フラックスコンパクト化された理論におけるゲージ対称性の破れ

大阪公立大学　素粒子論研究室
赤松　拳斗（あかまつ　けんと）

hep-th/2205.09320 (accepted in PRD)

共同研究者：廣瀬拓哉 (阪公大), 丸信人 (阪公大, NITEP)

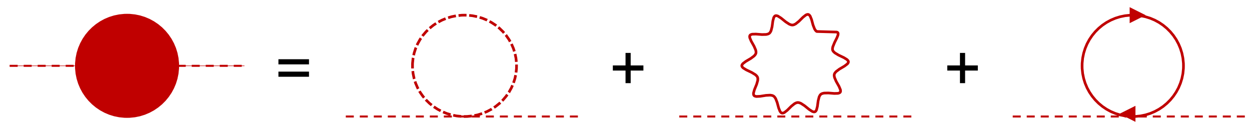
Aug. 29, 2022　素粒子物理学の進展 @ Zoom

今日話すこと

- イントロ
- SU(2) Yang-Mills 理論
- ポテンシャル解析
- SU(3) Yang-Mills 理論
- まとめ

階層性問題

- ヒッグス粒子の質量（125 GeV）
- 質量（の 2 乗）の量子補正（by SM）



質量補正　　ヒッグス場　　ゲージ場　　トップクォーク

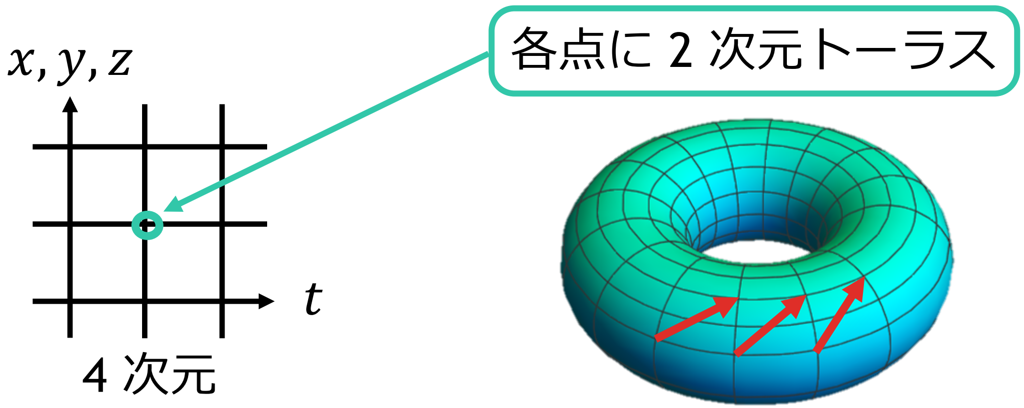
$$\propto \quad \Lambda^2/16\pi^2 \quad (\Lambda\text{: cutoff})$$

- cutoff がプランクスケール（10^{18} GeV）

$$\underset{-(10^{18}\,\mathrm{GeV})^2\,(?)}{古典質量} + \underset{(10^{18}\,\mathrm{GeV})^2}{質量補正} = (125\ \mathrm{GeV})^2$$

FLUX COMPACTIFICATION

- 余剰次元空間



- フラックス f

$$\langle A_5 \rangle \equiv -\frac{1}{2} f x_6, \qquad \langle A_6 \rangle \equiv \frac{1}{2} f x_5$$

$x_{5,6}$ はトーラスの座標

FLUX COMPACTIFICATION

- ゲージ場の余剰次元成分の質量はゼロ
  - トーラス並進対称性を自発的に破る
  - 余剰次元成分 ＝ NG ボソン
- 余剰次元成分 ＝ ヒッグス場（としたい）
  - トーラス並進対称性を explicit に破る
  - 余剰次元成分 ＝ pseudo NG ボソン

定数の真空期待値を追加

今日話すこと

- イントロ
- SU(2) Yang-Mills 理論
- ポテンシャル解析
- SU(3) Yang-Mills 理論
- まとめ

6 次元 SU(2) YANG-MILLS 理論

- Lagrangian $(M, N = \underbrace{0,1,2,3}_{M^4},\underbrace{5,6}_{T^2},\ \ a = 1,2,3)$

  ↑ SU(2) の自由度

$$\mathcal{L}_6 = -\frac{1}{4} F^a_{MN} F^{aMN}$$

- flux & constant VEV

$$\langle A^3_5 \rangle \equiv -\frac{1}{2} f x_6, \qquad \langle A^3_6 \rangle \equiv \frac{1}{2} f x_5, \qquad \langle A^1_6 \rangle \equiv v \in \mathbb{R}$$

  - 簡単のために $x_{5,6} \in [0,1)$

6 次元 SU(2) YANG-MILLS 理論

- 複素座標系とスカラー場の定義

$$z \equiv \frac{1}{2}(x_5 + ix_6), \qquad \partial \equiv \partial_5 - i\partial_6,$$

$$\phi^a \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(A_6^a + iA_5^a) \equiv \varphi^a + \langle\phi^a\rangle \Rightarrow \begin{cases} \langle\phi^3\rangle = f\bar{z}/\sqrt{2} \\ \langle\phi^1\rangle = v/\sqrt{2} \end{cases}$$

- ゴースト場を含む質量項（Feynman ゲージ）

$$\mathcal{L}_{\text{tot}} \supset -\frac{1}{2}A_\mu^a(\underline{\underline{-\mathcal{D}\overline{\mathcal{D}}}})A^{a\mu} \qquad \text{ゲージ場}$$

$$-\bar{\varphi}^a\left(\underline{\underline{-\mathcal{D}\overline{\mathcal{D}}}}\right)\varphi^a + gf[\varphi,\bar{\varphi}]^3 \qquad \text{スカラー場}$$

$$+\bar{c}^a\left(\underline{\underline{-\mathcal{D}\overline{\mathcal{D}}}} + \frac{1}{2}[\mathcal{D},\overline{\mathcal{D}}]\right)c^a \qquad \text{ゴースト場}$$

質量の計算法

- 共変微分 $\mathcal{D}$
  - 生成消滅演算子とみなせるか

$$\mathcal{D}^{ac} = \begin{bmatrix} \partial & igf\bar{z} & 0 \\ -igf\bar{z} & \partial & igv \\ 0 & -igv & \partial \end{bmatrix}$$

$\Downarrow$ 対角化

$$\mathcal{D}^{ac}_{\mathrm{diag}} = \mathrm{diag}\left(\underline{\partial - g\sqrt{f^2\bar{z}^2 + v^2}}, \partial + g\sqrt{f^2\bar{z}^2 + v^2}, \partial\right)$$

生成消滅演算子とみなせない
（$v = 0$ ならできた）

質量の計算法

- C-VEV v について、$v \ll 1$ を仮定

$$\mathcal{D}^{ac} = \underbrace{\begin{bmatrix} \partial & igf\bar{z} & 0 \\ -igf\bar{z} & \partial & 0 \\ 0 & 0 & \partial \end{bmatrix}}_{\text{非摂動 } \mathcal{D}_0} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & igv \\ 0 & -igv & 0 \end{bmatrix}}_{\text{摂動}}$$

- ゲージ場の質量（C-VEV v が無い理論）

$$-\mathcal{D}_{0,\mathrm{diag}}\overline{\mathcal{D}}_{0,\mathrm{diag}} = \begin{bmatrix} \boxed{2gfn_1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2gf(n_2+1)} & 0 \\ 0 & 0 & 4\pi^2(l^2+m^2) \end{bmatrix}$$

Landau level

質量の計算法

- 縮退のある摂動論
  - 1, 2 方向や 3 方向のゼロモードには縮退あり

$$\begin{cases} 2gfn_1\Big|_{n_1=n_2+1} = 2gf(n_2+1) \\ 2gf \cdot 0 = 4\pi^2(0^2+0^2) \end{cases}$$

  - 永年方程式を用いる
  - 1 次摂動で質量に C-VEV v の影響が現れる

場の質量とゲージ対称性の破れ

- $1', 2', 1'', 2''$ は新たに定義した方向

$$\begin{cases} m_{A,n_1=0}^2 = \dfrac{g^2 v^2}{2} \\ m_{A,1'}^2 \quad = 2gf(n+1) \\ m_{A,2'}^2 \quad = 2gf(n+1) + g^2 v^2 \\ m_{A,3}^2 \quad = 4\pi^2(l^2 + m^2) + g^2 v^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} m_{\varphi,1''}^2 = m_{c,1''}^2 = 2gf\left(n + \dfrac{1}{2}\right) \\ m_{\varphi,2''}^2 = m_{c,2''}^2 = 2gf\left(n + \dfrac{1}{2}\right) + g^2 v^2 \\ m_{\varphi,3}^2 = m_{c,3}^2 = 4\pi^2(l^2 + m^2) + g^2 v^2 \end{cases}$$

- $v \neq 0$ ならば
  - ゲージ場は massive → SU(2) ゲージ対称性は全て破れる
  - φ^3 のゼロモードは massive → pseudo NG ボソン

今日話すこと

- イントロ
- SU(2) Yang-Mills 理論
- ポテンシャル解析
- SU(3) Yang-Mills 理論
- まとめ

有効ポテンシャル

- 有効ポテンシャルの表式

$$V = \frac{1}{(2\pi)^2}\sum_n \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4}\frac{(-1)^F}{2} N \ln(p_E^2 + m_n^2)$$

  - ➢ N は場の自由度
  - ➢ F はボソンなら 0、フェルミオンなら 1

- 重要なポテンシャル構造
  - ➢ $m_n^2 = 2gf(n+1) + g^2v^2$
  - ➢ $v = 0$ 近傍で上に凸を形成

$$\begin{cases} m_{A,n_1=0}^2 = \dfrac{g^2v^2}{2} \\ m_{A,1'}^2 = 2gf(n+1) \\ m_{A,2'}^2 = \boxed{2gf(n+1) + g^2v^2} \\ m_{A,3}^2 = 4\pi^2(l^2+m^2) + g^2v^2 \end{cases}$$

有効ポテンシャル

- 代入して計算

$$V_n(v) \equiv \sum_n \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \ln(p^2 + \alpha(n+1) + g^2v^2)$$

$$= -\frac{\alpha^2}{16\pi^2} \underline{\int_0^\infty \frac{dy}{y^3} \frac{e^{-g^2v^2y/\alpha}}{e^y - 1}}$$

$y = 0$ で発散

- Hurwitz のゼータ関数の積分表示

$$\zeta(s,a) = \frac{a^{-s}}{2} + \frac{a^{1-s}}{s-1} + \frac{sa^{-s-1}}{12} + \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dy \frac{e^{-ay}}{y^{1-s}} \left(\underline{\frac{1}{e^y - 1} - \frac{1}{y} + \frac{1}{2} - \frac{y}{12}} \right)$$

発散部分を取り除く

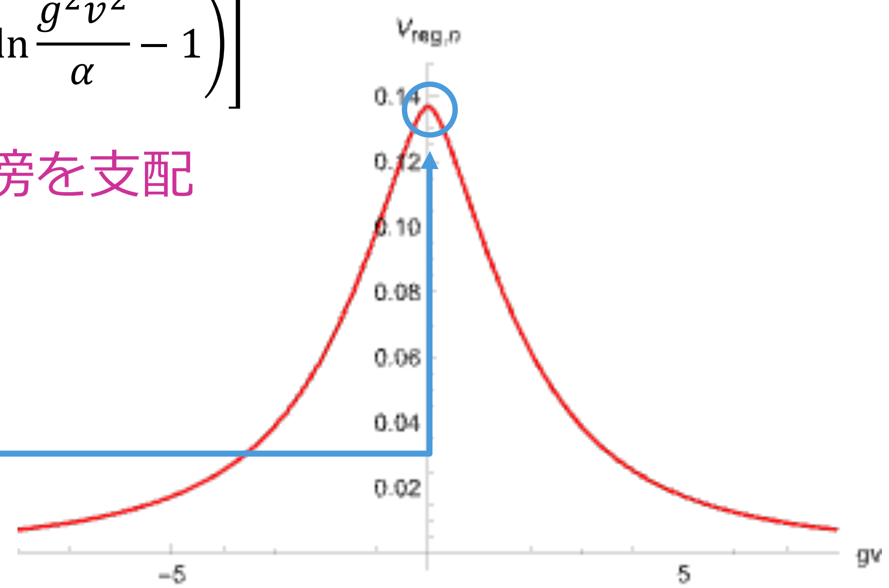
有効ポテンシャル

- 発散を取り除いた $V_n(v)$

$$V_{\mathrm{reg},n}(v) = -\frac{\alpha^2}{32\pi^2}\left[\zeta^{(1,0)}\left(-2,\frac{g^2v^2}{\alpha}\right) - \frac{1}{12}\frac{g^2v^2}{\alpha}\left(2\ln\frac{g^2v^2}{\alpha}+1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{g^2v^2}{\alpha}\right)^2\ln\frac{g^2v^2}{\alpha} - \frac{1}{9}\left(\frac{g^2v^2}{\alpha}\right)^3\left(3\ln\frac{g^2v^2}{\alpha}-1\right)\right]$$

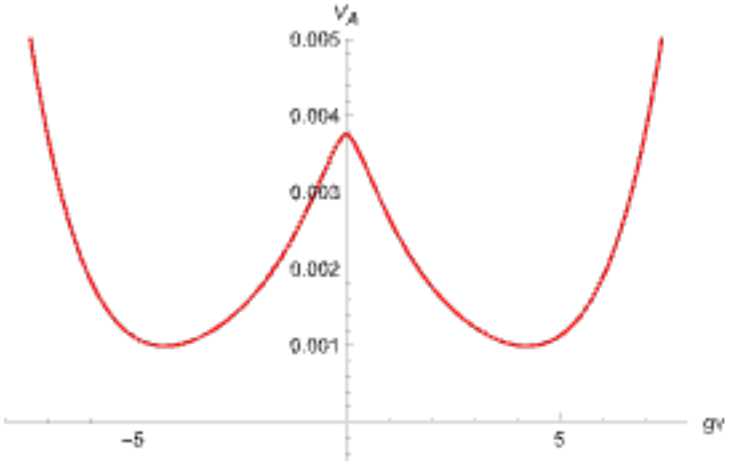
$v = 0$ 近傍を支配

上に凸



有効ポテンシャル

- 有効ポテンシャル $V = V_A$（$V_\varphi + V_c = 0$）



$$\begin{cases} m^2_{A,n_1=0} = \dfrac{g^2 v^2}{2} \\ m^2_{A,1'} = 2gf(n+1) \\ m^2_{A,2'} = 2gf(n+1) + g^2 v^2 \\ m^2_{A,3} = 4\pi^2\left(l^2 + m^2\right) + g^2 v^2 \end{cases}$$

- 少なくとも $v \neq 0$
- 摂動の範囲内で v の値は不明

今日話すこと

- イントロ
- SU(2) Yang-Mills 理論
- ポテンシャル解析
- SU(3) Yang-Mills 理論
- まとめ

6 次元 SU(3) YANG-MILLS 理論

- SU(3) での真空期待値の方向
  - パターン 1

$$\langle\phi^1\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}v, \qquad \langle\phi^8\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}f\bar{z}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathrm{SU}(3)\ \underset{\text{flux}}{(\rightarrow \mathrm{SU}(2)\times \mathrm{U}(1))}\ \underset{\text{C-VEV}}{\rightarrow \mathrm{U}(1)\times \mathrm{U}(1)} \end{array}}$$

  - パターン 2

$$\langle\phi^6\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}v, \qquad \langle\phi^8\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}f\bar{z}$$

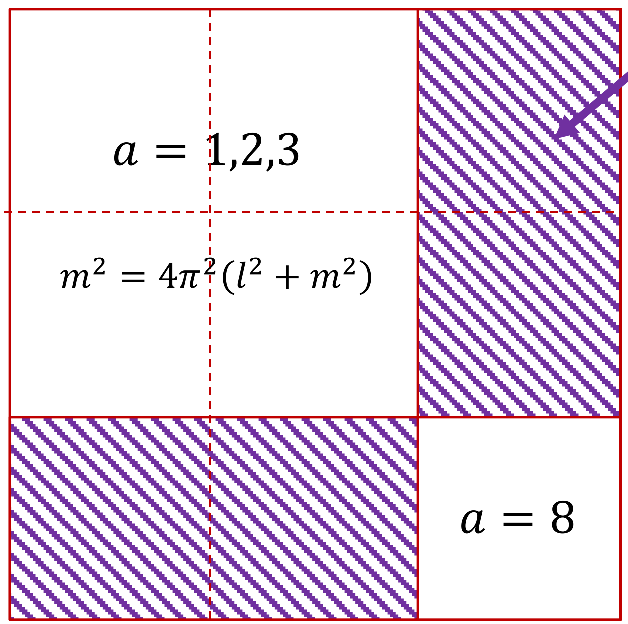
$$\boxed{\mathrm{SU}(3)\ (\rightarrow \mathrm{SU}(2)\times \mathrm{U}(1)) \rightarrow \mathrm{U}(1)}$$

電弱相転移に類似

パターン 1, 2 の解説

- flux によるゲージ対称性の破れ

generator（3×3 行列）



$a = 4,5,6,7$

Landau level

$m^2 = \sqrt{3}gfn$

	C-VEV	対称性
パターン 1	$a = 1$	unbroken
パターン 2	$a = 6$	broken

まとめ

- C-VEV v は nonzero である

  値は？

- ゲージ場の余剰次元成分は pseudo NG ボソン

- flux と C-VEV によるゲージ対称性の破れ

  - SU(2) $\rightarrow$ (completely broken)

  - SU(3) $\rightarrow$ U(1) (or U(1) $\times$ U(1))

フェルミオンの影響は？

バックアップ

トーラス並進対称性

- トーラス並進変換 $\delta_T \equiv \epsilon\partial + \bar{\epsilon}\bar{\partial}$

$$\delta_T\phi^3 = \left(\epsilon\partial + \bar{\epsilon}\bar{\partial}\right)(\varphi^3 + \langle\phi^3\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}f\bar{\epsilon}$$

  - φ^3 は zero mode $\rightarrow \partial\varphi^3 = \bar{\partial}\varphi^3 = 0$

- Lagrangian は δ_T の下で不変
  - トーラス並進対称性が自発的に破れる
  - φ^3 の zero mode は NG ボソン

6 次元 SU(2) YANG-MILLS 理論

- Lagrangian の詳細

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_6 &= -\frac{1}{4}F^a_{MN}F^{aMN} \\
&= -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} - \partial_\mu\bar{\phi}^a\partial^\mu\phi^a - \frac{1}{2}DA^a_\mu\overline{D}A^{a\mu} \\
&\quad -\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\partial_\mu\phi^a\bar{\partial}A^{a\mu} - \partial_\mu\bar{\phi}^a\partial A^{a\mu}\right) \\
&\quad +ig\left(\partial_\mu\phi^a[A^\mu,\bar{\phi}]^a + \partial^\mu\bar{\phi}^a\left[A_\mu,\phi\right]^a\right) \\
&\quad -\frac{1}{4}\left(D\bar{\phi}^a + \overline{D}\phi^a + \sqrt{2}g[\phi,\bar{\phi}]^a\right)^2
\end{aligned}
$$

6 次元 SU(2) YANG-MILLS 理論

- ゴースト場を含む Lagrangian

$$\mathcal{L}_{\text{tot}} = -\frac{1}{4}F^{a}_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}D_{\mu}A^{a\mu}D_{\nu}A^{a\nu} - \partial_{\mu}\bar{\phi}^{a}\partial^{\mu}\phi^{a}$$

$$-\frac{1}{2}DA^{a}_{\mu}\overline{D}A^{a\mu} - \frac{g}{\sqrt{2}}\left(\partial\bar{\phi}^{a} - \bar{\partial}\phi^{a}\right)\left[A_{\mu}, A^{\mu}\right]^{a}$$

$$+\frac{\xi}{4}\left(\mathcal{D}\bar{\phi}^{a} - \overline{\mathcal{D}}\phi^{a}\right)^{2} + ig\left(\partial_{\mu}\phi^{a}[A^{\mu}, \bar{\phi}]^{a} + \partial^{\mu}\bar{\phi}^{a}\left[A_{\mu}, \phi\right]^{a}\right)$$

$$-\frac{1}{4}\left(D\bar{\phi}^{a} + \overline{D}\phi^{a} + \sqrt{2}g[\phi, \bar{\phi}]^{a}\right)^{2} - \bar{c}^{a}\left(D_{\mu}D^{\mu} + \xi D_{m}\mathcal{D}^{m}\right)c^{a}$$

生成消滅演算子とモード関数

- 生成消滅演算子

$$a \equiv \frac{i}{\sqrt{\alpha}}(\bar{\partial} + gfz), \qquad a^\dagger \equiv \frac{i}{\sqrt{\alpha}}(\partial - gf\bar{z})$$

- モード関数

$$\xi_{n,j} = \frac{(2|N|)^{1/4}}{2\pi L(2^n n!)^{1/2}} \sum_{a=-\infty}^{\infty} \Theta_a^j(z+\zeta) H_n\left(\sqrt{2\pi|N|}\left(\mathrm{Im}(z+\zeta) + \frac{j}{|N|} + a\right)\right)$$

$$\Theta_a^j(z+\zeta) \equiv e^{-\pi|N|\left(\mathrm{Im}(z+\zeta)+\frac{j}{|N|}+a\right)^2 + i\pi|N|Re(z+\zeta)\left(\mathrm{Im}(z+\zeta)+2\left(\frac{j}{|N|}+a\right)\right)}$$

$$a\xi_{0,j} = 0, \qquad \xi_{n,j} = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(a^\dagger\right)^n \xi_{0,j}$$

縮退のある量子力学

- 縮退が存在

$$\begin{cases} H_0\psi_{1,n}^{(0)} = \alpha(n+1)\psi_{1,n}^{(0)}, \\ H_0\psi_{2,n}^{(0)} = \alpha(n+1)\psi_{2,n}^{(0)} \end{cases}$$

- 永年方程式

$$\begin{vmatrix} \langle 1,n|V|1,n\rangle - E_n^{(1)} & \langle 1,n|V|2,n\rangle \\ \langle 2,n|V|1,n\rangle & \langle 2,n|V|2,n\rangle - E_n^{(1)} \end{vmatrix} = 0$$

  - $E_n^{(1)} \neq 0$ ならば縮退が解ける

他のポテンシャル構造

- $m^2 = g^2v^2/2$

$$V_{\mathrm{reg},0} = \frac{(g^2v^2)^2}{2304\pi^2}\left(\frac{9\zeta(3)}{\pi^2} - 1\right) \geq 0$$

- $m_{l,m}^2 = 4\pi^2(l^2 + m^2) + g^2v^2$

$$V_{\mathrm{reg},l,m} = -\frac{(g^2v^2)^{3/2}}{\pi^3}\sum_{r,s>0}\left(\frac{1}{r^2+s^2}\right)^{3/2} K_3\left(gv\sqrt{r^2+s^2}\right)$$

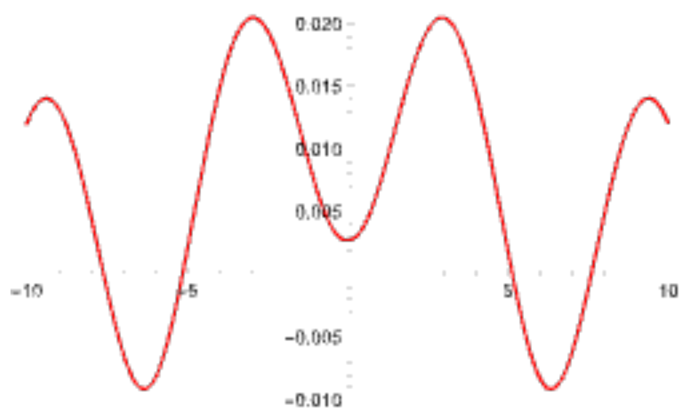
$$+\frac{(g^2v^2)^3}{4608\pi^3}\left(\frac{9\zeta(3)}{\pi^2} - 1\right)$$

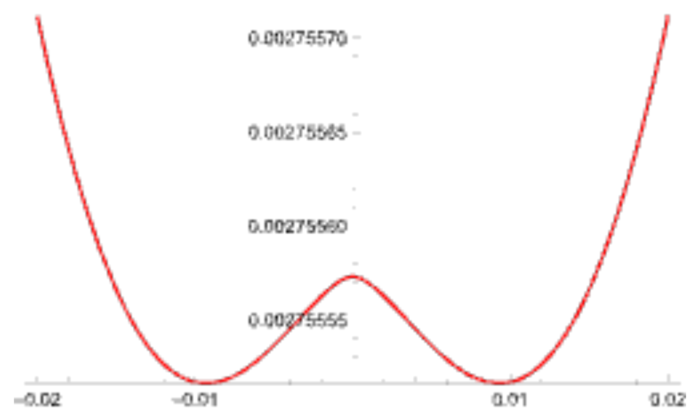
➢ $K_3(z)$ は第 2 種変形ベッセル関数

SU(3) パターン 1

$$\langle \phi^1 \rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} v, \qquad \langle \phi^8 \rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} f \bar{z}$$

- 摂動論なしに解析が可能





   - 真空期待値 v は確かに有限の値