相対エントロピーから生じる有効場の理論への制約

基研研究会 素粒子物理学の進展2022 9月1日

上田 大輝 (Peking University)

Based on arXiv:2201.00931 and on-going works with Qing-Hong Cao (Peking University) and Naoto Kan (Dongguk University)

相対エントロピーとは

相対エントロピー

※ $\mathrm{Tr}[\rho_A] = \mathrm{Tr}[\rho_B] = 1,\ \ \rho_A = \rho_A^\dagger,\ \ \rho_B = \rho_B^\dagger$

- 二つの確率分布関数 ρ_A, ρ_B に対して相対エントロピーは定義される

$$S(\rho_A || \rho_B) \equiv \mathrm{Tr}\left[\rho_A \ln \rho_A - \rho_A \ln \rho_B\right]$$

- 相対エントロピーは非負の量である

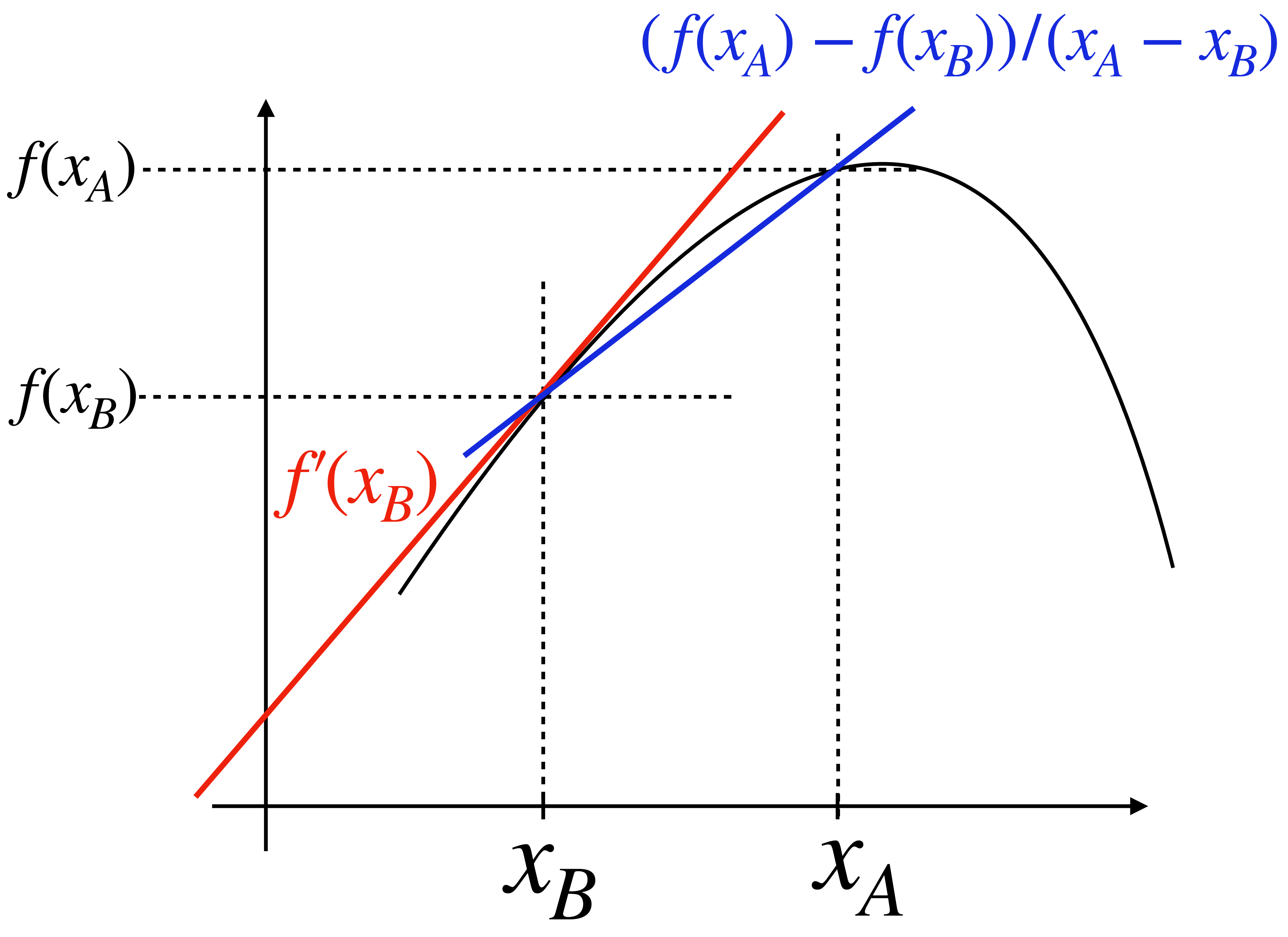
証明:

$f(x)$: 凸関数 $\Rightarrow \mathrm{Tr}[f(\rho_A) - f(\rho_B) - (\rho_A - \rho_B) f'(\rho_B)] \le 0$

$\Downarrow$ $f(x) \to x \ln x$ (凸関数)

$$S(\rho_A || \rho_B) \ge 0$$

※ 等号は $\rho_A = \rho_B$ のときのみ成り立つ



凸関数の定義：$\dfrac{f(x_A) - f(x_B)}{x_A - x_B} \le f'(x_B)$

相対エントロピーは二つの確率分布関数の違いを特徴づける量

相対エントロピー

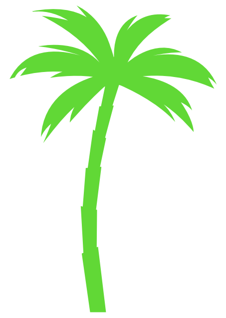
- 相対エントロピーは二つの確率分布関数の間の違いを表す量である

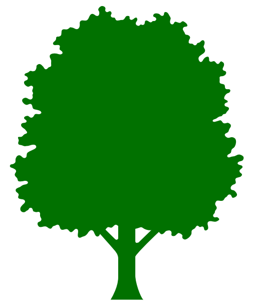
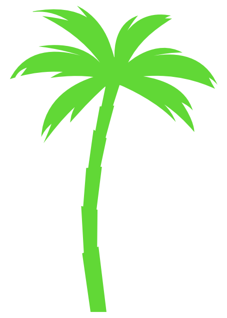
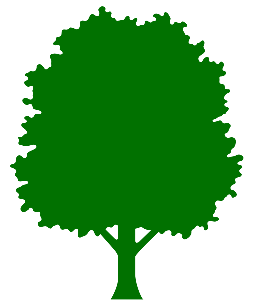
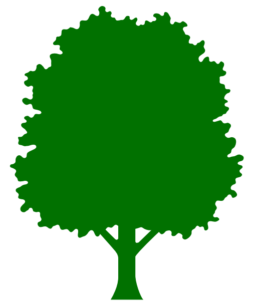
$$S(\rho_A || \rho_B) \equiv \mathrm{Tr}\left[\rho_A \ln \rho_A - \rho_A \ln \rho_B\right] \geq 0$$

※等号は $\rho_A = \rho_B$ のときのみ成り立つ

- 相対エントロピーは確率分布によって定義される二つの物の間の定量的な違いを特徴づける

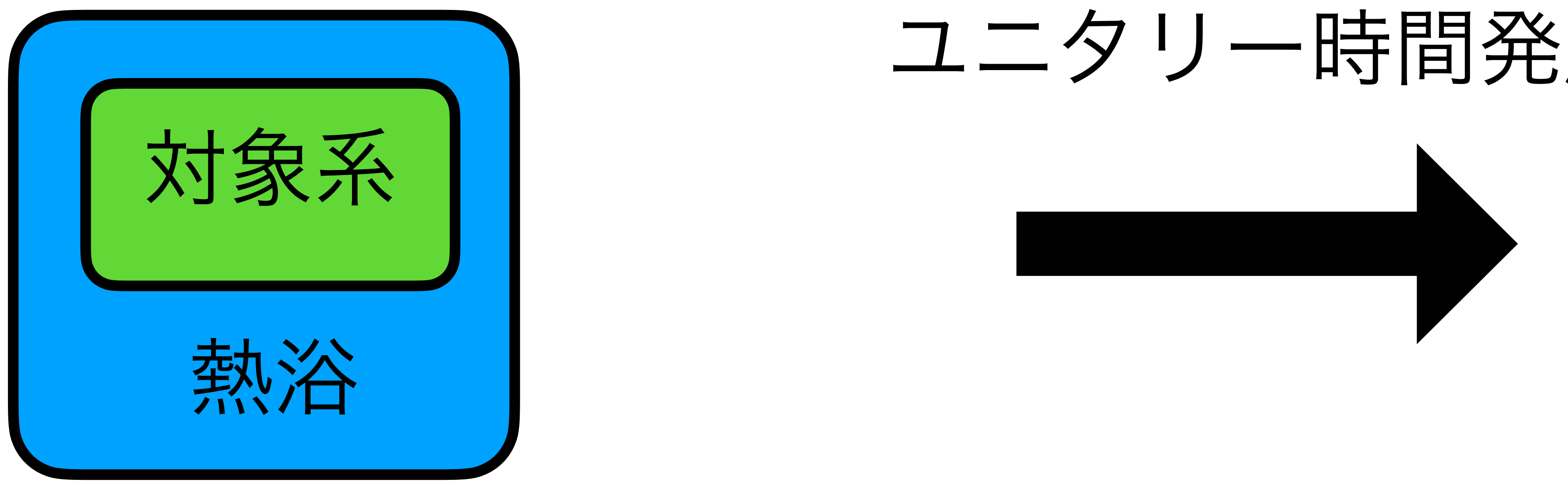
例.

 $\mapsto \rho_A$  $\mapsto \rho_B$

$S($  $||$  $) > 0$ $S($  $||$  $) = 0$

二つの状態間の相対エントロピーを考えるのはどうか?

相対エントロピーと熱力学第二法則



対象系の終状態 = $\mathrm{Tr}_H[U\rho \otimes \rho_H U^\dagger] \equiv \tilde{\rho}$

$$\rho \otimes \rho_H = \rho \otimes e^{-\beta \cdot H_H}/Z_H \longmapsto U\rho \otimes \rho_H U^\dagger$$

※ β: 熱浴の温度, H_H: 熱浴のハミルトニアン

- 相対エントロピー：

$$S(\rho \otimes \rho_H || U^\dagger \tilde{\rho} \otimes \rho_H U) = - \mathrm{Tr}_S\left[\tilde{\rho} \ln \tilde{\rho}\right] + \mathrm{Tr}_S\left[\rho \ln \rho\right] - \beta \cdot \left(\mathrm{Tr}\left[\rho \otimes \rho_H H_H\right] - \mathrm{Tr}\left[U\rho \otimes \rho_H U^\dagger H_H\right]\right)$$

$$= \Delta S - \beta \cdot Q \geq 0$$ クラウジウス不等式

相対エントロピーの非負性は熱力学第二法則と関係している

※ Other setups and different derivations are summarized in [T. Sagawa, arXiv: 1202.0983]

Outline of this talk

- Introduction

  - 相対エントロピーとは

- Entropy constraints

  - 二つの理論の間の相対エントロピー

  - Examples

- Summary

Our idea

- 相対エントロピーは二つの確率分布関数の間の違いを表す量である

$$S(\rho_A || \rho_B) \equiv \mathrm{Tr}\left[\rho_A \ln \rho_A - \rho_A \ln \rho_B\right] \geq 0$$

※ 等号は $\rho_A = \rho_B$ のときのみ成り立つ

- 相対エントロピーは確率分布によって定義される二つの物の間の定量的な違いを特徴づける

理論 A $\longmapsto$ ρ_A 　　　理論 B $\longmapsto$ ρ_B

※ 理論: 作用やハミルトニアン

$$S(\text{理論 A} \,||\, \text{理論 B}) \geq 0$$

異なる理論間の相対エントロピーを考えるのはどうか?

⇒ 第二法則のような重要な性質が得られないか?

場の理論で記述される系の確率分布関数

- ユークリッド化された作用 I で定義した確率分布関数:

確率分布関数: $P[\phi, \Phi] = e^{-I[\phi,\Phi]}/Z[\phi]$

分配関数: $Z[\phi] = \int d[\Phi] e^{-I[\phi,\Phi]}$

I: ユークリッド化された作用, ϕ: 軽い場, Φ: 重い場

※ 簡単化のためϕ は背景場だと仮定.

- 二つの確率分布の間の相対エントロピー:

$$S(P_A || P_B) \equiv \int d[\Phi] \big(P_A \ln P_A - P_A \ln P_B \big) \geq 0$$

where $P_A = e^{-I_A}/Z_A, \quad P_B = e^{-I_B}/Z_B$

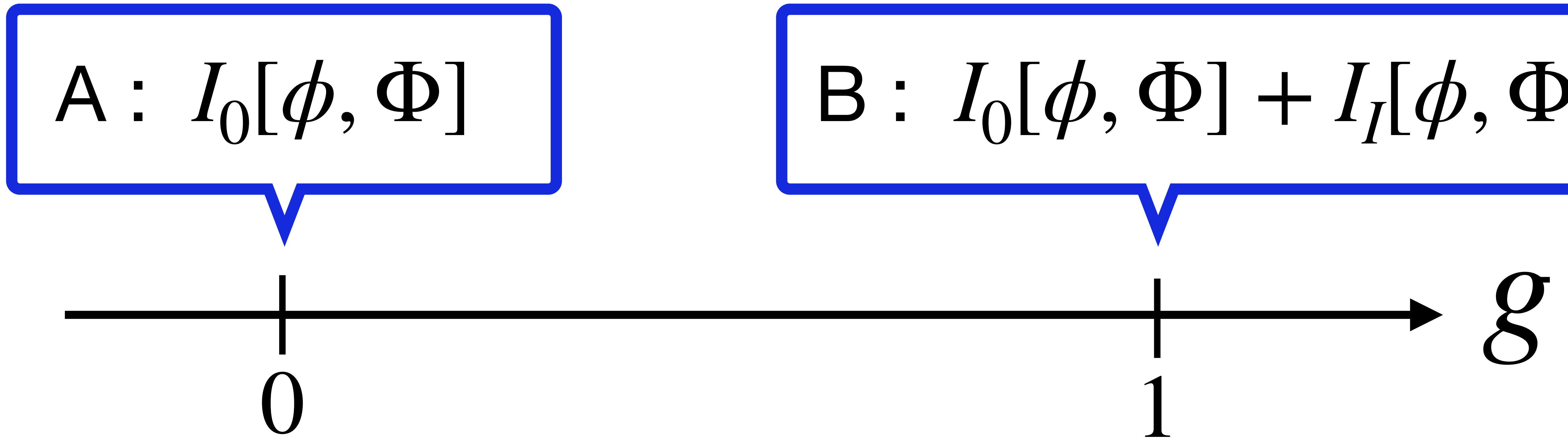
考えるクラスの理論

ϕとΦ間の相互作用なし

ϕとΦ間の相互作用

- 次の作用で記述される系を考える．　$I_0[\phi, \Phi] + I_I[\phi, \Phi]$　※ Φ: 重い場, ϕ: 軽い場

- 相互作用を特徴づけるパラメータgを便利のために導入 $I_0[\phi, \Phi] + g \cdot I_I[\phi, \Phi]$



相対エントロピー $S(P_A || P_B)$を考える

where $P_A = e^{-I_0}/Z_A, \quad P_B = e^{-(I_0+I_I)}/Z_B$

相対エントロピーの計算

$$S(P_A||P_B) = \int d[\Phi]\left[P_A \ln P_A - P_A \ln P_B\right]$$

$$P_A = e^{-I_0[\phi,\Phi]}/Z_0[\phi] \quad P_B = e^{-(I_0[\phi,\Phi]+gI_I[\phi,\Phi])}/Z_g[\phi]$$

$$\frac{dW_g}{dg} = -\frac{d\ln Z_g}{dg} = -\frac{1}{Z_g}\frac{dZ_g}{dg} = \frac{1}{Z_g}\int d[\Phi] I_I e^{-(I_0+gI_I)} = \int d[\Phi] P_B I_I \quad \Rightarrow \left(\frac{dW_g}{dg}\right)_{g=0} = \int d[\Phi] P_A I_I$$

$$= W_0[\phi] - W_g[\phi] + g\int d[\Phi] P_A I_I$$

$$W_g[\phi] = -\ln Z_g[\phi], \; W_0[\phi] = -\ln Z_0[\phi]$$

$$= W_0 - W_g + g\left(\frac{dW_g}{dg}\right)_{g=0} \geq 0$$

相対エントロピーの計算

$$S(P_A||P_B) = \int d[\Phi]\left[P_A \ln P_A - P_A \ln P_B\right]$$

$P_A = e^{-I_0[\phi,\Phi]}/Z_0[\phi]$ $\quad P_B = e^{-(I_0[\phi,\Phi]+gI_I[\phi,\Phi])}/Z_g[\phi]$

$$= \int d[\Phi]\left[P_A\left(-\ln Z_0[\phi] - I_0\right) - P_A\left(-\ln Z_g[\phi] - (I_0 + gI_I)\right)\right]$$

$$= -\ln Z_0[\phi] + \ln Z_g[\phi] + g\int d[\Phi] P_A I_I$$

$$= W_0[\phi] - W_g[\phi] + g\int d[\Phi] P_A I_I$$

$W_g[\phi] = -\ln Z_g[\phi],\ W_0[\phi] = -\ln Z_0[\phi]$

$$= W_0 - W_g + g\left(\frac{dW_g}{dg}\right)_{g=0} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad W_g - W_0 \leq \boxed{g\left(\frac{dW_g}{dg}\right)_{g=0}}$$

$S(P_A||P_B)$ は有効作用の相互作用によるシフトに対して上限を与える

※量子力学系に対しても同様なことが言える

Example (1): ガウス分布で定義された二つの系

理論	作用	確率分布	分配関数
A	$I_0[x,X] = M^2X^2 + m^2x^2$	$P_0 = e^{-I_0[x,X]}/Z_0[x]$	$Z_0[x] = \int_{-\infty}^{\infty} dX e^{-I_0[x,X]} = e^{-m^2x^2}\sqrt{\frac{\pi}{M}}$
B	$I_g[x,X] = I_0[x,X] + g \cdot xX$	$P_g = e^{-I_g[x,X]}/Z_g[x]$	$Z_g[x] = \int_{-\infty}^{\infty} dX e^{-I_g[x,X]} = Z_0[x] \cdot e^{g^2x^2/4M^2}$

※ X: 重い自由度, x: 軽い背景場的な量

- 相対エントロピーの非負性:

$$\underbrace{\boxed{g\left(dW_g/dg\right)\Big|_{g=0}}}_{=0} \geq W_g - W_0 = -g^2 \cdot \frac{x^2}{4M^2}$$

相対エントロピーの非負性から有効作用のシフトが負になる

Example (2): Field theoretical dynamics at tree-level

[Allan Adams, Nima Arkani-Hamed, Segei Dubovsky, Alberto Nicolis, and Riccardo Rattazzi, arXiv: 0602178]

理論	作用	確率分布	分配関数
A	$I_0 = \int d^4x \left(\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^2) \right)$	$P_0 = e^{-I_0[\phi,\Phi]}/Z_0[\phi]$	$Z_0[\phi] = \int d[\Phi] e^{-I_0[\phi,\Phi]}$
B	$I_g = \int d^4x \left(\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^2) + \boxed{g \cdot \alpha \Phi (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi)} \right)$	$P_g = e^{-I_g[\phi,\Phi]}/Z_g[\phi]$	$Z_g[\phi] = \int d[\Phi] e^{-I_g[\phi,\Phi]}$

※ Φ: 重い実スカラー場, ϕ: 軽い実スカラー場

- 相対エントロピーの非負性:

$$0 \geq W_g - W_0 = -\frac{g^2 \alpha^2}{4m^4} \int (d^4x)_E (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi)^2$$

相対エントロピーの非負性が高次演算子の係数への制限に対応している

※ 運動項以外の繰り込み可能項への補正が対称性から禁止されているため高次演算子の係数に制限が生じている

例. $\phi \to \phi + \mathrm{const}$.

Example (3): Entropy constraints on EFTs

- 運動項以外の繰り込み可能項が対称性から禁止されているEFTに着目する

※ 運動項への補正は場の再定義と適切な背景場を選ぶことで取り除ける

Ex.

- Single massless scalar field theory wi

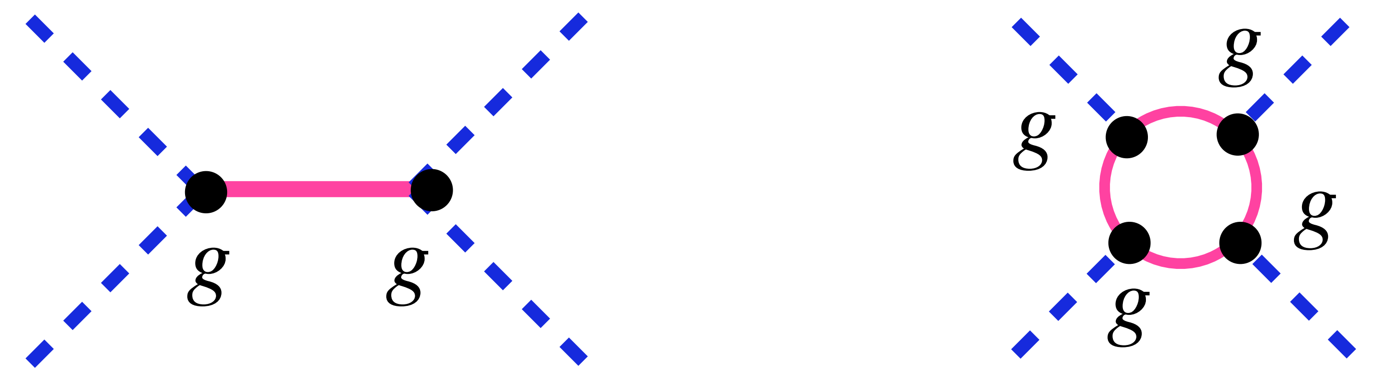
$$\int d^4x\left(\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi)+\boxed{\frac{c}{\Lambda^4}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi)^2}\right)$$

- SMEFT SU(N) gauge bosonic operat

$$\int d^4x\left(-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a,\mu\nu}+\boxed{\frac{1}{\Lambda^4}\sum_i c_i\mathcal{O}_i}\right)$$

$$\mathcal{O}_1^{F^4}=(F^a_{\mu\nu}F^{a,\mu\nu})(F^b_{\rho\sigma}F^{b,\rho\sigma})\quad\cdots$$

・重い場を積分することで生成されると仮定:



$$\sim\mathcal{O}(g^2)$$

このクラスのEFTは高次演算子だけが相互作用で生成されたとみなせる

Example (4): Entropy constraints on EFTs

- SMEFT $SU(N)$ ゲージボソン演算子 (ミンコフスキー空間)

$$\int d^4x \left(-\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a,\mu\nu} + \frac{1}{\Lambda^4} \sum_i c_i \mathcal{O}_i \right)$$ where $F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu$, and $\tilde{F}^a_{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F^a_{\rho\sigma}/2$

$$\mathcal{O}_1^{F^4} = (F^a_{\mu\nu} F^{a,\mu\nu})(F^b_{\rho\sigma} F^{b,\rho\sigma})$$

$$\mathcal{O}_2^{F^4} = (F^a_{\mu\nu} \tilde{F}^{a,\mu\nu})(F^b_{\rho\sigma} \tilde{F}^{b,\rho\sigma})$$

$$\mathcal{O}_3^{F^4} = (F^a_{\mu\nu} F^{b,\mu\nu})(F^a_{\rho\sigma} F^{b,\rho\sigma})$$

$$\mathcal{O}_4^{F^4} = (F^a_{\mu\nu} \tilde{F}^{b,\mu\nu})(F^a_{\rho\sigma} \tilde{F}^{b,\rho\sigma})$$

$$\mathcal{O}_5^{F^4} = d^{abe} d^{cde} (F^a_{\mu\nu} F^{b,\mu\nu})(F^c_{\rho\sigma} F^{d,\rho\sigma})$$

$$\mathcal{O}_6^{F^4} = d^{abe} d^{cde} (F^a_{\mu\nu} \tilde{F}^{b,\mu\nu})(F^c_{\rho\sigma} \tilde{F}^{d,\rho\sigma})$$

$$\mathcal{O}_7^{F^4} = d^{ace} d^{bde} (F^a_{\mu\nu} F^{b,\mu\nu})(F^c_{\rho\sigma} F^{d,\rho\sigma})$$

$$\mathcal{O}_8^{F^4} = d^{ace} d^{bde} (F^a_{\mu\nu} \tilde{F}^{b,\mu\nu})(F^c_{\rho\sigma} \tilde{F}^{d,\rho\sigma})$$

$$\tilde{\mathcal{O}}_1^{F^4} = (F^a_{\mu\nu} F^{a,\mu\nu})(F^b_{\rho\sigma} \tilde{F}^{b,\rho\sigma})$$

$$\tilde{\mathcal{O}}_2^{F^4} = (F^a_{\mu\nu} F^{b,\mu\nu})(F^a_{\rho\sigma} \tilde{F}^{b,\rho\sigma})$$

$$\tilde{\mathcal{O}}_3^{F^4} = d^{abe} d^{cde} (F^a_{\mu\nu} F^{b,\mu\nu})(F^c_{\rho\sigma} \tilde{F}^{d,\rho\sigma})$$

$$\tilde{\mathcal{O}}_4^{F^4} = d^{ace} d^{bde} (F^a_{\mu\nu} F^{b,\mu\nu})(F^c_{\rho\sigma} \tilde{F}^{d,\rho\sigma})$$

T^a : generator of $SU(N)$ Lie algebra

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c$$

$$\{T^a, T^b\} = \delta^{ab} \hat{1}/N + d^{abc} T^c$$

Example (4): Entropy constraints on EFTs

- SMEFT $SU(N)$ ゲージボソン演算子 (ミンコフスキー空間)

$$\int d^4x \left(-\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a,\mu\nu} + \frac{1}{\Lambda^4} \sum_i c_i \mathcal{O}_i \right)$$ where $F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu$, and $\tilde{F}^a_{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F^a_{\rho\sigma}/2$

- 古典解 $\partial^\mu F^a_{\mu\nu} + g f^{abc} A^{\mu,b} F^c_{\mu\nu} = 0$: $A^a_\mu = u^a_1 \epsilon_{1\mu} w_1 + u^a_2 \epsilon_{2\mu} w_2$ with $f^{abc} u^a_1 u^b_2 = 0$, $\partial_\mu w_1 = l_\mu$, and $\partial_\mu w_2 = k_\mu$ ※ l_μ, k_μ : 定数ベクトル

Wick rotation

- 相対エントロピーの非負性:

$$g(dW_g/dg)_{g=0} \geq W_g - W_0 \quad = -\frac{1}{\Lambda^4} \sum_i \int (d^4x)_E c_i \mathcal{O}_i$$

$0 \geq W_g - W_0$のとき

$$A \geq 0, \quad B \geq 0, \quad 4AB \geq C^2$$ (l_μ, k_μに応じて)

演算子の係数の線型結合

[G.N. Remmen, and N.L. Rodd, arXiv:1908.09845]

$A = N\left[(2c_1 + c_3)(u_1 \cdot u_2)^2 + c_3 u_1^2 u_2^2 + 2(c_5 + c_7)U^2\right] + 2c_7\left[(u_1 \cdot u_2)^2 - u_1^2 u_2^2\right]$

$B = N\left[(2c_2 + c_4)(u_1 \cdot u_2)^2 + c_4 u_1^2 u_2^2 + 2(c_6 + c_8)U^2\right] + 2c_8\left[(u_1 \cdot u_2)^2 - u_1^2 u_2^2\right]$

$C = N\left[(2\tilde{c}_1 + \tilde{c}_2)(u_1 \cdot u_2)^2 + \tilde{c}_2 u_1^2 u_2^2 + 2(\tilde{c}_3 + \tilde{c}_4)U^2\right] + 2\tilde{c}_4\left[(u_1 \cdot u_2)^2 - u_1^2 u_2^2\right]$

ユニタリー性, 因果律から生じる制限と同じ制限が生じる

Example (4): Entropy constraints on EFTs

- SMEFT $SU(N)$ ゲージボソン演算子 (ミンコフスキー空間)

$$\int d^4x \left(-\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a,\mu\nu} + \frac{1}{\Lambda^4} \sum_i c_i \mathcal{O}_i \right)$$ where $F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu$, and $\tilde{F}^a_{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F^a_{\rho\sigma}/2$

- 古典解 $\partial^\mu F^a_{\mu\nu} + g f^{abc} A^{\mu,b} F^c_{\mu\nu} = 0$: $A^a_\mu = u^a_1 \epsilon_{1\mu} w_1 + u^a_2 \epsilon_{2\mu} w_2$ with $f^{abc} u^a_1 u^b_2 = 0$, $\partial_\mu w_1 = l_\mu$, and $\partial_\mu w_2 = k_\mu$ ※ l_μ, k_μ : 定数ベクトル

Wick rotation

- 相対エントロピーの非負性:

$$\boxed{g(dW_g/dg)_{g=0}} \geq W_g - W_0 = -\frac{1}{\Lambda^4} \sum_i \int (d^4x)_E c_i \mathcal{O}_i$$

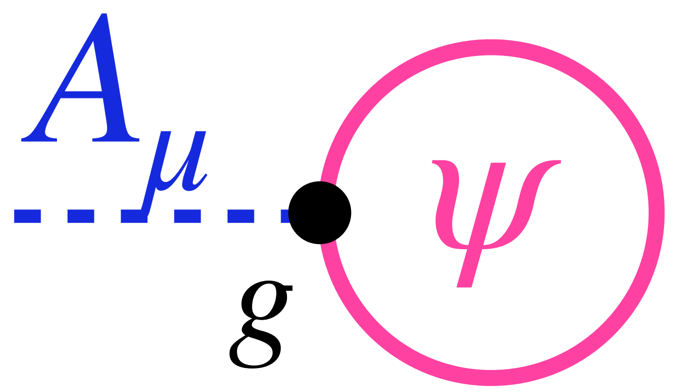
$$= 0$$

$0 \geq W_g - W_0$のとき

$$A = \frac{e^4}{6!\pi^2 m^4} \geq 0, \quad B = \frac{e^4}{6!\pi^2 m^4} \cdot \frac{7}{4} \geq 0, \quad 7\frac{e^4}{6!\pi^2 m^4} \cdot \frac{e^4}{6!\pi^2 m^4} \geq C^2 = 0$$

例.

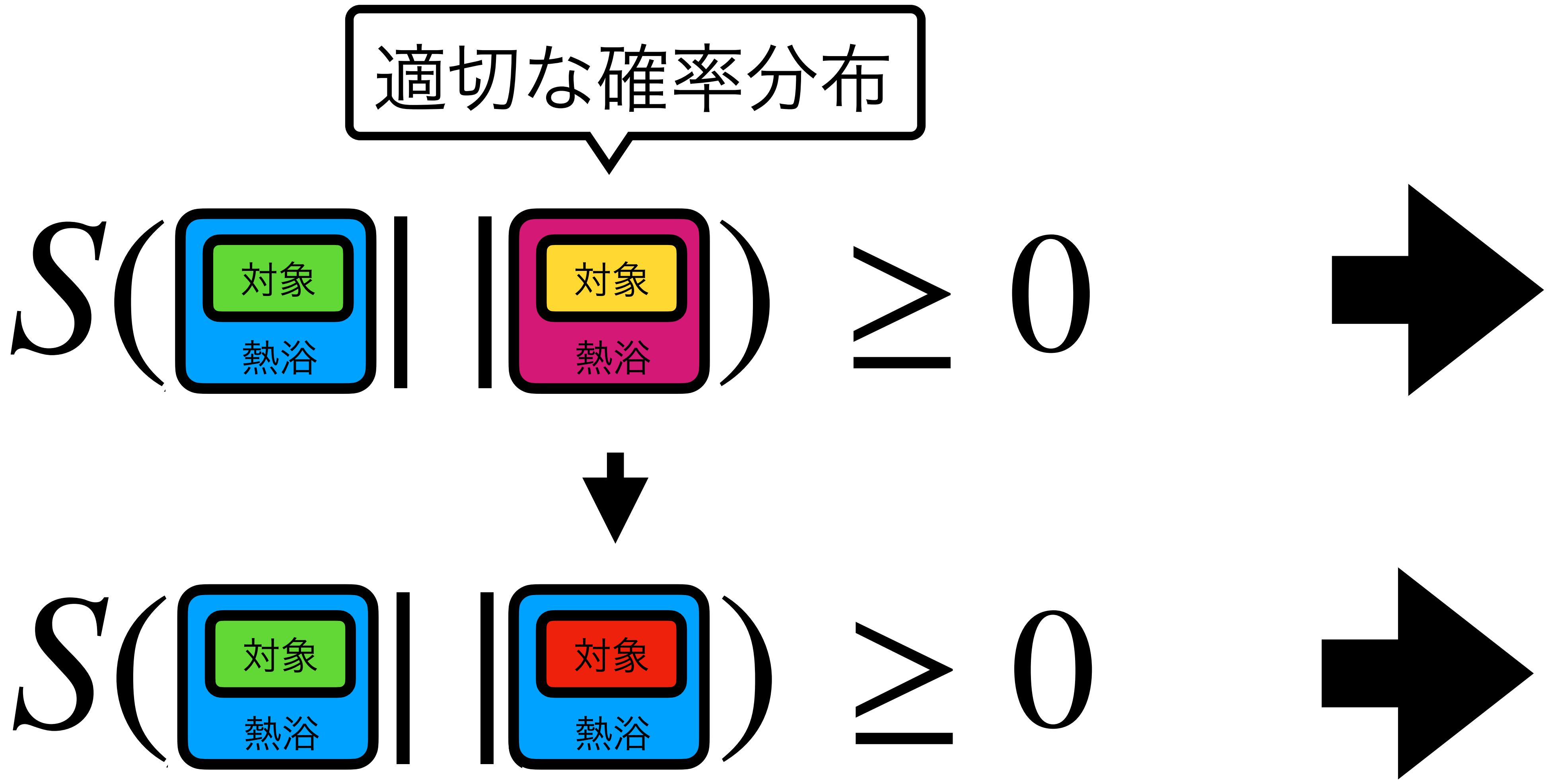
$$I_g = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \right), \quad D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$$

$$g\left(dW_g/dg\right)_{g=0} =$$ 

$= 0$

Summary

- 相対エントロピーは二つの確率分布の定量的な違いを特徴付ける量
- 適切な確率分布を考えることで、相対エントロピーの非負性から有効作用の相互作用によるシフトの上限が得られた



熱力学第二法則

$$g(dW_g/dg)_{g=0} \geq W_g - W_0$$

※ WGCとも関係している

- 重い自由度を積分することで生成された有効場の理論は相対エントロピーから生じる制約を満たし、$g(dW_g/dg)_{g=0} = 0$に対してSMEFTなどのEFTでpositivity boundが得られることがわかった