\rho} \left(\frac{k}{2\pi} c_{\mu\nu\rho} + \frac{N}{8\pi^2} a_\mu \partial_\nu a_\rho \right) \right), \quad \text{変換則は } U_0 e^{i\phi} U_0^{-1} = e^{2\pi i/m} e^{i\phi}$$

アクシオンに関する高次対称性 1/3: \mathbb{Z}_m 0次対称性



アクシオンのシフト対称性のこと

- 保存則: ϕ の運動方程式 $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\sigma \left(\frac{k}{2\pi} c_{\mu\nu\rho} + \frac{N}{8\pi^2} a_\mu \partial_\nu a_\rho \right) = 0$
- 生成子: アクシオン分域壁 $\int_{\mathcal{V}} dV^{\mu\nu\rho} c_{\mu\nu\rho}$ の中で、アクシオン・光子結合があっても安定なもの

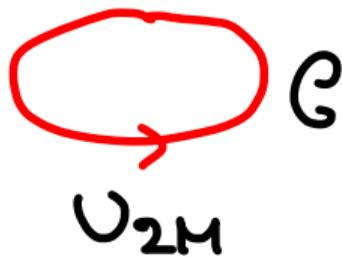
$$U_0(\mathcal{V}) = \exp \left(\frac{2\pi i}{m} \int_{\mathcal{V}} dV^{\mu\nu\rho} \left(\frac{k}{2\pi} c_{\mu\nu\rho} + \frac{N}{8\pi^2} a_\mu \partial_\nu a_\rho \right) \right), \quad \text{変換則は } U_0 e^{i\phi} U_0^{-1} = e^{2\pi i/m} e^{i\phi}$$

- 群は \mathbb{Z}_m ($m = \text{gcd}(N, k)$): ポテンシャル (\mathbb{Z}_k) とカイラル量子異常の残り (\mathbb{Z}_N) の共通部分

物理的意味: アクシオン・光子結合があるとトポロジカルに安定な分域壁が制限される

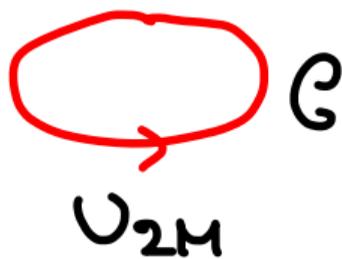
$m = 1$ だとトポロジカルに安定な分域壁がなくなる。cf. モノポールによるドメインウォール問題へのアプローチ [Sato, Takahashi, Yamada '18]

アクシオンに関する高次対称性 2/3: $U(1)$ 2次対称性



- 保存則: ビアンキ恒等式 $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma \phi = 0$ ($\nabla \times \nabla \phi = 0$)

アクシオンに関する高次対称性 2/3: $U(1)$ 2次対称性

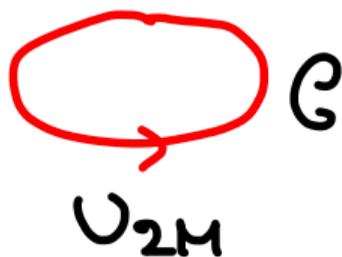


- 保存則: ビアンキ恒等式 $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma \phi = 0$ ($\nabla \times \nabla \phi = 0$)
- 生成子: アクシオンの巻きつき数を測るループ

$$U_{2M}(C) = \exp \left(i\alpha \frac{1}{2\pi} \int_C \partial_\mu \phi dx^\mu \right)$$

(M は磁氣的 (Magnetic) 対称性の M)

アクシオンに関する高次対称性 2/3: $U(1)$ 2次対称性



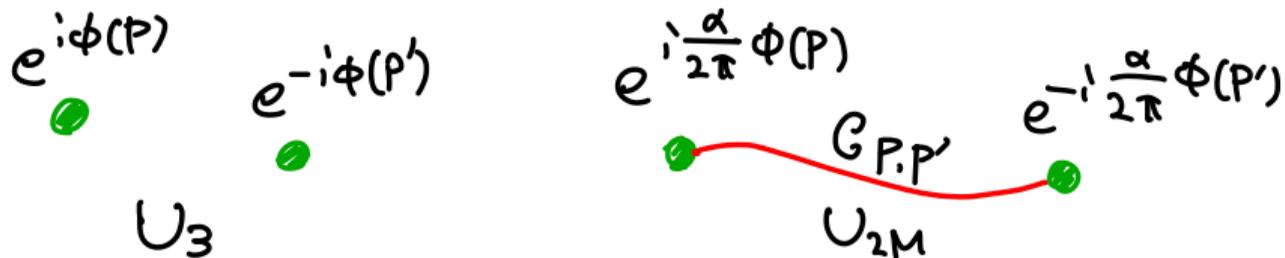
- 保存則: ビアンキ恒等式 $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma \phi = 0$ ($\nabla \times \nabla \phi = 0$)
- 生成子: アクシオンの巻きつき数を測るループ

$$U_{2M}(C) = \exp \left(i\alpha \frac{1}{2\pi} \int_C \partial_\mu \phi dx^\mu \right)$$

(M は磁氣的 (Magnetic) 対称性の M)

- 群は $U(1) \ni e^{i\alpha}$: 巻きつき数は整数個数えられる (アクシオン弦が動的に生成されないということ)

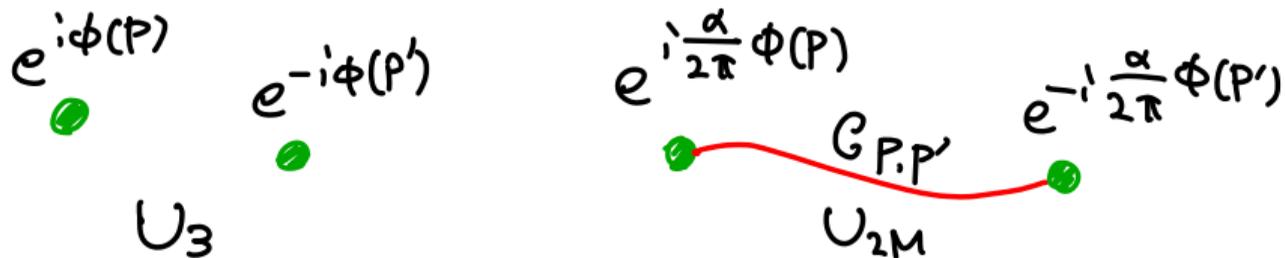
アクシオンに関する高次対称性 3/3: \mathbb{Z}_k 3次対称性



- 保存則: $c_{\mu\nu\rho}$ の運動方程式 $\partial_\mu\phi = 0$ (アクシオン間に長距離力が働かない)

$$\begin{array}{c}
 e^{i\phi} \quad \left| \quad e^{-i\phi} \\
 \text{---} \rightarrow \\
 \nabla\phi = \frac{2\pi}{k} \\
 = e^{\frac{2\pi i}{k}} \quad \left| \quad e^{i\phi} \quad e^{-i\phi}
 \end{array}$$

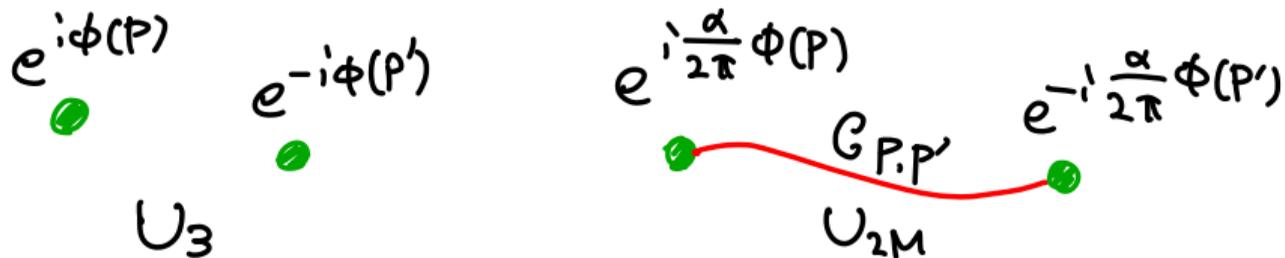
アクシオンに関する高次対称性 3/3: \mathbb{Z}_k 3次対称性



- 保存則: $c_{\mu\nu\rho}$ の運動方程式 $\partial_\mu\phi = 0$ (アクシオン間に長距離力が働かない)
- 生成子: アクシオン 2 点演算子 $U_3(P, P') = e^{i\phi(P) - i\phi(P')}$

$$\begin{array}{ccc}
 e^{i\phi} & & e^{-i\phi} \\
 \bullet & \cdots \rightarrow & \bullet \\
 & \downarrow & \\
 & \nabla\phi = \frac{2\pi}{k} & \\
 & & \\
 = e^{\frac{2\pi i}{k}} & | & e^{i\phi} \quad e^{-i\phi} \\
 & & \bullet \quad \bullet
 \end{array}$$

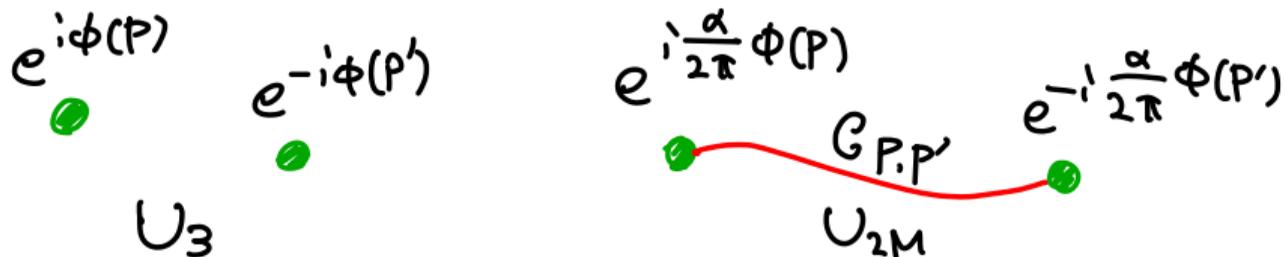
アクシオンに関する高次対称性 3/3: \mathbb{Z}_k 3次対称性



- 保存則: $c_{\mu\nu\rho}$ の運動方程式 $\partial_\mu\phi = 0$ (アクシオン間に長距離力が働かない)
- 生成子: アクシオン 2 点演算子 $U_3(P, P') = e^{i\phi(P) - i\phi(P')}$
- 群は \mathbb{Z}_k : U_3 は、2 点が分隔壁で隔てられているかを $e^{2\pi i/k}$ で感じる

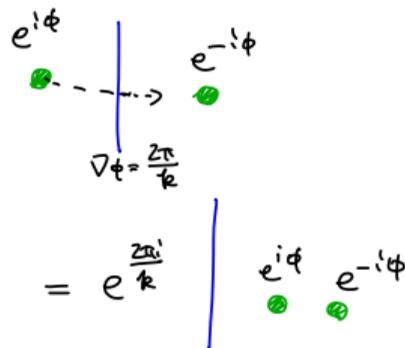
$$\begin{array}{ccc}
 e^{i\phi} & & e^{-i\phi} \\
 \bullet & \cdots \rightarrow & \bullet \\
 & \downarrow & \\
 & \nabla\phi = \frac{2\pi}{k} & \\
 & & \\
 = e^{\frac{2\pi i}{k}} & | & e^{i\phi} \quad e^{-i\phi} \\
 & & \bullet \quad \bullet
 \end{array}$$

アクシオンに関する高次対称性 3/3: \mathbb{Z}_k 3次対称性



- 保存則: $c_{\mu\nu\rho}$ の運動方程式 $\partial_\mu\phi = 0$ (アクシオン間に長距離力が働かない)
- 生成子: アクシオン 2 点演算子 $U_3(\mathcal{P}, \mathcal{P}') = e^{i\phi(\mathcal{P}) - i\phi(\mathcal{P}')}$
- 群は \mathbb{Z}_k : U_3 は、2 点が分隔壁で隔てられているかを $e^{2\pi i/k}$ で感じる
- 整数係数でない U_3 は U_2 の境界としてのみ存在する

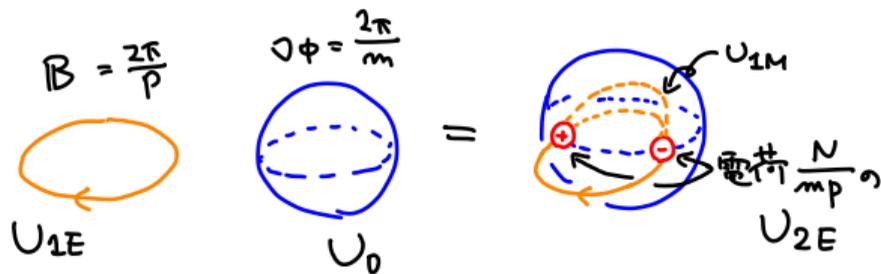
$$\exp\left(i\frac{\alpha}{2\pi}(\phi(\mathcal{P}) - \phi(\mathcal{P}'))\right) = \exp\left(i\alpha\frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{C}_{\mathcal{P},\mathcal{P}'}}\partial_\mu\phi dx^\mu\right)$$



高次対称性でトポロジカルソリトンの物理をみる [2 スライド]

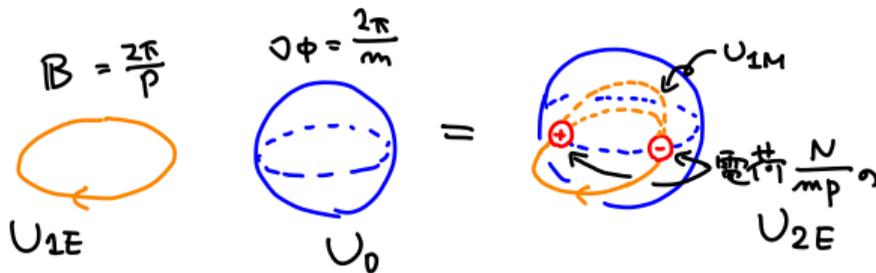
- Sikivie 効果
- 磁束渦に電場をかける

Sikivie 効果: $U_0 \times U_{1E} \rightarrow U_{1M} \times U_{2E}$



1. 磁場 U_{1E} と分域壁 U_0 を用意して、トポロジカルに動して交差させる

Sikivie 効果: $U_0 \times U_{1E} \rightarrow U_{1M} \times U_{2E}$



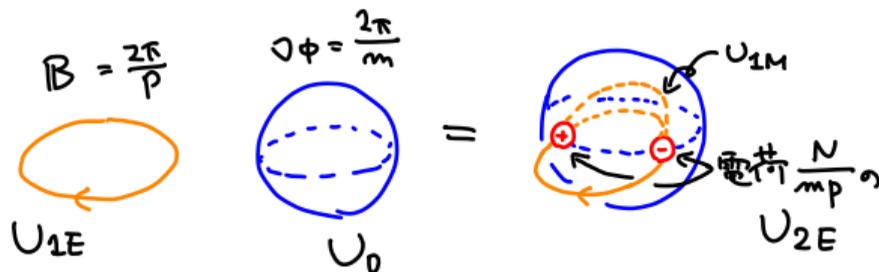
1. 磁場 U_{1E} と分域壁 U_0 を用意して、トポロジカルに動して交差させる

2. (一般には) 分数の誘導電荷が現れる $\frac{N}{4\pi^2} \nabla\phi \cdot \mathbf{B} = \frac{N}{4\pi^2} \frac{2\pi}{m} \cdot \frac{2\pi}{p} = \frac{N}{mp}$

$$m = \gcd(N, k); p = \gcd(N, q)$$

$$\text{まじめな計算: } \langle U_1(S_0)U_0(\mathcal{V}) \rangle = \left\langle \exp\left(i \frac{N}{mp} \int_{\Omega_{\mathcal{V}} \cap S_1} dS^{\mu\nu} f_{\mu\nu}\right) U_1(S_1)U_0(\mathcal{V}) \right\rangle, \quad \partial\Omega_{\mathcal{V}} = \mathcal{V}$$

Sikivie 効果: $U_0 \times U_{1E} \rightarrow U_{1M} \times U_{2E}$

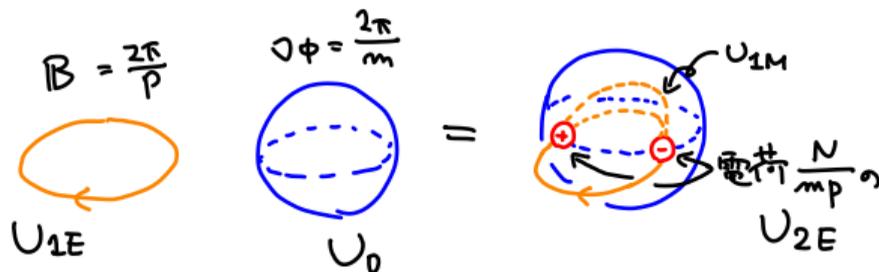


1. 磁場 U_{1E} と分域壁 U_0 を用意して、トポロジカルに動して交差させる
2. (一般には) 分数の誘導電荷が現れる $\frac{N}{4\pi^2} \nabla\phi \cdot \mathbf{B} = \frac{N}{4\pi^2} \frac{2\pi}{m} \cdot \frac{2\pi}{p} = \frac{N}{mp}$
3. U_{1M} を内部に持つ電荷 U_{2E} が誘起する:

$$m = \text{gcd}(N, k); p = \text{gcd}(N, q)$$

$$\text{まじめな計算: } \langle U_1(S_0)U_0(\mathcal{V}) \rangle = \left\langle \exp\left(i \frac{N}{mp} \int_{\Omega_{\mathcal{V}} \cap S_1} dS^{\mu\nu} f_{\mu\nu}\right) U_1(S_1)U_0(\mathcal{V}) \right\rangle, \quad \partial\Omega_{\mathcal{V}} = \mathcal{V}$$

Sikivie 効果: $U_0 \times U_{1E} \rightarrow U_{1M} \times U_{2E}$

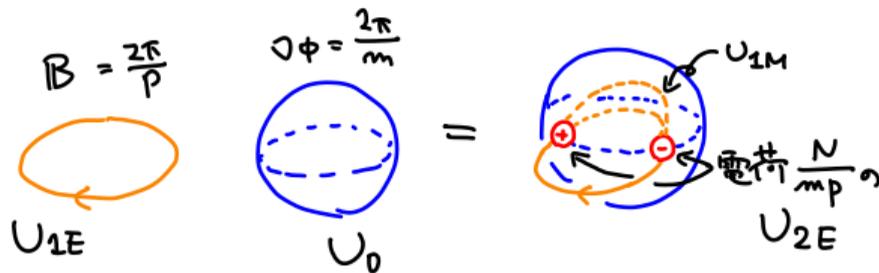


1. 磁場 U_{1E} と分域壁 U_0 を用意して、トポロジカルに動して交差させる
2. (一般には) 分数の誘導電荷が現れる $\frac{N}{4\pi^2} \nabla\phi \cdot \mathbf{B} = \frac{N}{4\pi^2} \frac{2\pi}{m} \cdot \frac{2\pi}{p} = \frac{N}{mp}$
3. U_{1M} を内部に持つ電荷 U_{2E} が誘起する: $U_{2E}(\mathcal{C}; \frac{N}{mp}) = \exp\left(i\frac{N}{mp} \int_{\mathcal{C}} a_{\mu} dx^{\mu}\right) = \exp\left(i\frac{N}{mp} \int_{S_{\mathcal{C}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} dt\right)$

$$m = \text{gcd}(N, k); p = \text{gcd}(N, q)$$

$$\text{まじめな計算: } \langle U_1(S_0)U_0(\mathcal{V}) \rangle = \left\langle \exp\left(i\frac{N}{mp} \int_{\Omega_{\mathcal{V}} \cap S_1} dS^{\mu\nu} f_{\mu\nu}\right) U_1(S_1)U_0(\mathcal{V}) \right\rangle, \quad \partial\Omega_{\mathcal{V}} = \mathcal{V}$$

Sikivie 効果: $U_0 \times U_{1E} \rightarrow U_{1M} \times U_{2E}$



1. 磁場 U_{1E} と分域壁 U_0 を用意して、トポロジカルに動して交差させる

2. (一般には) 分数の誘導電荷が現れる $\frac{N}{4\pi^2} \nabla\phi \cdot \mathbf{B} = \frac{N}{4\pi^2} \frac{2\pi}{m} \cdot \frac{2\pi}{p} = \frac{N}{mp}$

3. U_{1M} を内部に持つ電荷 U_{2E} が誘起する: $U_{2E}(\mathcal{C}; \frac{N}{mp}) = \exp\left(i\frac{N}{mp} \int_{\mathcal{C}} a_{\mu} dx^{\mu}\right) = \exp\left(i\frac{N}{mp} \int_{S_{\mathcal{C}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} dt\right)$

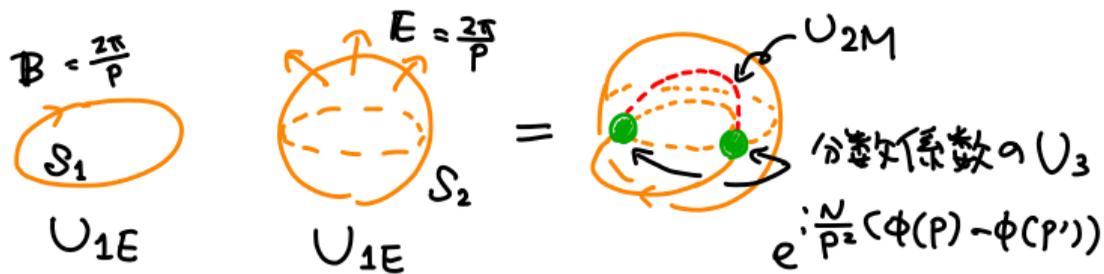
わかること: 2次対称性が $\mathbb{Z}_Q \ni e^{\frac{2\pi i}{q} \cdot \frac{N}{mp}}$ に拡大している。

誘導電荷で測る磁束渦の AB 位相: $\exp\left(i\frac{N}{mp} \int_{\mathcal{C}} a_{\mu} dx^{\mu}\right) = \exp\left(\frac{2\pi i}{q} \frac{N}{mp}\right)$

$$m = \text{gcd}(N, k); p = \text{gcd}(N, q)$$

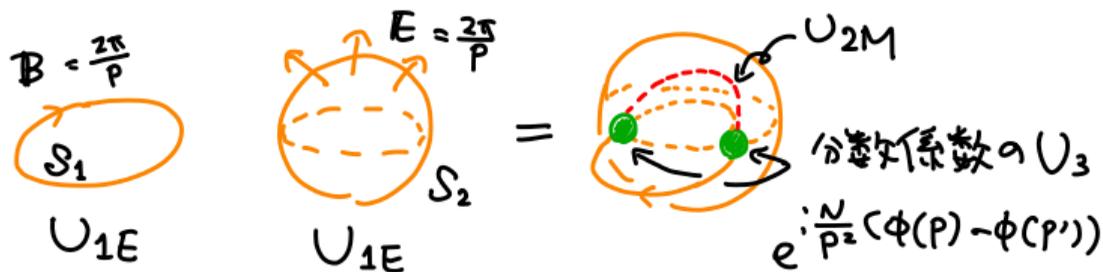
まじめな計算: $\langle U_1(S_0)U_0(\mathcal{V}) \rangle = \left\langle \exp\left(i\frac{N}{mp} \int_{\Omega_{\mathcal{V}} \cap S_1} dS^{\mu\nu} f_{\mu\nu}\right) U_1(S_1)U_0(\mathcal{V}) \right\rangle, \quad \partial\Omega_{\mathcal{V}} = \mathcal{V}$

磁束渦に電場をかける: $U_{1E} \times U_{1E} \rightarrow U_{2M} \times U_3$



1. 磁束渦 $U_{1E}(S_1)$ を用意し、それに電場 $U_{1E}(S_2)$ をトポロジカルに動かしてぶつける

磁束渦に電場をかける: $U_{1E} \times U_{1E} \rightarrow U_{2M} \times U_3$



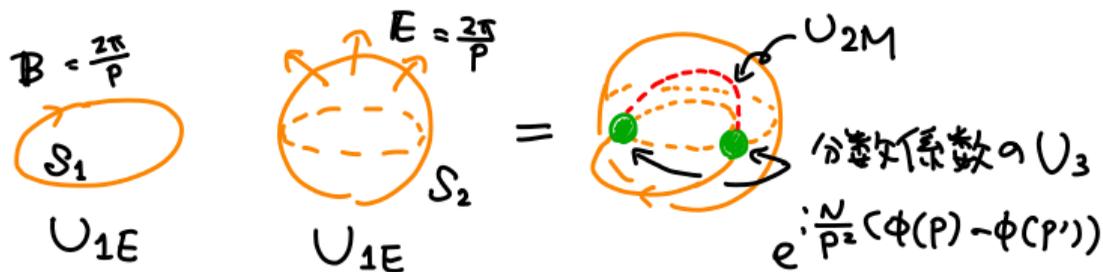
1. 磁束渦 $U_{1E}(S_1)$ を用意し、それに電場 $U_{1E}(S_2)$ をトポロジカルに動かしてぶつける
2. (一般には) 分数のアクシオン演算子が現れる $\frac{N}{4\pi^2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \frac{N}{4\pi^2} \frac{2\pi}{p} \cdot \frac{2\pi}{p} = \frac{N}{p^2}$ ($\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ はアクシオンのソース)

$$p = \text{gcd}(N, q)$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \text{ はアクシオンのソース項とみなせる: } \partial_\mu \partial^\mu \phi - m^2 \phi = \frac{N}{4\pi^2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$$

$$\text{まじめな計算: } \langle U_{1E}(S_0) U_{1E}(S') \rangle = \left\langle \exp \left(i \frac{N}{p^2} \int_{\mathcal{V}_{S'} \cap S_1} d\phi \right) U_{1E}(S_1) U_{1E}(S') \right\rangle, \quad \partial \mathcal{V}_{S'} = S'$$

磁束渦に電場をかける: $U_{1E} \times U_{1E} \rightarrow U_{2M} \times U_3$



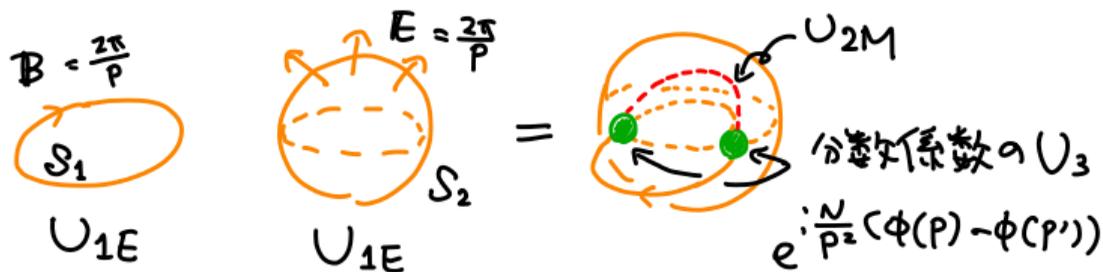
1. 磁束渦 $U_{1E}(S_1)$ を用意し、それに電場 $U_{1E}(S_2)$ をトポロジカルに動かしてぶつける
2. (一般には) 分数のアクシオン演算子が現れる $\frac{N}{4\pi^2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \frac{N}{4\pi^2} \frac{2\pi}{p} \cdot \frac{2\pi}{p} = \frac{N}{p^2}$ ($\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ はアクシオンのソース)
3. U_{2M} を境界を持つ U_3 が誘起した

$$p = \text{gcd}(N, q)$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \text{ はアクシオンのソース項とみなせる: } \partial_\mu \partial^\mu \phi - m^2 \phi = \frac{N}{4\pi^2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$$

$$\text{まじめな計算: } \langle U_{1E}(S_0) U_{1E}(S') \rangle = \left\langle \exp \left(i \frac{N}{p^2} \int_{\mathcal{V}_{S'} \cap S_1} d\phi \right) U_{1E}(S_1) U_{1E}(S') \right\rangle, \quad \partial \mathcal{V}_{S'} = S'$$

磁束渦に電場をかける: $U_{1E} \times U_{1E} \rightarrow U_{2M} \times U_3$



1. 磁束渦 $U_{1E}(S_1)$ を用意し、それに電場 $U_{1E}(S_2)$ をトポロジカルに動かしてぶつける
2. (一般には) 分数のアクシオン演算子が現れる $\frac{N}{4\pi^2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \frac{N}{4\pi^2} \frac{2\pi}{p} \cdot \frac{2\pi}{p} = \frac{N}{p^2}$ ($\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ はアクシオンのソース)
3. U_{2M} を境界を持つ U_3 が誘起した

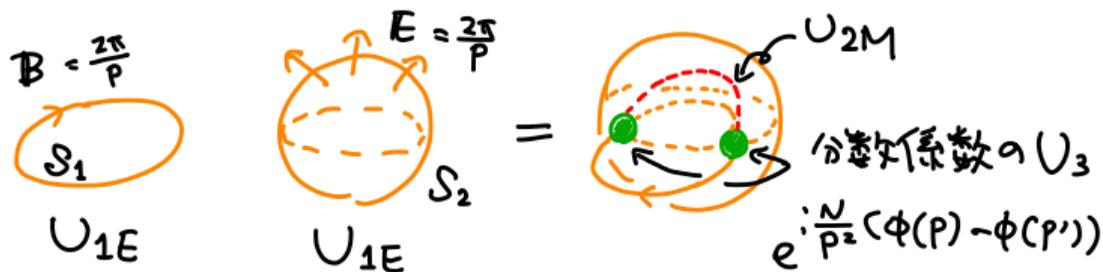
$$U_3(P, P'; \frac{N}{p^2}) = \exp\left(i\frac{N}{p^2}(\phi(P) - \phi(P'))\right) = \exp\left(i\frac{N}{p^2} \int_{\mathcal{C}_{P, P'}} \partial_\mu \phi dx^\mu\right)$$

$p = \text{gcd}(N, q)$

$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ はアクシオンのソース項とみなせる: $\partial_\mu \partial^\mu \phi - m^2 \phi = \frac{N}{4\pi^2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$

まじめな計算: $\langle U_{1E}(S_0) U_{1E}(S') \rangle = \left\langle \exp\left(i\frac{N}{p^2} \int_{\mathcal{V}_{S' \cap S_1}} d\phi\right) U_{1E}(S_1) U_{1E}(S') \right\rangle, \quad \partial \mathcal{V}_{S'} = S'$

磁束渦に電場をかける: $U_{1E} \times U_{1E} \rightarrow U_{2M} \times U_3$



1. 磁束渦 $U_{1E}(S_1)$ を用意し、それに電場 $U_{1E}(S_2)$ をトポロジカルに動かしてぶつける
2. (一般には) 分数のアクシオン演算子が現れる $\frac{N}{4\pi^2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \frac{N}{4\pi^2} \frac{2\pi}{p} \cdot \frac{2\pi}{p} = \frac{N}{p^2}$ ($\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ はアクシオンのソース)
3. U_{2M} を境界を持つ U_3 が誘起した

$$U_3(P, P'; \frac{N}{p^2}) = \exp\left(i \frac{N}{p^2} (\phi(P) - \phi(P'))\right) = \exp\left(i \frac{N}{p^2} \int_{C_{P, P'}} \partial_\mu \phi dx^\mu\right)$$

わかること: 3次対称性が $\mathbb{Z}_K \ni e^{\frac{2\pi i}{k} \cdot \frac{N}{p^2}}$ に拡大している。

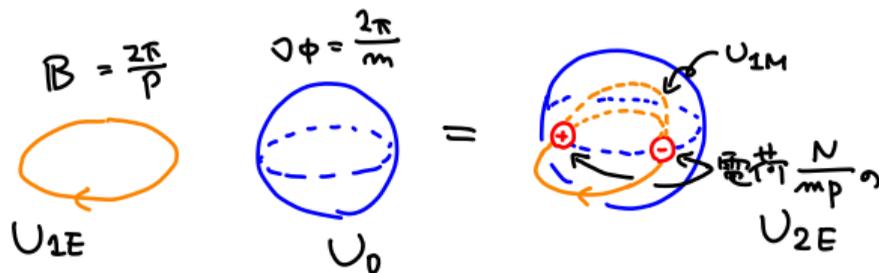
誘起したアクシオンで分域壁を測る: $\exp\left(i \frac{N}{p^2} (\phi(P) - \phi(P'))\right) = \exp\left(\frac{2\pi i}{k} \cdot \frac{N}{p^2}\right)$

$p = \text{gcd}(N, q)$

$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ はアクシオンのソース項とみなせる: $\partial_\mu \partial^\mu \phi - m^2 \phi = \frac{N}{4\pi^2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$

まじめな計算: $\langle U_{1E}(S_0) U_{1E}(S') \rangle = \left\langle \exp\left(i \frac{N}{p^2} \int_{\mathcal{V}_{S'} \cap S_1} d\phi\right) U_{1E}(S_1) U_{1E}(S') \right\rangle, \quad \partial \mathcal{V}_{S'} = S'$

対称性の生成子の交差から別の対称性が出てきた



対称性の生成子の相関 (カレント代数) \rightarrow 群構造

- 通常対称性: $0 \text{ 次} \times 0 \text{ 次} = 0 \text{ 次} \rightarrow$ 通常 (非可換) 群
 - 角運動量の代数 $SO(3), SO(3, 1)$
 - ハドロン物理における $SU(N)$ カレント代数
 - 2d CFT の Virasoro 代数
- 高次対称性の生成子の相関 = ??? 群

この高次対称性の相関を記述する群は何か？

トポロジカルアクシオン電磁気学における 4 群 [5 スライド]

4 群とは？

[Arvasi, et al. '09]

正確には、3-crossed module や semi-strict 4-group などと呼ばれる

群の 4 つ組で、次の公理を満たすもの (今回使うもののみ。あと約 20 個の公理がある。)

- 4 つの群 G_0, G_1, G_2, G_3
- 群の間の写像 $G_3 \xrightarrow{\partial_3} G_2 \xrightarrow{\partial_2} G_1 \xrightarrow{\partial_1} G_0$ ただし、 $\partial_n \circ \partial_{n-1} g = 1$
- G_0 から他の群への作用 (adjoint 変換の一般化) $\triangleright: g \triangleright g' = gg'g^{-1}$ for $g, g' \in G_0$, $g \triangleright h \in G_1$ for $h \in G_1, \dots$
- パイファー (Peiffer) ・リフティング $\{h, h'\} \in G_2$ for $h, h' \in G_1$
- これらの間の整合性: $g \triangleright \{h, h'\} = \{g \triangleright h, g \triangleright h'\}$ など

4 群とは？

[Arvasi, et al. '09]

正確には、3-crossed module や semi-strict 4-group などと呼ばれる

群の 4 つ組で、次の公理を満たすもの (今回使うもののみ。あと約 20 個の公理がある。)

- 4 つの群 G_0, G_1, G_2, G_3
- 群の間の写像 $G_3 \xrightarrow{\partial_3} G_2 \xrightarrow{\partial_2} G_1 \xrightarrow{\partial_1} G_0$ ただし、 $\partial_n \circ \partial_{n-1} g = 1$
- G_0 から他の群への作用 (adjoint 変換の一般化) $\triangleright: g \triangleright g' = gg'g^{-1}$ for $g, g' \in G_0, g \triangleright h \in G_1$ for $h \in G_1, \dots$
- パイファー (Peiffer) ・リフティング $\{h, h'\} \in G_2$ for $h, h' \in G_1$
- これらの間の整合性: $g \triangleright \{h, h'\} = \{g \triangleright h, g \triangleright h'\}$ など

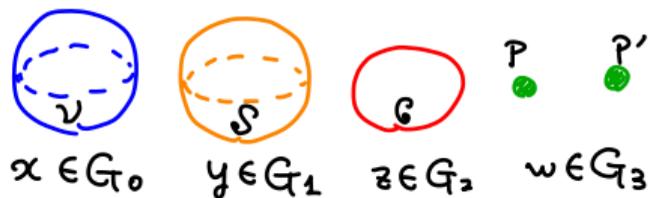
物理的な解釈をしたい

4 群の物理的解釈: 互いに相関する 0,1,2,3 次対称性の組 (1/2)

[cf. Hidaka, Nitta, RY '20]

次の解釈で公理を満たせる (これから使うものに関してはこれで OK)

- 4 つの群 G_0, G_1, G_2, G_3 : それぞれの群でラベルされた 0, 1, 2, 3 次対称性の生成子



- 群間の写像 $G_3 \xrightarrow{\partial_3} G_2 \xrightarrow{\partial_2} G_1 \xrightarrow{\partial_1} G_0$: 生成子の内部をとる操作。

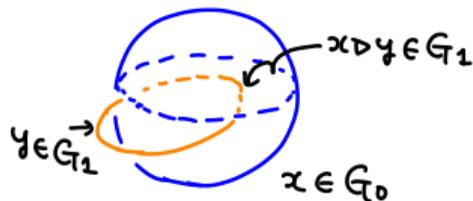


$\partial_{n-1} \circ \partial_n g = 1$: 内部の内部は何もない (境界の境界は何もない)

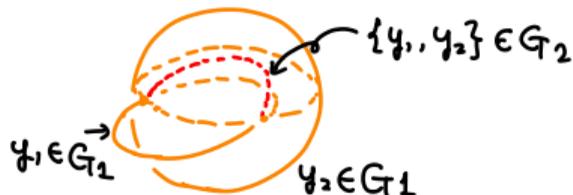
4群の物理的解釈: 互いに相関する 0,1,2,3 次対称性の組 (2/2)

[cf. Hidaka, Nitta, RY '20]

- G_0 から他の群への作用 ▷: 0 次対称性の生成子を他の生成子に当てる (正確にはきちんと包む)



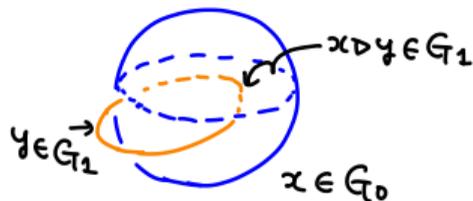
- パイファー (Peiffer) ・リフティング: 1 次対称性の生成子同士を当てる (正確にはきちんと包む (surface link と呼ばれる))



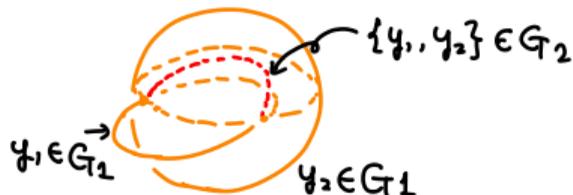
4群の物理的解釈: 互いに相関する 0,1,2,3 次対称性の組 (2/2)

[cf. Hidaka, Nitta, RY '20]

- G_0 から他の群への作用 ▷: 0 次対称性の生成子を他の生成子に当てる (正確にはきちんと包む)



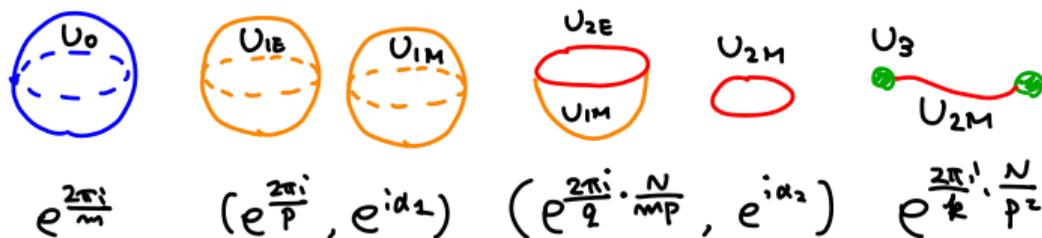
- パイファー (Peiffer) ・リフティング: 1 次対称性の生成子同士を当てる (正確にはきちんと包む (surface link と呼ばれる))



Sikivie 効果や磁束と電場の相関を表現できそう

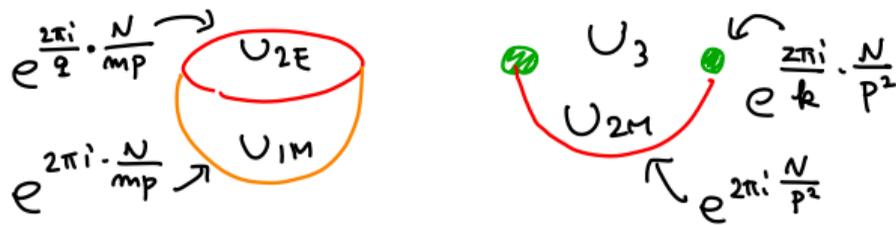
トポロジカルアクシオン電磁気学における 4 群 (1/2)

- 4 つの群 $G_0 = \mathbb{Z}_m$, $G_1 = \mathbb{Z}_p \times U(1)$, $G_2 = \mathbb{Z}_Q \times U(1)$, $G_3 = \mathbb{Z}_K$



- 群の間の写像: $G_3 \xrightarrow{\partial_3} G_2 \xrightarrow{\partial_2} G_1$:

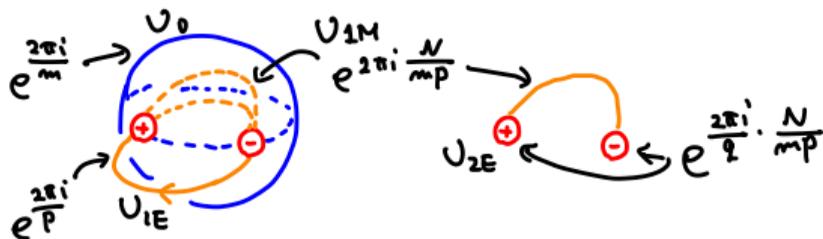
$$\partial_2(e^{\frac{2\pi i}{q} \cdot \frac{N}{mp}}, e^{i\alpha_2}) = (1, e^{2\pi i \frac{N}{mp}}), \quad \partial_3 e^{\frac{2\pi i}{k} \cdot \frac{N}{p^2}} = (1, e^{2\pi i \frac{N}{p^2}})$$



$$\partial_2 \circ \partial_3 e^{\frac{2\pi i}{k} \cdot \frac{N}{p^2}} = 1 \text{ も満たしている}$$

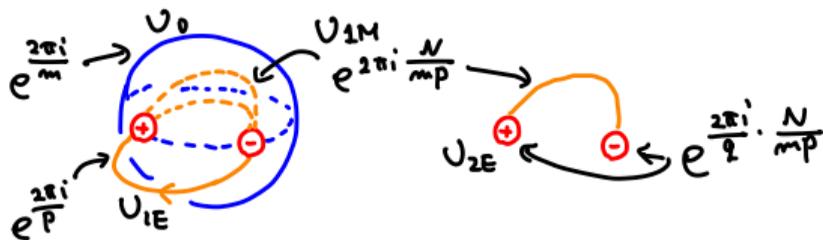
トポロジカルアクシオン電磁気学における 4 群 (2/2)

- G_0 から G_1 への作用: $e^{2\pi i/m} \triangleright (e^{2\pi i/p}, e^{i\alpha_1}) = (1, e^{2\pi i \frac{N}{mp}}) \cdot (e^{2\pi i/p}, e^{i\alpha_1})$



トポロジカルアクシオン電磁気学における 4 群 (2/2)

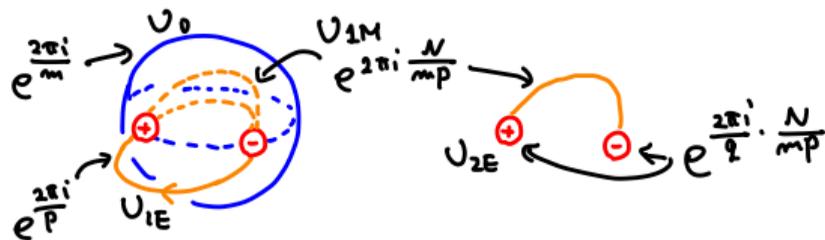
- G_0 から G_1 への作用: $e^{2\pi i/m} \triangleright (e^{2\pi i/p}, e^{i\alpha_1}) = (1, e^{2\pi i \frac{N}{mp}}) \cdot (e^{2\pi i/p}, e^{i\alpha_1})$



作用で出てくる $e^{2\pi i \frac{N}{mp}}$ は ∂_2 の像である: $(1, e^{2\pi i \frac{N}{mp}}) = \partial_2(e^{\frac{2\pi i}{q} \cdot \frac{N}{mp}}, 1)$

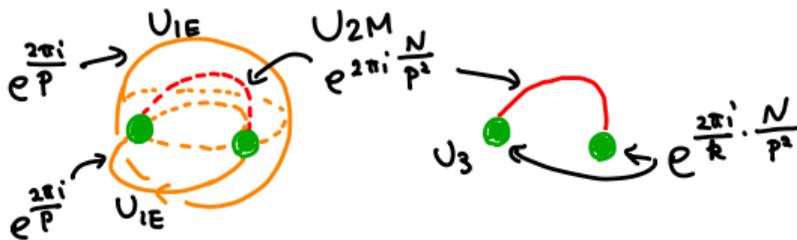
トポロジカルアクシオン電磁気学における 4 群 (2/2)

- G_0 から G_1 への作用: $e^{2\pi i/m} \triangleright (e^{2\pi i/p}, e^{i\alpha_1}) = (1, e^{2\pi i \frac{N}{mp}}) \cdot (e^{2\pi i/p}, e^{i\alpha_1})$



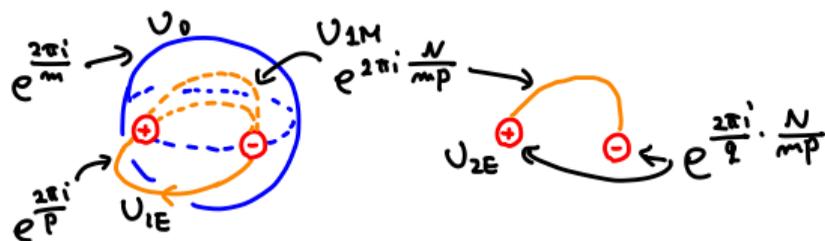
作用で出てくる $e^{2\pi i \frac{N}{mp}}$ は ∂_2 の像である: $(1, e^{2\pi i \frac{N}{mp}}) = \partial_2(e^{\frac{2\pi i}{q} \cdot \frac{N}{mp}}, 1)$

- パイファー (Peiffer) ・リフティング: $\{(e^{2\pi i/p}, e^{i\alpha_1}), (e^{2\pi i/p}, e^{i\alpha'_1})\} = (1, e^{2\pi i \frac{N}{p^2}}) = \partial_3 e^{\frac{2\pi i}{k} \cdot \frac{N}{p^2}}$



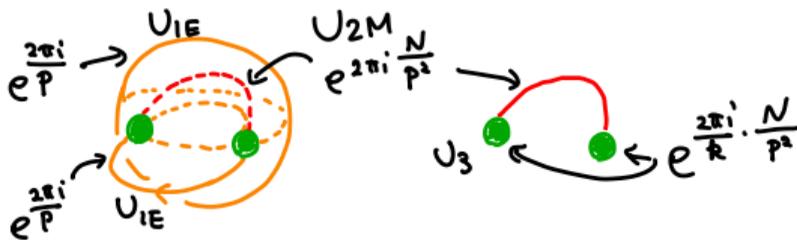
トポロジカルアクシオン電磁気学における 4 群 (2/2)

- G_0 から G_1 への作用: $e^{2\pi i/m} \triangleright (e^{2\pi i/p}, e^{i\alpha_1}) = (1, e^{2\pi i \frac{N}{mp}}) \cdot (e^{2\pi i/p}, e^{i\alpha_1})$



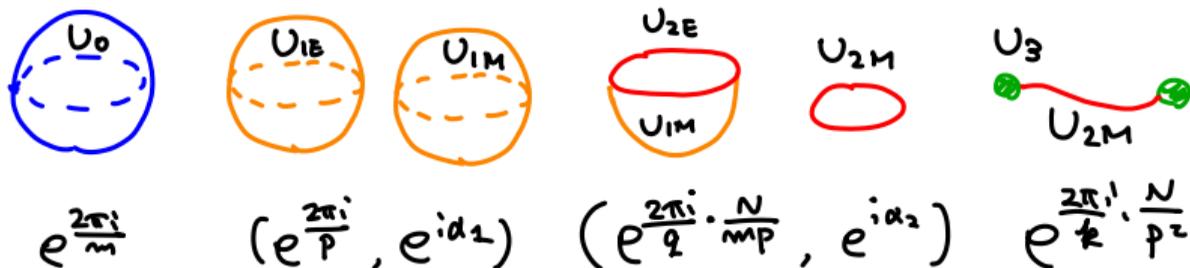
作用で出てくる $e^{2\pi i \frac{N}{mp}}$ は ∂_2 の像である: $(1, e^{2\pi i \frac{N}{mp}}) = \partial_2(e^{\frac{2\pi i}{q} \cdot \frac{N}{mp}}, 1)$

- パイファー (Peiffer) ・リフティング: $\{(e^{2\pi i/p}, e^{i\alpha_1}), (e^{2\pi i/p}, e^{i\alpha'_1})\} = (1, e^{2\pi i \frac{N}{p^2}}) = \partial_3 e^{\frac{2\pi i}{k} \cdot \frac{N}{p^2}}$



パイファー・リフティングで出てくる $e^{2\pi i \frac{N}{p^2}}$ は ∂_3 の像である: $(1, e^{2\pi i \frac{N}{p^2}}) = \partial_3 e^{\frac{2\pi i}{k} \cdot \frac{N}{p^2}}$

まとめ



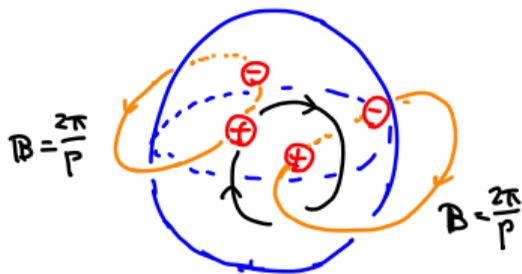
トポロジカルアクシオン電磁気学には「4 群」で記述される大域的対称性が存在する

- トポロジカルアクシオン電磁気学には、0,1,2,3 次対称性が存在して、それらは 4 群として記述される
- Sikivie 効果やは、4 群の「作用」として理解できる
- 磁束と電場の相関は、4 群の「パイファー・リフティング」として理解できる

今後の課題:

- 既知の物理に非自明な高次対称性があるかも
e.g., Lazarides-Shafi 機構はどうか？ アリス弦には非可逆対称性があるが・・・ [Heidenreich et al, '21]
- 対称性の構造から新しい物理を引き出せないか？

応用: アクシオン分域壁はトポロジカル秩序相になっている



誘起された電場 or 磁場は省略した

- トポロジカル秩序相: トポロジカルな物体に分数 AB 効果がある有質量ギャップ相 (とてもラフな説明)

応用例: 可換ヒッグス模型を、ヒッグス場の電荷 $q =$ 磁束渦周りの分数 AB 位相 $e^{2\pi i/q}$ で分類できる

- アクシオン分域壁の場合: Sikivie 効果で作った誘導電荷が感じる AB 位相は分数位相になる

$$\exp\left(i\frac{N}{mp}\int_C a_\mu dx^\mu\right) = \exp\left(2\pi i\frac{N}{mp^2}\right) \left(\int_C a_\mu dx^\mu = \frac{2\pi}{p}\text{ を用いた}\right)$$

Bibliography

Bibliography - I

- [1] Y. Hidaka, M. Nitta, and R. Yokokura, "Topological axion electrodynamics and 4-group symmetry," arXiv:2107.08753 [hep-th].
(pages 1, 18).
- [2] Y. Hidaka, M. Nitta, and R. Yokokura, "Global 4-group symmetry and 't Hooft anomalies in topological axion electrodynamics," arXiv:2108.12564 [hep-th].
(pages 1, 18).
- [3] I. I. Kogan, "Axions, monopoles and cosmic strings," arXiv:hep-ph/9305307.
(pages 4, 5, 6, 7, 19, 20).
- [4] X.-L. Qi, E. Witten, and S.-C. Zhang, "Axion topological field theory of topological superconductors," Phys. Rev. B **87** (2013) 134519, [arXiv:1206.1407 [cond-mat.supr-con]].
(pages 4, 5, 6, 7).
- [5] F. Wilczek, "Two Applications of Axion Electrodynamics," Phys. Rev. Lett. **58** (1987) 1799.
(pages 4, 5, 6, 7).
- [6] P. Sikivie, "On the Interaction of Magnetic Monopoles With Axionic Domain Walls," Phys. Lett. **137B** (1984) 353–356.
(pages 8, 9, 10, 11, 12).
- [7] T. H. Hansson, V. Oganesyan, and S. L. Sondhi, "Superconductors are topologically ordered," Annals Phys. **313** (2004) no. 2, 497–538, [arXiv:cond-mat/0404327 [cond-mat.supr-con]].
(pages 13, 14, 15).
- [8] D. Gaiotto, A. Kapustin, N. Seiberg, and B. Willett, "Generalized Global Symmetries," JHEP **02** (2015) 172, [arXiv:1412.5148 [hep-th]].
(pages 13, 14, 15).
- [9] E. Cremmer and J. Scherk, "Spontaneous dynamical breaking of gauge symmetry in dual models," Nucl. Phys. **B72** (1974) 117–124.
(pages 21, 22, 23, 24, 25).

Bibliography - II

- [10] A. Aurilia, Y. Takahashi, and P. K. Townsend, "The U(1) Problem and the Higgs Mechanism in Two-dimensions and Four-dimensions," *Phys. Lett.* **95B** (1980) 265–268.
(pages 21, 22, 23, 24, 25).
- [11] A. Sugamoto, "Dual Transformation in Abelian Gauge Theories," *Phys. Rev.* **D19** (1979) 1820.
(pages 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32).
- [12] R. Sato, F. Takahashi, and M. Yamada, "Unified Origin of Axion and Monopole Dark Matter, and Solution to the Domain-wall Problem," *Phys. Rev. D* **98** (2018) no. 4, 043535, [arXiv:1805.10533 [hep-ph]].
(pages 45, 46, 47, 48).
- [13] Z. Arvasi, T. S. Kuzpinari, and E. O. Uslu, "Three-crossed modules," *Homology, Homotopy and Applications* **11** (2009) no. 2, 161–187, [arXiv:0812.4685].
(pages 69, 70).
- [14] Y. Hidaka, M. Nitta, and R. Yokokura, "Global 3-group symmetry and 't Hooft anomalies in axion electrodynamics," *JHEP* **01** (2021) 173, [arXiv:2009.14368 [hep-th]].
(pages 71, 72, 73).
- [15] Y. Tanizaki and M. Ünsal, "Modified instanton sum in QCD and higher-groups," *JHEP* **03** (2020) 123, [arXiv:1912.01033 [hep-th]].
(pages 75, 76, 77, 78).
- [16] B. Heidenreich, J. McNamara, M. Montero, M. Reece, T. Rudelius, and I. Valenzuela, "Non-Invertible Global Symmetries and Completeness of the Spectrum," arXiv:2104.07036 [hep-th].
(page 79).