高次対称性とギャップレス・フラクトン相

[arXiv:2207.00854]

広野雄士

apctp

共同研究者

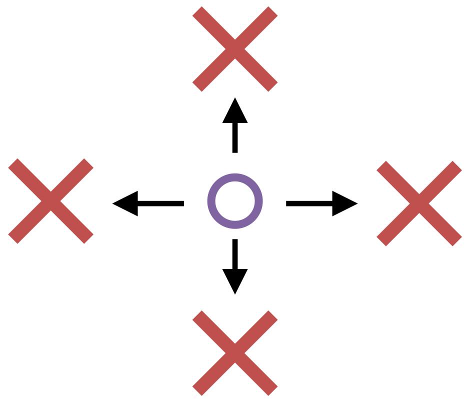
Minyoung You, Stephen Angus (APCTP), Gil Young Cho (POSTECH)

高次対称性とギャップレス・フラクトン相: まとめ

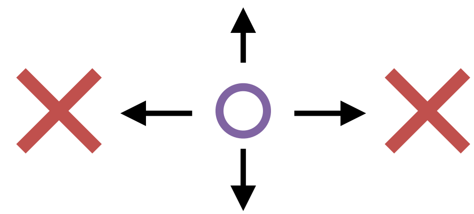
- フラクトン相: 移動方向に制限を持つ励起を持つ相
  - “Beyond Landau order”
  - gapped 相: トポロジカル秩序と似た性質
  - gapless 相: 高階ランクゲージ理論により記述される。例: $\{\phi, A_{ij}\}$, $A_{ij} = A_{ji}$
- 疑問: **gapless フラクトン相はどのように特徴づけられるのか？**
- 結論: **gapless フラクトン相は高次(1-form)対称性が自発的に破れた相**
  - 高次対称性の電荷が並進と非可換: “non-uniform”
    - 対称性演算子は topological
  - 保存電荷の代数が、移動方向の制限を決める
    - $[\mathrm{i}P_i, Q'] = Q \longrightarrow Q$ は x^i 方向に動けない
  - 低エネルギーで高階ランクゲージ理論を再現
  - 並進との非可換性により、一部のNGモードがギャップを持つ
    - Inverse Higgs現象の高次対称性版

フラクトンとは？

- 移動方向に制限を持つ粒子



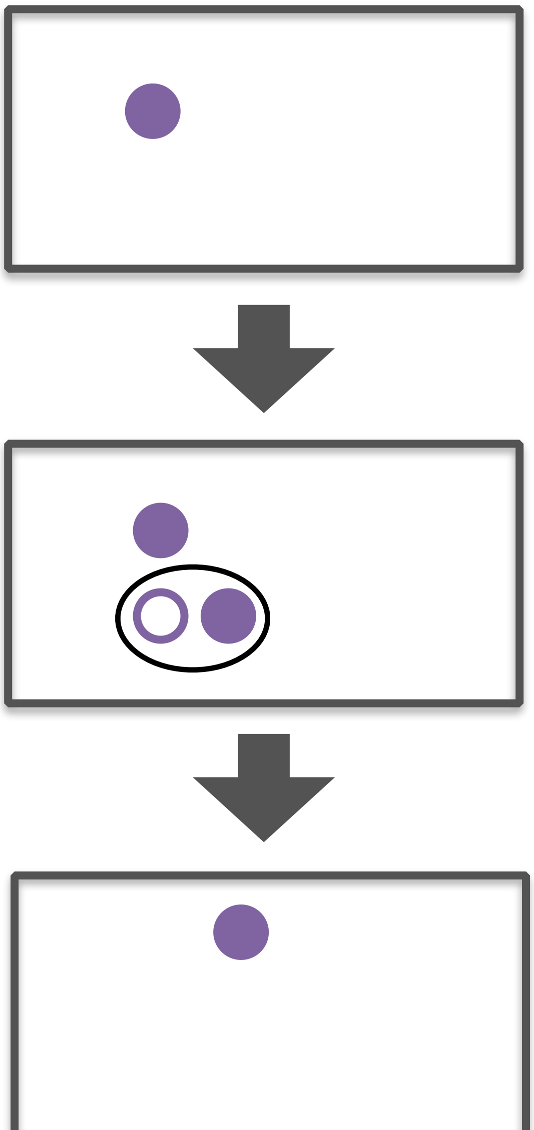
fracton



lineon

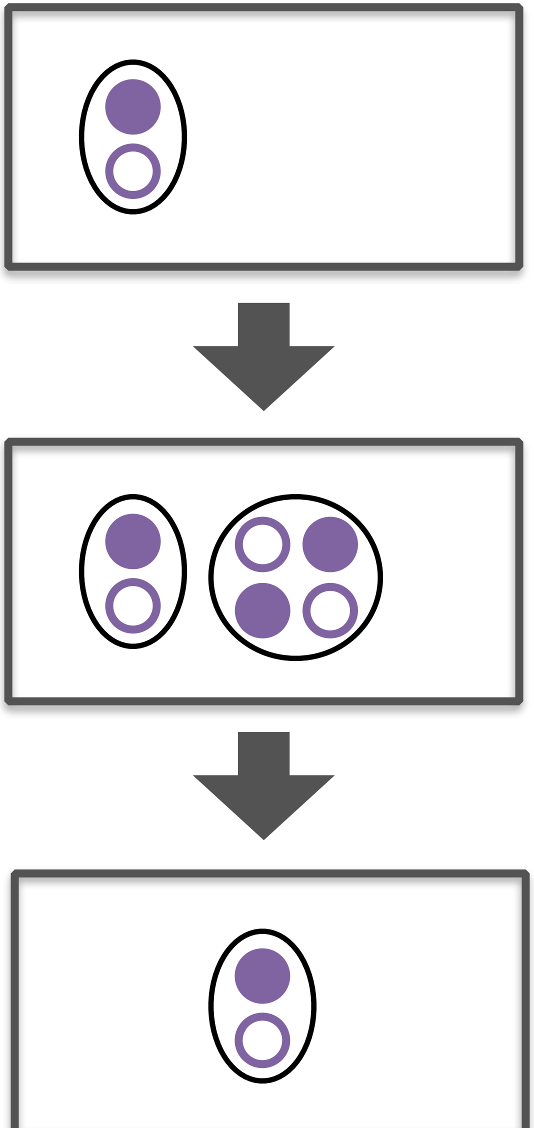
- フラクトン相
  - Gapped: ‘fracton order’
    - e.g.) X-cube model, foliated field theory, …
  - Gapless
    - e.g.) 格子の位相欠陥(disclination)
    - 高階対称テンソルゲージ理論による記述

移動方向の制限と多重極保存



- U(1)電荷を持った粒子を動かすには、双極子を吸収・放出する必要がある
- 双極子電荷の保存を課すと、U(1)電荷は動けなくなる

移動方向の制限と多重極保存



- さらに双極子を動けなくしたければ、四重極保存を課せばよい

Higher-rank gauge theories

- 自由度: (空間について)高階の対称テンソルゲージ場

  e.g. A_{ij} with $A_{ij} = A_{ji}$

- いくつかのバリエーション: [Pretko, PRB’17], …
  - Scalar charge gauge theory
  - Vector charge gauge theory

- 多重極子保存を実現

Scalar charge gauge theory

- ゲージ場: $\{\phi, A_{ij}\}$ A_{ij} は対称: $A_{ij} = A_{ji}$

- ゲージ変換 $A_{ij} \mapsto A_{ij} + \partial_i \partial_j \Lambda$ $\phi \mapsto \phi - \partial_t \Lambda$

- “電場 & 磁場”

$$E_{ij} = -\partial_t A_{ij} - \partial_i \partial_j \phi \qquad B_{il} = \epsilon_{ijk} \partial_j A_{kl} \qquad (B \neq B^T)$$

- Lagrangian $$\mathscr{L} = \frac{1}{2e^2} E_{ij} E_{ij} - \frac{1}{2e^2} B_{ij} B_{ij}$$

- ソースへの結合 $\mathscr{L}_{\mathrm{cpl}} = \phi \rho + A_{ij} J_{ij}$

Scalar charge gauge theory

- 運動方程式

$$\nabla \cdot E \cdot \overleftarrow{\nabla} = \rho \qquad \partial_t E = \frac{1}{2}\left(\nabla \times B + B \times \overleftarrow{\nabla} \right) + J$$

$$\nabla \cdot B = 0 \qquad \partial_t B = - \nabla \times E$$

- 励起: 5個のギャップレスモード(空間3次元)、 $\omega \sim k$

- 保存電荷

$$Q = \int_V \rho \qquad Q^i = \int_V x^i \rho$$

$$Q' = \int_V \vec{x}^2 \rho$$ for traceless theory

Higher-rank gauge theories

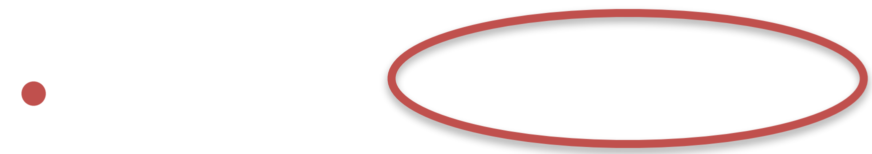
- 高階の対称テンソルゲージ場で書かれる
- ギャップレスモードが存在
- 摂動に対して安定　[Rasmussen-You-Xu, 1601.08235]
- 疑問

1. U(1) ゲージ理論の photon は U(1) 1-form 対称性の SSB に伴う NG モードと思える。higher-rank gauge theoryのギャップレスモードの由来は？
2. 「保存電荷」はゲージ場に結合しているのでグローバル対称性ではないが、フラクトンとしての性質との関係は？
3. 様々な higher-rank gauge theory が有り得るが、guiding principleは？
4. これらの相の model-independent な特徴づけは？
5. 何故 lattice elasticity の理論にフラクトンが存在するのか？
6. Higgsing により "fracton order"を実現できるか？

高次対称性

[Gaiotto-Kapustin-Seiberg-Willett '15]

- 電荷を持つ物体が**高次元**
  - "p-form 対称性" → p-次元物体が電荷を持つ



0-form symmetry　　1-form symmetry

- 対称性演算子　$U_g(M_{D-p-1})$　$g \in G$　M_{D-p-1} は $(D-p-1)$次元閉多様体
- 荷電物体　$W(C_p)$　C_p は p次元閉多様体

M_{D-p-1} と C_p が 一度リンクしているとき、

$$\langle U_g(M_{D-p-1}) W(C_p) \cdots \rangle = \langle R_g \cdot W(C_p) \cdots \rangle$$

- $U(1)^{[p]}$ 対称性:　$W(C_p) \to e^{\mathrm{i}\alpha} W(C_p)$

“Non-uniform” な高次対称性

- 保存電荷がいずれかの方向の並進と可換でない連続高次対称性

$$[P_\mu, Q] \neq 0$$

- 例) 時空対称性 (回転・ブースト) (0-form 対称性)

- Q がP_μ と非可換でも、対称性演算子 $U(M) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha Q(M)}$ は topological
  - ローカルな保存則が成立しているため

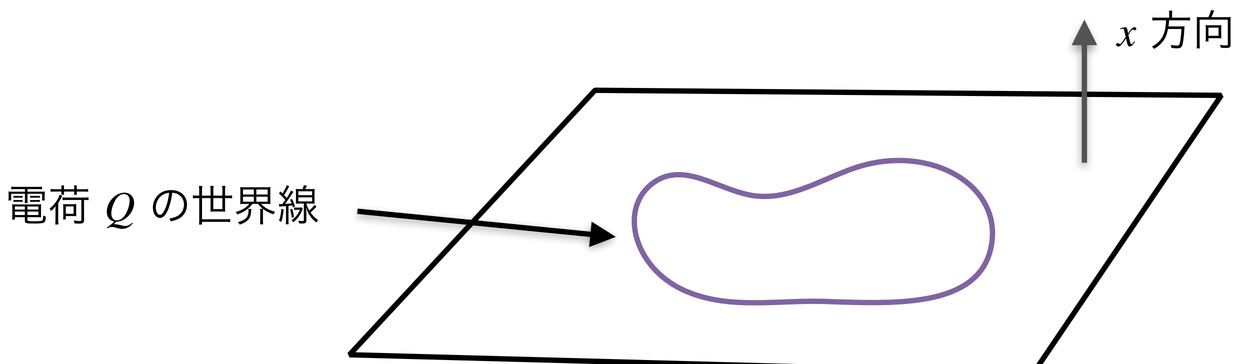
gapless フラクトン相の構成法

- まず、「フラクトンの存在」を「粒子の世界線の配位に制限がある」と解釈。
従って、1-form 対称性のある理論を考える。

- 例えば、電荷 Q を持つ粒子の世界線を x 方向に動けないようにしたい場合には、
$$[\mathrm{i}P_x, Q'] = Q$$
を満たすような 1-form 対称性の電荷 Q' を導入する。

- 1-form 対称性 Q と Q' が自発的に破れた理論を考える(上記の代数を満たす 0-form 電荷に結合するゲージ場の理論)。

- 得られた理論では、電荷 Q の Wilson line が x 軸に垂直な面にしか置けない = x 方向に動けない



gapless フラクトン相の構成法

- この構成では、**移動方向の制限は** P_i **との交換関係によりコントロール**されている。
- 電荷の組 (Q, Q_i) $\quad [\mathrm{i}P_i, Q_j] = \delta_{ij} Q$

$Q = [\mathrm{i}P_x, Q_x] = [\mathrm{i}P_y, Q_y] = [\mathrm{i}P_z, Q_z] \longrightarrow Q$ はいずれの方向にも動けない(=フラクトン)

低エネルギーで scalar charge gauge theory に帰着

- 電荷の組 (q_i, Q_i) $\quad [\mathrm{i}P_i, Q_j] = \epsilon_{ijk} q_k$

$q_z = [\mathrm{i}P_x, Q_y] = -[\mathrm{i}P_y, Q_x] \longrightarrow q_z$ は z 方向にしか動けない

低エネルギーで vector charge gauge theory に帰着

例: $[\mathrm{i}P_x, Q'] = Q$

- カレント $\star j(x)$ が $[\mathrm{i}P_\mu, \star j(x)] = \partial_\mu \star j(x)$ を満たすとき $\star j(x)$ は uniform と言う
- Q, Q' で生成される 0-form 対称性をまず考える: $Q = \int \star j \qquad Q' = \int \star K$
- 代数 $[\mathrm{i}P_x, Q'] = Q$ を満たすためには、 $\star K = \star k - x \star j$

$\star j, \ \star k$ は uniform なカレント

実際、 $$[\mathrm{i}P_x, Q'] = \int (\partial_x \star k - x\,\partial_x \star j) = \underbrace{\int \partial_x(\star k - x \star j)}_{=0} + \int \star j = Q$$

- 保存則 $$\mathrm{d} \star j = 0$$

$$\mathrm{d} \star K = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \mathrm{d} \star k = \mathrm{d}x \wedge \star j$$

- ゲージ場への結合 $\mathscr{L}_{\mathrm{cpl}} = a \wedge \star j + a' \wedge \star k$
- ゲージ変換 $$a \mapsto a + \mathrm{d}\Lambda + \underline{\Lambda' \mathrm{d}x}$$ Q のゲージ場が Q' のゲージ変換で変換 $$a \mapsto a' + \mathrm{d}\Lambda'$$

例: $[\mathrm{i}P_x, Q'] = Q$

- 保存則 $\mathrm{d}\star j = 0 \qquad \mathrm{d}\star k = \mathrm{d}x \wedge \star j$
- ゲージ変換 $a \mapsto a + \mathrm{d}\Lambda + \underline{\Lambda'\mathrm{d}x} \qquad a' \mapsto a' + \mathrm{d}\Lambda'$
- ゲージ不変な field strength $f = \mathrm{d}a - \mathrm{d}x \wedge a' \qquad f' = \mathrm{d}a'$
- pure gauge theory $\mathscr{L} = -\dfrac{1}{2e^2} f \wedge \star f - \dfrac{1}{2(e')^2} f' \wedge \star f'$
  - $[\mathrm{i}P_x, Q'] = Q$ に従う 1-form 対称性を持つ
- Wilson line $W(C) = \exp \mathrm{i} \int_C a \qquad W'(C) = \exp \mathrm{i} \int_C a'$
  - ゲージ変換の下で、

$$W(C) \mapsto W(C) \exp \mathrm{i} \int_C \mathrm{d}x \Lambda'$$

ループ C が x が constant の面内にあれば
ゲージ不変

→ Q は x 方向に動けない

理論の持つ特性

- gapless モードと gapped モードを持つ
  - 時空対称性のSSBにおける inverse Higgs 現象の高次対称性版
- 低エネルギー極限で higher rank gauge theory を再現
- ギャップレスのフラクトン相は、高次対称性の SSB の帰結として実現する
- 移動方向の制限が P_i と電荷の交換関係で指定されている
  - 実装したい移動方向の制限に基づいて、理論を書き下すことができる
- Higgsing により フラクトンオーダーのある相も実現可能
  - c.f. U(1) ゲージ場 + charge k Higgs 場 → $\mathbb{Z}_2$ トポロジカル秩序

Backup slides

Vector charge gauge theory

- Fields: $\{\phi_i, A_{ij}\}$ A_{ij} is symmetric: $A_{ij} = A_{ji}$

- Gauge transformation

$$\phi_i \mapsto \phi_i - \partial_t \Lambda_i \qquad A_{ij} \mapsto A_{ij} + \partial_{(i}\Lambda_{j)}$$

- Electric & magnetic fields

$$E_{ij} = -\partial_t A_{ij} - \partial_{(i}\phi_{j)} \qquad B_{il} = \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn}\partial_j\partial_m A_{kn}$$

- Lagrangian

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2e^2} E_{ij}E_{ij} - \frac{1}{e^2} B_{ij}B_{ij}$$

Vector charge gauge theory

- Equations of motion

$$\nabla \cdot E = \overrightarrow{\rho} \qquad \partial_t E = \nabla \times B \times \overleftarrow{\nabla} + J$$

$$\nabla \cdot B = 0 \qquad \partial_t B = -\nabla \times E \times \overleftarrow{\nabla}$$

- Excitations: 3 gapless modes, $\omega \sim k^2$

- Conserved charges

$$\overrightarrow{q} = \int_V \overrightarrow{\rho} \qquad \overrightarrow{Q} = \int_V \overrightarrow{x} \times \overrightarrow{\rho}$$