

基研研究会 素粒子物理学の進展2022 ポスター発表  
2022/8/29

磁場がかかった  
 $T^2/\mathbb{Z}_2$  オービフールド上の  
指数定理

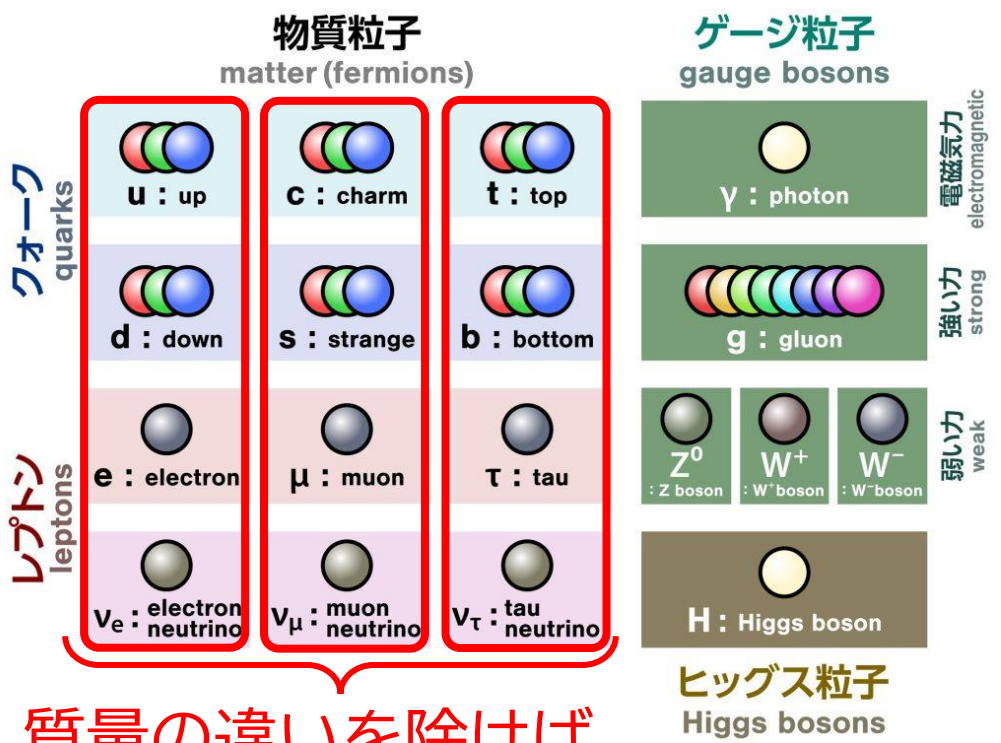
**今井 広紀**  
**(神戸大学 理学研究科物理学専攻)**

この発表は、坂本真人氏、竹内万記氏、龍田佳幸氏との共同研究に基づく（論文準備中）

- **イントロダクション：背景と目的**
- **セットアップ**
- **メインテーマ：指数定理の証明**
- **結論と展望**

## ■世代数問題

☒ : <https://higgstan.com/stander-model/>



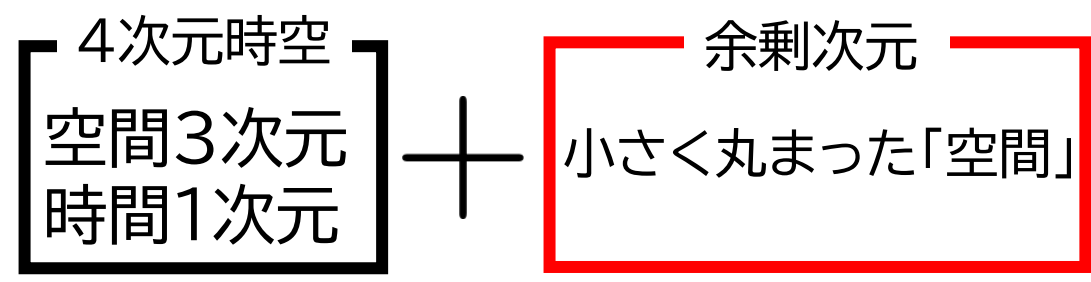
質量の違いを除けば、  
まったく同じ粒子が3つ

現行の理論(標準模型)では  
説明なしに与えられる

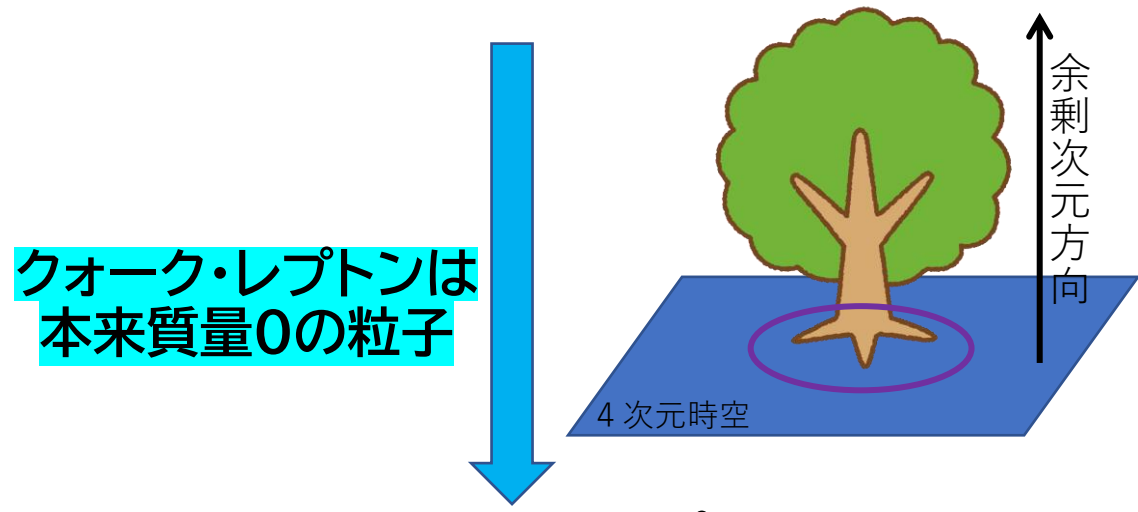
→ 自然に説明したい

## ■余剰次元模型

・時空は高次元と考える



・高次元時空上に、  
より基本的な物質粒子が存在

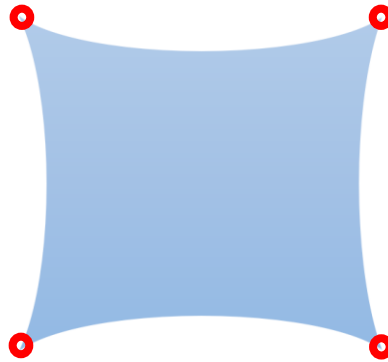


クォーク・レプトンは  
本来質量0の粒子

そのうち、クォーク・レプトンは  
質量0のモードと考える。

# イントロダクション: 今回の発表の目的

- 余剰次元として, 2次元オービフォールド  $T^2/\mathbb{Z}_2$  を考える.



- このとき,

ゼロモード数は **固定点における巻き付き数** で決まる  
世代数

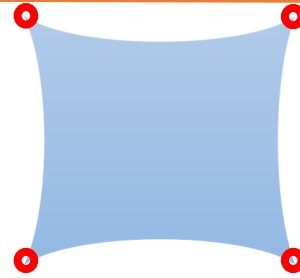
ことを導く.

余剰次元上の物質が **特異点 (= 固定点)** のまわりをまわる数

➡ 世代数は **明確な幾何学的意味** を持つといえる

# イントロダクション: 今回の発表の目的 5

- 具体的には, 以下の式を示す



特異点がなくとも出る項

NEW!

$$(\text{ゼロモード数}) = \frac{M}{2} + \frac{-V_+ + V_-}{4}$$

$M$ : 余剰次元を貫く磁束量子化数

$V_{\pm}$ : 特異点における物質場の巻き付き数(の合計)

位相不変量

連続変形しても  
変わらない量

- **イントロダクション：背景と目的**
- **セットアップ**
- **メインテーマ：指数定理の証明**
- **結論と展望**

# セットアップ(1/2)

- 余剰次元の座標を複素数で指定

$$z = x^5 + ix^6 = y_1 + \tau y_2$$

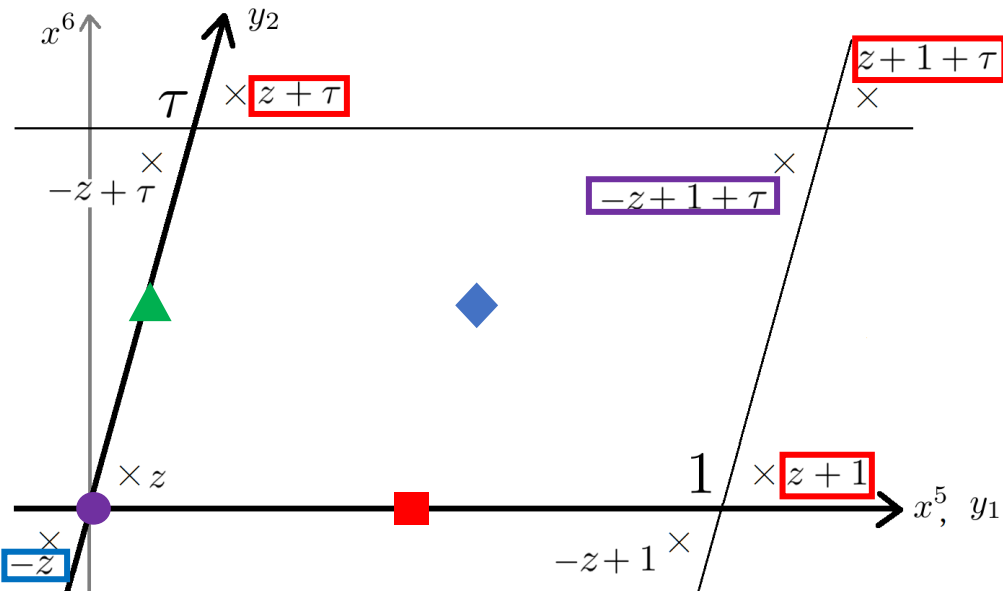
( $\tau$ は虚部が正の複素数)

- **トーラス**

+1,  $+\tau$  並進した先を同一視  
 $z \sim z + 1 \sim z + \tau$

- **オービフォールド**

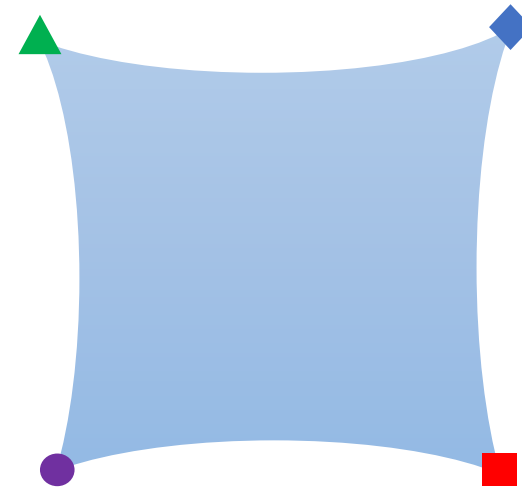
さらに $\mathbb{Z}_N$ 回転した先を同一視  
 今回は,  $N = 2$ の場合を考える  
 $z \sim -z$



x : 通常

● ■ ▲ ◆ : 固定点

【貼り合わせた図】



- 物質場

- 6次元カイラルフェルミオンを1つ導入

$$\Psi(x, z) = \sum_{n,j} \left( \underbrace{\psi_{R,n,j}^{(4)}(x)}_{\text{4次元右巻きフェルミオン}} \otimes \underbrace{\psi_{+,n,j}^{(2)}(z)}_{\text{余剰次元上のフェルミオン}} + \underbrace{\psi_{L,n,j}^{(4)}(x)}_{\text{4次元左巻きフェルミオン}} \otimes \underbrace{\psi_{-,n,j}^{(2)}(z)}_{\text{余剰次元上のフェルミオン}} \right)$$

$n$ : 質量スペクトル ( $n = 0 \iff m_n = 0$ )  
 $j$ : 縮退のラベル

- フェルミオンの電荷を  $q$  とする

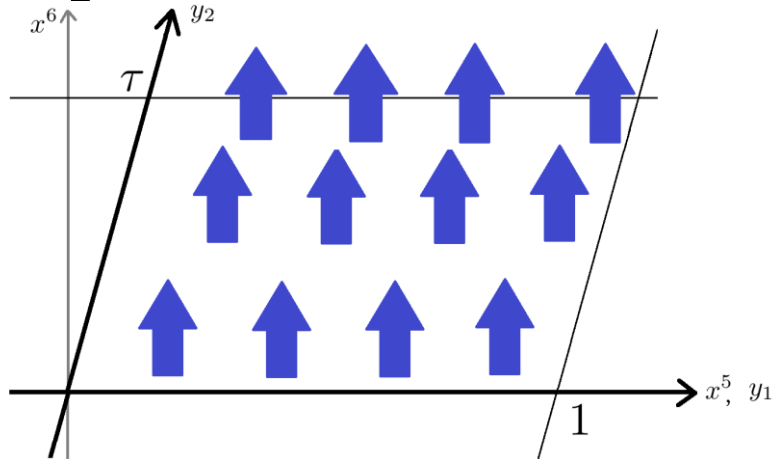
- 余剰次元上のフェルミオン

$$\psi_{+,n,j}^{(2)}(z) = \begin{pmatrix} \psi_{+,n,j}(z) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \psi_{-,n,j}^{(2)}(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_{-,n,j}(z) \end{pmatrix}$$

# セットアップ(2/2)

## ■ 磁場

余剰次元に一様な磁束  $f$  がかかっていると考える



•有限領域の磁束は量子化される

$$\frac{qf}{2\pi} = M \in \mathbb{Z}$$

↑  
磁束量子化数

•ゲージ場

$$A_z(z) = \frac{f}{2\text{Im}\tau} \frac{\bar{z}}{2i}, \quad A_{\bar{z}}(z) = -\frac{f}{2\text{Im}\tau} \frac{z}{2i}$$

•共変微分

$$D_z = \partial_z - iqA_z, \quad D_{\bar{z}} = \partial_{\bar{z}} - iqA_{\bar{z}}$$

■ 余剰次元上のDirac方程式

$$\begin{aligned} -2D_z \psi_{-,n,j}(z) &= m_n \psi_{+,n,j}(z) \\ 2D_{\bar{z}} \psi_{+,n,j}(z) &= m_n \psi_{-,n,j}(z) \end{aligned}$$

■ 境界条件①…トーラスの条件

トーラスシフトはゲージ変換になる

$$A_{z/\bar{z}}(z+1) = A_{z/\bar{z}}(z) + \partial_{z/\bar{z}} \Lambda_1(z) \quad \Lambda_1(z) = \frac{f}{2\text{Im}\tau} \text{Im}z$$

$$A_{z/\bar{z}}(z+\tau) = A_{z/\bar{z}}(z) + \partial_{z/\bar{z}} \Lambda_2(z) \quad \Lambda_2(z) = \frac{f}{2\text{Im}\tau} \text{Im}(\bar{\tau}z)$$

$$\psi_{\pm,n,j}(z+1) = e^{iq\Lambda_1(z)} \psi_{\pm,n,j}(z)$$

$$\psi_{\pm,n,j}(z+\tau) = e^{iq\Lambda_2(z)} \psi_{\pm,n,j}(z)$$

■ 境界条件②…オービフォールドの条件  
(パリティ変換)

$$\psi_{+,n,j}(-z) = (-1)^p \psi_{+,n,j}(z)$$

$$\psi_{-,n,j}(-z) = -(-1)^p \psi_{-,n,j}(z)$$

■ トーラス上の物質場  $\xi$  を用いて、  
オービフォールド上の物質場  $\psi$  を表わす

$$\psi_{+,n,j}(z) = \xi_{+,n,j}(z) + (-1)^p \xi_{+,n,j}(-z)$$



- イントロダクション：背景と目的
- セットアップ
- **メインテーマ：指数定理の証明**
- 結論と展望

# メインテーマ：指数定理の証明 (1/4)

## ■ クォーク・レプトンはゼロモード

$$\Psi(x, z) = \sum_{n,j} \left( \psi_{R,n,j}^{(4)}(x) \otimes \psi_{+,n,j}^{(2)}(z) + \psi_{L,n,j}^{(4)}(x) \otimes \psi_{-,n,j}^{(2)}(z) \right)$$

$$\psi_{R,0,j}^{(4)}(x) \longleftrightarrow 2D_{\bar{z}}\psi_{+,0,j}(z) = 0$$

解は  $n_+$  個

$$\psi_{L,0,j}^{(4)}(x) \longleftrightarrow -2D_z\psi_{-,0,j}(z) = 0$$

解は  $n_-$  個

$$-2D_z\psi_{-,n,j}(z) = m_n\psi_{+,n,j}(z)$$

$$2D_{\bar{z}}\psi_{+,n,j}(z) = m_n\psi_{-,n,j}(z)$$

## ■ ゼロモード数 = 指数

ゼロモード数  $:= n_+ - n_-$

$$= \lim_{\rho \rightarrow \infty} \text{tr} \left[ \sigma_3 e^{\not{D}^2 / \rho^2} \right] \quad (\not{D} = \sigma_1 D_5 + \sigma_2 D_6)$$

$$= \lim_{\rho \rightarrow \infty} \text{tr} \left[ \sigma_3 e^{D^2 / \rho^2} \right]$$

$$+ \lim_{\rho \rightarrow \infty} \text{tr} \left[ \sigma_3 \frac{iq}{4\rho^2} [\sigma_a, \sigma_b] F_{ab} e^{D^2 / \rho^2} \right]$$

## ■ 第2項からは、磁場の寄与が出る

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \text{tr} \left[ \sigma_3 \frac{iq}{4\rho^2} [\sigma_a, \sigma_b] F_{ab} e^{D^2 / \rho^2} \right]$$

$$= \int_{T^2 / \mathbb{Z}_2} d^2 z \frac{q}{4\pi} \varepsilon^{ab} F_{ab}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{q}{2\pi} \underbrace{\int_{T^2} d^2 z B}_f$$

$$= M$$

$$= \frac{M}{2}$$

## ■ 通常、第1項は0になる

しかし、特異点の存在のため、この項から寄与が現れる

# メインテーマ：指数定理の証明 (2/4)

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \text{tr} \left[ \sigma_3 e^{D^2 / \rho^2} \right]$$

オービフォールドの完全系で展開  

$$= \sum_{n,j} \int_{T^2 / \mathbb{Z}_2} d^2 z \left( \psi_{+,n,j}(z) \psi_{+,n,j}^*(z) - \psi_{-,n,j}(z) \psi_{-,n,j}^*(z) \right)$$

トーラス上の物質場で表わす  
 $(\psi_{+,n,j}(z) = \xi_{+,n,j}(z) + (-1)^p \xi_{+,n,j}(-z))$

$$= \sum_{n,j} \frac{1}{2} \int_{T^2} d^2 z 2(-1)^p \xi_{+,n,j}(z) \xi_{+,n,j}^*(-z)$$

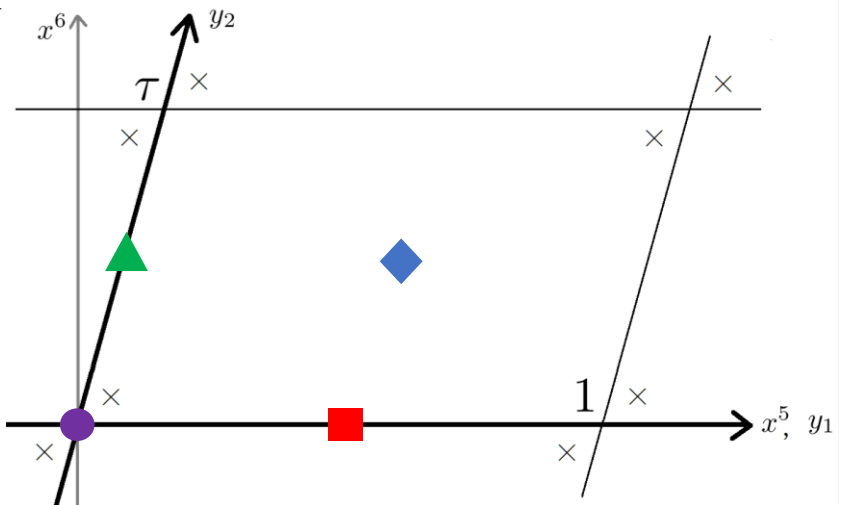
→ デルタ関数

$$\delta^2(z - (-z)) + \text{トーラスシフトした点でのデルタ関数}$$

$$= \delta^2(2z) + e^{iq\Lambda_1(z)} \delta^2(2z-1) + e^{iq\Lambda_2(z)} \delta^2(2z-\tau) + e^{iq\Lambda_1(z)+iq\Lambda_2(z)+i\pi M} \delta^2(2z-1-\tau)$$

$$= \frac{1}{4} \int_{T^2} d^2 z \sum_{f=1}^4 W_f(z) \delta^2(z - z_f)$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{f=1}^4 W_f(z_f)$$



- :  $f = 1, z_1 = 0 \longrightarrow W_1 = (-1)^p$
- :  $f = 2, z_2 = \frac{1}{2} \longrightarrow W_2 = (-1)^p$
- ▲ :  $f = 3, z_3 = \frac{\tau}{2} \longrightarrow W_3 = (-1)^p$
- ◆ :  $f = 4, z_4 = \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2} \longrightarrow W_4 = (-1)^p e^{i\pi M}$

これらは、固定点のまわりで  $\mathbb{Z}_2$  回転したときに  $\psi_{+,n,j}$  に出る位相と同じ

- $\psi_{+,n,j}(z_1 - z) = (-1)^p \psi_{+,n,j}(z_1 + z)$
- $\psi_{+,n,j}(z_2 - z) = (-1)^p \psi_{+,n,j}(z_2 + z)$
- ▲  $\psi_{+,n,j}(z_3 - z) = (-1)^p \psi_{+,n,j}(z_3 + z)$
- ◆  $\psi_{+,n,j}(z_4 - z) = (-1)^p e^{i\pi M} \psi_{+,n,j}(z_4 + z)$

$$\psi_{\pm,n,j}(z+1) = e^{iq\Lambda_1(z)} \psi_{\pm,n,j}(z)$$

$$\psi_{\pm,n,j}(z+\tau) = e^{iq\Lambda_2(z)} \psi_{\pm,n,j}(z)$$

$$\psi_{+,n,j}(-z) = (-1)^p \psi_{+,n,j}(z)$$

→ この位相の意味は  
**固定点における巻き付き数**

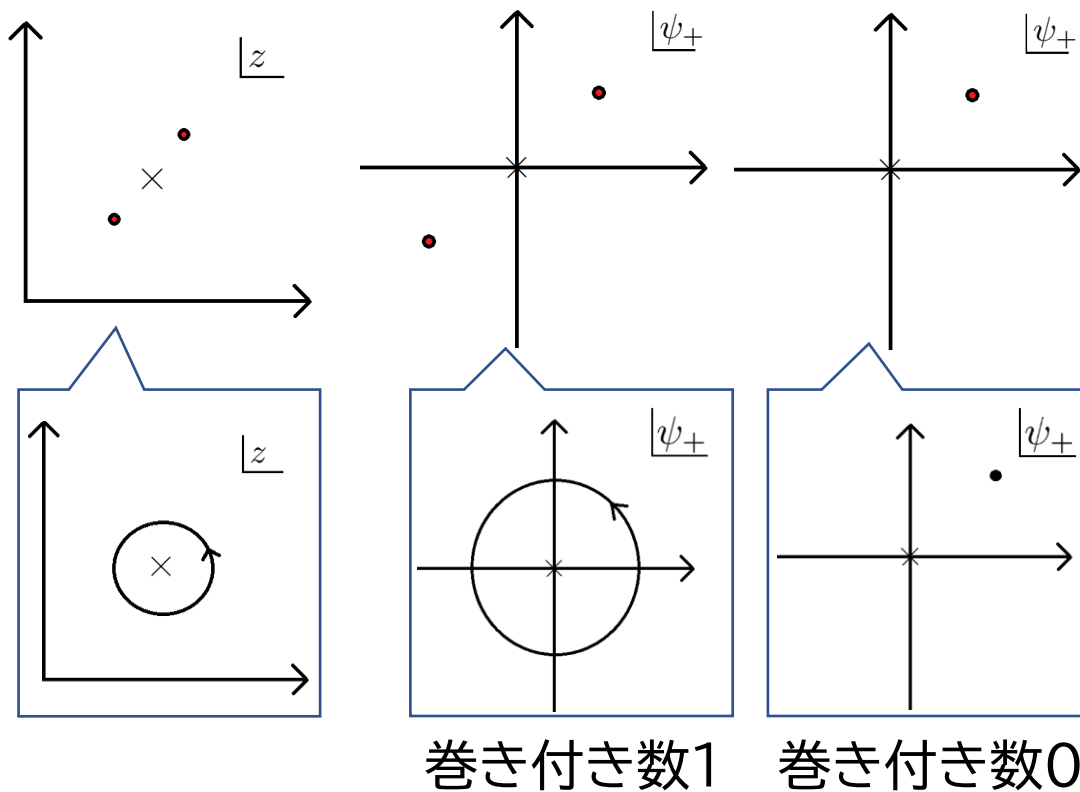
# メインテーマ：指数定理の証明 (3/4)

## ■ 巻き付き数

$\mathbb{Z}_2$  回転した際に位相が出るならば,  
 $\psi_{+,n,j}$  も回転しているとみなす

$$\psi_{+,n,j}(z_f - z) = (-1)^{\chi+f} \psi_{+,n,j}(z_f + z)$$

$\chi+f$ :  $\psi_{+,n,j}$  の固定点  $f$  における巻き付き数



$$W_f = (-1)^{\chi+f} = -2\chi+f + 1$$

## ■ カイラリティがマイナスの場合

同様に, 巻き付き数  $\chi-f$  を定義する

$$\psi_{-,n,j}(z_f - z) = (-1)^{\chi-f} \psi_{-,n,j}(z_f + z)$$

$$\psi_{-,n,j}(z_1 - z) = -(-1)^p \psi_{-,n,j}(z_1 + z)$$

$$\psi_{-,n,j}(z_2 - z) = -(-1)^p \psi_{-,n,j}(z_2 + z)$$

$$\psi_{-,n,j}(z_3 - z) = -(-1)^p \psi_{-,n,j}(z_3 + z)$$

$$\psi_{-,n,j}(z_4 - z) = -(-1)^p e^{i\pi M} \psi_{-,n,j}(z_4 + z)$$

$$\psi_{\pm,n,j}(z+1) = e^{iq\Lambda_1(z)} \psi_{\pm,n,j}(z)$$

$$\psi_{\pm,n,j}(z+\tau) = e^{iq\Lambda_2(z)} \psi_{\pm,n,j}(z)$$

$$\psi_{-,n,j}(-z) = -(-1)^p \psi_{-,n,j}(z)$$

$$(-1)^{\chi-f} = -(-1)^{\chi+f}$$

$$\begin{cases} \chi-f = 1 \iff \chi+f = 0 \\ \chi-f = 0 \iff \chi+f = 1 \end{cases}$$

$$\chi-f + \chi+f = 1$$

よって,

$$W_f = -2\chi+f + 1 = -\chi+f + \chi-f$$

# メインテーマ：指数定理の証明 (4/4)

ゼロモード数  $:= n_+ - n_-$

$$= \lim_{\rho \rightarrow \infty} \text{tr} \left[ \sigma_3 e^{\not{D}^2 / \rho^2} \right]$$

$$= \underbrace{\lim_{\rho \rightarrow \infty} \text{tr} \left[ \sigma_3 e^{D^2 / \rho^2} \right]}_{\text{yellow box}} + \underbrace{\lim_{\rho \rightarrow \infty} \text{tr} \left[ \sigma_3 \frac{iq}{4\rho^2} [\sigma_a, \sigma_b] F_{ab} e^{D^2 / \rho^2} \right]}_{\text{purple box}}$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{f=1}^4 W_f(z_f) \qquad = \frac{M}{2}$$

$$= \frac{1}{4} \left( \underbrace{-\sum_{f=1}^4 \chi_{+f}}_{V_+} + \underbrace{\sum_{f=1}^4 \chi_{-f}}_{V_-} \right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{4} (-V_+ + V_-)}_{\text{yellow box}} + \underbrace{\frac{M}{2}}_{\text{purple box}}$$

# 目次

- **イントロダクション：背景と目的**
- **セットアップ**
- **メインテーマ：指数定理の証明**
- **結論と展望**

# 結論と展望

## ■ 結論

ゼロモード数は**固定点における巻き付き数**で決まる

$$\underbrace{n_+ - n_-}_{\text{ゼロモード数 (世代数)}} = \frac{M}{2} + \frac{1}{4} \underbrace{(-V_+ + V_-)}_{\text{固定点での巻き付き数の差}}$$

ゼロモード数  
(世代数)

固定点での巻き付き数の差



**世代数は明確な幾何学的意味を持つ**

■ 今後の展望…一般に  $T^2/\mathbb{Z}_N$  を考え,

$$n_+ - n_- = \frac{M}{N} + \frac{1}{2N} (-V_+ + V_-)$$

を示したい.

※  $N = \boxed{2}, 3, 4, 6$  の場合がある