質量を持つフェルミオンでも理解できる指数定理

～対称性への過度な信仰を省みるために～

OSAKA UNIVERSITY
Live Locally, Grow Globally

深谷英則(大阪大学)

今回の講演

「質量を持つフェルミオンでも理解できる指数定理」

大木さんからの依頼

「深谷さんに格子理論(指数定理関連とか)の最近の進展等について1時間ほど講演していただきたく存じます。」

しかし、内容はかなり数学寄り。

現象論の方でも楽しめる視点はないか？

副題 ～対称性への過度な信仰を省みるために～

素粒子論における対称性

私たちは物心ついた時から、

- 対称性とその自発的破れは素粒子論において絶対的な正義であり(bare 質量はゼロが正義)、
- 対称性を陽に損なうことは悪(bare質量を持つことは悪)である、

という教育を刷りこまれてきました。

しかし、ここ20年、「対称性をでっちあげてそれが自発的に破れたものとする」というアイデアはそれほど成功していないようにも見えます。

(もちろんそれ以前[素粒子標準模型の確立まで]には空前の成功をおさめているわけですが。。。)

南部先生の手のひら

私たちは南部先生の手のひらの上しか研究していないのではないか？

対称性のない物理でもがんばれば新しい発見があるかも？

素粒子論の次のノーベル賞は手のひらの外かも？

Atiyah-Singer 指数定理 on 閉多様体

$$\mathrm{Ind} D = \frac{1}{32\pi^2}\int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{tr}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}$$

[Atiyah and Singer, 1968]

左辺の通常の定義は、
正のカイラリティを持つ質量ゼロのDirac方程式

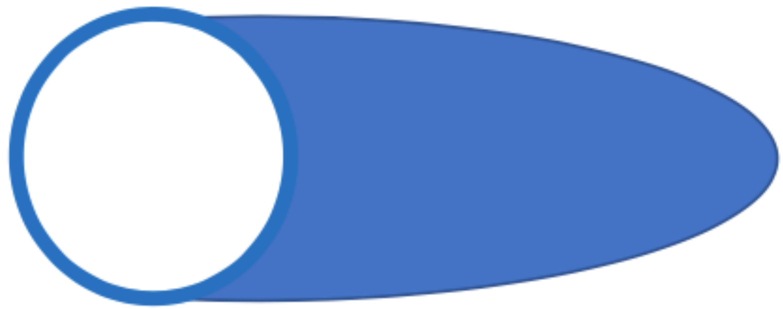
$$D\psi = 0$$

の解の個数 – 負のカイラリティの解の個数。

これをカイラル対称性を一切使わず、質量を持つフェルミオンで書き直せないか？

境界のない閉多様体では（簡単に）可能(詳細は後述)。

Atiyah-Patodi-Singer 指数定理[1975]



$$\eta(H) = \sum_{\lambda \geq 0}^{reg} - \sum_{\lambda < 0}^{reg}$$

$$\mathrm{Ind} D|_{\mathrm{APSb.c.}} = \frac{1}{32\pi^2} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \mathrm{tr} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} - \frac{1}{2}\eta(iD^{\mathrm{3D}})$$

境界のある場合は、数学の定理ではカイラル対称性を保つため、物理屋unfriendly(非局所的な)APS境界条件を採用

→ おつりとしてnon-local なη(エータ)不変量が加わる。

Atiyah-Patodi-Singer 指数定理

$$\mathrm{Ind}D|_{\mathrm{APS b.c.}} = \frac{1}{32\pi^2}\int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{tr}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} - \frac{1}{2}\eta(iD^{\mathrm{3D}})$$

これをカイラル対称性を一切使わず、質量を持つフェルミオンで書き直せないか？

→ できる(数学的にも非自明な等価性)。
η不変量の非局所性は物理的な理由で現れる。
しかも、格子ゲージ理論に応用可能、
mod-two 指数にも応用可能。

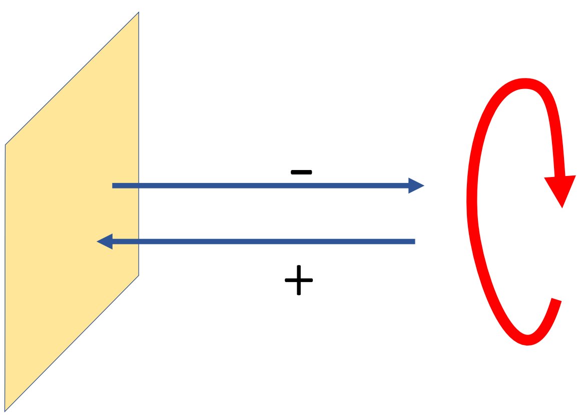
→ 質量のある方が質量ゼロよりも、指数定理の統一的な記述が可能。

境界とカイラル対称性

物理屋friendlyな境界条件とは

1. 境界面が平坦だったらその面に垂直な軸に対する回転対称性があるはず。
2. 入射波は反射派としてはねかえってくるはず。

粒子が境界面に垂直に入射すると、、、



運動量は反転、
角運動量は保存、
→カイラリティは非保存

$\boldsymbol{n_+}, \boldsymbol{n_-}$ および index は定義できなくて当然

質量を持ち、カイラル対称性のない (domain-wall) フェルミオンで指数定理を再定式化してみるプロジェクト

- 物理屋フレンドリーなAPS指数定理の再定式化[F,Onogi, Yamaguchi 2017]
- 物理屋フレンドリーなAPS指数定理（AS指数定理の証明も含む）の再定式化の数学的証明 [F, Furuta, Matsuo, Onogi, Yamaguchi, Yamashita 2019]
- 格子ゲージ理論への応用[F, Kawai, Matsuki, Mori, Nakayama, Onogi, Yamaguchi 2019]
- 奇数次元の　Mod-two APS 指数 [F, Furuta, Matsuki, Matsuo, Onogi, Yamaguchi, Yamashita 2020]
- Curved lattice への応用 [Aoki, F, in progress]
- 格子上AS指数の数学的定式化[F, Furuta, Matsuo, Onogi, Yamaguchi, Yamashita, in progress]

Contents

✓ 1. Introduction
2. Axial U(1) anomaly with Pauli-Villars regularization
3. Atiyah-Singer index with massive Dirac operator
4. APS index with domain-wall fermion
5. Mathematical proof
6. (APS index on a lattice)
7. Summary and discussion

質量ゼロの Dirac フェルミオン

$$S = \int_X d^4x \; \bar{\psi} D \psi(x)$$

X : 4-d flat Euclidean space

$$D = \gamma^\mu (\partial_\mu + i A_\mu)$$

γ_μ : 4×4 Dirac's gamma matrices satisfying

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}.$$

A_μ : $SU(N)$ gauge field

$$A_\mu = \sum_a A_\mu^a T^a$$

We take T^a Hermitian

Chirality 演算子と axial U(1) 変換

Chirality operator $\gamma_5 = -\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$

satisfies

$$\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0, \quad \gamma_5^2 = 1_{4\times 4}, \quad \gamma_5^\dagger = \gamma_5.$$

Massless Dirac fermion action is invariant under the axial U(1) rotation :

$$\psi \to \psi' = \exp(-i\alpha\gamma_5)\psi,$$
$$\bar{\psi} \to \bar{\psi}' = \bar{\psi}\exp(-i\alpha\gamma_5)$$

since

$$e^{i\alpha\gamma_5} D e^{i\alpha\gamma_5} = D.$$

保存則(?)

For x -dependent angle $\alpha(x)$

$$e^{i\alpha(x)\gamma_5} D e^{i\alpha(x)\gamma_5} = D + i\gamma^\mu\gamma_5\partial_\mu\alpha(x)$$

By partial integration,

$$\begin{aligned} S &= \int_X d^4x\ \bar{\psi} D\psi(x) \\ &= \int_X d^4x\ \bar{\psi}' D\psi'(x) - i\int_X d^4x\ \alpha(x)\partial_\mu\left[\bar{\psi}'\gamma^\mu\gamma_5\psi'(x)\right] \end{aligned}$$

→ $$\partial_\mu\left\langle \bar{\psi}'\gamma^\mu\gamma_5\psi'(x)\right\rangle = 0?$$

経路積分におけるaxial U(1)量子異常

$$Z = \int [D\bar{\psi} D\psi] e^{-S[\bar{\psi},\psi]}$$

$$= \int [D\bar{\psi}' D\psi'] J e^{-S[\bar{\psi}',\psi'] + \int d^4x \alpha(x) \partial_\mu J_5^\mu(x)}.$$

Jacobian の評価(with 適切な正則化)が必要.

Fujikawa method [Fujikawa 1979]:

J ≠ 1 is obtained with heat-kernel regularization (axial U(1) anomaly).

今日は藤川の方法は使わない.

Pauli-Villars(PV)正則化

質量を持つ bosonic spinor 場を理論に加える：

$$S = \int_X d^4x\ \bar{\psi} D\psi(x) + \int_X d^4x\ \bar{\phi}(D + M)\phi(x)$$

$$Z = \int [D\bar{\psi}D\psi] \int [D\bar{\phi}D\phi] e^{-S} = \frac{\det D}{\det(D+M)}$$

* Zを有限にするはもっとたくさんPV場が必要だがアノマリーの導出だけなら一つで十分.

Axial U(1) 変換 with PV場

Jacobianはフェルミオンとボゾンでキャンセル.

$$Z = \int [D\bar{\psi}D\psi] \int [D\bar{\phi}D\phi] e^{-S}$$

$$= \int [D\bar{\psi}'D\psi'] \color{red}{J} \int [D\bar{\phi}'D\phi'] \color{red}{J^{-1}} e^{-S[\bar{\psi}',\psi',\bar{\phi}',\phi'] + \int d^4x \alpha(x) \left[\partial_\mu J_5^\mu(x) + 2i\bar{\phi}' \color{blue}{M\gamma_5} \phi'(x)\right]}.$$

Cancel!

PV mass term

With infinitesimal $\alpha(x)$, we obtain

$$\partial_\mu \langle J_5^\mu(x) \rangle = 2M \langle \bar{\phi}' \gamma_5 \phi'(x) \rangle$$

$$= 2M \mathrm{tr}\left[\gamma_5 \frac{1}{D+M}\right](x,x).$$

$$\text{L.H.S.} = \partial_\mu \langle \bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi + \bar{\phi}\gamma^5\gamma^\mu\phi \rangle = \text{PV regularized current.}$$

Axial U(1) 量子異常は質量項から現れる

Is this anomaly?

$$\partial_\mu \langle J_5^\mu(x) \rangle = 2M \mathrm{tr} \left[\gamma_5 \frac{1}{D+M} \right] (x, x)$$

YES, it is !

$$= \frac{2}{32\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \mathrm{tr} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}(x)$$

Axial U(1) 量子異常は

1. 正則化された理論のexplicit symmetry breaking である。
2. それは質量項から現れる.

(計算詳細)

Confirm

$$\partial_\mu \langle J_5^\mu(x)\rangle = 2M\mathrm{tr}\left[\gamma_5 \frac{1}{D+M}\right](x,x)$$

$$= \frac{2}{32\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{tr}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}(x)$$

Hints: $M\mathrm{tr}\left[\gamma_5 \frac{1}{D+M}\right] = \mathrm{tr}\left[\gamma_5(1-D/M)\frac{1}{1-D^2/M^2}\right]$

Only even number of gamma matrices are in D^2

For $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $f(0)=1,\quad f(\infty)=0,\quad f^{(n)}(x)x|_{x=0}=0.$

量子異常を時空間積分すると

$$\int d^4x M \mathrm{tr}\left[\gamma_5 \frac{1}{D+M}\right](x,x) = \frac{1}{32\pi^2}\int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{tr}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}(x)$$

右辺 = winding number (インスタントン数).

左辺は何か？

$$\begin{aligned}\int d^4x M \mathrm{tr}\left[\gamma_5 \frac{1}{D+M}\right](x,x) &= M\mathrm{Tr}\left[\gamma_5 \frac{1}{D+M}\right] \\ &= \mathrm{Tr}\left[\gamma_5 (1-D/M)\frac{1}{1-D^2/M^2}\right] \\ &= \mathrm{Tr}\left[\gamma_5 \frac{1}{1-D^2/M^2}\right] \\ &= \sum_\lambda \langle\lambda|\gamma_5|\lambda\rangle \frac{1}{1+\lambda^2/M^2}\end{aligned}$$

$$D|\lambda\rangle = i\lambda|\lambda\rangle$$

Atiyah-Singer 指数定理

$$\{\gamma_5, D\} = 0.$$

For $\lambda \neq 0,$

$$D\gamma_5|\lambda\rangle = -\gamma_5 D|\lambda\rangle = -i\lambda\gamma_5|\lambda\rangle$$

therefore $\gamma_5|\lambda\rangle \propto |-\lambda\rangle$ and $\langle\lambda|\gamma_5|\lambda\rangle = 0.$

→

$$M\mathrm{Tr}\left[\gamma_5 \frac{1}{D+M}\right] = \sum_\lambda \langle\lambda|\gamma_5|\lambda\rangle \frac{1}{1+\lambda^2/M^2}$$

$$= \sum_{\lambda=0} \langle\lambda|\gamma_5|\lambda\rangle = n_+ - n_-$$

$$n_+ - n_- = \frac{1}{32\pi^2}\int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{tr}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}(x)$$

Pauli-Villars正則化によるAtiyah-Singer 指数 まとめ

Atiyah-Singer 指数定理 = 量子異常の時空間積分で、それは質量項から現れた.

1. RHS is winding number,
2. LHS is $n_+ - n_-$ AS A BONUS from $\{\gamma_5, D\} = 0.$

BONUSなしでもこの定理を理解できないか?

= 本講演

Contents

✓ 1. Introduction

✓ 2. Axial U(1) anomaly with Pauli-Villars regularization
は質量項から現れる。指数定理は $\{\gamma_5, D\} = 0.$ のボーナス。

3. Atiyah-Singer index with massive Dirac operator

4. APS index with domain-wall fermion

5. Mathematical proof

6. (APS index on a lattice)

7. Summary and discussion

Massive Dirac fermion

負の質量 (対 PV 場)を持つDirac fermion を考える

$$\frac{\det(D+m)}{\det(D-M)} \longrightarrow \text{Pauli-Villars}$$

ゲージ群をSU(N)にとり、底空間は偶数次元フラット
な境界のないユークリッド空間とする。

Axial U(1) 変換

フェルミオン質量を大きく、
簡単のためPV場の質量と等しくとる:　$m \to M \gg 0,$
さらに axial U(1) 変換でπ　回転し、質量項の符号を反転させる。

$$M\bar{\psi}\psi \to M\bar{\psi}e^{\frac{i\pi}{2}\gamma_5}e^{\frac{i\pi}{2}\gamma_5}\psi = -M\bar{\psi}\psi$$

$$\frac{\det(D+M)}{\det(D-M)} = \frac{\det(D-M)}{\det(D-M)} = 1?$$

Atiyah-Singer index **出現**

axial U(1) 量子異常からAtiyah-Singer 指数が出現。

$$\frac{\det(D+M)}{\det(D-M)} = \frac{\det(D-M)}{\det(D-M)} \times \exp\left(i\pi \underbrace{\frac{1}{32\pi^2}\int d^4x F\tilde{F}}_{=I} \right) = (-1)^I.$$

I = Atiyah-Singer index!

注) 導出にカイラル対称性は使っていない。

私たちの提案: このmassive フェルミオンの関係式を使って指数を“define” したらどうか？

(We use anomaly rather than symmetry.)

“New” Atiyah-Singer index

$$\frac{\det(D+M)}{\det(D-M)} = \frac{\det i\gamma_5(D+M)}{\det i\gamma_5(D-M)} = \frac{\prod_{\lambda_{+M}} i\lambda_{+M}}{\prod_{\lambda_{-M}} i\lambda_{-M}}$$

$$= \exp\left[\frac{i\pi}{2}\left(\sum_{\lambda_{+M}} \mathrm{sgn}\lambda_{+M} - \sum_{\lambda_{-M}} \mathrm{sgn}\lambda_{-M}\right)\right]$$

$$\lambda_{\pm M} : \text{eigenvalues of } \gamma_5(D \pm M).$$

$$I = \frac{1}{2}\left[\eta(\gamma_5(D+M)) - \eta(\gamma_5(D-M))\right].$$

$$\equiv \frac{1}{2}\eta(\gamma_5(D+M))^{reg.} \qquad \eta(H) = \sum_{\lambda\geq 0}^{reg} - \sum_{\lambda<0}^{reg}$$

よい点: カイラル対称性を使わなくても定義可能

悪い点:ゼロモードだけでは書けない。

eta不変量の評価

$$\eta(H)=\sum_{\lambda\geq 0}^{reg}-\sum_{\lambda<0}^{reg} \qquad H=\gamma_5(D\pm M).$$

これを演算子のトレースとして書き直す。

$$\eta(H)=\mathrm{Tr}\frac{H}{\sqrt{H^2}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty du\ \mathrm{Tr}He^{-u^2H^2}$$

Half of Gaussian integral

＊Hの固有値はゼロにはならない.

＊UV 発散 (big H near u=0) は危険だがPV場の寄与とキャンセル→ 積分前の摂動計算が有効.

η不変量の摂動計算

以下を使って,

$$H_\pm = \gamma_5(D \pm M), \quad H_\pm^2 = \gamma_5(D \pm M)\gamma_5(D \pm M) = -D^2 + M^2$$

$$\eta(H_\pm) = \pm\frac{2M}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty du\ \mathrm{Tr}\gamma_5(1 \pm D/M)\underbrace{e^{-u^2(-D^2+M^2)}}_{\text{even }\gamma_\mu\text{'s}}$$

Do not contribute.

$$= \pm\frac{2M}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty du\ e^{-u^2M^2}\mathrm{Tr}\gamma_5 e^{u^2D^2}$$

Weak coupling expansion

$$= \frac{\pm 1}{32\pi^2}\int d^4x\ \ \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{tr}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}(x) + \mathcal{O}(1/M)$$

Atiyah-Singer 指数定理

以下の指数定理が成り立つことを摂動論で確かめることができた。

$$\frac{1}{2}\eta(H_+) - \frac{1}{2}\eta(H_-) = \frac{1}{32\pi^2}\int d^4x \ \ \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{tr}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}(x)$$

$$H_\pm = \gamma_5(D \pm M).$$

注) 一般にeta 不変量は整数ではないが偶数次元では整数。

非摂動的証明はできるか?

$H(m) = \gamma_5(D+m)$ の固有値

For $D\phi = 0,$ $H(m)\phi = \gamma_5 m\phi = \underbrace{\pm}_{\text{chirality}} m\phi.$

For $D\phi \neq 0,$ $\{H(m), D\} = 0.$

なのでどの固有値 $H(m)\phi_{\lambda_m} = \lambda_m \phi_{\lambda_m}$

も符号の反転ペア $H(m)D\phi_{\lambda_m} = -\lambda_m D\phi_{\lambda_m}$

を持つ(エータ不変量には効かない)。

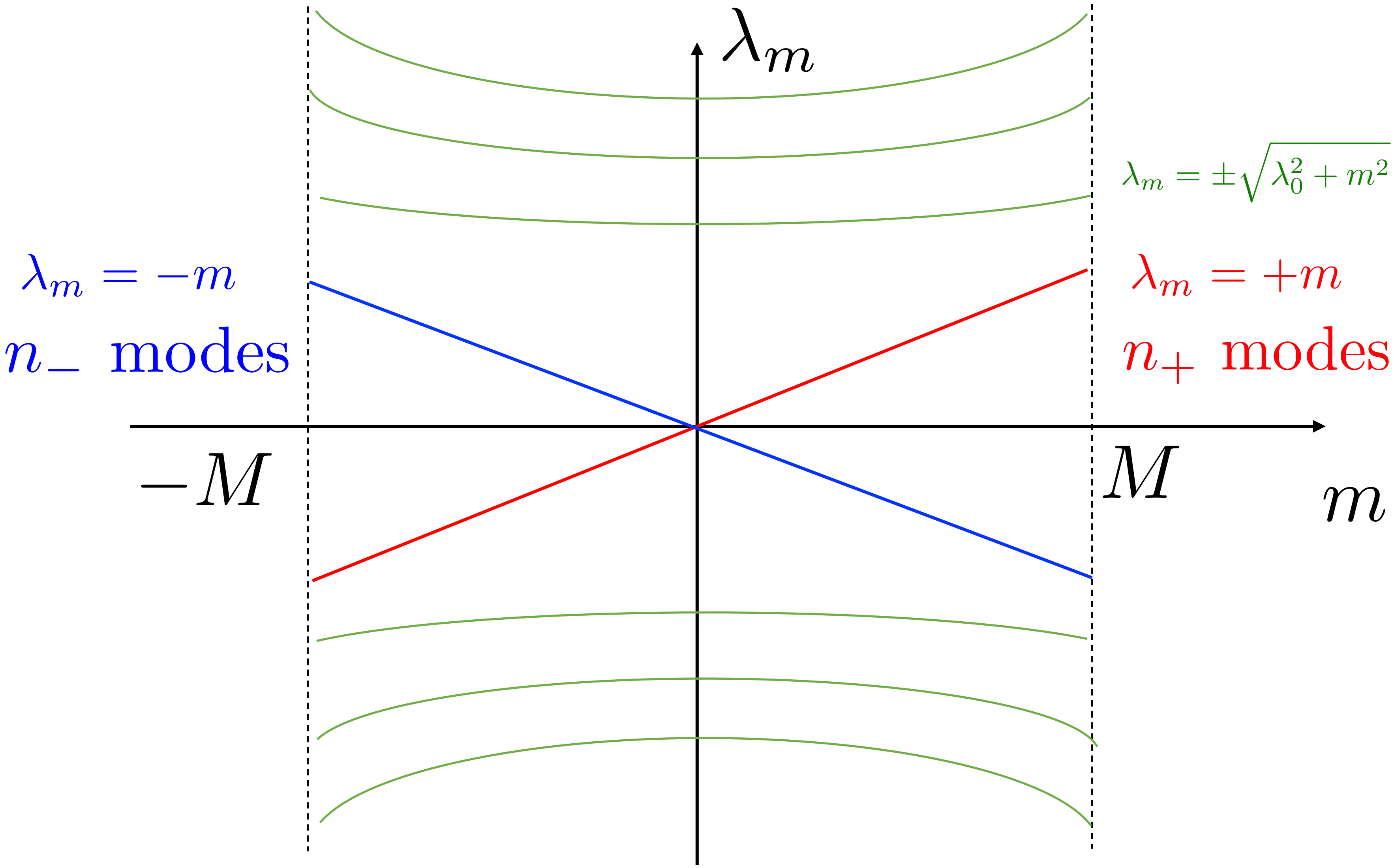
また、$H(m)^2 = -D^2 + m^2$

より固有値は質量ゼロのときの固有値を用いて

$$\lambda_m = \pm\sqrt{\lambda_0^2 + m^2}$$

となる。

Spectrum of $H(m) = \gamma_5(D + m)$



Spectral flow = AS 指数 = η不変量

n_+ = 負から正になった固有値の数
n_- = 正から負になった固有値の数

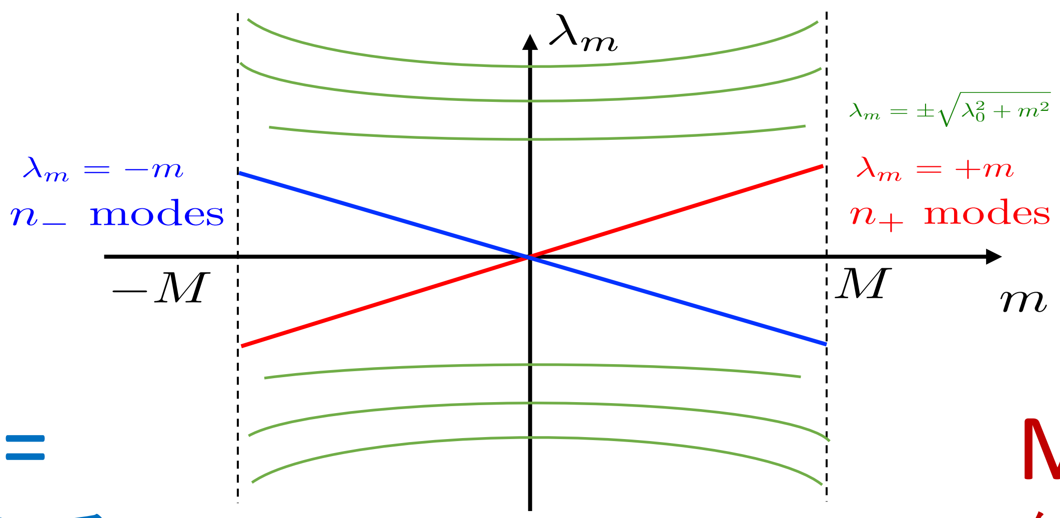
$n_+ - n_-$ = spectral flow of $H(m) \quad m \in [-M, M]$

一方、固有値が一つ(負から正へ/正から負へ)横切ると $\eta(H(m))$ は2ずつ増/減。

→ $$\frac{1}{2}\eta(H(M)) - \frac{1}{2}\eta(H(-M)) = n_+ - n_-.$$

証明終。(後述のAPS定理はこれほど自明ではない)

K理論の suspension 同型



Massless=
点で数える

Massive=
線で数える

$$K^0(pt) \simeq K^1(I, \partial I)$$

point

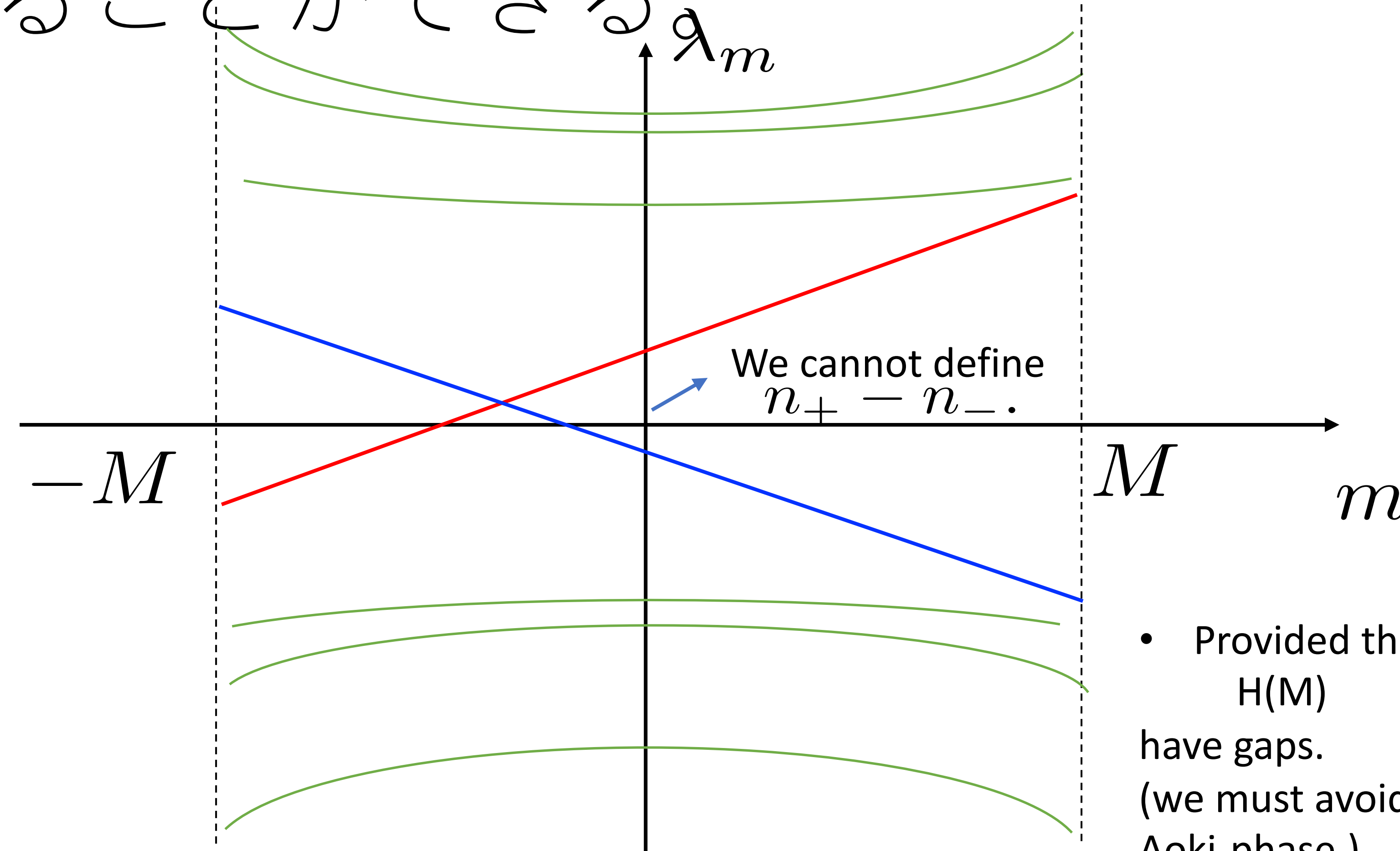
line

With chirality operator

Without chirality operator

結果は一致する。

格子正則化などでカイラル対称性が破れてしまっても、点(massless)では数えられなくても、線(massive)では数えることができる



- Provided that H(M) have gaps. (we must avoid Aoki-phase.)

Contents

✓ 1. Introduction

✓ 2. Axial U(1) anomaly with Pauli-Villars regularization
は質量項から現れる。指数定理は $\{\gamma_5, D\}=0.$ のボーナス。

✓ 3. Atiyah-Singer index with massive Dirac operator
はη不変量(Spectral flow)で与えられる。線で数えるので安定。

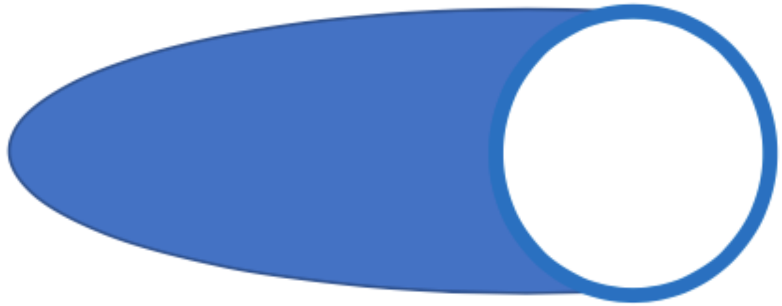
4. APS index with domain-wall fermion

5. Mathematical proof

6. (APS index on a lattice)

7. Summary and discussion

Atiyah-Patodi-Singer (APS)指数定理[1975]



$$\eta(H) = \sum_{\lambda \geq 0}^{reg} - \sum_{\lambda < 0}^{reg}$$

$$\mathrm{Ind}D|_{\mathrm{APSb.c.}} = \frac{1}{32\pi^2}\int d^4x\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{tr}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} - \frac{1}{2}\eta(iD^{\mathrm{3D}})$$

整数　　非整数　　奇数次元では非整数

境界のある場合は、数学の定理ではカイラル対称性を保つため、物理屋unfriendly(非局所的な)APS境界条件を採用

→ おつりとしてnon-local なエータ不変量が加わる。

APS指数定理とトポロジカル絶縁体

トポロジカル絶縁体とは

内部(bulk)は絶縁体：ギャップのある(massive)フェルミオン系。でも表面(edge)に伝導性のよいギャップレス(massless)なDirac フェルミオンが出現。

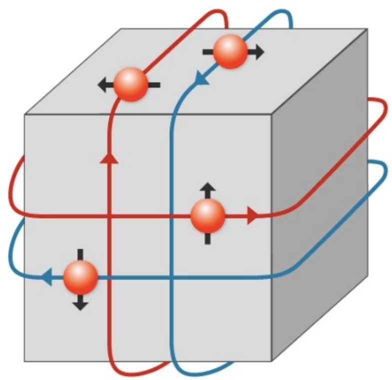
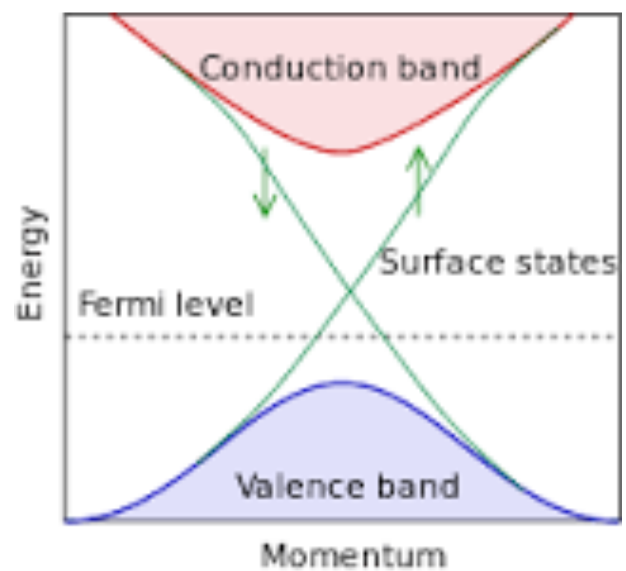


Figure from Wikipedia



2005 Kane et al　によって予言

2007 発見 [Koenig et al.].

APS指数定理 とトポロジカル絶縁体

Witten 2015 : symmetry protected topological 絶縁体のバルク-エッジ対応をAPS指数で理解できる。

[Related works: Metlitski 15, Seiberg- Witten 16, Tachikawa-Yonekura 16&18, Freed-Hopkins 16, Witten 16, Yonekura 16&19, Witten-Yonekura 19...]

fermion path integrals

$$Z_{\text{edge}} \propto \exp(-i\pi\eta(iD^{3\text{D}})/2)$$ T-anomalous

$$Z_{\text{bulk}} \propto \exp\left(i\pi\frac{1}{32\pi^2}\int_{x_4>0} d^4x\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{tr}[F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}]\right)$$ T-anomalous

$$Z_{\text{edge}}Z_{\text{bulk}} \propto (-1)^{\mathfrak{J}} = (-1)^{-\mathfrak{J}}$$ → T is protected !

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{32\pi^2}\int_{x_4>0} d^4x\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{tr}[F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}] - \frac{\eta(iD^{3\text{D}})}{2}$$

左辺がよくわからない。絶縁体 = massive fermionの記述 に非局所的境界条件まで使ってカイラルなゼロモードが必要なのか？

APS 境界条件

4D(Euclidean)時空で massless Dirac operator を $x_4 > 0$ の領域で考える。

(任意の偶数次元でも同様)

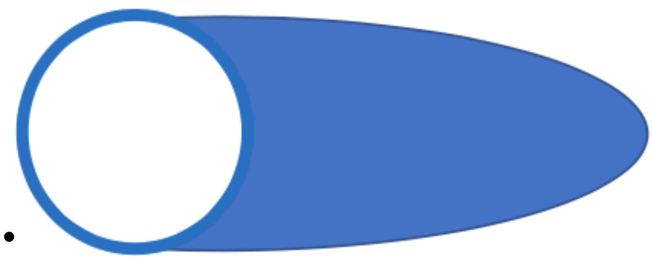
$$A_4 = 0 \ \ \mathrm{gauge}$$

$$D = \gamma_4(\partial_4 + B), \quad B = \gamma_4 \gamma_i D^i$$

* Gauge group is U(1) or SU(N).

APS 境界条件:

$$\left(\frac{B + |B|}{2}\right) \psi|_{x_4=0} = 0.$$



* Metric is flat.

これは非局所的(need all eigenfunction of B).

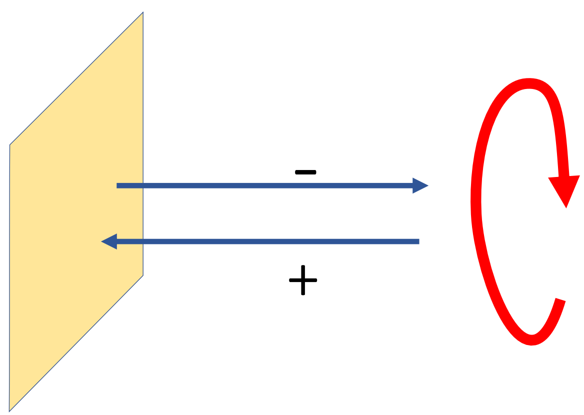
でも γ_5 と可換-> 指数の定義は従来通り。

境界とカイラル対称性

物理屋friendlyな境界条件とは

1. 境界面が平坦だったらその面に垂直な軸に対する回転対称性があるはず。
2. 入射波は反射派としてはねかえってくるはず。

粒子が境界面に垂直に入射すると、、、



運動量は反転、
角運動量は保存、
→カイラリティは非保存

n_+, n_- および index は定義できなくて当然

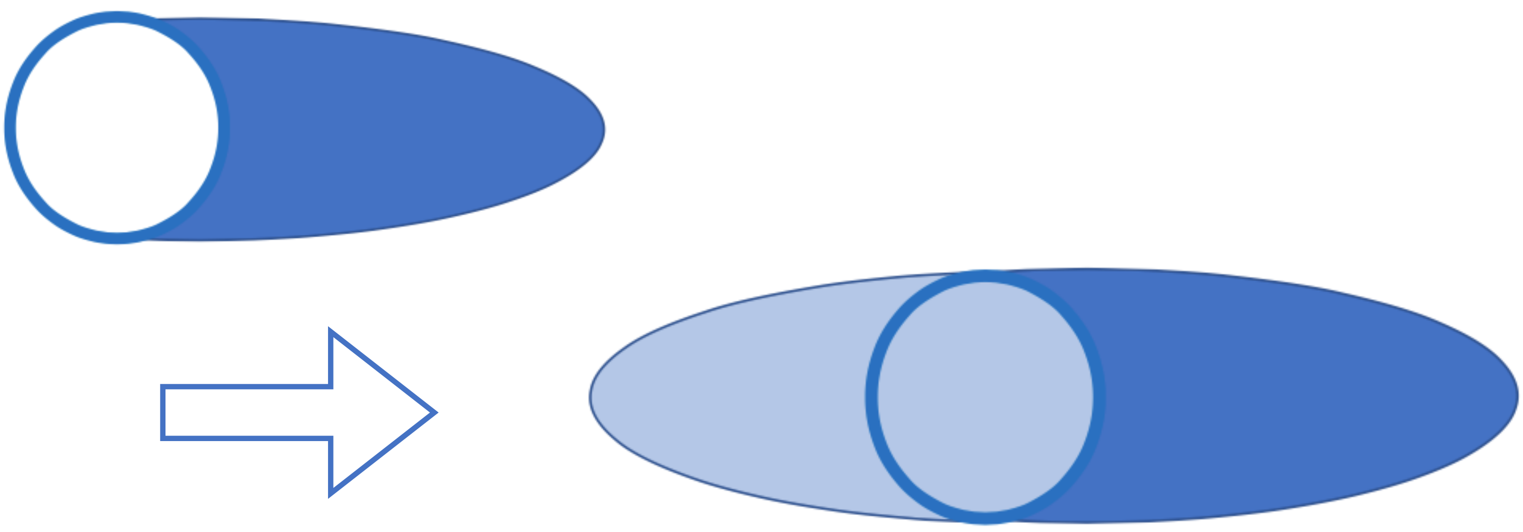
ではどうする？

物理屋フレンドリーな定式化とは？

物理屋フレンドリーな定式化とは？

物理では

1. どんな境界にもその”外側”がある。→　物理で扱うべきは境界付き多様体ではなく、ドメインウォールのある(閉)多様体である。



物理屋フレンドリーな定式化とは？

物理では

1. どんな境界にもその”外側”がある。→　物理で扱うべきは境界付き多様体ではなく、ドメインウォールのある(閉)多様体である。
2. 境界条件はカイラリティではなく角運動量を保存すべきである。massless → massive (in bulk)

物理屋フレンドリーな定式化とは？

物理では

1. どんな境界にもその”外側”がある。→　物理で扱うべきは境界付き多様体ではなく、ドメインウォールのある(閉)多様体である。
2. 境界条件はカイラリティではなく角運動量を保存すべきである。massless → massive (in bulk)
3. 境界条件は手で与えるものではなく自然が勝手に選ぶべきである。

物理屋フレンドリーな定式化とは？

物理では

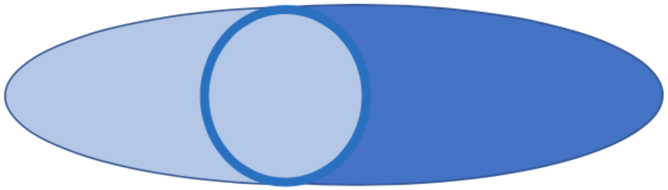
1. どんな境界にもその”外側”がある。→　物理で扱うべきは境界付き多様体ではなく、ドメインウォールのある(閉)多様体である。
2. 境界条件はカイラリティではなく角運動量を保存すべきである。massless → massive (in bulk)
3. 境界条件は手で与えるものではなく自然が勝手に選ぶべきである。
4. 境界に現れるエッジモードが役割を果たすべき。

ドメインウォールフェルミオン

[Jackiw-Rebbi 1976, Callan-Harvery 1985, Kaplan 1992 …]

以下のようなmassive Dirac operatorを考える。

$$D_{4\mathrm{D}} + M\epsilon(x_4), \quad \epsilon(x_4) = \mathrm{sgn} x_4$$



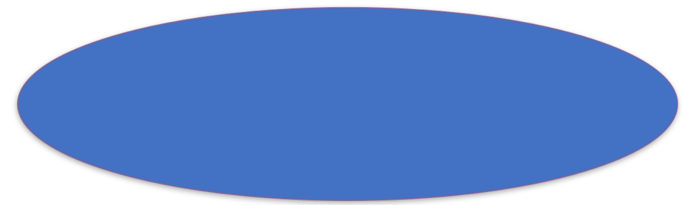
多様体は境界のない閉多様体。
質量項の符号をx4=0 で反転。
いかなる境界条件も手で課さない。

注) Lattice QCD で使われるとき(5D)と次元が 1 次元違います。

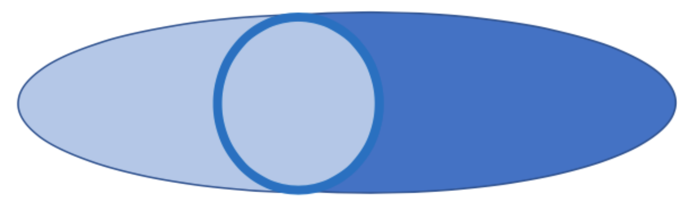
物理屋フレンドリーなAPS指数の定式化

[F-Onogi-Yamaguchi 2017]

$$\frac{1}{2}\eta(\gamma_5(D+M))^{reg} = \text{AS index}$$



$$\frac{1}{2}\eta(\gamma_5(D+M\epsilon(x_4)))^{reg}$$



$$= \frac{1}{32\pi^2}\int_{x_4>0} d^4x\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{tr}[F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}] - \frac{\eta(iD^{3\mathrm{D}})}{2}$$

以下、この等式を藤川の方法で示す。

藤川の方法

$$\frac{1}{2}\eta(H_{DW}) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\frac{\gamma_5(D+M\varepsilon(x_4))}{\sqrt{\{\gamma_5(D+M\varepsilon(x_4))\}^2}}$$

1. 正則化を選ぶ。

2. トレースを評価する完全系を選ぶ。

3. 摂動計算する。

藤川の方法

$$\frac{1}{2}\eta(H_{DW}) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\frac{\gamma_5(D+M\varepsilon(x_4))}{\sqrt{\{\gamma_5(D+M\varepsilon(x_4))\}^2}}$$

1. 正則化を選ぶ。

Pauli-Villars subtraction:

$$-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\frac{\gamma_5(D-M_2)}{\sqrt{\{\gamma_5(D-M_2)\}^2}} \qquad M_2 \gg M$$

2. トレースを評価する完全系を選ぶ。

3. 摂動計算する。

藤川の方法

$$\frac{1}{2}\eta(H_{DW}) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\frac{\gamma_5(D+M\varepsilon(x_4))}{\sqrt{\{\gamma_5(D+M\varepsilon(x_4))\}^2}}$$

1. 正則化を選ぶ。

Pauli-Villars subtraction:

$$-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\frac{\gamma_5(D-M_2)}{\sqrt{\{\gamma_5(D-M_2)\}^2}} \qquad M_2 \gg M$$

2. トレースを評価する完全系を選ぶ。

$\{\gamma_5(D^{\mathrm{free}}+M\varepsilon(x_4))\}^2$ の固有関数系

3. 摂動計算する。

[Cf. Kobayashi and Yonekura 2021]

自由domain-wallフェルミオンの完全系

$$\{\gamma_5(D^{\mathrm{free}} + M\varepsilon(x_4))\}^2\phi = \left[-\partial_\mu^2 + M^2 - 2M\gamma_4\delta(x_4)\right]\phi = \lambda^2\phi$$

の解の完全系は $\varphi(x_4) \otimes e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}$ 3次元方向は通常の平面波

$$\varphi^{\omega}_{\pm,o}(x_4) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\left(e^{i\omega x_4} - e^{-i\omega x_4}\right),$$

$$\varphi^{\omega}_{\pm,e}(x_4) = \frac{1}{\sqrt{4\pi(\omega^2 + M^2)}}\left((i\omega \mp M)e^{i\omega|x_4|} + (i\omega \pm M)e^{-i\omega|x_4|}\right),$$

$\varphi^{\mathrm{edge}}_{+,e}(x_4) = \sqrt{M}e^{-M|x_4|},$ エッジモードが現れた！

$$\omega = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + M^2 - \lambda_{4D}^2} \qquad \gamma_4\varphi^{\omega,\mathrm{edge}}_{\pm,e/o} = \pm\varphi^{\omega,\mathrm{edge}}_{\pm,e/o}$$

$\lambda_{\mathrm{edge}} = \pm|p|$ エッジモードはmassless！

物理屋フレンドリーな境界条件
=デルタ関数ポテンシャルの接続問題

固有関数系はすべて以下の”境界”条件を満たす必要がある。

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_4} \pm M\epsilon(x_4)\right] \varphi^{\omega,\mathrm{edge}}_{\pm,e}(x_4)\Big|_{x_4=0} = 0, \quad \varphi^{\omega}_{\pm,o}(x_4=0) = 0.$$

1. この条件は局所的。
2. カイラリティは保たず、角運動量を保つ。
3. この条件は手で課したのではなく、ポテンシャルによって物理的に与えられたものである。

(APS境界条件とは全く異なる)

η 不変量の計算

エッジモード部分(masslessなのでnonlocal)

$$\frac{1}{2}\eta(H_{DW})^{edge} = \frac{1}{2}\sum_{edgemodes}\phi^{edge}(x)^{\dagger}\mathrm{sgn}(H_{DW})\phi^{edge}(x) = -\frac{1}{2}\eta(iD^{\mathrm{3D}})|_{x_4=0}$$

バルク部分(重いのでlocalな量の積分で書ける)

$$\frac{1}{2}\eta(H_{DW})^{bulk} = \frac{1}{2}\sum_{bulkmodes}(\phi^{bulk})^{\dagger}\mathrm{sgn}(H_{DW})\phi^{bulk}$$

$$= \frac{1}{64\pi^2}\int d^4x\epsilon(x_4)\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{tr}_c F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}(x) + O(1/M).$$

PV 部分 $-\frac{1}{2}\eta(H_{PV}) = \frac{1}{64\pi^2}\int d^4x\ \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{tr}_c F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}(x) + O(1/M).$

$$\boxed{\frac{1}{2}\eta(\gamma_5(D+M\epsilon(x_4)))^{reg} = \frac{1}{32\pi^2}\int_{x_4>0} d^4x\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{tr}[F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}] - \frac{\eta(iD^{\mathrm{3D}})}{2}}$$

T anomaly のbulk-edge 相殺も明らか。

Contents

✓ 1. Introduction

✓ 2. Axial U(1) anomaly with Pauli-Villars regularization
は質量項から現れる。指数定理は $\{\gamma_5, D\} = 0.$のボーナス。

✓ 3. Atiyah-Singer index with massive Dirac operator
はη不変量(Spectral flow)で与えられる。線で数えるので安定。

✓ 4. APS index with domain-wall fermion
もη不変量(Spectral flow)で与えられる。

5. Mathematical proof

6. (APS index on a lattice)

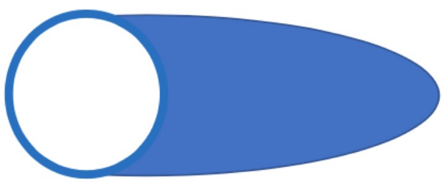
7. Summary and discussion

この等式は常に正しいのか？

$$Ind(D_{\mathrm{APS}}) = \frac{1}{2}\eta(H_{DW}^{reg})$$

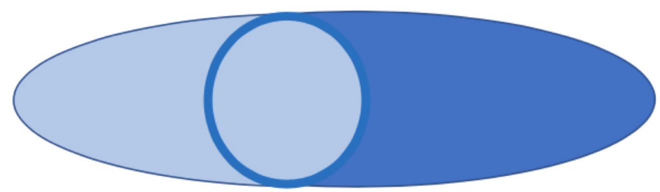
は一般の偶数次元多様体で成り立つのか？

セットアップは数学的にも非自明に異なる。



APS

1. 質量ゼロのDirac 演算子
2. 非局所的境界条件
3. カイラル対称性○角運動量×。
4. エッジ状態が現れない。
5. 境界付き多様体上の定理



Domain-wall fermion

1. 質量のあるDirac 演算子
2. 局所的境界条件(物理的な理由)
3. カイラル対称性×角運動量○。
4. エッジ状態が現れる(η 不変量の源)。
5. 境界のない多様体上の定理

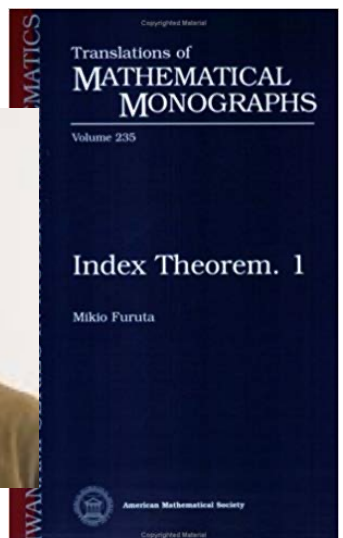
数学者の共同研究者のみなさん

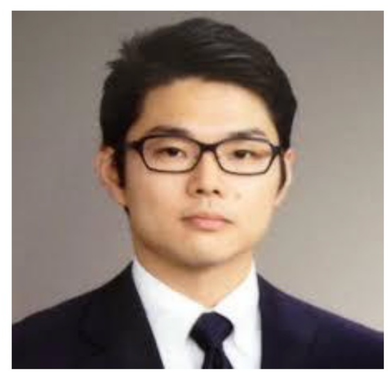
「数学者への挑戦と受け止めました」

Mikio Furuta (U. Tokyo)

Shinichiroh Matsuo (Nagoya U.)

Mayuko Yamashita (Kyoto U.)





THE ATIYAH-PATODI-SINGER INDEX AND DOMAIN-WALL FERMION DIRAC OPERATORS

HIDENORI FUKAYA, MIKIO FURUTA, SHINICHIROH MATSUO, TETSUYA ONOGI, SATOSHI YAMAGUCHI, AND MAYUKO YAMASHITA

ABSTRACT. We introduce a *mathematician-friendly* formulation of the *physicist-friendly* derivation [8] of the Atiyah-Patodi-Singer index. Our viewpoint sheds some new light on the interplay among the Atiyah-Patodi-Singer boundary condition, domain-wall fermions, and edge modes.

From Ver.1 in arXiv:1910.01987

定理 **(F-Furuta-Matsuo-Onogi-Yamaguchi-Yamashita 2019)**

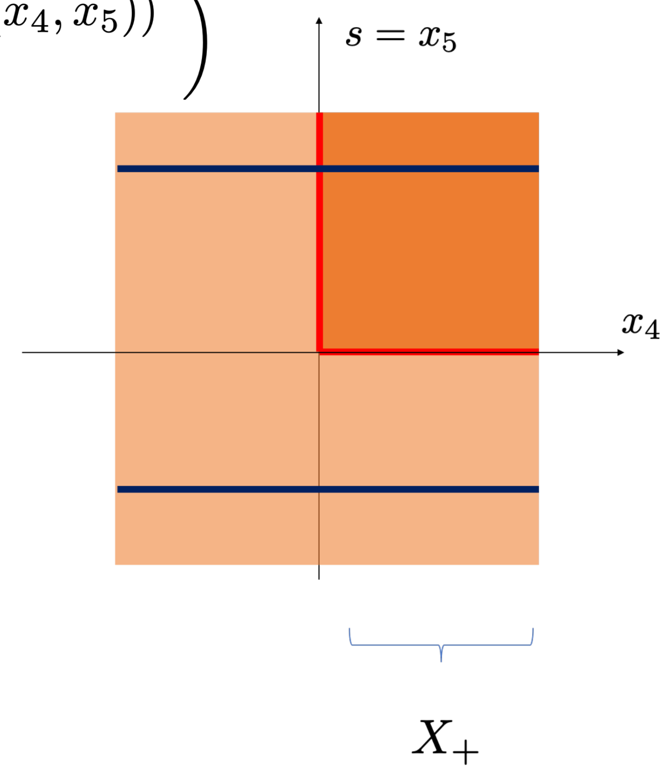
For any APS index of a massless Dirac operator on a even-dimensional Riemannian manifold X with boundary, there exists a massive (domain-wall) Dirac operator on a closed manifold, sharing its half with X, and its eta invariant is equal to the original index.

数学的証明の概要

We introduce an extra dimension and consider a Dirac operator on the higher dim. manifold.

$$D^{5\mathrm{D}} = \begin{pmatrix} 0 & \partial_5 + \gamma_5 (D^{4\mathrm{D}} + m(x_4, x_5)) \\ -\partial_5 + \gamma_5 (D^{4\mathrm{D}} + m(x_4, x_5)) & 0 \end{pmatrix}$$

$$m(x_4, x_5) = \begin{cases} M & \text{for } x_4 > 0 \ \& \ x_5 > 0 \\ 0 & \text{for } x_4 = 0 \ \& \ x_5 = 0 \\ -M_2 & \text{otherwise} \end{cases}$$



With 2 different evaluations, we can show

$$Ind(D^{5D}) = Ind(D_{\mathrm{APS}}) = \frac{1}{2}\eta(H_{DW})$$

Contents

- ✓ 1. Introduction
- ✓ 2. Axial U(1) anomaly with Pauli-Villars regularization
  は質量項から現れる。指数定理は $\{\gamma_5, D\} = 0.$のボーナス。
- ✓ 3. Atiyah-Singer index with massive Dirac operator
  はη不変量(Spectral flow)で与えられる。線で数えるので安定。
- ✓ 4. APS index with domain-wall fermion
  もη不変量(Spectral flow)で与えられる。
- ✓ 5. Mathematical proof
  両者は1次元高いDirac演算子のindex の2つの異なる評価
- 6. (APS index on a lattice)
- 7. Summary and discussion

格子ゲージ理論におけるカイラル対称性

Nielsen-Ninomiyaの定理 [1981]

$\gamma_5 D + D\gamma_5 = 0,$ のときフェルミオンダブリング。

Ginsparg-Wilson 関係式 [1982]

$\gamma_5 D + D\gamma_5 = aD\gamma_5 D.$ a :lattice spacing

ならばNN定理を回避可能。

オーバーラップDirac演算子 [Neuberger, 1998]

$$D_{ov} = \frac{1}{a}\left(1 + \gamma_5 \frac{H_W}{\sqrt{H_W^2}}\right) \qquad H_W = \gamma_5 (D_W - M). \quad M = 1/a.$$

周期的格子(T^4)でカイラル対称性を実現!

格子ゲージ理論におけるカイラル対称性

オーバーラップフェルミオン作用

$$S=\sum_x \bar{q}(x)D_{ov}q(x)$$

は以下の”カイラル“変換の下で不変。

$$q\to e^{i\alpha\gamma_5(1-aD_{ov})}q,\quad \bar{q}\to\bar{q}e^{i\alpha\gamma_5}.$$

しかもaxial U(1)量子異常も正しく再現。

$$Dq\bar{q}\to\exp\left[2i\alpha\mathrm{Tr}(\gamma_5+\gamma_5(1-aD_{ov}))/2\right]Dq\bar{q}$$

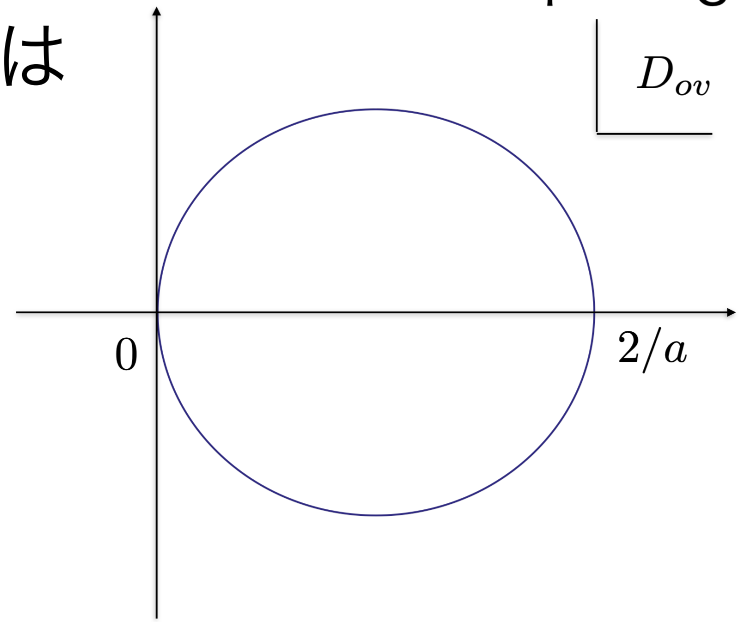
さらに Atiyah-Singer 指数も再現！

$$\mathrm{Tr}\gamma_5\left(1-\frac{aD_{ov}}{2}\right)$$

格子上のAtiyah-Singer 指数定理

a :lattice spacing

オーバーラップ演算子の固有値は半径1/a の円状に分布。



複素固有値は”カイラル”対称性より

$$\gamma_5\left(1-\frac{aD_{ov}}{2}\right)$$

の±のペアで現れる(トレースに効かない)。
実固有値のうち、2/a (ダブラーの極) は効かない。

$$\mathrm{Tr}\gamma_5\left(1-\frac{aD_{ov}}{2}\right) = \mathrm{Tr}_{\mathrm{zeros}}\gamma_5.$$

Atiyah-Patodi-Singer 指数は難しい

(T^4 上の)AS 指数はオーバーラップ演算子により定式化可能。

$$D_{ov} = \frac{1}{a}\left(1 + \gamma_5 \frac{H_W}{\sqrt{H_W^2}}\right)$$

しかし(オリジナルの形での)APS指数はほぼ不可能:

1. Overlap 演算子は $D_{\mathrm{normal}} + D_{\mathrm{horizontal}}$ の形をしていない。APS条件を課せない。

2. 課せたとしてもGinsparg-Wilson 関係式（カイラル対称性）は必ず破れる。[Luscher 2006]

Cf. Kikukawa, 数理科学 2020 Jan.

しかしAS指数をよくみると、、、

$$Ind(D_{ov}) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\gamma_5\left(1 - \frac{aD_{ov}}{2}\right) \quad D_{ov} = \frac{1}{a}\left(1 + \gamma_5\frac{H_W}{\sqrt{H_W^2}}\right)$$

$$H_W = \gamma_5(D_W - M) \qquad M = 1/a$$

定義に入れて整理すると、η不変量が出てくる！

$$= -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\frac{H_W}{\sqrt{H_W^2}} = -\frac{1}{2}\eta(\gamma_5(D_W - M))!$$

格子理論の指数定理は　Cf. Itoh-Iwasaki-Yoshie 1982,　Adams 2001

1. 指数が質量を持つDirac 演算子で与えられること
2. 指数の定義にカイラル対称性が不要であること
   (Wilson Dirac演算子で十分)

を非摂動的な等式として知っていた！

指数定理の統一的理解

質量ゼロのDirac演算子による指数定理

	continuum	lattice
AS	$\mathrm{Tr}\gamma_5 e^{D^2/M^2}$	$\mathrm{Tr}\gamma_5(1 - aD_{ov}/2)$
APS	$\mathrm{Tr}\gamma_5 e^{D^2/M^2}$ w/ APS bc	Not known

質量を持つDirac 演算子による指数定理

	continuum	lattice
AS	$-\frac{1}{2}\eta(\gamma_5(D - M))$	$-\frac{1}{2}\eta(\gamma_5(D_W - M))$
APS	$-\frac{1}{2}\eta(\gamma_5(D - \varepsilon M))$	$-\frac{1}{2}\eta(\gamma_5(D_W - \varepsilon M))$?

YES！

[F, Kawai, Matsuki, Mori, Nakayama, Onogi, Yamaguchi, 2019]

格子ゲージ理論におけるAPS指数

[F, Kawai, Matsuki, Mori, Nakayama, Onogi, Yamaguchi, 2019]

4次元周期境界条件を課した正方格子 (T[4])上で,

$0 < M < 2/a$ の範囲で

$$\frac{1}{2}\eta(\gamma_5(D_W - \varepsilon M)) \qquad \varepsilon = \mathrm{sgn}(x_4 - a/2)\mathrm{sgn}(T - x_4 - a/2)$$

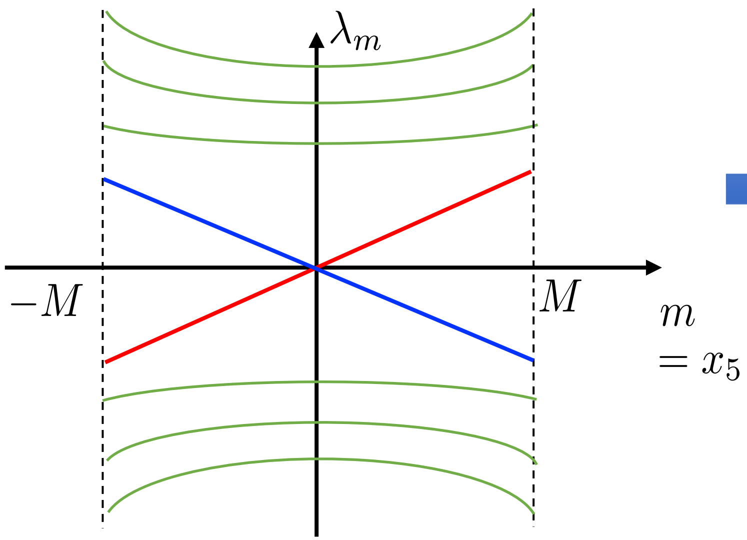
$$= \frac{1}{32\pi^2}\int_{0<x_4<T} d^4x \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{tr}_c F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}(x) + \frac{1}{2}\eta(iD^{\mathrm{3D}})|_{x_4=0} - \frac{1}{2}\eta(iD^{\mathrm{3D}})|_{x_4=T}$$

* Bulk part is similar to that of AS index [H.Suzuki 1998].

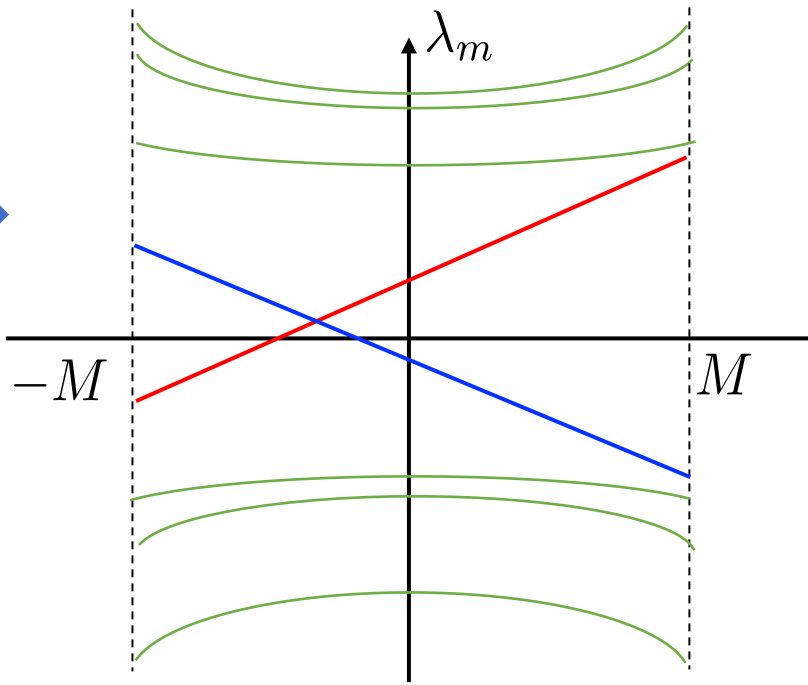
が成り立つことを摂動論で示した。

注) 左辺は常に整数なので、リンク変数が十分なめらか (admissibility condition)であれば非摂動的に成り立つと推測。

点(massless 1点)で数えるより線(質量=1-parameter)で数えた方が楽。



With chiral symmetry



Without chiral symmetry

カイラル対称性が破れると、$n_+ - n_-$は定義が難しい。
しかし、スペクトル流＝線なら数えることができる。

Contents

✓ 1. Introduction

✓ 2. Axial U(1) anomaly with Pauli-Villars regularization
は質量項から現れる。指数定理は $\{\gamma_5, D\} = 0.$のボーナス。

✓ 3. Atiyah-Singer index with massive Dirac operator
はη不変量(Spectral flow)で与えられる。線で数えるので安定。

✓ 4. APS index with domain-wall fermion
もη不変量(Spectral flow)で与えられる。

✓ 5. Mathematical proof
両者は1次元高いDirac演算子のindex の2つの異なる評価

✓ 6. AS and APS index on a lattice
はカイラル対称性を損ねるWilson Dirac 演算子で定式化可能。

7. Summary and discussion

まとめ

指数定理（および量子異常）は質量を持つフェルミオン(with PV reg.)でも理解できる。

しかも質量を持たないときよりも（境界のない多様体上で）統一的な記述が可能。

格子ゲージ理論への応用も簡単(カイラル対称性を損ねるWilson-Dirac演算子で十分)。

	continuum	lattice
AS	$-\frac{1}{2}\eta(\gamma_5(D-M))$	$-\frac{1}{2}\eta(\gamma_5(D_W-M))$
APS	$-\frac{1}{2}\eta(\gamma_5(D-\varepsilon M))$	$-\frac{1}{2}\eta(\gamma_5(D_W-\varepsilon M))$

おまけ

エータ不変量はspectral flow と等価。

	continuum	lattice
AS	$\mathrm{Sf}(\gamma_5(D-M))$	$\mathrm{Sf}(\gamma_5(D_W-M))$
APS	$\mathrm{Sf}(\gamma_5(D-\varepsilon M))$	$\mathrm{Sf}(\gamma_5(D_W-\varepsilon M))$

$$\mathrm{Sf} = \text{spectral flow (from PV operator with positive mass)}$$

さらなる統合[線で数えよう]

奇数次元のmod-2 指数(WittenのSU(2)anomaly を説明)も質量を持つDirac演算子を用いて定式化可能。

[F, Furuta, Matsuki, Matsuo, Onogi, Yamaguchi, Yamashita 2020]

	continuum	lattice
AS	$\mathrm{Sf}(\gamma_5(D-M))$	$\mathrm{Sf}(\gamma_5(D_W-M))$
APS	$\mathrm{Sf}(\gamma_5(D-\varepsilon M))$	$\mathrm{Sf}(\gamma_5(D_W-\varepsilon M))$
mod-two AS	$\mathrm{Sf}'\begin{pmatrix} & D-M \\ -(D-M)^\dagger & \end{pmatrix}$	$\mathrm{Sf}'\begin{pmatrix} & D_W-M \\ -(D_W-M)^\dagger & \end{pmatrix}$
mod-two APS	$\mathrm{Sf}'\begin{pmatrix} & D-\varepsilon M \\ -(D-\varepsilon M)^\dagger & \end{pmatrix}$	$\mathrm{Sf}'\begin{pmatrix} & D_W-\varepsilon M \\ -(D_W-\varepsilon M)^\dagger & \end{pmatrix}$

$\mathrm{Sf}' = \text{mod-two spectral flow : counting zero-crossing pairs from PV op.}$

南部先生の手のひらの外へ

私たちは南部先生の手のひらの上しか研究していないのではないか？

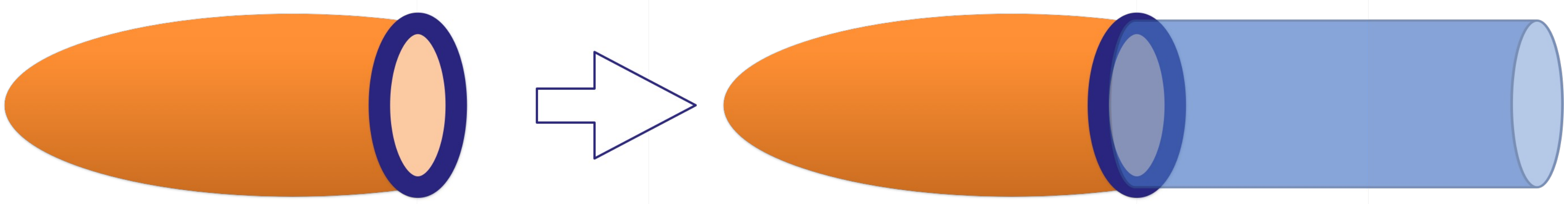
対称性のない物理でもがんばれば新しい発見があるかも？

素粒子論の次のノーベル賞は手のひらの外かも？

Back-up slides

Theorem 1: APS index = index with infinite cylinder

In the original paper by APS, they showed

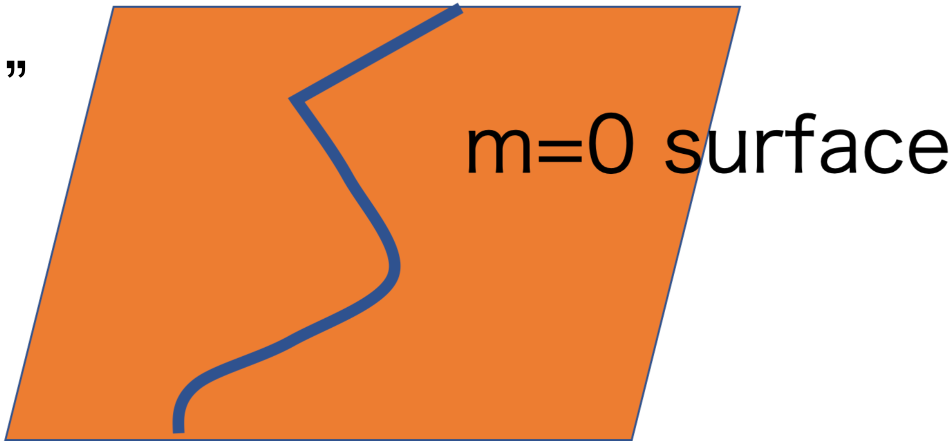


Index w/ APS b.c. = Index with infinite cylinder attached to the original boundary (w.r.t. square integrable modes).

* On cylinder, gauge fields are constant in the extra-direction.

Theorem 2: Localization (& product formula)

By giving position-dependent “mass”, we can localize the zero modes to “massless” lower-dimensional surface and the index is given by the product:



$$Ind(\gamma_s(D^d + \partial_s + i\gamma_s M(s))) = Ind(D^d) \times Ind(\gamma_s \partial_s + M(s))$$

Theorem 3: In odd-dim, APS index = boundary eta-invariant

$$\int F \wedge F \wedge \cdots$$

exists only in even dimensions.

$$Ind(D_{\mathrm{APS}}^{odd-dim}) = \frac{1}{2}\left[\eta(D^{\mathrm{boundary1}}) - \eta(D^{\mathrm{boundary2}})\right]$$