Unstable Nambu-Goldstone modes

横倉 諒 (KEK)

2022. 9. 1

素粒子物理学の進展 2022

山本直希氏 (慶應大) との共同研究に基づく

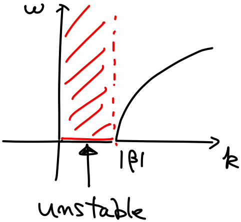
Ref: arXiv:2203.02727

メッセージ

その 1: 高次対称性はダイナミクスにも直接応用できる

その 2: あるクラスの不安定性を対称性で統一的に理解できる

概要



- ローレンツ対称性を破る外場中で不安定となる南部・ゴールドストン (NG) モード「不安定 NG モード」の数を、高次対称性のものまで含めて対称性で数える規則を与えた。
- カイラルプラズマ不安定性は、1 次対称性の NG モードの不安定性によるものだと理解できた。
- 従来の (0 次) 対称性の NG モードが不安定になる例を新しく提示した。

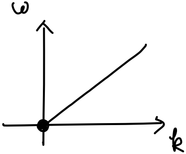
もくじ

1 導入

2 例: カイラルプラズマ不安定性の不安定 NG モード

3 新しい例: 0 次対称性の不安定 NG モード

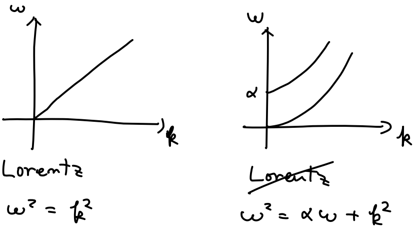
ギャップレスモード $=$ エネルギー (質量) ギャップが無いモード



- 分散関係が、波数 $\boldsymbol{k} \to \mathbf{0}$ で振動数 $\omega = 0$.
- 無限小のエネルギーでの長波長励起 $\to$ 低エネルギーのマクロな物理を支配
- 系の相構造を特徴づける (ギャップレス相)
- 自然界に遍在: 真空中の光子、固体中のフォノン、連続的対称性の自発的破れ (SSB) に伴う NG ボソン

ギャップレスモードの分散関係の分類では、ローレンツ対称性の存在・非存在は重要

ギャップレスモードとローレンツ対称性



ローレンツ対称性がある時

- 分散関係は線形分散 $\omega^2 = k^2$ (このトークでは 3 次以上の項を無視)

ローレンツ対称性がないとき (外場などの挿入であらわに破れたとき)

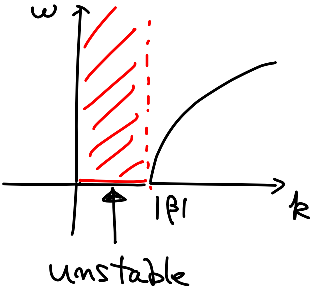
- ω の 1 次の補正がありうる $\omega^2 = \alpha\omega + k^2$

  2 次分散 $\omega = \frac{1}{\alpha}k^2$ とギャップモード $\omega = \alpha + \frac{1}{\alpha}k^2$

- k の 1 次の補正もありうる $\omega^2 = \beta k + k^2$

  不安定モードが現れる

不安定モード

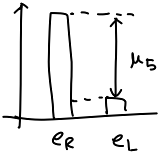


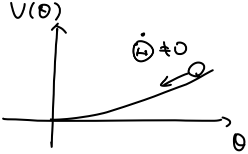
- 分散関係は $\omega = \pm\sqrt{\beta k + k^2}$.
- $\beta < 0$ のとき、赤外領域 $|k| < |\beta|$ で不安定性 $\omega = i\sqrt{|\beta k| - k^2}$ が現れる
  (平面波展開 $e^{-i\omega t + ikx}$ より、$e^{\sqrt{\beta k - k^2}\,t}$ が現れる) (減衰モードも現れる)

このような不安定性は realistic な系でもあり得る

例: カイラルプラズマ不安定性

[Carroll et al. '89; Joyce & Shaposhnikov '97; Akamatsu & Yamamoto '13] cf. 条さんのポスター





$$S = -\frac{1}{4}\int d^4x f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} + \frac{1}{4}\int d^4x \Theta \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} f_{\mu\nu} f_{\rho\sigma}$$

- $f_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu$ は、電磁場 a_μ の場の強さ
- $\Theta = \mu_5 t$, $\mu_5 > 0$ は定数 (簡単のため)。
- $\Theta\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} f_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} \sim \mu_5 \epsilon^{0ijk} a_i \partial_j a_k$ なので、分散関係に波数の 1 次項がある

中性子星や宇宙論の文脈で議論されている

- カイラル化学ポテンシャル μ_5 or 時間変化するアクシオン場 Θ

不安定モードの存在を見てみる

光子に不安定モードが現れる

運動方程式を運動量空間で考える。

- 例えば、x^1 方向へのモード $\boldsymbol{k} = (k, 0, 0)$ について、($a_0 = 0$ ゲージで)

$$(\omega^2 - k^2)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = i\,k \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_5 \\ 0 & -\mu_5 & 0 \end{pmatrix}}_{\mu_5 \epsilon^{0ijl} k_l} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

- 行列 $i\mu_5\epsilon^{01ij}$ の非ゼロ固有値 $\pm\mu_5$ によって、分散関係は $\omega^2 = \pm|\mu_5 k| + k^2$.

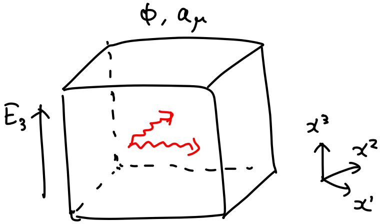
  赤外領域 $|k| < \mu_5$ で不安定モード $\omega = i\sqrt{\mu_5 k - k^2}$ が 1 つ現れる。

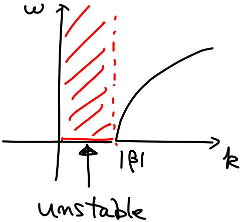
観察できること

$$\text{不安定モードの数} = \frac{1}{2}\,\mathrm{rank}(\mu_5\epsilon^{01ij})$$

ランクのもう半分は減衰モード $e^{-\sqrt{\mu_5 k - k^2}\,t}$ を表す

ギャップレスモードの外場中での不安定性





他にも、

- 外部電場中の massless アクシオン + 光子も不安定性を示す [Ooguri & Oshikawa '11]
- $(4+1)$ 次元の Maxwell-Chern-Simons 理論に外部電場をかけた時にも、

  同様の不安定性が出る [Oguri, Nakamura & Park '09]

問い: これらの不安定モードを統一的に理解することはできるか？

参考: 2 次分散も含む非相対論的 NG モードの分類

[Watanabe & Murayama '12; Hidaka '12]

ギャップレスモードが NG モードの時 $\omega^2 = \alpha\omega + k^2$ の補正によって

$$(\text{ギャップを持つ NG モードの個数}) = \frac{1}{2}\,\mathrm{rank}\langle[Q_a, Q_b]\rangle$$

Q_a 破れた対称性の生成子

ラフな証明

1. ω の 1 次項 = 有効理論の時間 1 階微分 $\mathcal{L} = \rho_{ab}\pi^a\partial_0\pi^b + \cdots,$

   π^a: NG モード, ρ_{ab} は部分積分で消えない反対称行列。
2. ギャップを持つモードの数 = (独立な) 時間 1 階微分項の数 $= \frac{1}{2}\,\mathrm{rank}(\rho_{ab})$
3. 一方で、$Q_a = \int d^3\boldsymbol{x}\rho_{ab}\pi^b + \cdots$ より、$\rho_{ab} \propto [Q_a, Q_b]$.
4. よって $\mathrm{rank}(\rho_{ab}) = \mathrm{rank}\langle[Q_a, Q_b]\rangle$

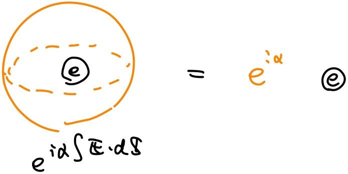
この考え方を応用して、不安定モードの存在や数え上げができないか？

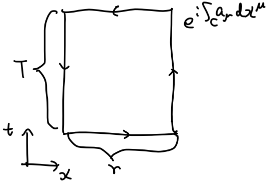
しかし、そもそも光子を NG モードとみなせるのか？ 対応する破れた対称性は？

アクシオンは NG モードとみなせるが...

光子は大域的 $U(1)$ 1 次対称性の NG モードとみなせる

[Gaiotto et al. '14; Lake '18]

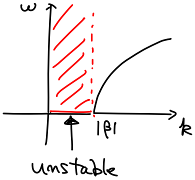




- 高次 (p 次) 対称性 $=$ p 次元に広がった物体への作用の元での対称性
- 4D 真空中の光子は $U(1)$ 1 次対称性の NG モード
  - 保存量: 電気力線 $Q(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{S}} \tilde{f}_{\mu\nu} dS^{\mu\nu} = \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S}$, 保存則: $\partial_\mu f^{\mu\nu} = 0$
  - 荷電物体 $=$ 電気力線のソース: 点電荷の世界線 $e^{i\int_{\mathcal{C}} a_\mu dx^\mu}$
  - 変換則: ガウスの法則で $U(1)$ 位相変換
  - SSB: 荷電物体の VEV が有限 $\langle e^{i\int_{\mathcal{C}} a_\mu dx^\mu} \rangle \sim \exp(-TV(r)) \to 1. \quad (r \to \infty)$
  - NG モードは保存カレント $f_{\mu\nu}$ より光子

前述の不安定性は、外場 Θ 中の NG モードの不安定性だと理解できる

今回話すこと、論文でやったこと



今回の話

- カイラルプラズマ不安定性を 1 次対称性の不安定 NG モードと理解し、

  対称性の言葉で不安定モードの数を数える

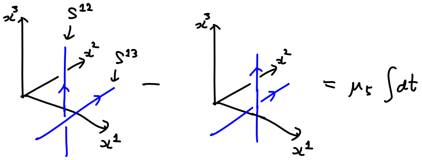
- 通常の (0 次) 対称性に対する不安定 NG モードの例を構成する

論文 [Yamamoto & RY, 2203.02727] でやったこと

- 一般の $U(1)$ p 次対称性の不安定 NG モードの数も対称性で決まる
- 外部電場中の無質量アクシオンの不安定性にも適用できる

例: カイラルプラズマ不安定性の不安定 NG モード

カイラルプラズマ不安定性の不安定 NG モードを数える



主張

$$(x^l \text{ 方向の不安定 NG モードの数}) = \frac{1}{2}\mathrm{rank}\langle [Q(S^{li}), Q(S^{lj})]_{x^l}\rangle$$

- S^{li}: x^l, x^i 方向に垂直な世界面。時間方向にも広がっている
- $[A, B]_{x^l}$: A と B の x^l 方向に関する交換関係

- アイディア: $\omega^2 = \alpha\omega + k^2$ の場合の導出で、時間 (ω) と空間 (k) を入れ替える。
  生成子の置き方: 空間方向 → 時間方向, 同時刻交換関係 → 空間方向の交換関係
- 導出: 場の理論の手法を使う (概略のみ説明。簡単のため $x^l = x^1$ 方向を考える。)

$-\frac{1}{4}\int d^4x f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} + \frac{1}{4}\int d^4x \Theta \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} f_{\mu\nu} f_{\rho\sigma}$, $\Theta = \mu_5 t$

対称性の生成子から $\epsilon_{01ij}\mu_5$ を抜き取る

方針

シュウィンガー・ダイソン方程式 $\langle \frac{\delta \mathcal{O}}{\delta a} \rangle \sim \langle \frac{\delta S}{\delta a} \mathcal{O} \rangle$ を使う

- 運動方程式 $\frac{\delta S}{\delta a_\nu} = \partial_\mu (f^{\mu\nu} - \Theta \tilde{f}^{\mu\nu}) = 0$ より、

  1 次対称性の保存カレントは $j^{\mu\nu} = f^{\mu\nu} - \Theta \tilde{f}^{\mu\nu}$
- $\epsilon^{01ij}\mu_5$ は保存カレントの空間成分 $j^{1i} \sim \epsilon^{01ij}\Theta \partial_0 a_j \sim \epsilon^{01ij}\mu_5 a_j$ にある。
- シュウィンガー・ダイソン方程式より、

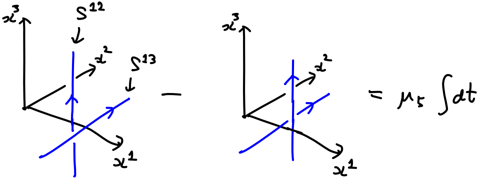
$$\epsilon^{01ij}\mu_5 \delta^4(x) \sim \left\langle \frac{\delta j^{1i}}{\delta a_j} \right\rangle \sim \left\langle \frac{\delta S}{\delta a_j} j^{1i} \right\rangle$$

- 運動方程式は保存則 (通常の NG モードと同じ) なので、

$$\epsilon^{01ij}\mu_5 \delta^4(x) \sim \langle \partial_\mu j^{\mu j} j^{1i} \rangle$$

これでほとんど OK。あとは両辺を積分する。

破れた対称性の生成子で不安定 NG モードを数える



対称性の生成子と $\epsilon^{01ij}\mu_5$ の関係

$$\epsilon^{01ij}\mu_5 \int dt = i\langle [Q(S^{1i}), Q(S^{1j})]_{x^1}\rangle$$

$\epsilon^{01ij}\mu_5\delta^4(x) \sim \langle \partial_\mu j^{\mu j} j^{1i}(x)\rangle$ を積分する。

- 積分面はカレントの方向と垂直にとる: $Q(S^{1i}) = \int j^{1i} dS$

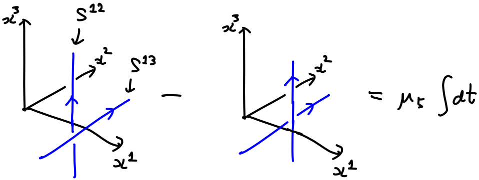
  S^{1i}: x^1, x^i 方向に垂直な世界面。時間方向に広がっている

  (通常の保存量と同じ。カレントの方向と積分面は垂直 $Q = \int d^3\boldsymbol{x} j^0$)

- $\partial_\mu j^{\mu j}$ の積分 $\to$ 交換関係 $[A, B]_{x^1}$ (A, B は演算子)

  (通常の Ward・高橋恒等式と同じ。微分形 $\langle \partial_\mu j^\mu \mathcal{O}\rangle \sim \langle \delta\mathcal{O}\rangle$ の積分が $\langle [Q, \mathcal{O}]\rangle \sim \langle \delta\mathcal{O}\rangle$)

破れた対称性の生成子で不安定 NG モードを数える



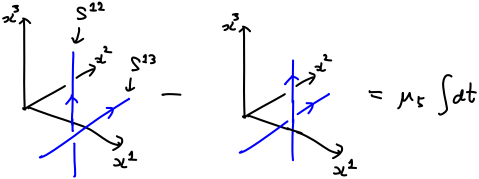
これより、

不安定 NG モードの数と対称性の生成子の関係

$$
\begin{aligned}
(x^1 \text{ 方向の不安定 NG モードの数}) &= \frac{1}{2}\,\mathrm{rank}(\epsilon^{01ij}\mu_5) \\
&= \frac{1}{2}\,\mathrm{rank}(\langle [Q(S^{1i}), Q(S^{1j})]_{x^1} \rangle)
\end{aligned}
$$

不安定 NG モードの数が対称性の言葉で数えられた。

ここまでのまとめ



不安定性 $=$ 波数の 1 次項

- 外場 Θ の時間微分 $\partial_0 \Theta$ が非ゼロの定数の時に現れる

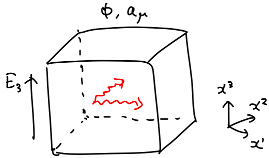
不安定 NG モードの数え方

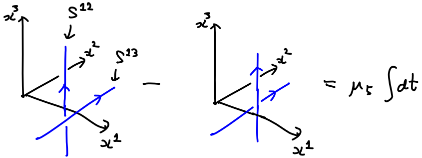
- 対称性の生成子を、時間方向に広がり波数ベクトル方向に垂直な世界面にとる
- 生成子を波数ベクトル方向に並べ、その順番についての交換関係をとる

利点

- 不安定 NG モードの数は対称性で普遍的に決まり、系 (模型) の詳細によらない。

拡張





この議論は、

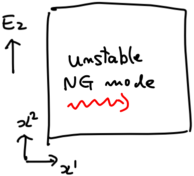
- 外部電場中の無質量アクシオン ＋ 光子の不安定性
- 一般の p 次対称性の NG モードにおける外場中の不安定モード

に直接拡張できる (詳しくは論文参照)。

問い: 通常の (0 次) 対称性だけでも不安定 NG モードがあるか？

新しい例: 0 次対称性の不安定 NG モード

$(2+1)$ 次元における $U(1)\times U(1)\to 1$ の NG モード



$$S = -\frac{v^2}{2}\int d^3x\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{v^2}{2}\int d^3x\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi + \int d^3x\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu(\partial_\nu\phi)(\partial_\rho\chi)$$

- (ϕ,χ): $U(1)\times U(1)\to 1$ の NG モード
- $A_\mu = (0,0,tE_2)$: x^2 方向への外部電場を表す

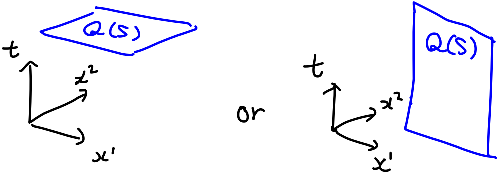
運動方程式:

$$(\omega^2 - |\boldsymbol{k}|^2)\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix} = \frac{1}{v^2}i\,\underbrace{k_1\begin{pmatrix}0 & E_2\\ -E_2 & 0\end{pmatrix}}_{\epsilon^{0ij}k_iE_j}\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix}$$

不安定 NG モード 1 個が x^1 方向に伝播している。

この不安定モードを破れた対称性の生成子で数える

破れた対称性の生成子



- 運動方程式 $\partial^\mu(v^2\partial_\mu\phi - \epsilon_{\mu\alpha\beta}A_\alpha\partial_\beta\chi) = 0$ などから、

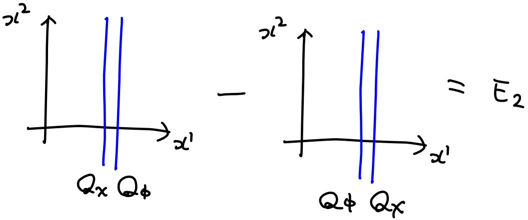
  保存電荷は 2 次元面 S_ϕ, S_χ を用いて、

$$Q_\phi(S_\phi) = \int_{S_\phi}(v^2\partial_\mu\phi - \epsilon_{\mu\alpha\beta}A_\alpha\partial_\beta\chi)dS^\mu,$$

$$Q_\chi(S_\chi) = \int_{S_\chi}(v^2\partial_\mu\chi + \epsilon_{\mu\alpha\beta}A_\alpha\partial_\beta\phi)dS^\mu.$$

$dS^\mu = \epsilon_{\mu\nu\rho}dx^\nu dx^\rho$ は面要素

破れた対称性の生成子で不安定 NG モードを数える

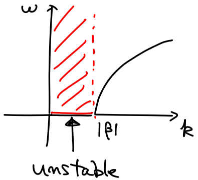


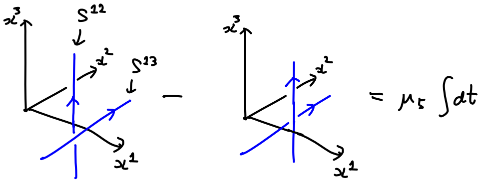
- x^1 方向への不安定 NG モードは、x^1 方向に関する交換関係で数えられる:

$$M := \begin{pmatrix} \langle [Q_\phi(S^1), Q_\phi(S^1)]_{x^1} \rangle & \langle [Q_\phi(S^1), Q_\chi(S^1)]_{x^1} \rangle \\ \langle [Q_\chi(S^1), Q_\phi(S^1)]_{x^1} \rangle & \langle [Q_\chi(S^1), Q_\chi(S^1)]_{x^1} \rangle \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 0 & E_2 \\ -E_2 & 0 \end{pmatrix}$$

- 不安定 NG モードの数 $= \frac{1}{2}\,\mathrm{rank}(M) = 1$

まとめ





- ローレンツ対称性を破る外場中で不安定となる NG モードの数を、

  高次対称性の NG モードまで含めて対称性の言葉で数える規則を与えた。
- カイラルプラズマ不安定性は 1 次対称性の不安定 NG モードによるものだと理解できた
- 従来の (0 次) 対称性の不安定 NG モードの例を新しく提示した。

これからの課題

- 不安定モードの解消機構の一般化。

  カイラルプラズマ不安定性は μ_5 がダイナミクスで小さくなるので解消される
- 0 次対称性の不安定 NG モードの realistic なセットアップを考える

Bibliography

Bibliography - I

[1] S. M. Carroll, G. B. Field, and R. Jackiw, "Limits on a Lorentz and Parity Violating Modification of Electrodynamics," Phys. Rev. D **41** (1990) 1231.
(page 8).

[2] M. Joyce and M. E. Shaposhnikov, "Primordial magnetic fields, right-handed electrons, and the Abelian anomaly," Phys. Rev. Lett. **79** (1997) 1193–1196, [arXiv:astro-ph/9703005].
(page 8).

[3] M. M. Anber and L. Sorbo, "N-flationary magnetic fields," JCAP **0610** (2006) 018, [arXiv:astro-ph/0606534 [astro-ph]].
(page 8).

[4] Y. Akamatsu and N. Yamamoto, "Chiral Plasma Instabilities," Phys. Rev. Lett. **111** (2013) 052002, [arXiv:1302.2125 [nucl-th]].
(page 8).

[5] H. Ooguri and M. Oshikawa, "Instability in magnetic materials with dynamical axion field," Phys. Rev. Lett. **108** (2012) 161803, [arXiv:1112.1414 [cond-mat.mes-hall]].
(page 10).

[6] S. Nakamura, H. Ooguri, and C.-S. Park, "Gravity Dual of Spatially Modulated Phase," Phys. Rev. **D81** (2010) 044018, [arXiv:0911.0679 [hep-th]].
(page 10).

[7] H. Watanabe and H. Murayama, "Unified Description of Nambu-Goldstone Bosons without Lorentz Invariance," Phys. Rev. Lett. **108** (2012) 251602, [arXiv:1203.0609 [hep-th]].
(page 11).

[8] Y. Hidaka, "Counting rule for Nambu-Goldstone modes in nonrelativistic systems," Phys. Rev. Lett. **110** (2013) no. 9, 091601, [arXiv:1203.1494 [hep-th]].
(page 11).

Bibliography - II

[9] D. Gaiotto, A. Kapustin, N. Seiberg, and B. Willett, "Generalized Global Symmetries," JHEP **02** (2015) 172, [arXiv:1412.5148 [hep-th]].
(page 12).

[10] E. Lake, "Higher-form symmetries and spontaneous symmetry breaking," arXiv:1802.07747 [hep-th].
(page 12).