

Spectral graph theory を用いた 格子 Dirac 演算子の新たな解析法

湯本 純¹, 三角樹弘²

¹ 秋田大学理工学研究科 理論物理学研究室 ² 近畿大学

September 9, 2021

Background: ダブリング問題と no-go 定理

格子上の場の理論には ダブリング問題 と呼ばれる難問が存在する。

ダブリング問題

chiral charge の正と負が対となっている格子 fermion が複数出現する。

4 dimensional naive fermion では、**16 個**も出現する。

以降、これら複数の fermion を doubler と呼ぶ。

この問題を定理として厳密に定式化したものが
「Nielsen-Ninomiya's no-go theorem」

この問題を回避するための方法として以下があるが、デメリットも存在する。

Wilson fermion (chirality を破る)	→	mass parameter の調整
domain-wall fermion (locality を破る)	→	高い計算コスト

現在でもダブリング問題を回避する新たな手法が模索されている。

これまでの doubler に関する研究で以下が判明した。

- doubler の数は，離散化された時空 (多様体) に依存
Ex. d 次元球体 B^d : 最大 1 個 2 次元球面 S^2 : 最大 2 個
- no-go 定理は，周期的境界条件を課した格子にのみ適用可能

これらの結果から次のことが言える。

- ▶ doubler 数の詳細を与える幾何学的定理が存在
- ▶ ある格子離散化された多様体上では
最小の doubler 数を持つ新たな格子作用を構成することが可能

任意の doubler 数を持つ格子作用を構成するために

no-go 定理を包含し且つ doubler 数の詳細を与える
新たな定理の構成が必要不可欠

新しい定理を構成するために position space における格子作用に注目する。

$$S = \sum_{m,n} \bar{\psi}_m \mathcal{D}_{mn} \psi_n \quad (1)$$

$\bar{\psi}, \psi$ は fermi 場を表す。 m, n は正方格子上の格子点を表す整数の組 $n = (n_1, n_2, n_3, n_4)$ とする。

position space において

格子 Dirac 演算子は, \mathcal{D}_{mn} を m, n 成分として持つ行列とみなせる。

行列 \mathcal{D} の **Dirac ゼロ固有状態**が Dirac fermion の励起状態となる。

行列 \mathcal{D} のゼロ固有値を調べることで
doubler の個数を調べることが可能となる。

doubler の個数は, よく知られている線形空間の議論 (固有値問題) に帰着される。

今回の発表では,
任意の格子離散化された多様体上の doubler 数を調べるために

spectral graph theory (SGT) から着想を得た
格子 fermion の新たな解析方法を紹介していく。

Table of Contents

- 1 Spectral graph theory
- 2 Naive fermion
- 3 Wilson fermion
- 4 Discussion

Spectral graph theory

Spectral graph theory とは

graph の構造が持つ特徴を行列の固有値として扱う理論および技法

Definition (graph)

頂点の集合 V とその頂点どうしを結んだ辺の集合 E の一対を *graph* G という。

$$G = (V, E)$$

Definition (directed graph (or digraph))

graph に $\text{init} : E \rightarrow V$ と $\text{ter} : E \rightarrow V$ が付与されているとき, *digraph* という。
このとき任意の辺 $e_{ij} \in E$ に対して

- $\text{init}(e_{ij})$ を *initial vertex* $v_i \in V$
- $\text{ter}(e_{ij})$ を *terminal vertex* $v_j \in V$

と呼び, 辺 e_{ij} は $\text{init}(e_{ij}) = v_i$ から $\text{ter}(e_{ij}) = v_j$ への *directed edge* であるという。

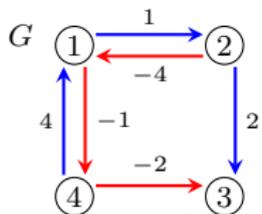
Definition (weighted graph)

graph に $\text{wt} : E \rightarrow \mathbb{R}$ が付与されているとき, *weighted graph* という。

Definition (隣接行列)

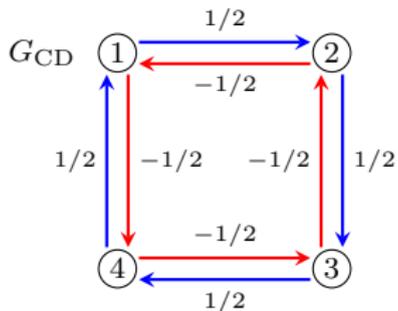
行列要素が

$$(A_G)_{ij} \equiv \text{wt}(e_{ij}) \quad (2)$$

である $|V| \times |V|$ 行列を *weighted graph* G の隣接行列 A_G という。Ex.1 ある graph G の隣接行列

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ex.2 1次元格子 (lattice parameter=1) 上の中心差分を表現した graph の隣接行列



$$A_{G_{CD}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ex.2 のように

格子を graph として扱うことによって、その隣接行列は差分行列となる。

つまり、SGT の言葉で言い換えると

position space における Dirac 行列 D は、

Dirac 演算子による fermi 場間の差分を表現した graph の隣接行列

SGT を格子 fermion に応用することで

- 一般の多様体上の Dirac 行列 (隣接行列) を構成することができ、
- さらにその固有値を調べることが可能となる。

したがって

一般の多様体上の doubler 数は、SGT の問題に帰着される。

この手法を用いて

naive fermion および Wilson fermion で
従来の結果と無矛盾であることを見ていく。

Naive fermion

The 4 dimensional free naive fermion action is

$$S_{\text{nf}} = \sum_n \sum_{\mu=1}^4 \bar{\psi}_n \gamma_{\mu} D_{\mu} \psi_n \quad (3)$$

where

$$D_{\mu} \equiv (\psi_{n+\hat{\mu}} - \psi_{n-\hat{\mu}}) / 2$$

The well-known result

Fourier 変換と熱力学的極限 $N \rightarrow \infty$ を施した作用 S_{nf} は以下となる。

$$S_{\text{nf}} = \int d^4 p \bar{\psi}(-p) \left[i \sum_{\mu=1}^4 \gamma_{\mu} \sin p_{\mu} a \right] \psi(p) \quad (4)$$

$D_{\mu}(p) = \sin p_{\mu} a$ とし, $0 \leq p_{\mu} < 2\pi/a$ の中でゼロ点 ($D_{\mu}(p) = 0$) は

$$p_{\mu} = 0, \pi/a \quad (5)$$

となるため, doubler 数は 2^4 個となる。

naive fermion の Dirac 演算子を表現した graph

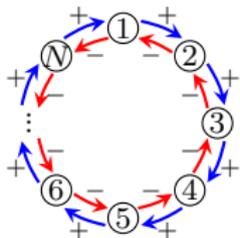


Figure: 1次元の場合，graphの概形は S^1 となる。

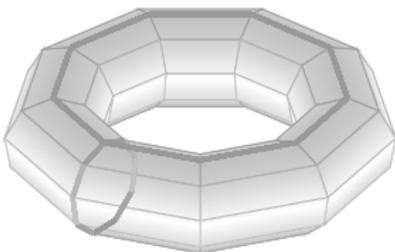
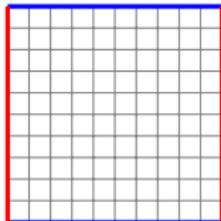


Figure: 2次元の場合，graphの概形は $S^1 \times S^1 \sim T^2$ となる。

4次元の場合，graphの概形は $S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1 \sim T^4$ となる。

T^d となるのは位相幾何学的視点からも理解できる。



例として2次元格子を考える。
周期的境界条件から向かい合う境界が同一視される。
よって，位相幾何学的にも

2次元格子は T^2 とみなすことができる。

naive fermion の Dirac 演算子を表現した graph の隣接行列

naive fermion の Dirac 行列は，Kronecker 積¹ によって次のように表現される。

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_{\text{nf}} &= \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_N \otimes D_N \otimes \gamma_1 \\
 &\quad + \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_N \otimes D_N \otimes \mathbf{1}_N \otimes \gamma_2 \\
 &\quad + \mathbf{1}_N \otimes D_N \otimes \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_N \otimes \gamma_3 \\
 &\quad + D_N \otimes \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_N \otimes \gamma_4
 \end{aligned} \tag{6}$$

ここで $[D_N]_{jk} \equiv (\delta_{j+1k} - \delta_{j-1k})/2$ であり，行列表示では以下となる。

$$D_N = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \color{blue}{1} & 0 & & 0 & 0 & \color{red}{-1} \\ \color{red}{-1} & 0 & \color{blue}{1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \color{red}{-1} & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & \color{blue}{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \color{red}{-1} & 0 & \color{blue}{1} \\ \color{blue}{1} & 0 & 0 & & 0 & \color{red}{-1} & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

¹Kronecker 積 \otimes とは

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Dirac 行列 \mathcal{D}_{nf} の対角化行列 D_N は

$$X_{jk} = \frac{1}{\sqrt{N}} \xi^{(j-1)(k-1)}, \quad \xi = e^{-\frac{2\pi i}{N}} \quad (8)$$

で定義される unitary 行列 X によって対角化される：

$$\begin{aligned} X^\dagger D_N X &= i \text{Diag} \left[0, \sin \left(\frac{2\pi}{N} \right), \sin \left(\frac{4\pi}{N} \right), \dots, \sin \left(\frac{2(N-1)\pi}{N} \right) \right] \\ &\equiv \Lambda \end{aligned} \quad (9)$$

したがって、対角化された Dirac 行列 \mathcal{D}_{nf} は次となる。

$$\begin{aligned} U^\dagger \mathcal{D}_{\text{nf}} U &= \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_N \otimes \Lambda \otimes \gamma_1 \\ &\quad + \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_N \otimes \Lambda \otimes \mathbf{1}_N \otimes \gamma_2 \\ &\quad + \mathbf{1}_N \otimes \Lambda \otimes \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_N \otimes \gamma_3 \\ &\quad + \Lambda \otimes \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_N \otimes \gamma_4 \end{aligned} \quad (10)$$

ここで U は unitary 行列で $U = \bigotimes_{\mu} X \otimes \mathbf{1}_4$ である。

naive fermion の doubler 数

Dirac 行列のゼロ固有値の数を見るために D_N の固有ケット $|k\rangle$ を導入する。

$$D_N |k\rangle = i \sin \left(\frac{2\pi(k-1)}{N} \right) |k\rangle, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (11)$$

$\frac{2\pi(k-1)}{N} = p_k$ とすると、対角化された Dirac 行列 D_{nf} は

$$U^\dagger D_{\text{nf}} U = \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} \left[i \sum_{\mu} \gamma_{\mu} \sin p_{k_{\mu}} \right] |k_1, k_2, k_3, k_4\rangle \langle k_1, k_2, k_3, k_4| \quad (12)$$

となる。ここで $|k_1, k_2, k_3, k_4\rangle = |k_1\rangle \otimes |k_2\rangle \otimes |k_3\rangle \otimes |k_4\rangle$ を意味する。

D_{nf} がゼロ固有値を持つための必要条件

Dirac 行列 D_{nf} がゼロ固有値を持つための必要条件は以下である。

$$\sum_{\mu} \gamma_{\mu} \sin p_{k_{\mu}} = 0 \quad (13)$$

naive fermion の doubler 数

γ_μ は線形独立であることから，必要条件は次のように変更できる。

$$\sum_{\mu} \gamma_{\mu} \sin p_{k_{\mu}} = 0 \implies \sin \left(\frac{2\pi(k_{\mu} - 1)}{N} \right) = 0 \quad (14)$$

この方程式を満たす解は次となる。

$$k_{\mu} = 1, \frac{N}{2} + 1 \quad (15)$$

したがって，naive fermion の doubler 数は (N が偶数であるとき)

k_1, k_2, k_3, k_4 の解の組み合わせの数に等しいため， 2^4 個である。

momentum space での議論と無矛盾

Note. momentum space での議論との違いは，

熱力学的極限を取らず厳密に doubler 数を導出できる。

Wilson fermion

The 4 dimensional free Wilson fermion action is

$$S_{\text{Wf}} = S_{\text{nf}} + \sum_n +m\bar{\psi}_n\psi_n + r \sum_n \sum_{\mu} \bar{\psi}_n (1 - C_{\mu}) \psi_n \quad (16)$$

where

$$C_{\mu}\psi_n \equiv (\psi_{n+\hat{\mu}} + \psi_{n-\hat{\mu}}) / 2.$$

The well-known result

Fourier 変換と熱力学的極限 $N \rightarrow \infty$ を施した作用 S_{Wf} は以下となる。

$$S_{\text{Wf}} = \int d^4p \bar{\psi}(-p) \left[i \sum_{\mu=1}^4 \gamma_{\mu} \sin p_{\mu}a + m + r \sum_{\mu} (1 - \cos p_{\mu}a) \right] \psi(p) \quad (17)$$

$M(p) = m + r \sum_{\mu} (1 - \cos p_{\mu}a)$ とすると, 連続極限 ($a \rightarrow 0$) において質量は

$$M(p) = \begin{cases} m & \text{for physical pole} \\ m + \frac{2r}{a} |\alpha| \rightarrow \infty & \text{for doublers} \end{cases} \quad (18)$$

となる。したがって連続極限において doubler の分離がなされている。

Wilson fermion の Dirac 演算子を表現した graph

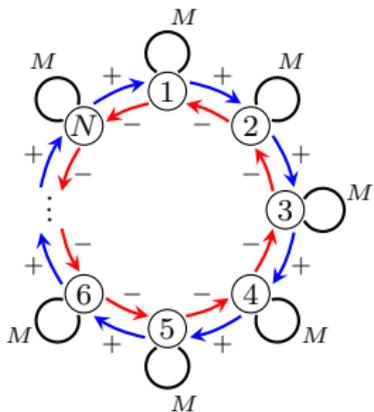


Figure: 1次元の場合, graphの概形は S^1 となる。ただし, 各頂点に loop を持つ。ここで $+$ は $(\gamma_i - r\mathbf{1}_4)/2$, $-$ は $-(\gamma_i + r\mathbf{1}_4)/2$ を意味し, $M = m + r$ である。

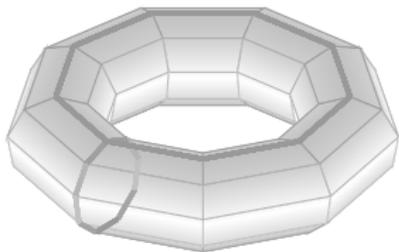


Figure: 2次元の場合, graphの概形は $S^1 \times S^1 \sim T^2$ となる。ただし各頂点に loop を持ち, loopのweightは $M = m + 2r$ である。

4次元の場合も naive と同様, graphの概形は $S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1 \sim T^4$ となる。
naive との違いは各頂点に loop を持ち, その weight は $M = m + 4r$ である。

Wilson fermion の Dirac 演算子を表現した graph の隣接行列

Wilson fermion の Dirac 行列は、次となる。

$$\mathcal{D}_{\text{Wf}} = \mathcal{D}_{\text{nf}} + \mathcal{M} \quad (19)$$

質量行列 \mathcal{M} は、Kronecker 積で次のように表現される。

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & m \cdot \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_4 \\ & + r \cdot \{ \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_N \otimes M \otimes \mathbf{1}_4 \\ & \quad + \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_N \otimes M \otimes \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_4 \\ & \quad + \mathbf{1}_N \otimes M \otimes \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_4 \\ & \quad + M \otimes \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_4 \} \end{aligned} \quad (20)$$

ここで $[M]_{jk} \equiv 1 - (\delta_{j+1k} + \delta_{j-1k})/2$ であり、行列表示では

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (21)$$

Dirac 行列 \mathcal{D}_{Wf} の対角化

naive と同様, unitary 行列 X で行列 M を対角することができる:

$$\begin{aligned} X^\dagger M X &= \text{Diag} \left[0, 1 - \cos \left(\frac{2\pi}{N} \right), 1 - \cos \left(\frac{4\pi}{N} \right), \dots, 1 - \cos \left(\frac{2\pi(N-1)}{N} \right) \right] \\ &\equiv \Lambda_M \end{aligned} \tag{22}$$

したがって, 対角化された Dirac 行列 \mathcal{D}_{Wf} は次となる。

$$\mathcal{U}^\dagger \mathcal{D}_{\text{Wf}} \mathcal{U} = \mathcal{U}^\dagger \mathcal{D}_{\text{nf}} \mathcal{U} + \mathcal{U}^\dagger \mathcal{M} \mathcal{U} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^\dagger \mathcal{M} \mathcal{U} &= m \cdot \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_4 \\ &\quad + r \cdot \left\{ \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_N \otimes \Lambda_M \otimes \mathbf{1}_4 \right. \\ &\quad \quad + \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_N \otimes \Lambda_M \otimes \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_4 \\ &\quad \quad + \mathbf{1}_N \otimes \Lambda_M \otimes \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_4 \\ &\quad \quad \left. + \Lambda_M \otimes \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_4 \right\} \end{aligned} \tag{24}$$

ここで \mathcal{U} は naive のときと同じ unitary 行列である。

Wilson fermion における doubler の分離

naive と同様に固有ケット $|k\rangle$ を導入する。これは行列 D_N, M に対して

$$\begin{aligned} D_N |k\rangle &= i \sin \left(\frac{2\pi(k-1)}{N} \right) |k\rangle, \\ M |k\rangle &= \left\{ 1 - \cos \left(\frac{2\pi(k-1)}{N} \right) \right\} |k\rangle, \quad k = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (25)$$

が成り立つ。 $\frac{2\pi(k-1)}{N} = p_k$ とすると、対角化された Dirac 行列 \mathcal{D}_{Wf} は

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^\dagger \mathcal{D}_{\text{Wf}} \mathcal{U} &= \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} \left[i \sum_{\mu} \gamma_{\mu} \sin p_{k_{\mu}} + m \cdot \mathbf{1}_4 + r \sum_{\mu} \left(1 - \cos p_{k_{\mu}} \right) \mathbf{1}_4 \right] \\ &\quad \times |k_1, k_2, k_3, k_4\rangle \langle k_1, k_2, k_3, k_4| \end{aligned} \quad (26)$$

となる。

 \mathcal{D}_{Wf} がゼロ固有値を持つための必要条件

Dirac 行列 \mathcal{D}_{Wf} がゼロ固有値を持つための必要条件は以下である。

$$i \sum_{\mu} \gamma_{\mu} \sin p_{k_{\mu}} + m \cdot \mathbf{1}_4 + r \sum_{\mu} \left(1 - \cos p_{k_{\mu}} \right) \mathbf{1}_4 = 0 \quad (27)$$

Wilson fermion における doubler の分離

$\gamma_\mu, \mathbf{1}_4$ は線形独立であることから, 必要条件は次のように変更できる。

$$i \sum_{\mu} \gamma_{\mu} \sin p_{k_{\mu}} + m \cdot \mathbf{1}_4 + r \sum_{\mu} (1 - \cos p_{k_{\mu}}) \mathbf{1}_4 = 0$$

$$\Rightarrow \sin \left(\frac{2\pi(k_{\mu} - 1)}{N} \right) = 0, \quad m + r \sum_{\mu} \left\{ 1 - \cos \left(\frac{2\pi(k_{\mu} - 1)}{N} \right) \right\} = 0 \quad (28)$$

- $\sin \left(\frac{2\pi(k_{\mu} - 1)}{N} \right) = 0$ を満たす解は, $k_{\mu} = 1, \frac{N}{2} + 1$ である。
- $M(k_{\mu}) \equiv m + r \sum_{\mu} \left\{ 1 - \cos \left(\frac{2\pi(k_{\mu} - 1)}{N} \right) \right\}$ とすると

$$M(k_{\mu}) = \begin{cases} m & k_{\mu} = 1 \\ m + 2r & \text{one } k_{\mu} = 1 + N/2 \text{ otherwise } k_{\mu} = 1 \\ m + 4r & \text{two } k_{\mu} = 1 + N/2 \text{ otherwise } k_{\mu} = 1 \\ m + 6r & \text{three } k_{\mu} = 1 + N/2 \text{ otherwise } k_{\mu} = 1 \\ m + 8r & k_{\mu} = 1 + N/2 \end{cases} \quad (29)$$

mass parameter m を調節することで physical pole の個数を制限することができる。

momentum space での議論と無矛盾

Discussion 1

naive fermion および Wilson fermion が momentum space で議論できたのは
周期的境界条件を課していたため

一般の多様体上では運動量は定義できないため、
今回の SGT に基づく解析手法は有効となる。

一般の多様体上への応用の例として
4次元球体 B^4 上の doubler 数 (1 個) を導出していく。

4次元球体 B^4

The lattice action in 4 dimensional ball is

$$S_{4\text{dB}} = \sum_n \sum_\mu \bar{\psi}_n \gamma_\mu D_\mu \psi_n \quad (30)$$

Note. naive との違いは，Dirichlet 型境界条件 (DBC)² を課している。

DBC を課した格子上の Dirac 演算子を表現した graph

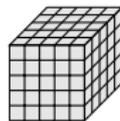
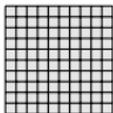
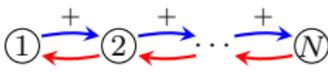


Figure: 1次元の場合，graph の概形は segment $\sim B^1$ となる。

Figure: 2次元の場合，graph の概形は face $\sim B^2$ となる。

Figure: 3次元の場合，graph の概形は box $\sim B^3$ となる。

DBC を課した 4次元格子の場合，graph の概形は B^4 となる。

²ある領域 $I = [0, N]^4$ が存在し，4次元格子上の fermi 場に対して次が成り立つ。

$$\psi_n = \begin{cases} \psi_n & n \in I \\ 0 & n \notin I \end{cases}$$

B^4 上の Dirac 演算子を表現した graph の隣接行列

B^4 上の Dirac 行列は、次となる。

$$\begin{aligned}
 D_{4dB} &= \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_N \otimes D_N^{\text{DBC}} \otimes \gamma_1 \\
 &+ \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_N \otimes D_N^{\text{DBC}} \otimes \mathbf{1}_N \otimes \gamma_2 \\
 &+ \mathbf{1}_N \otimes D_N^{\text{DBC}} \otimes \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_N \otimes \gamma_3 \\
 &+ D_N^{\text{DBC}} \otimes \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_N \otimes \gamma_4
 \end{aligned} \tag{31}$$

ここで $[D_N^{\text{DBC}}]_{jk} = (\delta_{j+1k} - \delta_{j-1k})/2$ であり、行列表示では以下となる。

$$D_N^{\text{DBC}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{32}$$

Note. naive との違いは DBC を課しているため、の成分が 0 となる。

Dirac 行列 $\mathcal{D}_{4\text{dB}}$ の対角化

行列 D_N^{DBC} は

$$Y_{jk} = \left(\frac{2}{N+1} \right)^{\frac{1}{2}} i^k \sin \left(\frac{\pi k j}{N+1} \right) \quad (33)$$

で定義される unitary 行列 Y によって対角化される：

$$Y^\dagger D_N^{\text{DBC}} Y = i \text{Diag} \left[\cos \left(\frac{\pi}{N+1} \right), \cos \left(\frac{2\pi}{N+1} \right), \dots, \cos \left(\frac{N\pi}{N+1} \right) \right] \quad (34)$$

$$\equiv \Lambda_{\text{DBC}}$$

したがって、対角化された Dirac 行列 $\mathcal{D}_{4\text{dB}}$ は次となる。

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^\dagger \mathcal{D}_{4\text{dB}} \mathcal{V} &= \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_N \otimes \Lambda_{\text{DBC}} \otimes \gamma_1 \\ &\quad + \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_N \otimes \Lambda_{\text{DBC}} \otimes \mathbf{1}_N \otimes \gamma_2 \\ &\quad + \mathbf{1}_N \otimes \Lambda_{\text{DBC}} \otimes \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_N \otimes \gamma_3 \\ &\quad + \Lambda_{\text{DBC}} \otimes \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_N \otimes \gamma_4 \end{aligned} \quad (35)$$

ここで \mathcal{V} は unitary 行列で $\mathcal{V} = \bigotimes_{\mu} Y \otimes \mathbf{1}_4$ である。

B^4 上の doubler 数

D_N^{DBC} の固有ケット $|\lambda\rangle$ を導入する。

$$D_N^{\text{DBC}} |\lambda\rangle = i \cos\left(\frac{\lambda\pi}{N+1}\right) |\lambda\rangle, \quad \lambda = 1, 2, \dots, N \quad (36)$$

よって対角化された Dirac 行列 $\mathcal{D}_{4\text{dB}}$ は

$$\mathcal{V}^\dagger \mathcal{D}_{4\text{dB}} \mathcal{V} = \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4} \left[i \sum_{\mu} \gamma_{\mu} \cos\left(\frac{\lambda_{\mu}\pi}{N+1}\right) \right] |\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\rangle \langle \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4| \quad (37)$$

γ_{μ} は線形独立であることから, $\mathcal{D}_{4\text{dB}}$ がゼロ固有値を持つならば以下を満たす。

$$\cos\left(\frac{\lambda_{\mu}\pi}{N+1}\right) = 0 \quad (38)$$

この方程式の解は

$$\lambda_{\mu} = \frac{1}{2}(N+1) \quad (39)$$

したがって,

B^4 上の doubler 数は (N が奇数であるとき) 1 個である。

Summary

SGT に基づく格子 fermion の解析手法から

- ▶ naive fermion および Wilson fermion において従来の結果
 - naive fermion での doubler 数 (16 個)
 - Wilson fermion での doubler の分離と無矛盾である。
- ▶ 一般の多様体への応用の例として
4次元球体 B^4 上の doubler 数 (1 個) を導出した。

展望

- 今回の解析手法では正方格子のみ扱ったが、格子の構造に依らないため三角格子、ハニカム格子にも応用可能
→ 今回の解析法の有用性を示していく。
- 連続極限 (lattice parameter $\rightarrow 0$) において Dirac 行列の doubler 数がどのように変化するか。
- d 次元球面 S^d や他の多様体上の doubler 数を導出し、doubler 数の詳細を与える新たな定理の構成と証明を行なっていく。